Slučajni vektorji

Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljivk $X = (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$. Opišemo ga s porazdelitveno funkcijo ($x_i \in \mathbb{R}$)

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, X_3 < x_3, \ldots, X_n < x_n)$$

za katero velja:

$0 \le F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \le 1$

Funkcija F je za vsako spremenljivko naraščajoča in od leve zvezna.

$F(-\infty, -\infty, -\infty, \ldots, -\infty) = 0$ in $F(\infty, \infty, \infty, \ldots, \infty) = 1$.

Funkciji $F_i(x_i) = F(\infty, \infty, \ldots, \infty, x_i, \infty, \ldots, \infty)$ pravimo **robna porazdelitvena funkcija** spremenljivke X_i.

Slučajni vektorji – primer

Naj bo $A(x, y) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u < x \wedge v < y\}$ (levi spodnji kvadrant glede na (x, y)). Naj porazdelitvena funkcija opisuje verjetnost, da je slučajna točka (X, Y) v množici $A(x, y)$

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = P((X, Y) \in A(x, y)).$$

Tedaj je verjetnost, da je slučajna točka (X, Y) v pravokotniku $[a, b) \times [c, d)$ enaka

$$P((X, Y) \in [a, b) \times [c, d)) = F(b, d) - F(a, d) - F(b, c) + F(a, c)$$

Diskretne večrazsežne porazdelitve

Zaloga vrednosti je kvečjemu števna množica. Opišemo jo z *verjetnostno funkcijo* $p_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = P(X_1 = x_{k_1}, X_2 = x_{k_2}, \ldots, X_n = x_{k_n})$.

Za $n = 2$, $X : \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, $Y : \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ in $P(X = x_i, Y = y_j)$, sestavimo *verjetnostno tabelo*:

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_m	X
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2m}	p_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_k	p_{k1}	p_{k2}	$\ldots$	p_{km}	p_k
Y	q_1	q_2	$\ldots$	q_m	1

$p_i = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$ in $q_j = P(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}$

Diskretne večrazsežne porazdelitve – Polinomska

Polinomska porazdelitev $P(n; p_1, p_2, \ldots, p_r)$, $\sum p_i = 1$, $\sum k_i = n$ je določena s predpisom

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \ldots, X_r = k_r) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}.$$

Za $r = 2$ dobimo binomsko porazdelitev, tj. $B(n, p) = P(n; p, q)$.

Zvezne večrazsežne porazdelitve

Slučajni vektor $X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ je *zvezno porazdeljen*, če obstaja integrabilna funkcija (*gostota verjetnosti*) $p(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ z lastnostjo

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n$$

$F(\infty, \infty, \infty, \dots, \infty) = 1.$

Zvezne dvorazsežne porazdelitve

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} p(u, v) du dv$$

$$P((X, Y) \in [a, b) \times [c, d)) = \int_{a}^{b} \int_{c}^{d} p(u, v) du dv$$

Kjer je p zvezna je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{-\infty}^{y} p(x, v) dv \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = p(x, y)$$

Robni verjetnostni gostoti sta

$$p_X(x) = F_X'(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy$$

$$p_Y(y) = F_Y'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx$$

Večrazsežna normalna porazdelitev

V dveh razsežnostih $N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ ima gostoto

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)}.$$

V splošnem pa jo zapišemo v matrični obliki

$$p(\boldsymbol{x}) = \sqrt{\frac{\det A}{(2\pi)^n}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}$$

kjer je A simetrična pozitivno definitna matrika.

Vse robne porazdelitve so normalne.

Neodvisnost slučajnih spremenljivk

Podobno kot pri dogodkih:

Slučajne spremenljivke $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ so med seboj *neodvisne*, če za poljubne vrednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ velja

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \cdot F_3(x_3) \cdots F_n(x_n)$$

kjer je F porazdelitvena funkcija vektorja, F_i pa so porazdelitvene funkcije njegovih komponent.

Če sta

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

diskretni slučajni spremenljivki in p_{ij} verjetnostna funkcija slučajnega vektorja (X, Y), potem sta X in Y neodvisni natanko takrat, ko je $p_{ij} = p_i q_j$ za vsak par i, j.

. . . Neodvisnost slučajnih spremenljivk

Če sta X in Y zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki z gostotama p_X in p_Y ter je p gostota zvezno porazdeljenega slučajnega vektorja (X, Y), potem sta X in Y neodvisni natanko takrat, ko za vsak par x, y velja $p(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$.

