I.6. Slučajni vektorji in neodvisnost slučajnih spremenljivk

Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljivk $X = (X_1, \dots, X_n)$. Opišemo ga s porazdelitveno funkcijo ($x_i \in \mathbb{R}$)

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n),$$

pri čemer slednja oznaka pomeni $P\big(\{X_1 < x_1\} \cap \dots \cap \{X_n < x_n\}\big)$, in za katero velja: $0 \le F(x_1, \dots, x_n) \le 1$

Funkcija F je za vsako spremenljivko naraščajoča in od leve zvezna.

$F(-\infty, \dots, -\infty) = 0$ in $F(\infty, \dots, \infty) = 1$.

Funkciji $F_i(x_i) = F(\infty, \dots, \infty, x_i, \infty, \dots, \infty)$ pravimo **robna porazdelitvena funkcija** spremenljivke X_i.

Slučajni vektorji – primer

Naj bo

$$A(x, y) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u < x \wedge v < y\}$$

(levi spodnji kvadrant glede na (x, y)).

Naj porazdelitvena funkcija opisuje verjetnost, da je slučajna točka (X, Y) v množici $A(x, y)$

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = P((X, Y) \in A(x, y)).$$

Tedaj je verjetnost, da je slučajna točka (X, Y) v pravokotniku $[a, b) \times [c, d)$ enaka

$$P((X, Y) \in [a, b) \times [c, d)) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

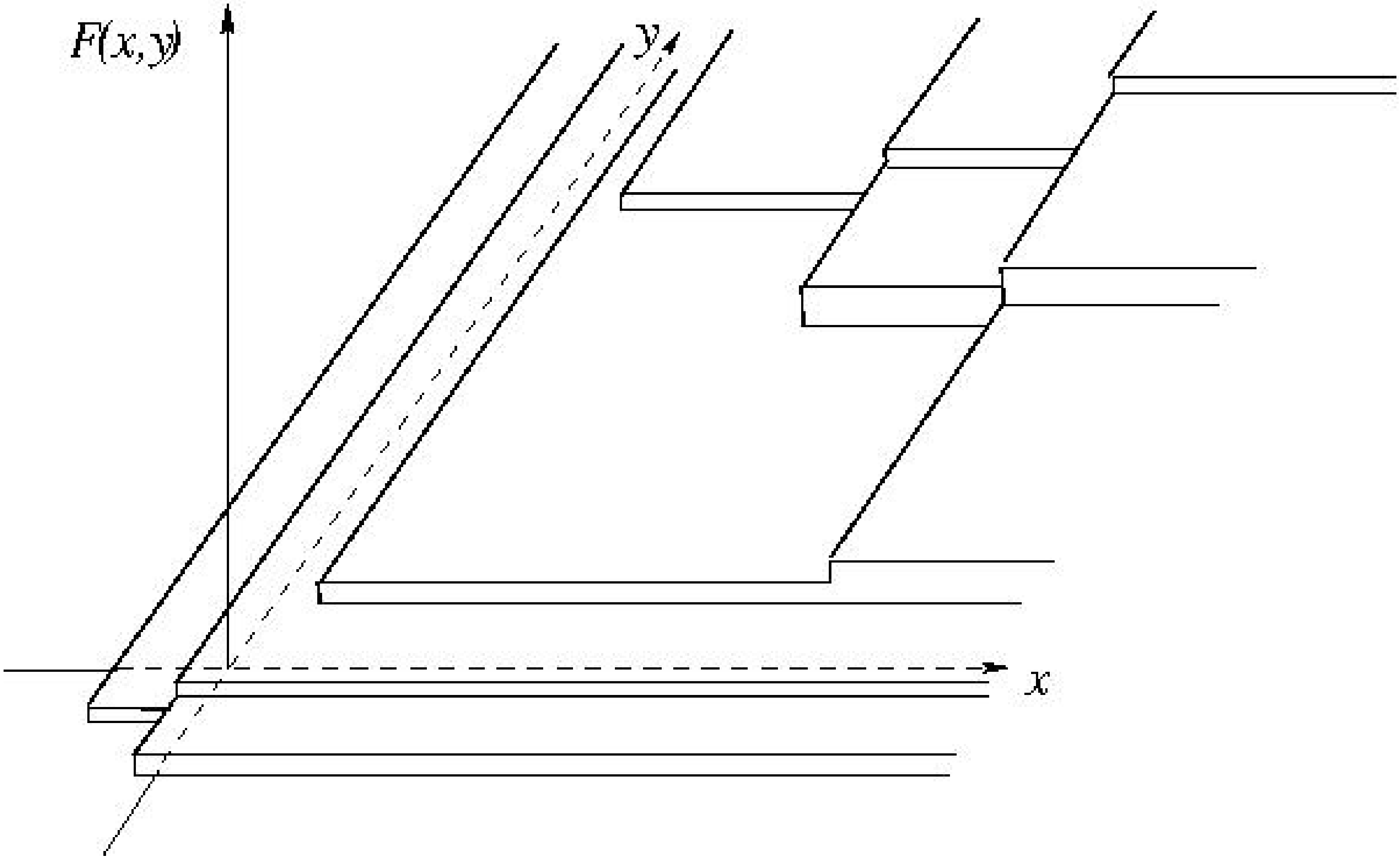
Diskretne večrazsežne porazdelitve

Zaloga vrednosti je kvečjemu števna množica. Opišemo jo z **verjetnostno funkcijo** $p_{k_1,\ldots,k_n} = P(X_1 = x_{k_1}, \ldots, X_n = x_{k_n})$.

