Pogojne porazdelitve

Naj bo B nek mogoč dogodek, tj. $P(B) > 0$. Potem lahko vpeljemo **pogojno porazdelitveno funkcijo**

$$F(x \,|\, B) = P(X < x \,|\, B) = \frac{P(X < x, B)}{P(B)}$$

V diskretnem primeru je: $p_{ik} = P(X = x_i, Y = y_k)$, $B = (Y = y_k)$ in $P(B) = P(Y = y_k) = q_k$. Tedaj je pogojna porazdelitvena funkcija

$$\begin{aligned} F_X(x \,|\, y_k) &= F_X(x \,|\, Y = y_k) = P(X < x \,|\, Y = y_k) = \\ &= \frac{P(X < x, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \frac{1}{q_k} \sum_{x_i < x} p_{ik} \end{aligned}$$

Vpeljimo **pogojno verjetnostno funkcijo** s $p_{i|k} = \frac{p_{ik}}{q_k}$.

Tedaj je $F_X(x \,|\, y_k) = \sum_{x_i < x} p_{i|k}$.

Zvezne pogojne porazdelitve

Postavimo $B = (y \leq Y < y + h)$ za $h > 0$ in zahtevajmo $P(B) > 0$.

$$\begin{aligned} F_X(x \,|\, B) &= P(X < x \,|\, B) = \frac{P(X < x,\; y \leq Y < y + h)}{P(y \leq Y < y + h)} = \\ &= \frac{F(x, y + h) - F(x, y)}{F_Y(y + h) - F_Y(y)}. \end{aligned}$$

Če obstaja limita (za $h \to 0$)

$$F_X(x|y) = F_X(x \,|\, Y = y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x, y + h) - F(x, y)}{F_Y(y + h) - F_Y(y)},$$

jo imenujemo **pogojna porazdelitvena funkcija** slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y = y)$.

Gostota zvezne pogojne porazdelitve

Naj bosta gostoti $p(x, y)$ in $p_Y(y)$ zvezni ter $p_Y(y) > 0$. Tedaj je

$$F_X(x|y) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{F(x,y+h)-F(x,y)}{h}}{\frac{F_Y(y+h)-F_Y(y)}{h}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{F'_Y(y)} = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} p(u, y)du$$

oziroma, če vpeljemo **pogojno gostoto**

$$p_X(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)},$$

tudi $F_X(x|y) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u|y)\, du$.

V primeru dvorazsežne normalne porazdelitve dobimo

$$p_X(x|y) : N(\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x\sqrt{1 - \rho^2}).$$

I.8. Momenti in kovarianca

Matematično upanje

Matematično upanje $\mathsf{E}X$ (pričakovana vrednost) je posplošitev

povprečne vrednosti diskretne spremenljivke $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots p_n \end{pmatrix}$,

tj.

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i k_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i,$$

od koder izhaja

$$\mathsf{E}X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Diskretna slučajna spremenljivka X z verjetnostno funkcijo p_k ima matematično upanje $\mathsf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, če je

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Zvezna slučajna spremenljivka X z gostoto $p(x)$ ima matematično upanje $\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\, dx$, če je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x)\, dx < \infty.$$

Primeri slučajnih spremenljivk, za katere matematično upanje ne obstaja:

Diskretna: $x_k = (-1)^{k+1} 2^k / k$ in $p_k = 2^{-k}$.

Zvezna: $X : p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ – Cauchyeva porazdelitev.

Lastnosti matematičnega upanja

Naj bo a realna konstanta. Če je $P(X = a) = 1$, $\mathsf{E}X = a$.

Slučajna spremenljivka X ima matematično upanje natanko takrat, ko ga ima slučajna spremenljivka $|X|$. Velja $|\mathsf{E}X| \leq \mathsf{E}|X|$.
Za diskretno slučajno spremenljivko je $\mathsf{E}|X| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|p_i$,
za zvezno pa $\mathsf{E}|X| = \int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)\,dx$.

Velja splošno: matematično upanje funkcije $f(X)$ obstaja in je enako za diskretno slučajno spremenljivko $\mathsf{E}f(X) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)p_i$, za zvezno pa $\mathsf{E}f(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)\,dx$, če ustrezni izraz absolutno konvergira.

Naj bo a realna konstanta. Če ima slučajna spremenljivka X matematično upanje, potem ga ima tudi spremenljivka aX in velja $\mathsf{E}(aX) = a\mathsf{E}X$.

