Primer: transformacije

Naj bo sedaj $f : (x, y) \mapsto (u, v)$ transformacija slučajnega vektorja (X, Y) v slučajni vektor (U, V) določena z zvezama $u = u(x, y)$ in $v = v(x, y)$ – torej $U = u(X, Y)$ in $V = v(X, Y)$.

Porazdelitveni zakon za nov slučajni vektor (U, V) je

$$\begin{aligned} F_{U,V}(u, v) &= P(U < u, V < v) = P((U, V) \in A(u, v)) = \\ &= P((X, Y) \in f^{-1}(A(u, v))) \end{aligned}$$

Pri zvezno porazdeljenem slučajnem vektorju (X, Y) z gostoto $p(x, y)$ je

$$F_{U,V}(u, v) = \int\int_{f^{-1}(A(u,v))} p(x, y) dx dy$$

...Primer: transformacije

Če je f bijektivna z zveznimi parcialnimi odvodi, lahko nadaljujemo

$$F_{U,V}(u,v) = \int\int_{A(u,v)} p(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|dudv$$

kjer je $J(u,v)$ Jacobijeva determinanta.

Za gostoto $q(u,v)$ vektorja (U,V) dobimo od tu

$$q(u,v) = p(x(u,v), y(u,v))|J(u,v)|$$

Pogojne porazdelitve

Naj bo B nek mogoč dogodek, tj. $P(B) > 0$. Potem lahko vpeljemo *pogojno porazdelitveno funkcijo*

$$F(x|B) = P(X < x|B) = \frac{P(X < x, B)}{P(B)}$$

V diskretnem primeru je: $p_{ik} = P(X = x_i, Y = y_k)$, $B = (Y = y_k)$ in $P(B) = P(Y = y_k) = q_k$. Tedaj je pogojna porazdelitvena funkcija

$$\begin{aligned} F_X(x|y_k) &= F_X(x|Y = y_k) = P(X < x|Y = y_k) = \\ &= \frac{P(X < x, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \frac{1}{q_k} \sum_{x_i < x} p_{ik} \end{aligned}$$

Vpeljimo *pogojno verjetnostno funkcijo* z $p_{i|k} = \frac{p_{ik}}{q_k}$.

Tedaj je $F_X(x|y_k) = \sum_{x_i<x} p_{i|k}$.

Zvezne pogojne porazdelitve

Postavimo $B = (y \leq Y < y + h)$ za $h > 0$ in zahtevajmo $P(B) > 0$.

$$\begin{aligned} F_X(x|B) &= P(X < x|B) = \frac{P(X < x, y \leq Y < y + h)}{P(y \leq Y < y + h)} = \\ &= \frac{F(x, y + h) - F(x, y)}{F_Y(y + h) - F_Y(y)} \end{aligned}$$

Če limita za $h \to 0$

$$F_X(x|y) = F_X(x|Y = y) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x, y + h) - F(x, y)}{F_Y(y + h) - F_Y(y)}$$

obstaja, jo imenujemo *pogojna porazdelitvena funkcija* slučajne spremenljivke X glede na dogodek $(Y = y)$.

Gostota zvezne pogojne porazdelitve

Naj bosta gostoti $p(x, y)$ in $p_Y(y)$ zvezni ter $p_Y(y) > 0$. Tedaj je

$$F_X(x|y) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{F(x,y+h)-F(x,y)}{h}}{\frac{F_Y(y+h)-F_Y(y)}{h}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{F'_Y(y)} = \frac{1}{p_Y(y)} \int_{-\infty}^{x} p(u, y)du$$

oziroma, če vpeljemo *pogojno gostoto*

$$p_X(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_Y(y)}$$

tudi $F_X(x|y) = \int_{-\infty}^{x} p_X(u|y)du$.

V primeru dvorazsežne normalne porazdelitve dobimo

$p_X(x|y) : N(\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y), \sigma_x\sqrt{1 - \rho^2})$.

Matematično upanje

Matematično upanje $\mathsf{E}X$ (pričakovana vrednost) je posplošitev povprečne vrednosti diskretne spremenljivke $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots p_n \end{pmatrix}$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} x_i k_i = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$$

od koder izhaja

$$\mathsf{E}X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Diskretna slučajna spremenljivka X z verjetnostno funkcijo p_k ima matematično upanje $\mathsf{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$, če je $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p_i < \infty$.

Zvezna slučajna spremenljivka X z gostoto $p(x)$ ima matematično upanje $\mathsf{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$, če je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx < \infty$.