Za $n = 2$, $X : \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $Y : \{y_1, \ldots, y_m\}$ in $P(X = x_i, Y = y_j)$, sestavimo **verjetnostno tabelo**:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_m	X
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2m}	p_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	$\ldots$	p_{km}	p_k
Y	q_1	q_2	$\ldots$	q_m	1

$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ in $q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}$



Porazdelitvena funkcija $F(x, y)$, v primeru, ko sta spremenljivki X in Y diskretni.

Diskretne večrazsežne porazdelitve – polinomska

Polinomska porazdelitev $P(n; p_1, p_2, \dots, p_r)$, $\sum p_i = 1$, $\sum k_i = n$ je določena s predpisom

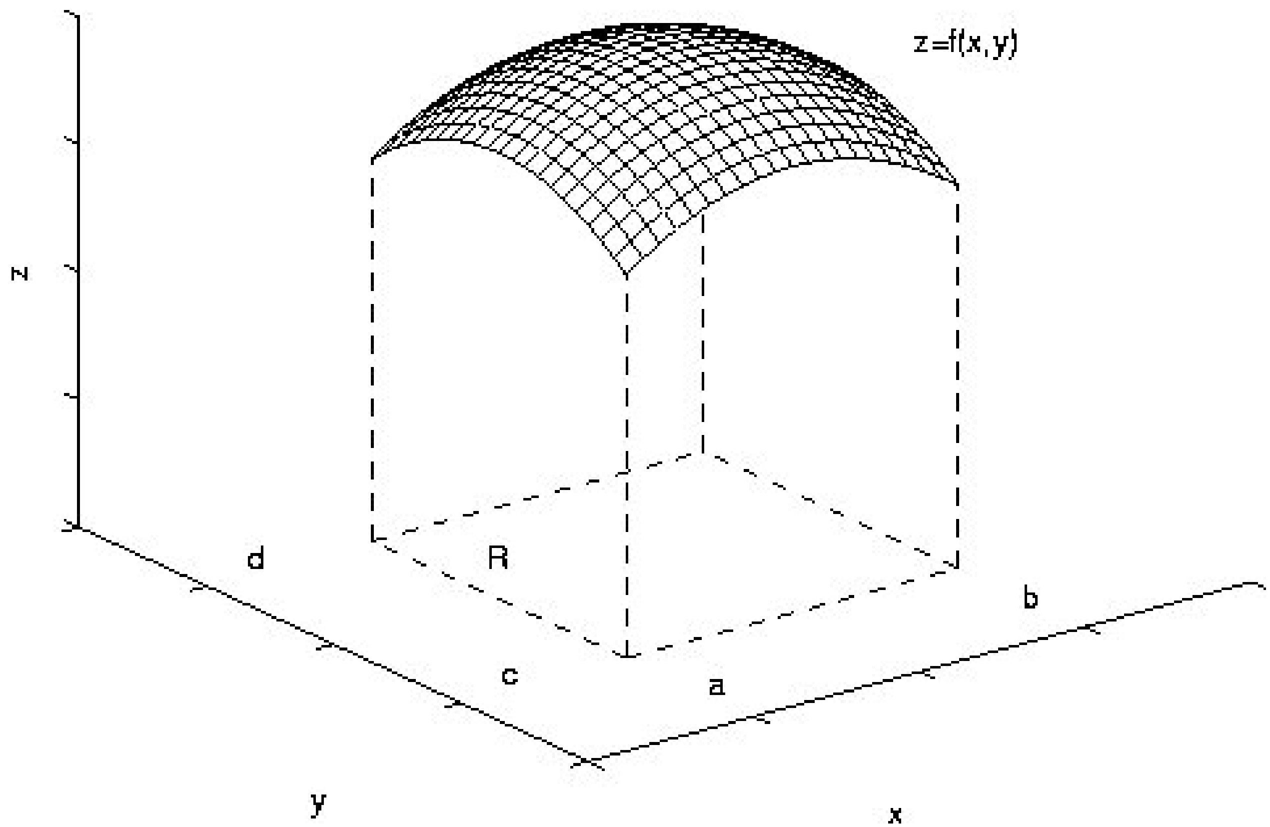
$$P(X_1 = k_1, \dots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! \cdots k_r!} p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}.$$

Keficient šteje permutacije s ponavljanjem.

`http://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_distribution`

Za $r = 2$ dobimo binomsko porazdelitev, tj. $B(n, p) = P(n; p, q)$.

Ponovitev: Dvojni integral



... Dvojni integral

predstavlja prostornino pod ploskvijo.

Naj bo funkcija $z = f(x, y) \geq 0$ zvezna na nekem območju R v ravnini $\mathbb{R}^2$ (npr. kar $[a, b] \times [c, d]$).

Ploščina telesa med ploskvijo $z = f(x, y)$, in ravnino $z = 0$ je enaka dvojnemu integralu

$$\iint_R f(x, y)\, dxdy,$$

ki ga izračunamo s pomočjo dvakratnega integrala

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Lastnosti dvojnega integrala

1) Če je $f(x,y) \leq 0 \ \ \forall (x,y) \in R$, je vrednost dvojnega integrala negativna.