Primer: Naj bo dvorazsežni vektor (X, Y) normalno porazdeljen po $N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$. Če je $\rho = 0$ je

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2+\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right)} = p_X(x) \cdot p_Y(y)$$

Torej sta komponenti X in Y neodvisni.

...Neodvisnost slučajnih spremenljivk

Zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y sta neodvisni natanko takrat, ko lahko gostoto verjetnosti slučajnega vektorja (X, Y) zapišemo v obliki $p(x, y) = f(x) \cdot g(y)$.

Naj bosta zvezno porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y tudi neodvisni ter A in B poljubni (Borelovi) podmnožici v $\mathbb{R}$. Potem sta neodvisna tudi dogodka $X \in A$ in $Y \in B$.

Trditev velja tudi za diskretni slučajni spremenljivki X in Y.

Pogosto pokažemo odvisnost spremenljivk X in Y tako, da najdemo množici A in B, za kateri je

$$P(X \in A, Y \in B) \neq P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$$

Funkcije slučajnih spremenljivk

Naj bo $X : G \to \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka realna funkcija. Tedaj njun produkt $Y = f \circ X$ določen s predpisom $Y(E) = f(X(E))$, za vsak $E \in G$, določa novo preslikavo $Y : G \to \mathbb{R}$. Kdaj je tudi Y slučajna spremenljivka na $(G, \mathcal{D}, P)$?

Za to mora biti za vsak $y \in \mathbb{R}$ množica

$$(Y < y) = \{E \in G : Y(E) < y\} = \{E \in G : X(E) \in f^{-1}(-\infty, y)\}$$

dogodek – torej v $\mathcal{D}$.

Če je to res, imenujemo Y *funkcija slučajne spremenljivke* X in jo zapišemo kar $Y = f(X)$. Njena porazdelitvena funkcija je $F_Y(y) = P(Y < y)$.

Borelove množice

Vprašanje: kakšna mora biti množica A, da je množica

$$X^{-1}(A) = \{E \in G : X(E) \in A\}$$

v $\mathcal{D}$?

zadoščajo množice A, ki so ali intervali, ali števne unije intervalov, ali števni preseki števnih unij intervalov – *Borelove množice*.

Kdaj je $f^{-1}(-\infty, y)$ Borelova množica? Vsekakor je to res, ko je f zvezna funkcija – v nadaljevanju nas bodo zanimali samo taki primeri.

Primer: zvezne strogo naraščajoče funkcije

Naj bo $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zvezna in strogo naraščajoča funkcija. Tedaj je taka tudi funkcija f^{-1} in velja

$$\begin{aligned} f^{-1}(-\infty, y) &= \{x\in\mathbb{R} : f(x) < y\} = \{x\in\mathbb{R} : x < f^{-1}(y)\} \\ &= (-\infty, f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

in potemtakem tudi

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(f(X) < y) = P(X < f^{-1}(y)) = F_X(f^{-1}(y))$$

Če je X porazdeljena zvezno z gostoto $p(x)$, je $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} p(x)dx$ in, če je f odvedljiva, še $p_Y(y) = p(f^{-1}(y))f^{-1}(y)'$.

Če funkcija ni monotona, jo razdelimo na intervale monotonosti.

Primer: kvadrat normalno porazdeljene spremenljivke

Naj bo $X : N(0,1)$ in $Y = X^2$.

Tedaj je $F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = 0$ za $y \leq 0$; in za $y > 0$

$$F_Y(y) = P(|X| < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

in ker/če je $p_X(x)$ soda funkcija

$$p_Y(y) = p_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + p_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}p_X(\sqrt{y})$$

Vstavimo še standardizirano normalno porazdelitev

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

pa dobimo porazdelitev $\chi^2(1)$.

Funkcije in neodvisnost

Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki ter f in g zvezni funkciji na $\mathbb{R}$, sta tudi $U = f(X)$ in $V = g(Y)$ neodvisni slučajni spremenljivki.

V to se prepričamo takole. Za poljubna $u, v \in \mathbb{R}$ velja

$$
\begin{aligned}
P(U < u, V < v) &= P(f(X) < u, g(Y) < v) \\
&= P(X \in f^{-1}(-\infty, u), Y \in g^{-1}(-\infty, v)) \\
&\quad \text{(}X \text{ in } Y \text{ sta neodvisni)} \\
&= P(X \in f^{-1}(-\infty, u)) \cdot P(Y \in g^{-1}(-\infty, v)) \\
&\quad \text{(in naprej)} \\
&= P(f(X) < u) \cdot P(g(Y) < v) \\
&= P(U < u) \cdot P(V < v).
\end{aligned}
$$

Funkcije slučajnih vektorjev

Imejmo slučajni vektor $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : G \to \mathbb{R}^n$ in zvezno vektorsko preslikavo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tedaj so $Y_j = f_j(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $j = 1, \ldots, m$ slučajne spremenljivke – komponente slučajnega vektorja $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$.