Če imata slučajni spremenljivki X in Y matematično upanje, ga ima tudi njuna vsota $X + Y$ in velja $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}X + \mathsf{E}Y$.

…Lastnosti matematičnega upanja

Za primer dokažimo zadnjo lastnost za zvezne slučajne spremenljivke.

Naj bo p gostota slučajnega vektorja (X, Y) in $Z = X + Y$.
Kot vemo, je $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x)\, dx$.

Pokažimo najprej, da Z ima matematično upanje.

$$\mathsf{E}|X+Y| = \mathsf{E}|Z| = \int_{-\infty}^{\infty} |z| p_Z(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \Big(\int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x)\, dx \Big) dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |x+y| p(x,y)\, dx \Big) dy$$
$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x,y)\, dx \Big) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |y| p(x,y)\, dx \Big) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} |y| p_Y(y) dy = \mathsf{E}|X| + \mathsf{E}|Y| < \infty$$

Sedaj pa še zvezo

$$\mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}Z = \int_{-\infty}^{\infty} z p_Z(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \Big(\int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x)\, dx \Big) dz$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) p(x,y) dx dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} x p(x,y)\, dx \Big) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} y p(x,y)\, dx \Big) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y)\, dy = \mathsf{E}X + \mathsf{E}Y$$

. . . Lastnosti matematičnega upanja

Torej je matematično upanje E **linearen funkcional**, tj.

$$\mathsf{E}(aX + bY) = a\mathsf{E}X + b\mathsf{E}Y.$$

Z indukcijo posplošimo to na poljubno končno število členov

$$\mathsf{E}(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n)$$

$$= a_1\mathsf{E}X_1 + a_2\mathsf{E}X_2 + \cdots + a_n\mathsf{E}X_n$$

...Lastnosti matematičnega upanja

Če obstajata matematični upanji $\mathsf{E}X^2$ in $\mathsf{E}Y^2$, obstaja tudi matematično upanje produkta $\mathsf{E}XY$ in velja ocena $\mathsf{E}|XY| \leq \sqrt{\mathsf{E}X^2\mathsf{E}Y^2}$.

Enakost velja natanko takrat, ko velja $Y = \pm\sqrt{\mathsf{E}Y^2/\mathsf{E}X^2}X$ z verjetnostjo 1.

Če sta slučajni spremenljivki, ki imata matematično upanje, neodvisni, obstaja tudi matematično upanje njunega produkta in velja
$\mathsf{E}XY = \mathsf{E}X \cdot \mathsf{E}Y$.

Opomba: obstajajo tudi odvisne spremenljivke, za katere velja gornja zveza. Spremenljivki, za kateri velja $\mathsf{E}XY \neq \mathsf{E}X \cdot \mathsf{E}Y$ imenujemo **korelirani**.

Disperzija

Disperzija ali **varianca** $\mathsf{D}X$ slučajne spremenljivke, ki ima matematično upanje, je določena z izrazom

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2$$

Disperzija je vedno nenegativna, $\mathsf{D}X \geq 0$, je pa lahko tudi neskončna.

Velja zveza

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$$

Naj bo a realna konstanta. Če je $P(X = a) = 1$, je $\mathsf{D}X = 0$.

$\mathsf{D}aX = a^2\mathsf{D}X$

Če obstaja $\mathsf{D}X$ in je a realna konstanta, obstaja tudi $\mathsf{E}(X - a)^2$ in velja $\mathsf{E}(X - a)^2 \geq \mathsf{D}X$. Enakost velja natanko za $a = \mathsf{E}X$.

Količino $\sigma X = \sqrt{\mathsf{D}X}$ imenujemo **standardna deviacija** ali **standardni odklon**.

Standardizirane spremenljivke

Slučajno spremenljivko X **standardiziramo** s transformacijo

$$X_S = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

kjer sta $\mu = \mathsf{E}X$ in $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}X}$.