2) Naj bo območje $R = R_1 \cup R_2$, kjer je $R_1 \cap R_2 = \emptyset$. Potem velja

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)\,dxdy + \iint_{R_2} f(x,y)\,dxdy.$$

3) Naj bo $f(x,y) \leq g(x,y)$, za vse točke $(x,y) \in R$, potem velja

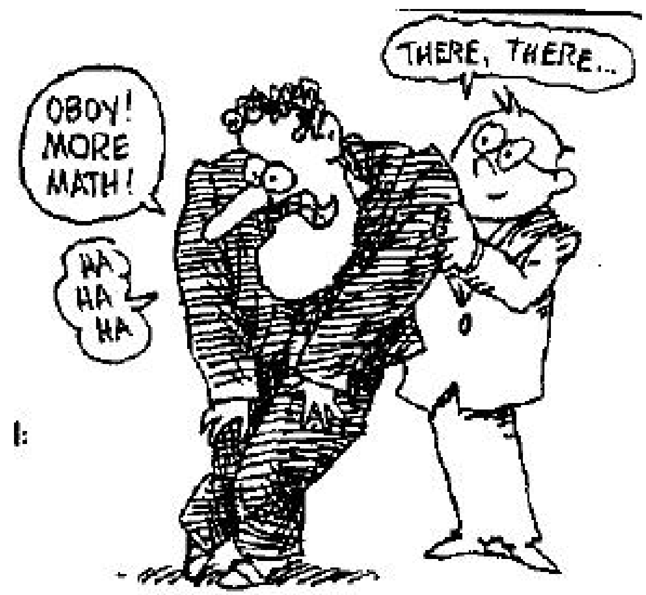
$$\iint_R f(x,y)\,dxdy \leq \iint_R g(x,y)\,dxdy.$$

Več o dvojnih integralih najdete npr. na:

http://www.math.oregonstate.edu/home/programs/undergrad/CalculusQuestStudyGuides/vcalc/255doub/255doub.html

Računanje dvojnih integralov na pravokotnem območju se prevede na dva običajna (enkratna) integrala.

Kot bomo videli kasneje na primerih, pa je težje izračunati dvojni integral na območju, ki ni pravokotno, ampak je omejeno s poljubnimi krivuljami.



Zvezne večrazsežne porazdelitve

Slučajni vektor $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je **zvezno porazdeljen**, če obstaja integrabilna funkcija (**gostota verjetnosti**) $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ z lastnostjo

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) =$$
$$= \int_{-\infty}^{x_1} \left(\int_{-\infty}^{x_2} \left(\cdots \left(\int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_n \right) \cdots \right) dt_2 \right) dt_1$$

in

$$F(\infty, \infty, \infty, \ldots, \infty) = 1.$$

Zvezne dvorazsežne porazdelitve

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,dv \right) du,$$

$$P((X,Y) \in [a,b) \times [c,d)) = \int_{a}^{b} \left(\int_{c}^{d} p(u,v)\,dv \right) du.$$

Kjer je p zvezna je

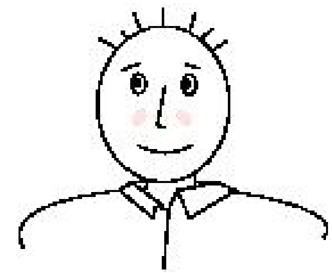
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{-\infty}^{y} p(x,v)\,dv \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = p(x,y).$$

