

Pogojne porazdelitve

Naj bo B nek mogoč dogodek, tj. $P(B) > 0$. Potem lahko vpeljemo **pogojno porazdelitveno funkcijo**

$$F(x|B) = P(X < x | B) = \frac{P(X < x, B)}{P(B)}$$

V diskretnem primeru je: $p_{ik} = P(X = x_i, Y = y_k)$, $B = (Y = y_k)$ in $P(B) = P(Y = y_k) = q_k$. Tedaj je pogojna porazdelitvena funkcija

$$\begin{aligned} F_X(x|y_k) &= F_X(x|Y = y_k) = P(X < x | Y = y_k) = \\ &= \frac{P(X < x, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \frac{1}{q_k} \sum_{x_i < x} p_{ik} \end{aligned}$$

Vpeljimo **pogojno verjetnostno funkcijo** s $p_{i|k} = \frac{p_{ik}}{q_k}$.

Tedaj je $F_X(x|y_k) = \sum_{x_i < x} p_{i|k}$.

Zvezne pogojne porazdelitve

Postavimo $B = (y \leq Y < y + h)$ za $h > 0$ in zahtevajmo $P(B) > 0$.

$$\begin{aligned} F_X(x|B) &= P(X < x | B) = \frac{P(X < x, y \leq Y < y + h)}{P(y \leq Y < y + h)} = \\ &= \frac{F(x, y + h) - F(x, y)}{F_Y(y + h) - F_Y(y)}. \end{aligned}$$

Če obstaja limita (za $h \rightarrow 0$)

$$F_X(x|y) = F_X(x|Y = y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x, y + h) - F(x, y)}{F_Y(y + h) - F_Y(y)},$$

jo imenujemo **pogojna porazdelitvena funkcija** slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y = y)$.

Gostota zvezne pogojne porazdelitve

Naj bosta gostoti $p(x, y)$ in $p_Y(y)$ zvezni ter $p_Y(y) > 0$. Tedaj je

$$F_X(x|y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{F(x, y+h) - F(x, y)}{h}}{\frac{F_Y(y+h) - F_Y(y)}{h}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{F_Y'(y)} = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^x p(u, y) du$$

oziroma, če vpeljemo **pogojno gostoto**

$$p_X(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)},$$

tudi $F_X(x|y) = \int_{-\infty}^x p_X(u|y) du$.

V primeru dvorazsežne normalne porazdelitve dobimo

$$p_X(x|y) : N(\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x \sqrt{1 - \rho^2}).$$

I.8. Momenti in kovarianca



Matematično upanje

Matematično upanje EX (pričakovana vrednost) je posplošitev

povprečne vrednosti diskretne spremenljivke $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$,

tj.

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i k_i = \sum_{i=1}^n x_i f_i,$$

od koder izhaja

$$EX = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Diskretna slučajna spremenljivka X z verjetnostno funkcijo p_k ima matematično upanje $EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, če je

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty.$$

Zvezna slučajna spremenljivka X z gostoto $p(x)$ ima matematično upanje $EX = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx$, če je

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx < \infty.$$

Primeri slučajnih spremenljivk, za katere matematično upanje ne obstaja:

Diskretna: $x_k = (-1)^{k+1} 2^k / k$ in $p_k = 2^{-k}$.

Zvezna: $X : p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ – Cauchyeva porazdelitev.

Lastnosti matematičnega upanja

Naj bo a realna konstanta. Če je $P(X = a) = 1$, $\mathbf{E}X = a$.

Slučajna spremenljivka X ima matematično upanje natanko takrat, ko ga ima slučajna spremenljivka $|X|$. Velja $|\mathbf{E}X| \leq \mathbf{E}|X|$.

Za diskretno slučajno spremenljivko je $\mathbf{E}|X| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|p_i$, za zvezno pa $\mathbf{E}|X| = \int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x) dx$.

Velja splošno: matematično upanje funkcije $f(X)$ obstaja in je enako za diskretno slučajno spremenljivko $\mathbf{E}f(X) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)p_i$, za zvezno pa $\mathbf{E}f(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x) dx$, če ustrezeni izraz absolutno konvergira.

Naj bo a realna konstanta. Če ima slučajna spremenljivka X matematično upanje, potem ga ima tudi spremenljivka aX in velja $\mathbf{E}(aX) = a\mathbf{E}X$.

Če imata slučajni spremenljivki X in Y matematično upanje, ga ima tudi njuna vsota $X + Y$ in velja $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y$.

... Lastnosti matematičnega upanja

Za primer dokažimo zadnjo lastnost za zvezne slučajne spremenljivke.

Naj bo p gostota slučajnega vektorja (X, Y) in $Z = X + Y$.

Kot vemo, je $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x) dx$.

