Lastnosti verjetnosti

1. Za dogodka A in B velja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2. Za dogodke A, B in C velja:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) \;=\; & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ & + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Kako lahko to pravilo posplošimo še na več dogodkov?

Če so dogodki A_i, $i \in I$ paroma nezdružljivi, velja

$$P(\bigcup_{i \in I}) = \sum_{i \in I} P(A_i)$$

Velja tudi za neskončne množice dogodkov.

Aksiomi Kolmogorova

Dogodek predstavimo z množico zanj ugodnih izidov;
gotov dogodek G ustreza univerzalni množici;
nemogoč dogodek pa prazni množici.

Neprazna družina dogodkov $\mathcal{D}$ je *algebra*, če velja:

- $A \in \mathcal{D} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{D}$
- $A, B \in \mathcal{D} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{D}$

Pri neskončnih množicah dogodkov moramo drugo zahtevo posplošiti

- $A_i \in \mathcal{D}, i \in I \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{D}$

Dobljeni strukturi rečemo *σ-algebra*.

Naj bo $\mathcal{D}$ σ-algebra v G. *Verjetnost na G* je preslikava $P : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(G) = 1$
3. Če so dogodki A_i, $i \in I$ paroma nezdružljivi, je

$$P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Trojica $(G, \mathcal{D}, P)$ določa *verjetnostni prostor*. Iz teh treh aksiomov lahko izpeljemo vse ostale lastnosti verjetnosti (Hladnik, str. 12).

...Pogojna verjetnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Skupaj dobimo: $P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)$.

Dogodka A in B sta *neodvisna*, če velja

$$P(A|B) = P(A)$$

Zato za neodvisna dogodka A in B velja $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Za nezdružljiva dogodka A in B velja $P(A|B) = 0$.

Primer: Iz posode, v kateri imamo 8 belih in 2 rdeči krogli, dvakrat na slepo izberemo po eno kroglo. Kolikšna je verjetnost dogodka, da je prva krogla bela (B_1) in druga rdeča (R_2).

1. Če po prvem izbiranju izvlečeno kroglo ne vrnemo v posodo (odvisnost), je:

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1) \cdot P(R_2|B_1) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{9} = 0.18$$

2. Če po prvem izbiranju izvlečeno kroglo vrnemo v posodo (neodvisnost), je:

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1) \cdot P(R_2|B_1) = P(B_1) \cdot P(R_2) = \frac{8}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0.16$$

...Pogojna verjetnost

Dogodka A in B sta neodvisna, če je $P(A|B) = P(A|\overline{B})$.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|(A \cap B))$$

Dogodki A_i, $i \in I$ so *neodvisni*, če je $P(A_j) = P(A_j | \bigcap_{i=1}^{j-1} A_i)$, $j \in I$.

Za neodvisne dogodke A_i, $i \in I$ velja

$$P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$$

Obrazec za razbitja in Bayesov obrazec

Naj bo A_i, $i \in I$ *razbitje* gotovega dogodka: $\bigcup_{i \in I} A_i = G$ in dogodki so paroma nezdružljivi $A_i \cap A_j = N, i \neq j$. Tedaj je za vsak dogodek B

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

Na stvar lahko pogledamo tudi kot na dvokoračni poskus: v prvem koraku se zgodi natanko eden od dogodkov A_i, v drugem pa B.

Včasih nas zanima po uspešnem izhodu tudi drugega koraka, verjetnost tega, da se je na prvem koraku zgodil dogodek A_i. Odgovor dobimo iz zgornjega obrazca in mu pravimo *Bayesov obrazec*:

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B|A_k)}{\sum_{i \in I} P(A_i) \cdot P(B|A_i)}$$

Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov

O zaporedju neodvisnih poskusov $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ govorimo tedaj, ko so verjetnosti izidov v enem poskusu neodvisne od tega, kaj se zgodi v drugih poskusih.