Robni verjetnostni gostoti sta

$$p_X(x) = F'_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dy,$$

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)\,dx.$$

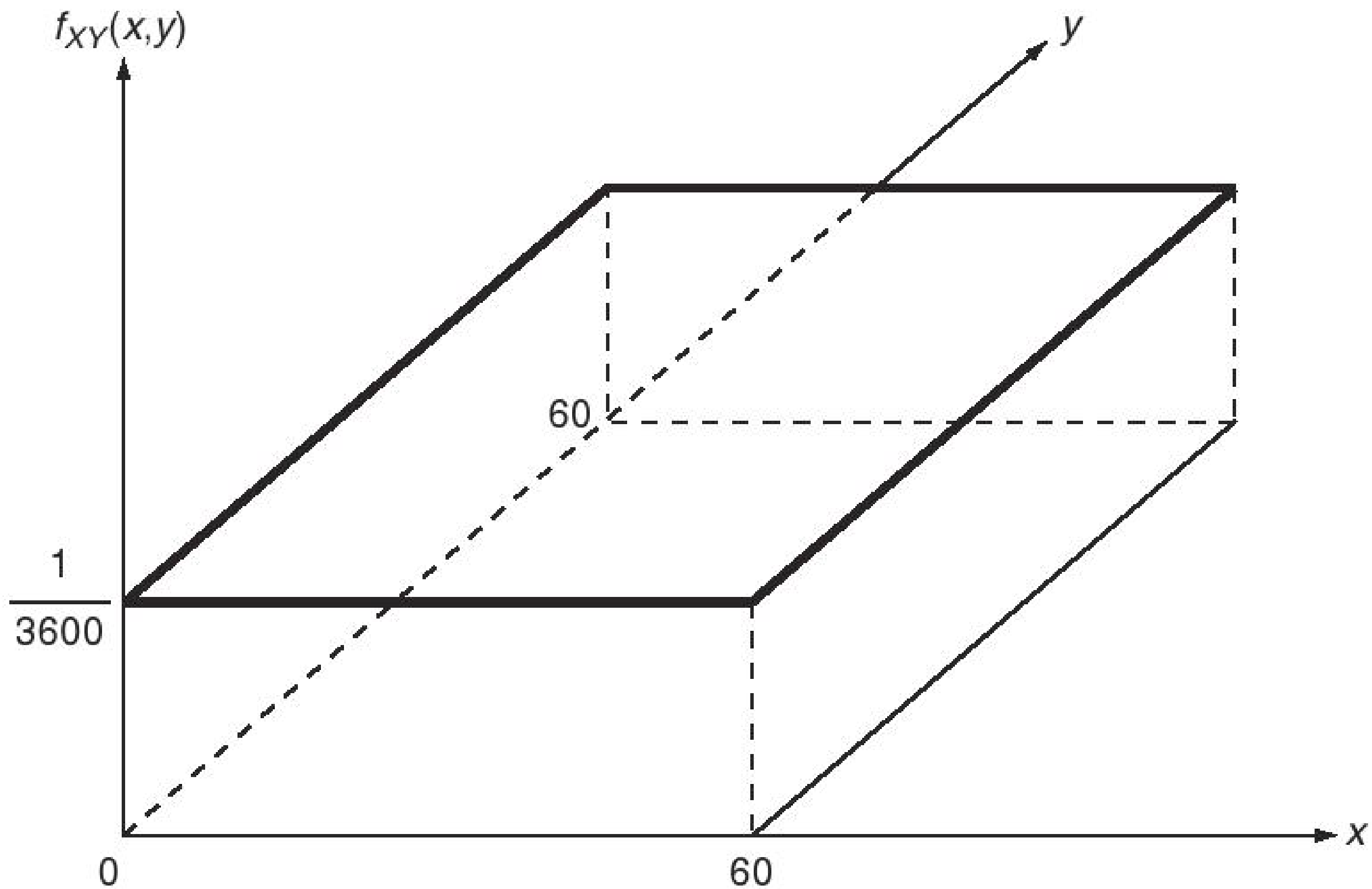
Naloga



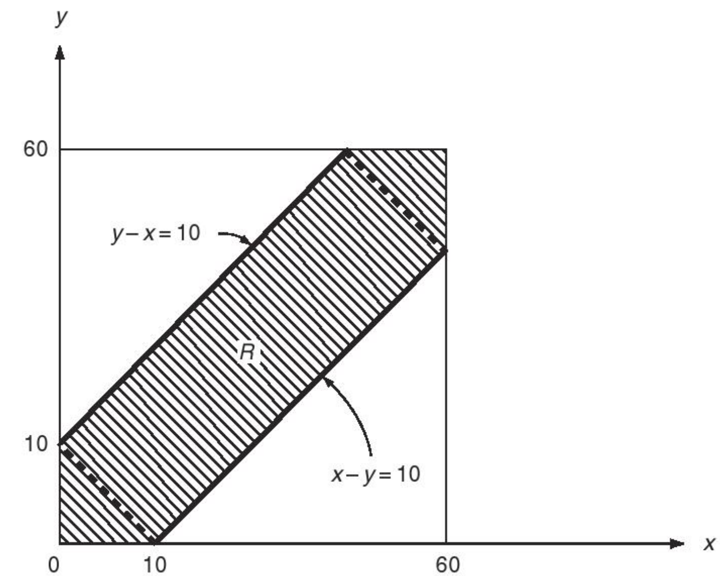
Dekle in fant se želita srečati na določenem mestu med 9-o in 10-o uro, pri čemer noben od njiju ne bo čakal drugega dlje od 10-ih minut.

Če je vsak čas med 9-o in 10-o za vsakega od njiju enako verjeten, in sta njuna časa prihodov neodvisna, poišči verjetnost, da se bosta srečala.

Naj bo čas prihoda fanta X minut po 9-i, pravtako pa naj bo čas prihoda dekleta Y minut po 9-i.


$f_{XY}(x,y)$
y
60
1
3600
0
60
x

Ploskev, ki jo določa gostota porazdelitve, je ravnina,
ker pa je prostornina pod njo enaka 1,
je oddaljena od ravnine $z = 0$ za 1/3600.



Prostornina, ki jo iščemo,
se nahaja nad področjem R,
ki je določeno z $|X - Y| \leq 10$,
torej je verjetnost srečanja enaka:

$$P(|X - Y| \leq 10) = \frac{(2 \times 5 \times 10 + 10\sqrt{2} \cdot 50\sqrt{2})}{3600} = \frac{11}{36}.$$

Pri bolj zapletenih gostotah verjetnosti, moramo dejansko izračunati integral

$$F(x, y) = \iint_R p(x, y)\, dy dx.$$

Za vajo izračunajmo obe robni verjetnostni gostoti. Očitno velja:

$$F(x, y) = 0 \text{ za } (x, y) < (0, 0) \quad \text{in} \quad F(x, y) = 1 \text{ za } (x, y) > (60, 60).$$