Za X_S velja $\mathsf{E}X_S = 0$ in $\mathsf{D}X_S = 1$.

$$\mathsf{E}X_S = \mathsf{E}\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\mathsf{E}(X-\mu)}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0.$$

$$\mathsf{D}X_S = \mathsf{D}\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\mathsf{D}(X-\mu)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2-0}{\sigma^2} = 1.$$

Matematična upanje in disperzije porazdelitev

porazdelitev	$\mathsf{E}X$	$\mathsf{D}X$
binomska $B(n,p)$	np	npq
Poissonova $P(\lambda)$	λ	λ
Pascalova $P(m,p)$	m/p	mq/p^2
geometrijska $G(p)$	$1/p$	q/p^2
enakomerna zv. $E(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
normalna $N(\mu,\sigma)$	μ	σ^2
gama $\Gamma(b,c)$	b/c	b/c^2
hi-kvadrat $\chi^2(n)$	n	$2n$

Kovarianca

Kovarianca $\mathsf{Cov}(X,Y)$ slučajnih spremenljivk X in Y je določena z izrazom

$$\mathsf{Cov}(X,Y) = \mathsf{E}\big((X-\mathsf{E}X)(Y-\mathsf{E}Y)\big) = \mathsf{E}XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y$$

Velja: $\mathsf{Cov}(X,Y) = \mathsf{Cov}(Y,X)$ (simetričnost) in

$\mathsf{Cov}(aX+bY,Z) = a\,\mathsf{Cov}(X,Z) + b\,\mathsf{Cov}(Y,Z)$ (bilinearnost).

Če obstajata $\mathsf{D}X$ in $\mathsf{D}Y$, obstaja tudi $\mathsf{Cov}(X,Y)$ in velja

$$|\mathsf{Cov}(X,Y)| \le \sqrt{\mathsf{D}X\mathsf{D}Y} = \sigma X \sigma Y.$$

Enakost velja natanko takrat, ko je

$$Y - \mathsf{E}Y = \pm\frac{\sigma Y}{\sigma X}(X - \mathsf{E}X)$$

z verjetnostjo 1.

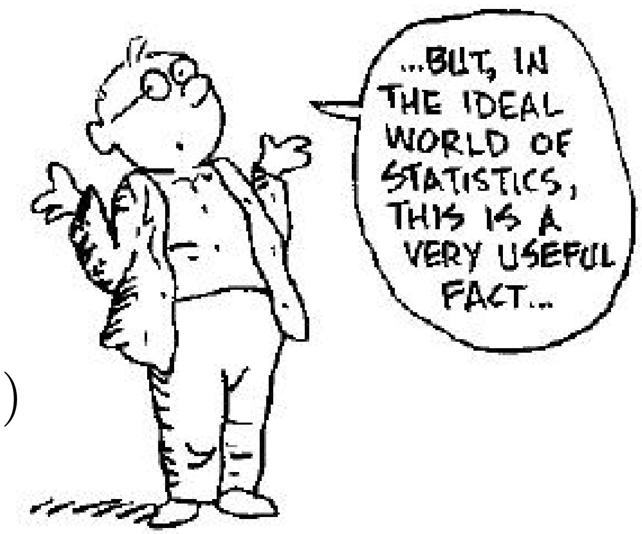
Spremenljivki X in Y sta nekorelirani natanko takrat, ko je $\mathsf{Cov}(X,Y) = 0$.

Če imata spremenljivki X in Y končni disperziji, jo ima tudi njuna vsota $X+Y$ in velja

$$\mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y + 2\mathsf{Cov}(X,Y).$$

Če pa sta spremenljivki nekorelirani, je enostavno

$$\mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y.$$



Zvezo lahko posplošimo na

$$\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}X_i + \sum_{i\neq j} \mathsf{Cov}(X_i, X_j)$$

in za paroma nekorelirane spremenljivke

$$\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}X.$$

Korelacijski koeficient

Korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk X in Y je določen z izrazom

$$r(X,Y) = \frac{\mathsf{Cov}(X,Y)}{\sigma X \sigma Y} = \frac{\mathsf{E}((X - \mathsf{E}X)(Y - \mathsf{E}Y))}{\sigma X \sigma Y}.$$

Za $(X,Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ je $r(X,Y) = \rho$.
Torej sta normalno porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y neodvisni natanko takrat, ko sta nekorelirani.

Velja še: $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$

$r(X,Y) = 0$ natanko takrat, ko sta X in Y nekorelirani.

$r(X,Y) = 1$ natanko takrat, ko je $Y = \frac{\sigma Y}{\sigma X}(X - \mathsf{E}X) + \mathsf{E}Y$ z verjetnostjo 1;

$r(X,Y) = -1$ natanko takrat, ko je $Y = -\frac{\sigma Y}{\sigma X}(X - \mathsf{E}X) + \mathsf{E}Y$ z verjetnostjo 1. Torej, če je $|r(X,Y)| = 1$, obstaja med X in Y linearna zveza z verjetnostjo 1.