…Matematično upanje

Primeri slučajnih spremenljivk, za katere matematično upanje ne obstaja:

Diskretna: $x_k = (-1)^{k+1} 2^k / k$, $p_k = 2^{-k}$

Zvezna: $X : p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ – Cauchyeva porazdelitev

Lastnosti matematičnega upanja

Naj bo a realna konstanta. Če je $P(X = a) = 1$, $\mathsf{E}X = a$.

Slučajna spremenljivka X ima matematično upanje natanko takrat, ko ga ima slučajna spremenljivka $|X|$. Velja $|\mathsf{E}X| \leq \mathsf{E}|X|$. Za diskretno slučajno spremenljivko je $\mathsf{E}|X| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|p_i$, za zvezno pa $\mathsf{E}|X| = \int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)dx$.

Velja splošno: matematično upanje funkcije $f(X)$ obstaja in je enako za diskretno slučajno spremenljivko $\mathsf{E}f(X) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)p_i$, za zvezno pa $\mathsf{E}f(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)p(x)dx$, če ustrezni izraz absolutno konvergira.

Naj bo a realna konstanta. Če ima slučajna spremenljivka X matematično upanje, potem ga ima tudi spremenljivka aX in velja $\mathsf{E}(aX) = a\mathsf{E}X$.

Če imata slučajni spremenljivki X in Y matematično upanje, ga ima tudi njuna vsota $X + Y$ in velja $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}X + \mathsf{E}Y$.

. . . Lastnosti matematičnega upanja

Za primer dokažimo zadnjo lastnost za zvezne slučajne spremenljivke.

Naj bo p gostota slučajnega vektorja (X, Y) in $Z = X + Y$. Kot vemo, je $p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x)dx$.

Pokažimo najprej, da Z ima matematično upanje.

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}|X + Y| = \mathsf{E}|Z| = \int_{-\infty}^{\infty} |z| p_Z(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} |z| \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x)dxdz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x + y| p(x, y)dxdy \\
&\le \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x, y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |y| p(x, y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |x| p_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} |y| p_Y(y)dy = \mathsf{E}|X| + \mathsf{E}|Y| < \infty
\end{aligned}
$$

Sedaj pa še zvezo

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}Z = \int_{-\infty}^{\infty} z p_Z(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} z \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x)dxdz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x + y) p(x, y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x p(x, y)dxdy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y p(x, y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y p_Y(y)dy = \mathsf{E}X + \mathsf{E}Y
\end{aligned}
$$

...Lastnosti matematičnega upanja

Torej je matematično upanje E linearen funkcional

$$\mathsf{E}(aX + bY) = a\mathsf{E}X + b\mathsf{E}Y.$$

Z indukcijo posplošimo to na poljubno končno število členov

$$\mathsf{E}(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = a_1\mathsf{E}X_1 + a_2\mathsf{E}X_2 + \cdots + a_n\mathsf{E}X_n$$

Če obstajata matematični upanji $\mathsf{E}X^2$ in $\mathsf{E}Y^2$, obstaja tudi matematično upanje produkta $\mathsf{E}XY$ in velja ocena $\mathsf{E}|XY| \leq \sqrt{\mathsf{E}X^2\mathsf{E}Y^2}$. Enakost velja natanko takrat, ko velja $Y = \pm\sqrt{\mathsf{E}X^2\mathsf{E}Y^2}X$ z verjetnostjo 1.

Če sta slučajni spremenljivki, ki imata matematično upanje, neodvisni, obstaja tudi matematično upanje njunega produkta in velja
$\mathsf{E}XY = \mathsf{E}X \cdot \mathsf{E}Y$.

Opomba: obstajajo tudi odvisne spremenljivke, za katere velja gornja zveza. Spremenljivki, za kateri velja $\mathsf{E}XY \neq \mathsf{E}X \cdot \mathsf{E}Y$ imenujemo *korelirani*.

Disperzija

Disperzija ali *varianca* $\mathsf{D}X$ slučajne spremenljivke, ki ima matematično upanje, je določena z izrazom

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}(X - \mathsf{E}X)^2$$

Disperzija je vedno nenegativna, $\mathsf{D}X \geq 0$, je pa lahko tudi neskončna.

Velja zveza

$$\mathsf{D}X = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$$

Naj bo a realna konstanta. Če je $P(X = a) = 1$, je $\mathsf{D}X = 0$.

$\mathsf{D}aX = a^2\mathsf{D}X$

Če obstaja $\mathsf{D}X$ in je a realna konstanta, obstaja tudi $\mathsf{E}(X - a)^2$ in velja $\mathsf{E}(X - a)^2 \geq \mathsf{D}X$. Enakost velja natanko za $a = \mathsf{E}X$.

