Funkcije slučajnih spremenljivk

Naj bo $X : G \to \mathbb{R}$ slučajna spremenljivka in $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neka realna funkcija. Tedaj njun produkt $Y = f \circ X$ določen s predpisom $Y(E) = f(X(E))$, za vsak $E \in G$, določa novo preslikavo $Y : G \to \mathbb{R}$. Kdaj je tudi Y slučajna spremenljivka na $(G, \mathcal{D}, P)$?

Za to mora biti za vsak $y \in \mathbb{R}$ množica

$$(Y < y) = \{E \in G : Y(E) < y\} = \{E \in G : X(E) \in f^{-1}(-\infty, y)\}$$

dogodek – torej v $\mathcal{D}$.

Če je to res, imenujemo Y *funkcija slučajne spremenljivke* X in jo zapišemo kar $Y = f(X)$. Njena porazdelitvena funkcija je $F_Y(y) = P(Y < y)$.

Borelove množice

Vprašanje: kakšna mora biti množica A, da je množica

$$X^{-1}(A) = \{E \in G : X(E) \in A\}$$

v $\mathcal{D}$?

zadoščajo množice A, ki so ali intervali, ali števne unije intervalov, ali števni preseki števnih unij intervalov – *Borelove množice*.

Kdaj je $f^{-1}(-\infty, y)$ Borelova množica? Vsekakor je to res, ko je f zvezna funkcija – v nadaljevanju nas bodo zanimali samo taki primeri.

Primer: zvezne strogo naraščajoče funkcije

Naj bo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zvezna in strogo naraščajoča funkcija. Tedaj je taka tudi funkcija f^{-1} in velja

$$\begin{aligned} f^{-1}(-\infty, y) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) < y\} = \{x \in \mathbb{R} : x < f^{-1}(y)\} \\ &= (-\infty, f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

in potemtakem tudi

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P(f(X) < y) = P(X < f^{-1}(y)) = F_X(f^{-1}(y))$$

Če je X porazdeljena zvezno z gostoto $p(x)$, je $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{f^{-1}(y)} p(x)dx$ in, če je f odvedljiva, še $p_Y(y) = p(f^{-1}(y))f^{-1}(y)'$.

Če funkcija ni monotona, jo razdelimo na intervale monotonosti.

Primer: kvadrat normalno porazdeljene spremenljivke

Naj bo $X : N(0,1)$ in $Y = X^2$.

Tedaj je $F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = 0$ za $y \leq 0$; in za $y > 0$

$$F_Y(y) = P(|X| < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

in ker/če je $p_X(x)$ soda funkcija

$$p_Y(y) = p_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + p_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{y}}p_X(\sqrt{y})$$

Vstavimo še standardizirano normalno porazdelitev

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

pa dobimo porazdelitev $\chi^2(1)$.

Funkcije in neodvisnost

Če sta X in Y neodvisni slučajni spremenljivki ter f in g zvezni funkciji na $\mathbb{R}$, sta tudi $U = f(X)$ in $V = g(Y)$ neodvisni slučajni spremenljivki.

V to se prepričamo takole. Za poljubna $u, v \in \mathbb{R}$ velja

$$\begin{aligned}
P(U < u, V < v) &= P(f(X) < u, g(Y) < v) \\
&= P(X \in f^{-1}(-\infty, u), Y \in g^{-1}(-\infty, v)) \\
&\quad (X \text{ in } Y \text{ sta neodvisni je}) \\
&= P(X \in f^{-1}(-\infty, u)) \cdot P(Y \in g^{-1}(-\infty, v)) \\
&\quad (\text{in naprej}) \\
&= P(f(X) < u) \cdot P(g(Y) < v) \\
&= P(U < u) \cdot P(V < v).
\end{aligned}$$

Funkcije slučajnih vektorjev

Imejmo slučajni vektor $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n) : G \to \mathbb{R}^n$ in zvezno vektorsko preslikavo $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tedaj so $Y_j = f_j(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $j = 1, \ldots, m$ slučajne spremenljivke – komponente slučajnega vektorja $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$.

Pravimo tudi, da je Y *funkcija slučajnega vektorja* X, $Y = f(X)$.

Porazdelitve komponent dobimo na običajen način

$$F_{Y_j}(y) = P(Y_j < y) = P(f_j(X) < y) = P(X \in f_j^{-1}(-\infty, y))$$

in, če je X zvezno porazdeljen z gostoto $p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, je

$$F_{Y_j}(y) = \int \int \ldots \int_{f_j^{-1}(-\infty, y)} p(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

Primer: vsota

Naj bo $Z = X + Y$, kjer je (X, Y) zvezno porazdeljen slučajni vektor z gostoto $p(x, y)$. Tedaj je

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z < z) = P(X + Y < z) = \int\int_{x+y<z} p(x, y)dxdy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} p(x, y)dy \end{aligned}$$

in $p_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} p(z - y, y)dy$

Če sta spremenljivki X in Y neodvisni dobimo naprej zvezo

$$p_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z - x)dx$$

$p_Z = p_X * p_Y$ je **konvolucija** funkcij p_X in p_Y.

...Primer: vsota

Če je $(X, Y) : N(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho)$, je vsota $Z = X + Y$ zopet normalno porazdeljena $Z : N(\mu_x + \mu_y, \sqrt{\sigma_x^2 + 2\rho\sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2})$.

Če sta $X : \chi^2(n)$ in $Y : \chi^2(m)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je tudi njuna vsota $Z = X + Y$ porazdeljena po tej porazdelitvi $Z : \chi^2(n + m)$.

Dosedanje ugotovitve lahko združimo v naslednjo:

Če so $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvisne standardizirano normalne slučajne spremenljivke, je slučajna spremenljivka $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ porazdeljena po $\chi^2(n)$.