Sedaj pa za $(0, 0) \leq (x, y) \leq (60, 60)$ velja

$$F(x, y) = \int_0^y \int_0^x \left(\frac{1}{3600}\right) dydx = \frac{xy}{3600}.$$

in

$$p_X(x) = F'_X(x) = \int_0^{60} \left(\frac{1}{3600}\right) dy = \frac{1}{60} \quad \text{za} \quad 0 \leq y \leq 60,$$

$$p_Y(y) = F'_Y(y) = \int_0^{60} \left(\frac{1}{3600}\right) dx = \frac{1}{60} \quad \text{za} \quad 0 \leq x \leq 60,$$

za vse ostale x in y pa je $p_X(x) = 0$ ter $p_Y(x) = 0$, torej sta X in Y obe enakomerno porazdeljeni slučajni spremenljivki na intervalu $[0, 60]$.

Večrazsežna normalna porazdelitev

V dveh razsežnostih $N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ ima gostoto

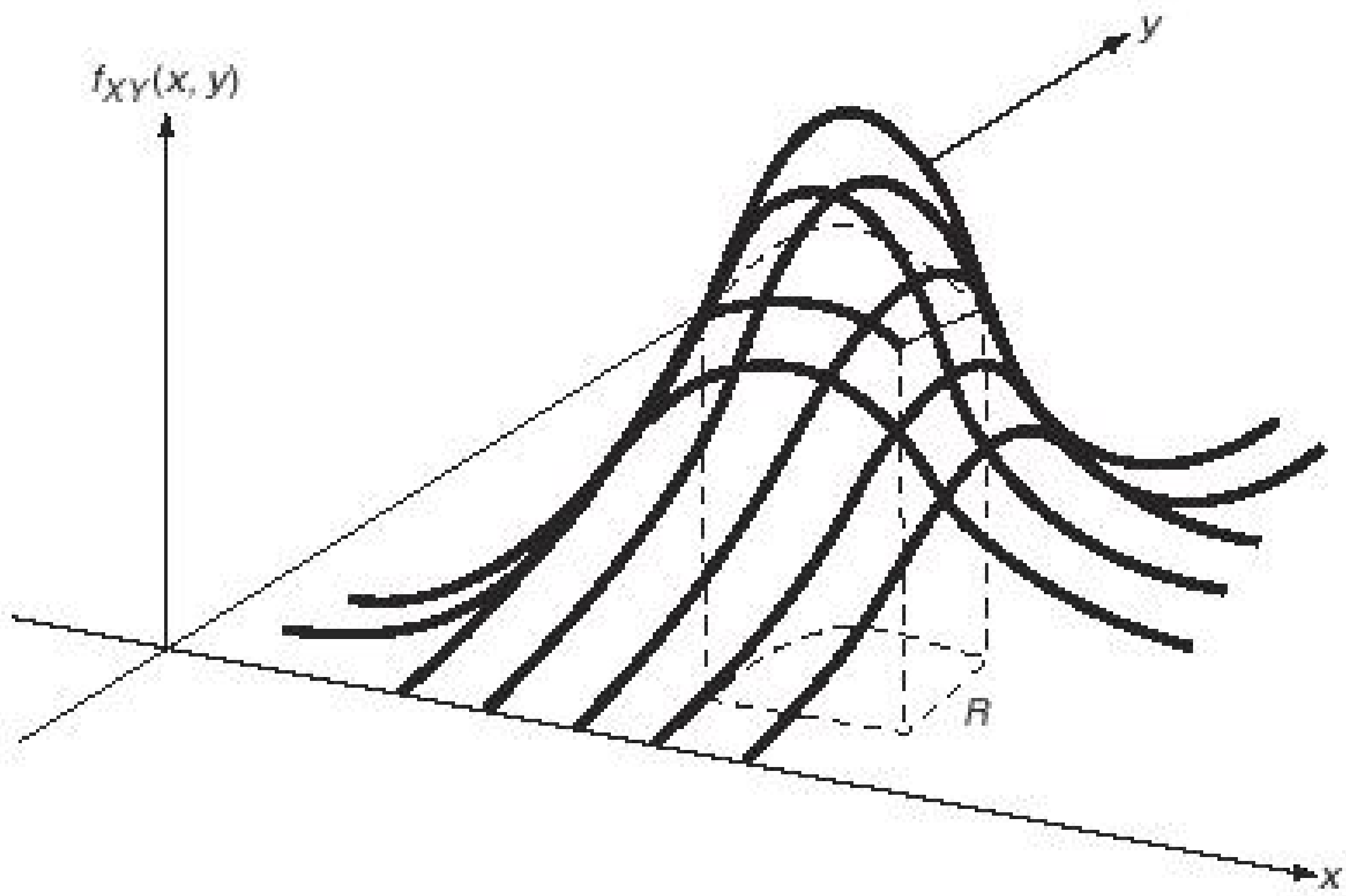
$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)}.$$

V splošnem pa jo zapišemo v matrični obliki

$$p(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})},$$

kjer je A simetrična pozitivno definitna matrika.

Vse robne porazdelitve so normalne.