Količino $\sigma X = \sqrt{\mathsf{D}X}$ imenujemo *standardna deviacija* ali *standardni odklon*.

Standardizirane spremenljivke

Slučajno spremenljivko X *standardiziramo* s transformacijo

$$X_S = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

kjer sta $\mu = \mathsf{E}X$ in $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}X}$.

Za X_S velja $\mathsf{E}X_S = 0$ in $\mathsf{D}X_S = 1$.

$\mathsf{E}X_S = \mathsf{E}\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\mathsf{E}(X-\mu)}{\sigma} = \frac{\mu-\mu}{\sigma} = 0$

$\mathsf{D}X_S = \mathsf{D}\frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{\mathsf{D}(X-\mu)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2-0}{\sigma^2} = 1$

Matematična upanje in disperzije porazdelitev

porazdelitev	$\mathsf{E}X$	$\mathsf{D}X$
binomska $B(n,p)$	np	npq
Poissonova $P(\lambda)$	λ	λ
Pascalova $P(m,p)$	m/p	mq/p^2
geometrijska $G(p)$	$1/p$	q/p^2
enakomerna zv. $E(a,b)$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
normalna $N(\mu,\sigma)$	μ	σ^2
gama $\Gamma(b,c)$	b/c	b/c^2
hi-kvadrat $\chi^2(n)$	n	$2n$

Kovarianca

Kovarianca $\mathsf{Cov}(X, Y)$ slučajnih spremenljivk X in Y je določena z izrazom

$$\mathsf{Cov}(X, Y) = \mathsf{E}((X - \mathsf{E}X)(Y - \mathsf{E}Y)) = \mathsf{E}XY - \mathsf{E}X\mathsf{E}Y$$

Velja: $\mathsf{Cov}(X, Y) = \mathsf{Cov}(Y, X)$ (simetričnost) in

$\mathsf{Cov}(aX + bY, Z) = a\mathsf{Cov}(X, Z) + b\mathsf{Cov}(Y, Z)$ (bilinearnost).

Če obstajata $\mathsf{D}X$ in $\mathsf{D}Y$, obstaja tudi $\mathsf{Cov}(X, Y)$ in velja

$$|\mathsf{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\mathsf{D}X\mathsf{D}Y} = \sigma X \sigma Y.$$

Enakost velja natanko takrat, ko je

$$Y - \mathsf{E}Y = \pm\frac{\sigma Y}{\sigma X}(X - \mathsf{E}X)$$

z verjetnostjo 1.

Spremenljivki X in Y sta nekorelirani natanko takrat, ko je $\mathsf{Cov}(X, Y) = 0$.

Če imata spremenljivki X in Y končni disperziji, jo ima tudi njuna vsota $X + Y$ in velja

$$\mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y + 2\mathsf{Cov}(X,Y).$$

Če pa sta spremenljivki nekorelirani, je enostavno

$$\mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}X + \mathsf{D}Y.$$

Zvezo lahko posplošimo na

$$\mathsf{D}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}X_i + \sum_{i \neq j} \mathsf{Cov}(X_i, X_j)$$

in za paroma nekorelirane spremenljivke

$$\mathsf{D}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{D}X.$$

Korelacijski koeficient

Korelacijski koeficient slučajnih spremenljivk X in Y je določen z izrazom

$$r(X,Y) = \frac{\mathsf{Cov}(X,Y)}{\sigma X \sigma Y}$$

Velja $r(X,Y) = \frac{\mathsf{E}((X-\mathsf{E}X)(Y-\mathsf{E}Y))}{\sigma X \sigma Y} = \mathsf{E}(X_S Y_S)$.

Za $(X,Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$ je $r(X,Y) = \rho$. Torej sta normalno porazdeljeni slučajni spremenljivki X in Y neodvisni natanko takrat, ko sta nekorelirani.

Velja še: $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$

$r(X,Y) = 0$ natanko takrat, ko sta X in Y nekorelirani.

$r(X,Y) = 1$ natanko takrat, ko je $Y = \frac{\sigma Y}{\sigma X}(X - \mathsf{E}X) + \mathsf{E}Y$ z verjetnostjo 1;

in je $r(X,Y) = -1$ natanko takrat, ko je $Y = -\frac{\sigma Y}{\sigma X}(X - \mathsf{E}X) + \mathsf{E}Y$ z verjetnostjo 1. Torej, če je $|r(X,Y)| = 1$, obstaja med X in Y linearna zveza z verjetnostjo 1.