Pravimo tudi, da je Y *funkcija slučajnega vektorja* X, $Y = f(X)$.

Porazdelitve komponent dobimo na običajen način

$$F_{Y_j}(y) = P(Y_j < y) = P(f_j(X) < y) = P(X \in f_j^{-1}(-\infty, y))$$

in, če je X zvezno porazdeljen z gostoto $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, je

$$F_{Y_j}(y) = \int\int \ldots \int_{f_j^{-1}(-\infty,y)} p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Primer: vsota

Naj bo $Z = X + Y$, kjer je (X, Y) zvezno porazdeljen slučajni vektor z gostoto $p(x, y)$. Tedaj je

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z < z) = P(X + Y < z) = \int\int_{x+y<z} p(x, y)dxdy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p(x, y)dy \end{aligned}$$

in $p_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(z - y, y)dy$

Če sta spremenljivki X in Y neodvisni dobimo naprej zvezo

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z - x)dx$$

$p_Z = p_X * p_Y$ je **konvolucija** funkcij p_X in p_Y.

. . . Primer: vsota

Če je $(X, Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$, je vsota $Z = X + Y$ zopet normalno porazdeljena $Z : N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2})$.

Če sta $X : \chi^2(n)$ in $Y : \chi^2(m)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je tudi njuna vsota $Z = X + Y$ porazdeljena po tej porazdelitvi $Z : \chi^2(n + m)$.

Dosedanje ugotovitve lahko združimo v naslednjo:

Če so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke, je slučajna spremenljivka $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ porazdeljena po $\chi^2(n)$.

Primer: transformacije

Naj bo sedaj $f : (x, y) \mapsto (u, v)$ transformacija slučajnega vektorja (X, Y) v slučajni vektor (U, V) določena z zvezama $u = u(x, y)$ in $v = v(x, y)$ – torej $U = u(X, Y)$ in $V = v(X, Y)$.

Porazdelitveni zakon za nov slučajni vektor (U, V) je

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u, v) &= P(U < u, V < v) = P((U, V) \in A(u, v)) = \\ &= P((X, Y) \in f^{-1}(A(u, v))) \end{aligned}$$

Pri zvezno porazdeljenem slučajnem vektorju (X, Y) z gostoto $p(x, y)$ je

$$F_{U,V}(u, v) = \int\int_{f^{-1}(A(u,v))} p(x, y)dxdy$$

...Primer: transformacije

Če je f bijektivna z zveznimi parcialnimi odvodi, lahko nadaljujemo

$$F_{U,V}(u,v) = \int\int_{A(u,v)} p\big(x(u,v), y(u,v)\big)\, |J(u,v)|\, du dv$$

kjer je (glej učbenik `http://rkb.home.cern.ch/rkb/titleA.html`)

$$J(u,v) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Jacobijeva determinanta (glej `http://en.wikipedia.org/wiki/Jacobian` za kakšen primer). Za gostoto $q(u,v)$ vektorja (U,V) dobimo od tu

$$q(u,v) = p\big(x(u,v), y(u,v)\big)|J(u,v)|$$

Zgled:

$$\Omega = \{(x,y) \,|\, 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1\}.$$

Naj bo

$$r = \sqrt{-2\log(x)}, \qquad \varphi = 2\pi y,$$
$$u = r\cos\varphi, \qquad v = r\sin\varphi.$$

Potem po pravilu za odvajanje posrednih funkcij in definiciji Jacobijeve matrike velja

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\varphi)}\right)\left(\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)}\right) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{rx} & 0 \\ 0 & 2\pi \end{pmatrix}$$

Jacobijeva determinanta je

$$\det\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{x}}\right)=\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)=\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,\varphi)}\right)\det\left(\frac{\partial(r,\varphi)}{\partial(x,y)}\right)=r\,\frac{-2\pi}{rx}=\frac{-2\pi}{x}$$

in

$$d^2\boldsymbol{x}=\left|\det\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{u}}\right)\right|d^2\boldsymbol{u}=\left|\det\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{d\boldsymbol{x}}\right)\right|^{-1}d^2\boldsymbol{u}=\frac{x}{2\pi}\,d^2\boldsymbol{u}=\frac{e^{-\dfrac{u^2+v^2}{2}}}{2\pi}\,d^2\boldsymbol{u}.$$

Od tod zaključimo, da za neodvisni slučajni spremenljivki x in y, ki sta enakomerno porazdeljeni med 0 in 1, zgoraj definirani slučajni spremenljivki u in v pravtako neodvisni in porazdeljeni normalno.