$f_{XY}(x, y)$
y
x
R

Naloga

Pri študiju upora Y strukturnega elementa in sile X, ki deluje nanj, smatramo za slučajni spremenljivki. Verjetnost napake n_f je definirana z $P(Y \leq X)$. Predpostavimo, da je

$$p(x,y) = abe^{-(ax+by)} \quad \text{za} \quad (x,y) > 0$$

in $p(x,y) = 0$ sicer, pri čemer sta a in b poznani pozitivni števili. Želimo izračunati n_f, tj.

$$F(x,y) = \iint_R p(x,y)\, dydx,$$

kjer je območje R določeno s pogojem $Y \leq X$. Ker slučajni spremenljivki X in Y zavzameta samo pozitivne vrednosti, velja

$$n_f = \int_0^\infty \int_y^\infty a\, b\, e^{-(ax+by)}\, dx\, dy = \int_0^\infty \int_0^x a\, b\, e^{-(ax+by)}\, dy\, dx.$$

Tu izračunajmo prvi integral, ki smo ga pričeli računati že na prejšnjih predavanjih (bodite pozorni na to, da so sedaj meje popravljene). Upoštevamo $a\,dx = d(ax) = -d(-ax - by)$:

$$\int_0^\infty \int_y^\infty a\,b\,e^{-(ax+by)}\,dx\,dy = -b \int_0^\infty \left(\int_y^\infty e^{-(ax+by)}\,d(-ax-by) \right) dy$$

$$= -b \int_0^\infty \left(e^{-(ax+by)} \Big|_{x=y}^{\infty} \right) dy = b \int_0^\infty e^{-y(a+b)}\,dy$$

$$= \frac{-b}{a+b} \int_0^\infty e^{-y(a+b)}\,d\big(-y(a+b)\big) = \frac{-b}{a+b} \left(e^{-y(a+b)} \Big|_{y=0}^{\infty} \right) = \frac{b}{a+b}.$$

Vaša domača naloga pa je, da za vajo izračunate drugega (rok 24. nov. 08).

Neodvisnost slučajnih spremenljivk

Podobno kot pri dogodkih:

Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ so med seboj **neodvisne**, če za poljubne vrednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ velja

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot F_3(x_3) \cdots F_n(x_n),$$

kjer je F porazdelitvena funkcija vektorja, F_i pa so porazdelitvene funkcije njegovih komponent.

Če sta

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

diskretni slučajni spremenljivki in p_{ij} verjetnostna funkcija slučajnega vektorja (X, Y), potem sta X in Y neodvisni natanko takrat, ko je $p_{ij} = p_i q_j$ za vsak par i, j.

...Neodvisnost slučajnih spremenljivk

Če sta X in Y zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki z gostotama p_X in p_Y ter je p gostota zvezno porazdeljenega slučajnega vektorja (X, Y), potem sta X in Y neodvisni natanko takrat, ko za vsak par x, y velja $p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$.

Primer: Naj bo dvorazsežni slučajni vektor (X, Y) z normalno porazdelitvijo $N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$. Če je $\rho = 0$ je

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}((\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2 + (\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2)} = p_X(x) \cdot p_Y(y).$$

Torej sta komponenti X in Y neodvisni.

...Neodvisnost slučajnih spremenljivk

Zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni natanko takrat, ko lahko gostoto verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y) zapišemo v obliki $p(x, y) = f(x) \cdot g(y)$.

Naj bosta zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y tudi neodvisni ter A in B poljubni (Borelovi) podmnožici v $\mathbb{R}$. Potem sta neodvisna tudi dogodka $X \in A$ in $Y \in B$.

Trditev velja tudi za diskretni slučajni spremenljivki X in Y.

Pogosto pokažemo odvisnost spremenljivk X in Y tako, da najdemo množici A in B, za kateri je

$$P(X \in A, Y \in B) \neq P(X \in A) \cdot P(Y \in B).$$

I.7. Funkcije slučajnih spremenljivk/vektorjev in pogojne porazdelitve

Funkcije slučajnih spremenljivk

Naj bo $X : G \to \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka realna funkcija. Tedaj je njun kompozitum $Y = f \circ X$ določen s predpisom $Y(e) = f(X(e))$, za vsak $e \in G$, določa novo preslikavo $Y : G \to \mathbb{R}$.

Kdaj je tudi Y slučajna spremenljivka na $(G, \mathcal{D}, P)$?

V ta namen mora biti za vsak $y \in \mathbb{R}$ množica

$$(Y < y) = \{e \in G : Y(e) < y\} = \{e \in G : X(e) \in f^{-1}(-\infty, y)\}$$

dogodek – torej v $\mathcal{D}$.

Če je to res, imenujemo Y **funkcija slučajne spremenljivke** X in jo zapišemo kar $Y = f(X)$. Njena porazdelitvena funkcija je

$$F_Y(y) = P(Y < y).$$

Borelove množice

Vprašanje: kakšna mora biti množica A,
da je množica

$$X^{-1}(A) = \{e \in G : X(e) \in A\}$$

v $\mathcal{D}$?

Emile Borel

Zadoščajo množice A, ki so ali intervali, ali števne unije intervalov, ali števni preseki števnih unij intervalov – **Borelove množice**.

Kdaj je $f^{-1}(-\infty, y)$ Borelova množica?
Vsekakor je to res, ko je f zvezna funkcija.
V nadaljevanju nas bodo zanimali samo taki primeri.