Pokažimo najprej, da Z ima matematično upanje.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}|X + Y| &= \mathbf{E}|Z| = \int_{-\infty}^{\infty} |z|p_Z(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x) dx \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x + y|p(x, y) dx \right) dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x, y) dx \right) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |y|p(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|p_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} |y|p_Y(y) dy = \mathbf{E}|X| + \mathbf{E}|Y| < \infty \end{aligned}$$

Sedaj pa še zvezo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X + Y) &= \mathbf{E}Z = \int_{-\infty}^{\infty} zp_Z(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \left(\int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x) dx \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y)p(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} xp(x, y) dx \right) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} yp(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} yp_Y(y) dy = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y \end{aligned}$$

... Lastnosti matematičnega upanja

Torej je matematično upanje **E linearen funkcional**, tj.

$$\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}X + b\mathbf{E}Y.$$

Z indukcijo posplošimo to na poljubno končno število členov

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n) \\ = a_1\mathbf{E}X_1 + a_2\mathbf{E}X_2 + \dots + a_n\mathbf{E}X_n \end{aligned}$$



... Lastnosti matematičnega upanja

Če obstajata matematični upanji $\mathbf{E}X^2$ in $\mathbf{E}Y^2$, obstaja tudi matematično upanje produkta $\mathbf{E}XY$ in velja ocena $|\mathbf{E}XY| \leq \sqrt{\mathbf{E}X^2\mathbf{E}Y^2}$.

Enakost velja natanko takrat, ko velja $Y = \pm\sqrt{\mathbf{E}Y^2/\mathbf{E}X^2}X$ z verjetnostjo 1.

Če sta slučajni spremenljivki, ki imata matematično upanje, neodvisni, obstaja tudi matematično upanje njunega produkta in velja $\mathbf{E}XY = \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y$.

Opomba: obstajajo tudi odvisne spremenljivke, za katere velja gornja zveza. Spremenljivki, za kateri velja $\mathbf{E}XY \neq \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y$ imenujemo **korelirani**.

Disperzija

Disperzija ali **varianca** DX slučajne spremenljivke, ki ima matematično upanje, je določena z izrazom

$$DX = \mathbf{E}(X - \mathbf{E}X)^2$$

Disperzija je vedno nenegativna, $DX \geq 0$, je pa lahko tudi neskončna.

Velja zveza

$$DX = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$$

Naj bo a realna konstanta. Če je $P(X = a) = 1$, je $DX = 0$.

$D(aX) = a^2DX$

Če obstaja DX in je a realna konstanta, obstaja tudi $\mathbf{E}(X - a)^2$ in velja $\mathbf{E}(X - a)^2 \geq DX$. Enakost velja natanko za $a = \mathbf{E}X$.

Količino $\sigma_X = \sqrt{DX}$ imenujemo **standardna deviacija** ali **standardni odklon**.

Standardizirane spremenljivke

Slučajno spremenljivko X **standardiziramo** s transformacijo

$$X_S = \frac{X - \mu}{\sigma},$$

kjer sta $\mu = \mathbf{E}X$ in $\sigma = \sqrt{DX}$.

Za X_S velja $\mathbf{E}X_S = 0$ in $DX_S = 1$.

$$\mathbf{E}X_S = \mathbf{E}\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{\mathbf{E}(X - \mu)}{\sigma} = \frac{\mu - \mu}{\sigma} = 0.$$

$$DX_S = D\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{D(X - \mu)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2 - 0}{\sigma^2} = 1.$$

Matematična upanje in disperzije porazdelitev

porazdelitev	EX	DX
binomska $B(n, p)$	np	npq
Poissonova $P(\lambda)$	λ	λ
Pascalova $P(m, p)$	m/p	m/p^2
geometrijska $G(p)$	$1/p$	q/p^2
enakomerna zv. $E(a, b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
normalna $N(\mu, \sigma)$	μ	σ^2
gama $\Gamma(b, c)$	b/c	b/c^2
hi-kvadrat $\chi^2(n)$	n	$2n$

Kovarianca

Kovarianca $\text{Cov}(X, Y)$ slučajnih spremenljivk X in Y je določena z izrazom

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = EXY - EXEY$$

Velja: $\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(Y, X)$ (simetričnost) in

$\text{Cov}(aX + bY, Z) = a \text{Cov}(X, Z) + b \text{Cov}(Y, Z)$ (bilinearnost).

Če obstajata DX in DY , obstaja tudi $\text{Cov}(X, Y)$ in velja

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{DXDY} = \sigma_X \sigma_Y.$$

Enakost velja natanko takrat, ko je

$$Y - EY = \pm \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - EX)$$

z verjetnostjo 1.