Pogojne porazdelitve

Naj bo B nek mogoč dogodek, tj. $P(B) > 0$. Potem lahko vpeljemo *pogojno porazdelitveno funkcijo*

$$F(x|B) = P(X < x|B) = \frac{P(X < x, B)}{P(B)}$$

V diskretnem primeru je: $p_{ik} = P(X = x_i, Y = y_k)$, $B = (Y = y_k)$ in $P(B) = P(Y = y_k) = q_k$. Tedaj je pogojna porazdelitvena funkcija

$$\begin{aligned} F_X(x|y_k) &= F_X(x|Y = y_k) = P(X < x|Y = y_k) = \\ &= \frac{P(X < x, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \frac{1}{q_k} \sum_{x_i < x} p_{ik} \end{aligned}$$

Vpeljimo *pogojno verjetnostno funkcijo* z $p_{i|k} = \frac{p_{ik}}{q_k}$.

Tedaj je $F_X(x|y_k) = \sum_{x_i<x} p_{i|k}$.

Zvezne pogojne porazdelitve

Postavimo $B = (y \leq Y < y+h)$ za $h > 0$ in zahtevajmo $P(B) > 0$.

$$\begin{aligned} F_X(x|B) &= P(X < x|B) = \frac{P(X < x, y \leq Y < y+h)}{P(y \leq Y < y+h)} = \\ &= \frac{F(x, y+h) - F(x, y)}{F_Y(y+h) - F_Y(y)} \end{aligned}$$

Če limita za $h \to 0$

$$F_X(x|y) = F_X(x|Y = y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x, y+h) - F(x, y)}{F_Y(y+h) - F_Y(y)}$$

obstaja, jo imenujemo *pogojna porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y = y)$.

Gostota zvezne pogojne porazdelitve

Naj bosta gostoti $p(x, y)$ in $p_Y(y)$ zvezni ter $p_Y(y) > 0$. Tedaj je

$$F_X(x|y) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{F(x,y+h)-F(x,y)}{h}}{\frac{F_Y(y+h)-F_Y(y)}{h}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{F_Y'(y)} = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} p(u, y)du$$

oziroma, če vpeljemo *pogojno gostoto*

$$p_X(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

tudi $F_X(x|y) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u|y)du$.

V primeru dvorazsežne normalne porazdelitve dobimo

$p_X(x|y) : N(\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x\sqrt{1 - \rho^2})$.

Matematično upanje

Matematično upanje $\mathsf{E}X$ (pričakovana vrednost) je posplošitev povprečne vrednosti diskretne spremenljivke $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots p_n \end{pmatrix}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} x_i k_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

od koder izhaja

$$\mathsf{E}X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Diskretna slučajna spremenljivka X z verjetnostno funkcijo p_k ima matematično upanje $\mathsf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, če je $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$.

Zvezna slučajna spremenljivka X z gostoto $p(x)$ ima matematično upanje $\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$, če je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx < \infty$.

...Matematično upanje

Primeri slučajnih spremenljivk, za katere matematično upanje ne obstaja:

Diskretna: $x_k = (-1)^{k+1}2^k/k$, $p_k = 2^{-k}$

Zvezna: $X : p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ – Cauchyeva porazdelitev

Lastnosti matematičnega upanja

Naj bo a realna konstanta. Če je $P(X = a) = 1$, $\mathsf{E}X = a$.

Slučajna spremenljivka X ima matematično upanje natanko takrat, ko ga ima slučajna spremenljivka $|X|$. Velja $|\mathsf{E}X| \leq \mathsf{E}|X|$.
Za diskretno slučajno spremenljivko je $\mathsf{E}|X| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i$,
za zvezno pa $\mathsf{E}|X| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx$.

Velja splošno: matematično upanje funkcije $f(X)$ obstaja in je enako za diskretno slučajno spremenljivko $\mathsf{E}f(X) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) p_i$, za zvezno pa $\mathsf{E}f(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x) dx$, če ustrezni izraz absolutno konvergira.