Primer: zvezne strogo naraščajoče funkcije

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna in strogo naraščajoča funkcija.
Tedaj je taka tudi funkcija f^{-1} in velja

$$\begin{aligned} f^{-1}(-\infty, y) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) < y\} = \{x \in \mathbb{R} : x < f^{-1}(y)\} \\ &= (-\infty, f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

in potemtakem tudi $F_Y = F_X \circ f^{-1}$, o čemer se prepričamo takole

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(f(X) < y) = P(X < f^{-1}(y)) = F_X(f^{-1}(y))$$

Če je X porazdeljena zvezno z gostoto $p(x)$, je $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} p(x)\, dx$ in, če je f odvedljiva, še $p_Y(y) = p(f^{-1}(y)) f^{-1}(y)'$.

Če funkcija ni monotona, jo razdelimo na intervale monotonosti.

Primer: kvadrat normalno porazdeljene spremenljivke

Naj bo $X : N(0,1)$ in $Y = X^2$.

Tedaj je $F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = 0$ za $y \leq 0$; in za $y > 0$

$$F_Y(y) = P(|X| < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

in ker/če je $p_X(x)$ soda funkcija

$$p_Y(y) = p_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + p_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}p_X(\sqrt{y})$$

Vstavimo še standardizirano normalno porazdelitev

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

pa dobimo porazdelitev $\chi^2(1)$.

Funkcije in neodvisnost

Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki ter f in g zvezni funkciji na $\mathbb{R}$, sta tudi $U = f(X)$ in $V = g(Y)$ neodvisni slučajni spremenljivki.

V to se prepričamo takole. Za poljubna $u, v \in \mathbb{R}$ velja

$$
\begin{aligned}
P(U < u, V < v) &= P(f(X) < u, g(Y) < v) \\
&= P(X \in f^{-1}(-\infty, u), Y \in g^{-1}(-\infty, v)) \\
&\quad (X \text{ in } Y \text{ sta neodvisni}) \\
&= P(X \in f^{-1}(-\infty, u)) \cdot P(Y \in g^{-1}(-\infty, v)) \\
&\quad (\text{in naprej}) \\
&= P(f(X) < u) \cdot P(g(Y) < v) \\
&= P(U < u) \cdot P(V < v).
\end{aligned}
$$

Funkcije slučajnih vektorjev

Imejmo slučajni vektor $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : G \to \mathbb{R}^n$ in zvezno vektorsko preslikavo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tedaj so $Y_j = f_j(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $j = 1, \ldots, m$ slučajne spremenljivke – komponente slučajnega vektorja $\boldsymbol{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$.

Pravimo tudi, da je $\boldsymbol{Y}$ **funkcija slučajnega vektorja** $\boldsymbol{X}$, tj. $\boldsymbol{Y} = f(\boldsymbol{X})$.

Porazdelitve komponent dobimo na običajen način

$$F_{Y_j}(y) = P(Y_j < y) = P(f_j(\boldsymbol{X}) < y) = P(\boldsymbol{X} \in f_j^{-1}(-\infty, y))$$

in, če je $\boldsymbol{X}$ zvezno porazdeljen z gostoto $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, potem je

$$F_{Y_j}(y) = \int \int \ldots \int_{f_j^{-1}(-\infty, y)} p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Primer: vsota

Naj bo $Z = X + Y$, kjer je (X, Y) zvezno porazdeljen slučajni vektor z gostoto $p(x, y)$. Tedaj je

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z < z) = P(X + Y < z) = \\ &= \int\int_{x+y<z} p(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p(x,y)\,dy \end{aligned}$$

in $p_Z(z) = F'_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(z - y, y)\,dy.$

Če sta spremenljivki X in Y neodvisni dobimo naprej zvezo

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\,p_Y(z - x)\,dx.$$

Gostota $p_Z = p_X * p_Y$ je **konvolucija** funkcij p_X in p_Y.

... Primer: vsota

Če je $(X,Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$, je vsota $Z = X + Y$ zopet normalno porazdeljena $Z : N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2})$.

Če sta $X : \chi^2(n)$ in $Y : \chi^2(m)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je tudi njuna vsota $Z = X + Y$ porazdeljena po tej porazdelitvi $Z : \chi^2(n+m)$.

Dosedanje ugotovitve lahko združimo v naslednjo:

Če so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke, je slučajna spremenljivka $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ porazdeljena po $\chi^2(n)$.

Primer: transformacije

Naj bo sedaj $f : (x, y) \mapsto (u, v)$ transformacija slučajnega vektorja (X, Y) v slučajni vektor (U, V) določena z zvezama $u = u(x, y)$ in $v = v(x, y)$, torej je $U = u(X, Y)$ in $V = v(X, Y)$.