Zaporedje neodvisnih poskusov se imenuje Bernoullijevo zaporedje*, če se more zgoditi v vsakem poskusu iz zaporedja neodvisnih poskusov le dogodek* A *z verjetnostjo* $P(A) = p$ *ali dogodek* $\overline{A}$ *z verjetnostjo* $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - p = q$.

Primer: Primer Bernoullijevega zaporedja poskusov je met kocke, kjer ob vsaki ponovitvi poskusa pade šestica (dogodek A) z verjetnostjo $P(A) = p = 1/6$ ali ne pade šestica (dogodek $\overline{A}$) z verjetnostjo $P(\overline{A}) = q = 5/6$.

V Bernoullijevem zaporedju neodvisnih poskusov nas zanima, kolikšna je verjetnost, da se v n zaporednih poskusih zgodi dogodek A natanko k–krat.

To se lahko zgodi na primer tako, da se najprej zgodi k–krat dogodek A in nato v preostalih $(n-k)$ poskusih zgodi nasprotni dogodek $\overline{A}$:

$$P(\bigcap_{i=1}^{k}(X_i = A) \cap \bigcap_{i=k+1}^{n}(X_i = \overline{A})) = \prod_{i=1}^{k} P(A) \cdot \prod_{i=k+1}^{n} P(\overline{A}) = p^k \cdot q^{n-k}$$

Dogodek $P_n(k)$, da se dogodek A v n zaporednih poskusih zgodi natanko k–krat, se lahko zgodi tudi na druge načine in sicer je teh toliko, na kolikor načinov lahko izberemo k poskusov iz n poskusov. Teh je $\binom{n}{k}$. Ker so ti načini nezdružljivi med seboj, je verjetnost dogodka $P_n(k)$ enaka

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Tej zvezi pravimo *Bernoullijev obrazec*.

... Bernoullijevo zaporedje neodvisnih poskusov

Primer: Iz posode, v kateri imamo 8 belih in 2 rdeči krogli, na slepo izberemo po eno kroglo in po izbiranju izvlečeno kroglo vrnemo v posodo. Kolikšna je verjetnost, da v petih poskusih izberemo 3–krat belo kroglo?

Dogodek A je, da izvlečem belo kroglo. Potem je

$$p = P(A) = \frac{8}{10} = 0.8$$
$$q = 1 - p = 1 - 0.8 = 0.2$$

Verjetnost, da v petih poskusih izberemo 3–krat belo kroglo, je:

$$P_5(3) = \binom{5}{3} 0.8^3 (1 - 0.8)^{5-3} = 0.205$$

Računanje $P_n(k)$

Uporaba rekurzije: $P_n(0) = q^n$

$$P_n(k) = \frac{(n-k+1)p}{kq} P_n(k-1), \qquad k = 1, \ldots$$

Stirlingov obrazec: $$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Poissonov obrazec: za p blizu 0 $$P_n(k) \approx \frac{(np)^k e^{-np}}{k!}$$

Laplaceov točkovni obrazec: $$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

Računanje $P_n(k)$

Program R: Vrednost $P_n(k)$ dobimo z ukazom
`dbinom(`k`,size=`n`,prob=`p`)`

```
> dbinom(50,size=1000,prob=0.05)
[1] 0.05778798
```

Izpeljava rekurzivne zveze

$$\frac{P_n(k)}{P_n(k-1)} = \frac{\binom{n}{k} p^k q^{n-k}}{\binom{n}{k-1} p^{k-1} q^{n-k+1}} =$$

$$= \frac{n!\,(k-1)!(n-k+1)!\,p}{k!(n-k)!\,n!\,q} = \frac{(n-k+1)p}{kq}$$

Torej je res:

$$P_n(k) = \frac{(n-k+1)p}{kq} P_n(k-1), \qquad k = 1, \ldots$$

Laplaceov intervalski obrazec

Zanima nas, kolikšna je verjetnost $P_n(k_1, k_2)$, da se v Bernoullijevem zaporedju neodvisnih poskusov v n zaporednih poskusih zgodi dogodek A vsaj k_1–krat in manj kot k_2–krat.