Naj bo a realna konstanta. Če ima slučajna spremenljivka X matematično upanje, potem ga ima tudi spremenljivka aX in velja $\mathsf{E}(aX) = a\mathsf{E}X$.

Če imata slučajni spremenljivki X in Y matematično upanje, ga ima tudi njuna vsota $X + Y$ in velja $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}X + \mathsf{E}Y$.

...Lastnosti matematičnega upanja

Za primer dokažimo zadnjo lastnost za zvezne slučajne spremenljivke.

Naj bo p gostota slučajnega vektorja (X, Y) in $Z = X + Y$. Kot vemo, je $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x)dx$.

Pokažimo najprej, da Z ima matematično upanje.

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}|X+Y| = \mathsf{E}|Z| = \int_{-\infty}^{\infty} |z| p_Z(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x) dx dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x+y| p(x,y) dx dy \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x,y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(x,y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} |y| p_Y(y) dy = \mathsf{E}|X| + \mathsf{E}|Y| < \infty
\end{aligned}
$$

Sedaj pa še zvezo

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}Z = \int_{-\infty}^{\infty} z p_Z(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z-x) dx dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x+y) p(x,y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x,y) dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y p(x,y) dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y) dy = \mathsf{E}X + \mathsf{E}Y
\end{aligned}
$$

...Lastnosti matematičnega upanja

Torej je matematično upanje E linearen funkcional

$$\mathsf{E}(aX + bY) = a\mathsf{E}X + b\mathsf{E}Y.$$

Z indukcijo posplošimo to na poljubno končno število členov

$$\mathsf{E}(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1\mathsf{E}X_1 + a_2\mathsf{E}X_2 + \cdots + a_n\mathsf{E}X_n$$

…Lastnosti matematičnega upanja

Če obstajata matematični upanji $\mathsf{E}X^2$ in $\mathsf{E}Y^2$, obstaja tudi matematično upanje produkta $\mathsf{E}XY$ in velja ocena $\mathsf{E}|XY| \leq \sqrt{\mathsf{E}X^2\mathsf{E}Y^2}$. Enakost velja natanko takrat, ko velja $Y = \pm\sqrt{\mathsf{E}Y^2/\mathsf{E}X^2}X$ z verjetnostjo 1.

Če sta slučajni spremenljivki, ki imata matematično upanje, neodvisni, obstaja tudi matematično upanje njunega produkta in velja
$\mathsf{E}XY = \mathsf{E}X \cdot \mathsf{E}Y$.

Opomba: obstajajo tudi odvisne spremenljivke, za katere velja gornja zveza. Spremenljivki, za kateri velja $\mathsf{E}XY \neq \mathsf{E}X \cdot \mathsf{E}Y$ imenujemo *korelirani*.

Disperzija

Disperzija ali *varianca* $\mathsf{D}X$ slučajne spremenljivke, ki ima matematično upanje, je določena z izrazom

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2$$

Disperzija je vedno nenegativna, $\mathsf{D}X \geq 0$, je pa lahko tudi neskončna.

Velja zveza

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$$

Naj bo a realna konstanta. Če je $P(X = a) = 1$, je $\mathsf{D}X = 0$.

$\mathsf{D}aX = a^2\mathsf{D}X$

Če obstaja $\mathsf{D}X$ in je a realna konstanta, obstaja tudi $\mathsf{E}(X - a)^2$ in velja $\mathsf{E}(X - a)^2 \geq \mathsf{D}X$. Enakost velja natanko za $a = \mathsf{E}X$.

Količino $\sigma X = \sqrt{\mathsf{D}X}$ imenujemo *standardna deviacija* ali *standardni odklon*.

Standardizirane spremenljivke

Slučajno spremenljivko X *standardiziramo* s transformacijo

$$X_S = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

kjer sta $\mu = \mathsf{E}X$ in $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}X}$.

Za X_S velja $\mathsf{E}X_S = 0$ in $\mathsf{D}X_S = 1$.

$$\mathsf{E}X_S = \mathsf{E}\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\mathsf{E}(X-\mu)}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$$

$$\mathsf{D}X_S = \mathsf{D}\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\mathsf{D}(X-\mu)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2-0}{\sigma^2} = 1$$

Matematična upanje in disperzije porazdelitev

porazdelitev	$\mathsf{E}X$	$\mathsf{D}X$
binomska $B(n,p)$	np	npq
Poissonova $P(\lambda)$	λ	λ
Pascalova $P(m,p)$	m/p	mq/p^2
geometrijska $G(p)$	$1/p$	q/p^2
enakomerna zv. $E(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
normalna $N(\mu,\sigma)$	μ	σ^2
gama $\Gamma(b,c)$	b/c	b/c^2
hi-kvadrat $\chi^2(n)$	n	$2n$