Porazdelitveni zakon za nov slučajni vektor (U, V) je

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u, v) &= P(U < u, V < v) = P((U, V) \in A(u, v)) = \\ &= P((X, Y) \in f^{-1}(A(u, v)). \end{aligned}$$

Pri zvezno porazdeljenem slučajnem vektorju (X, Y) z gostoto $p(x, y)$ je

$$F_{U,V}(u, v) = \iint_{f^{-1}(A(u,v))} p(x, y)\, dx\, dy.$$

...Primer: transformacije

Če je f bijektivna z zveznimi parcialnimi odvodi, lahko nadaljujemo

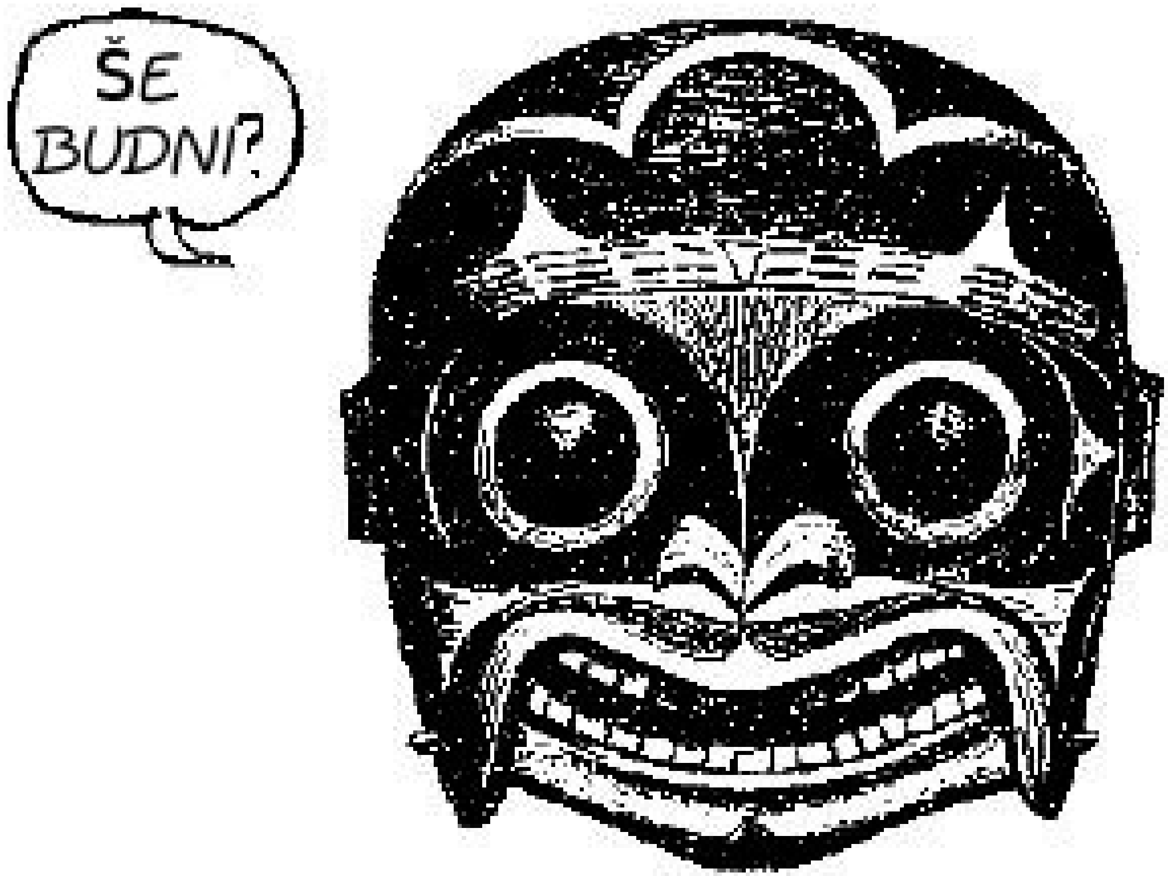
$$F_{U,V}(u,v) = \iint_{A(u,v)} p\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,|J(u,v)|\,du\,dv,$$

kjer je (glej učbenik `http://rkb.home.cern.ch/rkb/titleA.html`)

$$J(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Jacobijeva determinanta (glej `http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian` za kakšen primer). Za gostoto $q(u,v)$ vektorja (U,V) dobimo od tu

$$q(u,v) = p\big(x(u,v), y(u,v)\big)\,|J(u,v)|.$$


ŠE
BUDNI?

Zgled:

$$\Omega = \{(x, y) \,|\, 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1\}.$$

Naj bo

$$r = \sqrt{-2\log(x)}, \qquad \varphi = 2\pi y,$$

$$u = r\cos\varphi, \qquad v = r\sin\varphi.$$

Potem po pravilu za odvajanje posrednih funkcij in definiciji Jacobijeve matrike velja

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(r, \varphi)}\right)\left(\frac{\partial(r, \varphi)}{\partial(x, y)}\right) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{rx} & 0 \\ 0 & 2\pi \end{pmatrix}.$$

Jacobijeva determinanta je

$$\det\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{x}}\right) = \det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = \det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\varphi)}\right) \det\left(\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)}\right) = r\frac{-2\pi}{rx} = \frac{-2\pi}{x}$$

in

$$d^2\boldsymbol{x} = \left|\det\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{u}}\right)\right| d^2\boldsymbol{u} = \left|\det\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{x}}\right)\right|^{-1} d^2\boldsymbol{u} = \frac{x}{2\pi}\, d^2\boldsymbol{u} = \frac{e^{-\dfrac{u^2+v^2}{2}}}{2\pi}\, d^2\boldsymbol{u}.$$

Od tod zaključimo, da za neodvisni slučajni spremenljivki x in y, ki sta enakomerno porazdeljeni med 0 in 1, zgoraj definirani slučajni spremenljivki u in v pravtako neodvisni in porazdeljeni normalno.