Pogojno matematično upanje

Pogojno matematično upanje je matematično upanje pogojne porazdelitve:

Diskretna slučajna spremenljivka X ima pri pogoju $Y = y_k$ pogojno verjetnostno funkcijo $p_{i|k} = p_{ik}/q_k$, $i = 1, 2, \ldots$ in potemtakem pogojno matematično upanje

$$\mathsf{E}(X|y_k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{i|k} = \frac{1}{q_k} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{ik}.$$

Slučajna spremenljivka

$$\mathsf{E}(X|Y) : \begin{pmatrix} \mathsf{E}(X|y_1) & \mathsf{E}(X|y_2) & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

ima enako matematično upanje kot spremenljivka X:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(\mathsf{E}(X|Y)) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k \mathsf{E}(X|y_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \mathsf{E}X. \end{aligned}$$

Pogojno matematično upanje zvezne spremenljivke

Zvezna slučajna spremenljivka X ima pri pogoju $Y = y$ ima pogojno verjetnostno gostoto $p(x|y) = p(x,y)/p_Y(y)$, $x \in \mathbb{R}$ in potemtakem pogojno matematično upanje

$$\mathsf{E}(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x|y)\,dx = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x,y)\,dx.$$

Slučajna spremenljivka $\mathsf{E}(X|Y)$ z gostoto $p_Y(y)$ ima enako matematično upanje kot spremenljivka X

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{E}(X|y) p_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x p(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx = \mathsf{E}X.$$

Regresijska funkcija

Preslikavo $x \mapsto \mathsf{E}(Y|x)$ imenujemo **regresija** slučajne spremenljivke Y glede na slučajno spremenljivko X.

Primer: Naj bo $(X, Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$.
Tedaj je, kot vemo $p_X(x|y) : N(\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x\sqrt{1-\rho^2})$.
Torej je pogojno matematično upanje

$$\mathsf{E}(X|y) = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$$

in prirejena spremenljivka

$$\mathsf{E}(X|Y) = \mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \mu_y).$$

Na podoben način vpeljemo regresijo slučajne spremenljivke X glede na slučajno spremenljivko Y. Za dvorazsežno normalno porazdelitev dobimo
$\mathsf{E}(Y|X) = \mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x)$.

Obe regresijski funkciji sta **linearni**.

Kovariančna matrika

Matematično upanje slučajnega vektorja $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je vektor $\mathsf{E}\boldsymbol{X} = (\mathsf{E}X_1, \mathsf{E}X_2, \ldots, \mathsf{E}X_n)$.

Primer: Za $(X, Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ je $\mathsf{E}(X, Y) = (\mu_x, \mu_y)$.

Matematično upanje slučajne spremenljivke Y, ki je linearna kombinacija spremenljivk $X_1, X_2, \ldots, X_n$, je potem

$\mathsf{E}Y = \mathsf{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i \mathsf{E}X_i$

Za disperzijo spremenljivke Y pa dobimo $\mathsf{D}Y = \mathsf{E}(Y - \mathsf{E}Y)^2 =$

$$\mathsf{E}\Big(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (X_i - \mathsf{E}X_i)(X_j - \mathsf{E}X_j)\Big) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \mathsf{Cov}(X_i, X_j) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{a},$$

kjer je $\mathsf{Cov}(X_i, X_j) = \mathsf{E}((X_i - \mathsf{E}X_i)(X_j - \mathsf{E}X_j))$ kovarianca spremenljivk X_i in X_j, $\boldsymbol{K} = [\mathsf{Cov}(X_i, X_j)]$ **kovariančna matrika** vektorja X, ter $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T$.

Lastnosti kovariančne matrike

Kovariančna matrika $\boldsymbol{K} = [K_{ij}]$ je *simetrična*: $K_{ij} = K_{ji}$.

Diagonalne vrednosti so disperzije spremenljivk: $K_{ii} = \mathsf{D}X_i$.

Ker je $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \mathsf{D}Y \geq 0$, je pozitivno semidefinitna matrika.

Naj bo $\boldsymbol{a}$, $||\boldsymbol{a}|| = 1$ lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ kovariančne matrike $\boldsymbol{K}$, tj. $\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}$. Tedaj je $0 \leq \mathsf{D}Y = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \lambda$,
kar pomeni, da so vse lastne vrednosti kovariančne matrike nenegativne.