Spremenljivki X in Y sta nekorelirani natanko takrat, ko je $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Če imata spremenljivki X in Y končni disperziji, jo ima tudi njuna vsota $X + Y$ in velja

$$D(X + Y) = DX + DY + 2\text{Cov}(X, Y).$$

Če pa sta spremenljivki nekorelirani, je enostavno

$$D(X + Y) = DX + DY.$$

Zvezo lahko posplošimo na

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n DX_i + \sum_{i \neq j} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

in za paroma nekorelirane spremenljivke

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n DX_i.$$



Korelacijski koeficient

Korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk X in Y je določen z izrazom

$$r(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E((X - EX)(Y - EY))}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Za $(X, Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ je $r(X, Y) = \rho$.

Torej sta normalno porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y neodvisni natanko takrat, ko sta nekorelirani.

Velja še: $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$

$r(X, Y) = 0$ natanko takrat, ko sta X in Y nekorelirani.

$r(X, Y) = 1$ natanko takrat, ko je $Y = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - EX) + EY$ z verjetnostjo 1;

$r(X, Y) = -1$ natanko takrat, ko je $Y = -\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X - EX) + EY$ z verjetnostjo 1. Torej, če je $|r(X, Y)| = 1$, obstaja med X in Y linearna zveza z verjetnostjo 1.

Pogojno matematično upanje

Pogojno matematično upanje je matematično upanje pogojne porazdelitve:

Diskretna slučajna spremenljivka X ima pri pogoju $Y = y_k$ pogojno verjetnostno funkcijo $p_{i|k} = p_{ik}/q_k$, $i = 1, 2, \dots$ in potemtakem pogojno matematično upanje

$$E(X|y_k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{i|k} = \frac{1}{q_k} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{ik}.$$

Slučajna spremenljivka

$$E(X|Y) : \begin{pmatrix} E(X|y_1) & E(X|y_2) & \dots \\ q_1 & q_2 & \dots \end{pmatrix}$$

ima enako matematično upanje kot spremenljivka X :

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \sum_{k=1}^{\infty} q_k E(X|y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{ik} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = EX. \end{aligned}$$

Pogojno matematično upanje zvezne spremenljivke

Zvezna slučajna spremenljivka X ima pri pogoju $Y = y$ ima pogojno verjetnostno gostoto $p(x|y) = p(x, y)/p_Y(y)$, $x \in \mathbb{R}$ in potemtakem pogojno matematično upanje

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|y) dx = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, y) dx.$$

Slučajna spremenljivka $E(X|Y)$ z gostoto $p_Y(y)$ ima enako matematično upanje kot spremenljivka X

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \int_{-\infty}^{\infty} E(X|y)p_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x) dx = EX. \end{aligned}$$

Regresijska funkcija

Preslikavo $x \mapsto E(Y|x)$ imenujemo **regresija** slučajne spremenljivke Y glede na slučajno spremenljivko X .

Primer: Naj bo $(X, Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$.

Tedaj je, kot vemo $p_X(x|y) : N(\mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x \sqrt{1 - \rho^2})$.

Torej je pogojno matematično upanje

$$E(X|y) = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y)$$

in prirejena spremenljivka

$$E(X|Y) = \mu_x + \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \mu_y).$$

Na podoben način vpeljemo regresijo slučajne spremenljivke X glede na slučajno spremenljivko Y . Za dvorazsežno normalno porazdelitev dobimo

$$E(Y|X) = \mu_y + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x).$$

Obe regresijski funkciji sta **linearni**.

Kovariančna matrika

Matematično upanje slučajnega vektorja $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ je vektor $EX = (EX_1, EX_2, \dots, EX_n)$.

Primer: Za $(X, Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ je $E(X, Y) = (\mu_x, \mu_y)$.

Matematično upanje slučajne spremenljivke Y , ki je linearna kombinacija spremenljivk X_1, X_2, \dots, X_n , je potem

$$EY = E(\sum_{i=1}^n a_i X_i) = \sum_{i=1}^n a_i EX_i$$

Za disperzijo spremenljivke Y pa dobimo $DY = E(Y - EY)^2 =$

$$E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (X_i - EX_i)(X_j - EX_j)\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a},$$

kjer je $\text{Cov}(X_i, X_j) = E((X_i - EX_i)(X_j - EX_j))$ kovarianca spremenljivk X_i in X_j , $\mathbf{K} = [\text{Cov}(X_i, X_j)]$ **kovariančna matrika** vektorja X , ter $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$.

Lastnosti kovariančne matrike

Kovariančna matrika $\mathbf{K} = [K_{ij}]$ je **simetrična**: $K_{ij} = K_{ji}$.

Diagonalne vrednosti so disperzije spremenljivk: $K_{ii} = DX_i$.

Ker je $\mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} = DY \geq 0$, je pozitivno semidefinitna matrika.