Označimo $x_k = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ in $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}$.

Tedaj je, če upoštevamo Laplaceov točkovni obrazec

$$P_n(k_1, k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=k_1}^{k_2-1} e^{-\frac{1}{2}x_k^2} \Delta x_k$$

Za (zelo) velike n lahko vsoto zamenjamo z integralom

$$P_n(k_1, k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Funkcija napake $\Phi(x)$

Funkcija napake imenujemo funkcijo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Funkcija napake je liha, zvezno odvedljiva, strogo naraščajoča funkcija. $\Phi(-\infty) = -\frac{1}{2}$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(\infty) = \frac{1}{2}$ in $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x_{k_2}) - \Phi(x_{k_1})$. Vrednosti funkcije napake najdemo v tabelah ali pa je vgrajena v statističnih programih.

```
> x2 <- (50 - 1000*0.05)/sqrt(1000*0.05*0.95)\\[-6pt]
> x1 <- (0 - 1000*0.05)/sqrt(1000*0.05*0.95)\\[-6pt]
> pnorm(x2)-pnorm(x1)\\[-6pt]
\lbrack 1\rbrack\ 0.5

> Phi <- function(x)\{pnorm(x)-0.5\}\\[-6pt]
> curve(Phi,-6,6)
```

Bernoullijev zakon velikih števil

IZREK 1 (J. Bernoulli, 1713) *Naj bo k frekvenca dogodka A v n neodvisnih ponovitvah danega poskusa, v katerem ima dogodek A verjetnost p. Tedaj za vsa $\varepsilon > 0$ velja*

$$\lim_{n\to\infty} P\Big(\Big|\frac{k}{n} - p\Big| < \varepsilon\Big) = 1.$$

Ta izrek opravičuje statistično definicijo verjetnosti.

Slučajne spremenljivke in porazdelitve

Denimo, da imamo poskus, katerega izidi so števila (npr. pri metu kocke so izidi števila pik). Se pravi, da je poskusom prirejena neka količina, ki more imeti različne vrednosti. Torej je spremenljivka. Katero od mogočih vrednosti zavzame v določeni ponovitvi poskusa, je odvisno od slučaja. Zato ji rečemo *slučajna spremenljivka*.

Da je slučajna spremenljivka znana, je potrebno vedeti

1. kakšne vrednosti more imeti (*zaloga vrednosti*) in
2. kolikšna je verjetnost vsake izmed možnih vrednosti ali intervala vrednosti. Predpis, ki določa te verjetnosti, imenujemo *porazdelitveni zakon*.

Slučajne spremenljivke označujemo z velikimi tiskanimi črkami iz konca abecede, vrednosti spremenljivke pa z enakimi malimi črkami. Tako je npr. $(X = x_i)$ dogodek, da slučajna spremenljivka X zavzame vrednost x_i.

Porazdelitveni zakon slučajne spremenljivke X je poznan, če je mogoče za vsako realno število x določiti verjetnost

$$F(x) = P(X < x)$$

$F(x)$ imenujemo *porazdelitvena funkcija*.

Najpogosteje uporabljamo naslednji vrsti slučajnih spremenljivk:

1. *diskretna* slučajna spremenljivka, pri kateri je zaloga vrednosti neka števna množica;
2. *zvezna* slučajna spremenljivka, ki lahko zavzame vsako realno število znotraj določenega intervala.

Lastnosti porazdelitvene funkcije

1. Funkcija F je definirana na vsem $\mathbb{R}$ in velja
$$0 \leq F(x) \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}$$
2. Funkcija F je naraščajoča $x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
3. $F(-\infty) = 0$ in $F(\infty) = 1$
4. Funkcija je v vsaki točki zvezna od leve $F(x-) = F(x)$
5. Funkcija ima lahko v nekaterih točkah skok.
   Vseh skokov je največ števno mnogo.
6. $P(x_1 \leq X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$
7. $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1+)$
8. $P(X \geq x) = 1 - F(x)$
9. $P(X = x) = F(x+) - F(x)$

Diskretne slučajne spremenljivke

Zaloga vrednosti diskretne slučajne spremenljivke X je števna množica $\{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$. Dogodki

$$X = x_k \quad k = 1, 2, \cdots$$

sestavljajo popoln sistem dogodkov.