Kovarianca

Kovarianca $\mathsf{Cov}(X, Y)$ slučajnih spremenljivk X in Y je določena z izrazom

$$\mathsf{Cov}(X, Y) = \mathsf{E}\big((X - \mathsf{E}X)(Y - \mathsf{E}Y)\big) = \mathsf{E}XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y$$

Velja: $\mathsf{Cov}(X, Y) = \mathsf{Cov}(Y, X)$ (simetričnost) in

$\mathsf{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathsf{Cov}(X, Z) + b\mathsf{Cov}(Y, Z)$ (bilinearnost).

Če obstajata $\mathsf{D}X$ in $\mathsf{D}Y$, obstaja tudi $\mathsf{Cov}(X, Y)$ in velja

$$|\mathsf{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathsf{D}X\mathsf{D}Y} = \sigma X \sigma Y.$$

Enakost velja natanko takrat, ko je

$$Y - \mathsf{E}Y = \pm\frac{\sigma Y}{\sigma X}(X - \mathsf{E}X)$$

z verjetnostjo 1.

Spremenljivki X in Y sta nekorelirani natanko takrat, ko je $\mathsf{Cov}(X, Y) = 0$.

Če imata spremenljivki X in Y končni disperziji, jo ima tudi njuna vsota $X+Y$ in velja

$$\mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y + 2\mathsf{Cov}(X,Y).$$

Če pa sta spremenljivki nekorelirani, je enostavno

$$\mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y.$$

Zvezo lahko posplošimo na

$$\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}X_i + \sum_{i\neq j} \mathsf{Cov}(X_i, X_j)$$

in za paroma nekorelirane spremenljivke

$$\mathsf{D}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}X.$$

Korelacijski koeficient

Korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk X in Y je določen z izrazom

$$r(X,Y) = \frac{\mathsf{Cov}(X,Y)}{\sigma X \sigma Y} = \frac{\mathsf{E}((X - \mathsf{E}X)(Y - \mathsf{E}Y))}{\sigma X \sigma Y}.$$

Za $(X,Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ je $r(X,Y) = \rho$.
Torej sta normalno porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y neodvisni natanko takrat, ko sta nekorelirani.

Velja še: $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$

$r(X,Y) = 0$ natanko takrat, ko sta X in Y nekorelirani.

$r(X,Y) = 1$ natanko takrat, ko je $Y = \frac{\sigma Y}{\sigma X}(X - \mathsf{E}X) + \mathsf{E}Y$ z verjetnostjo 1;

$r(X,Y) = -1$ natanko takrat, ko je $Y = -\frac{\sigma Y}{\sigma X}(X - \mathsf{E}X) + \mathsf{E}Y$ z verjetnostjo 1. Torej, če je $|r(X,Y)| = 1$, obstaja med X in Y linearna zveza z verjetnostjo 1.

Pogojno matematično upanje

Pogojno matematično upanje je matematično upanje pogojne porazdelitve:

Diskretna slučajna spremenljivka X ima pri pogoju $Y = y_k$ pogojno verjetnostno funkcijo $p_{i|k} = p_{ik}/q_k$, $i = 1, 2, \ldots$ in potemtakem pogojno matematično upanje

$$\mathsf{E}(X|y_k) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{i|k} = \frac{1}{q_k} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{ik}$$

Slučajna spremenljivka

$$\mathsf{E}(X|Y) : \begin{pmatrix} \mathsf{E}(X|y_1) & \mathsf{E}(X|y_2) & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

ima enako matematično upanje kot spremenljivka X

$\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|Y)) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \mathsf{E}(X|y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_{ik}$
$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = \mathsf{E}X$

Pogojno matematično upanje zvezne spremenljivke

Zvezna slučajna spremenljivka X ima pri pogoju $Y = y$ pogojno verjetnostno gostoto $p(x|y) = p(x,y)/p_Y(y)$, $x \in \mathbb{R}$ in potemtakem pogojno matematično upanje

$$\mathsf{E}(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|y)dx = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,y)dx$$

Slučajna spremenljivka $\mathsf{E}(X|Y)$ z gostoto $p_Y(y)$ ima enako matematično upanje kot spremenljivka X

$$\mathsf{E}(\mathsf{E}(X|Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{E}(X|y)p_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xp(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} xp_X(x)dx = \mathsf{E}X$$