Če je kaka lastna vrednost enaka 0, je vsa verjetnost skoncentrirana na neki hiperravnini – porazdelitev je *izrojena*. To se zgodi natanko takrat, ko kovariančna matrika $\boldsymbol{K}$ ni obrnljiva, oziroma ko je $\det \boldsymbol{K} = 0$.

Primer: Za $(X, Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ je $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$.

Ker je $|\rho| < 1$, je $\det \boldsymbol{K} = \sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2) > 0$ in je potemtakem porazdelitev vedno neizrojena. Za $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{A})$ je $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

. . . Lastnosti kovariančne matrike

Poglejmo še, kako se spremeni kovariančna matrika pri linearni transformaciji vektorja $X' = \boldsymbol{A}X$, kjer je $\boldsymbol{A}$ poljubna matrika reda $n \times n$.

Vemo, da je $\mathsf{D}(\boldsymbol{a}^T X) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{a}$.

Tedaj je, če označimo kovariančno matriko vektorja X' s $\boldsymbol{K}'$,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{K}' \boldsymbol{a} &= \mathsf{D}(\boldsymbol{a}^T X') = \mathsf{D}(\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{A} X) = \mathsf{D}((\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{a})^T X) = \\ &= (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{a})^T \boldsymbol{K} (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{K} \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

in potemtakem

$$\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{A} \boldsymbol{K} \boldsymbol{A}^T.$$

Višji momenti

Višji momenti so posplošitev pojmov matematičnega upanja in disperzije.

Moment reda $k \in \mathbb{N}$ *glede na točko* $a \in \mathbb{R}$ imenujemo količino

$$m_k(a) = \mathsf{E}((X - a)^k).$$

Moment obstaja, če obstaja matematično upanje $\mathsf{E}(|X - a|^k) < \infty$.
Za $a = 0$ dobimo **začetni moment** $z_k = m_k(0)$;
za $a = \mathsf{E}X$ pa **centralni moment** $m_k = m_k(\mathsf{E}X)$.
Primera: $\mathsf{E}X = z_1$ in $\mathsf{D}X = m_2$.

Če obstaja moment $m_n(a)$, potem obstajajo tudi vsi momenti $m_k(a)$ za $k < n$.

Če obstaja moment z_n, obstaja tudi moment $m_n(a)$ za vse $a \in \mathbb{R}$.

$$m_n(a) = \mathsf{E}((X - a)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-a)^{n-k} z_k.$$

. . . Višji momenti

Posebej za centralni moment velja

$$m_n = m_n(z_1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-z_1)^k z_{n-k}$$

$m_0 = 1, m_1 = 0, m_2 = z_2 - z_1^2, m_3 = z_3 - 3z_2 z_1 + 2z_1^3, \ldots$

Asimetrija spremenljivke X imenujemo količino $A(X) = \dfrac{m_3}{\sigma^3}$.

Sploščenost spremenljivke X imenujemo količino $K(X) = \dfrac{m_4}{\sigma^4} - 3$,

kjer je $\sigma = \sqrt{m_2}$.

Za simetrično glede na $z_1 = \mathsf{E}X$ porazdeljene spremenljivke so vsi lihi centralni momenti enaki 0.

…Višji momenti

Za $X : N(\mu, \sigma)$ so $m_{2k+1} = 0$ in $m_{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k}$. Zato sta tudi $A(X) = 0$ in $K(X) = 0$.

Če sta spremenljivki X in Y neodvisni, je $m_3(X+Y) = m_3(X) + m_3(Y)$.

Za binomsko porazdeljeno spremenljivko $X : B(n,p)$ je $m_3(X) = npq(q-p)$ in dalje $A(X) = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$.

Kadar spremenljivka nima momentov, uporabljamo kvantile.

Kvantil reda $p \in (0,1)$ je vsaka vrednost $x \in \mathbb{R}$, za katero velja $P(X \leq x) \geq p$ in $P(X \geq x) \geq 1-p$ oziroma $F(x) \leq p \leq F(x+)$. Kvantil reda p označimo z x_p. Za zvezno spremenljivko je $F(x_p) = p$.

Kvantil $x_{\frac{1}{2}}$ imenujemo **mediana**; $x_{\frac{i}{4}}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ so **kvartili**.

Kot nadomestek za standardni odklon uporabljamo **kvartilni razmik** $\frac{1}{2}(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}})$.