Naj bo \mathbf{a} , $\|\mathbf{a}\| = 1$ lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ kovariančne matrike \mathbf{K} , tj. $\mathbf{K} \mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}$. Tedaj je $0 \leq DY = \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a} = \lambda$, kar pomeni, da so vse lastne vrednosti kovariančne matrike nenegativne.

Če je kaka lastna vrednost enaka 0, je vsa verjetnost skoncentrirana na neki hiperravnini – porazdelitev je **izrojena**. To se zgodi natanko takrat, ko kovariančna matrika \mathbf{K} ni obrnljiva, oziroma ko je $\det \mathbf{K} = 0$.

Primer: Za $(X, Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ je $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho \sigma_x \sigma_y \\ \rho \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$.

Ker je $|\rho| < 1$, je $\det \mathbf{K} = \sigma_x^2 \sigma_y^2 (1 - \rho^2) > 0$ in je potemtakem porazdelitev vedno neizrojena. Za $N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{A})$ je $\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}$.

... Lastnosti kovariančne matrike

Poglejmo še, kako se spremeni kovariančna matrika pri linearni transformaciji vektorja $X' = \mathbf{A}X$, kjer je \mathbf{A} poljubna matrika reda $n \times n$.

Vemo, da je $D(\mathbf{a}^T X) = \mathbf{a}^T \mathbf{K} \mathbf{a}$.

Tedaj je, če označimo kovariančno matriko vektorja X' s \mathbf{K}' ,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^T \mathbf{K}' \mathbf{a} &= D(\mathbf{a}^T X') = D(\mathbf{a}^T \mathbf{A} X) = D((\mathbf{A}^T \mathbf{a})^T X) = \\ &= (\mathbf{A}^T \mathbf{a})^T \mathbf{K} (\mathbf{A}^T \mathbf{a}) = \mathbf{a}^T \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{A}^T \mathbf{a} \end{aligned}$$

in potemtakem

$$\mathbf{K}' = \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{A}^T.$$

Višji momenti

Višji momenti so posplošitev pojmov matematičnega upanja in disperzije.

Moment reda $k \in \mathbb{N}$ **glede na točko** $a \in \mathbb{R}$ imenujemo količino

$$m_k(a) = E((X - a)^k).$$

Moment obstaja, če obstaja matematično upanje $E(|X - a|^k) < \infty$.

Za $a = 0$ dobimo **začetni moment** $z_k = m_k(0)$;

za $a = EX$ pa **centralni moment** $m_k = m_k(EX)$.

Primeri: $EX = z_1$ in $DX = m_2$.

Če obstaja moment $m_n(a)$, potem obstajajo tudi vsi momenti $m_k(a)$ za $k < n$.

Če obstaja moment z_n , obstaja tudi moment $m_n(a)$ za vse $a \in \mathbb{R}$.

$$m_n(a) = E((X - a)^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-a)^{n-k} z_k.$$

... Višji momenti

Posebej za centralni moment velja

$$m_n = m_n(z_1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-z_1)^k z_{n-k}$$

$$m_0 = 1, m_1 = 0, m_2 = z_2 - z_1^2, m_3 = z_3 - 3z_2z_1 + 2z_1^3, \dots$$

Asimetrija spremenljivke X imenujemo količino $A(X) = \frac{m_3}{\sigma^3}$.

Sploščenost spremenljivke X imenujemo količino $K(X) = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3$,

kjer je $\sigma = \sqrt{m_2}$.

Za simetrično glede na $z_1 = EX$ porazdeljene spremenljivke so vsi lihi centralni momenti enaki 0.

... Višji momenti

Za $X : N(\mu, \sigma)$ so $m_{2k+1} = 0$ in $m_{2k} = (2k-1)!!\sigma^{2k}$. Zato sta tudi $A(X) = 0$ in $K(X) = 0$.

Če sta spremenljivki X in Y neodvisni, je $m_3(X+Y) = m_3(X) + m_3(Y)$.

Za binomsko porazdeljeno spremenljivko $X : B(n, p)$ je

$$m_3(X) = npq(q-p) \text{ in dalje } A(X) = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}.$$

Kadar spremenljivka nima momentov, uporabljamo kvantile.

Kvantil reda $p \in (0, 1)$ je vsaka vrednost $x \in \mathbb{R}$, za katero velja

$$P(X \leq x) \geq p \text{ in } P(X \geq x) \geq 1 - p \text{ oziroma } F(x) \leq p \leq F(x+).$$

Kvantil reda p označimo z x_p . Za zvezno spremenljivko je $F(x_p) = p$.

Kvantil $x_{\frac{1}{2}}$ imenujemo **mediana**; $x_{\frac{i}{4}}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$ so **kvartili**.

Kot nadomestek za standardni odklon uporabljamo **kvartilni razmik**

$$\frac{1}{2}(x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}}).$$