Označimo verjetnost posameznega dogodka s

$$P(X = x_i) = p_i$$

Vsota verjetnosti vseh dogodkov je enaka 1:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_m + \cdots = 1$$

Verjetnostna tabela

Verjetnostna tabela prikazuje diskretno slučajno spremenljivko s tabelo tako, da so v prvi vrstici zapisane vse vrednosti x_i, pod njimi pa so pripisane pripadajoče verjetnosti:

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_m & \cdots \end{pmatrix}$$

Porazdelitvena funkcija je v tem primeru

$$F(x_k) = P(X < x_k) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i$$

Enakomerna diskretna porazdelitev

Končna diskretna slučajna spremenljivka se porazdeljuje *enakomerno*, če so vse njene vrednosti enako verjetne.

Primer take slučajne spremenljivke je število pik pri metu kocke

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Binomska porazdelitev

Binomska porazdelitev ima zalogo vrednosti $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$ in verjetnosti, ki jih računamo po Bernoullijevem obrazcu:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$k = 0, 1, 2, \cdots, n$. Binomska porazdelitev je natanko določena z dvema podatkoma – parametroma: n in p. Če se slučajna spremenljivka X porazdeljuje binomsko s parametroma n in p, zapišemo:

$$X : \; B(n, p)$$

```
> h <- dbinom(0:15,size=15,prob=0.3)\\[-6pt]
> plot(0:15,h,type='h',xlab='k',ylab='b(n,p)')\\[-6pt]
> points(0:15,h,pch=16,cex=2)
```

Binomska porazdelitev / Primer

Naj bo slučajna spremenljivka X določena s številom fantkov v družini s 4 otroki. Denimo, da je enako verjetno, da se v družini rodi fantek ali deklica: $P(F) = p = 1/2 \quad , \quad P(D) = q = 1/2$. Spremenljivka X se tedaj porazdeljuje binomsko $B(4, 1/2)$ in njena verjetnostna shema je:

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/16 & 4/16 & 6/16 & 4/16 & 1/16 \end{pmatrix}$$

Npr. $P(X = 2) = P_4(2) = \binom{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 (1 - \frac{1}{2})^{4-2} = \dfrac{6}{16}$.

Porazdelitev obravnavane slučajne spremenljivke je simetrična.

Pokazati se da, da je binomska porazdelitev simetrična,
če je $p = 0.5$. Sicer je asimetrična.

Poissonova porazdelitev $P(\lambda)$

Poissonova porazdelitev ima zalogo vrednosti $\{0, 1, 2, \ldots\}$, verjetnostna funkcija pa je

$$p_k = P(\#\texttt{dogodkov} = k) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

kjer je $\lambda > 0$ dani parameter – pogostost nekega dogodka.

Posebno pomembna je v teoriji množične strežbe.

$$p_{k+1} = \frac{\lambda}{k+1} p_k, \quad p_0 = e^{-\lambda}$$

Pascalova porazdelitev $P(m, p)$

Pascalova porazdelitev ima zalogo vrednosti $\{m, m+1, m+2, \ldots\}$, verjetnostna funkcija pa je

$$p_k = \binom{k-1}{m-1} p^m q^{k-m}$$

kjer je $0 < p < 1$ dani parameter – verjetnost dogodka A v posameznem poskusu. Opisuje porazdelitev števila poskusov potrebnih, da se dogodek A zgodi m–krat.

Za $m = 1$, porazdelitvi $G(p) = P(1, p)$ pravimo *geometrijska* porazdelitev. Opisuje porazdelitev števila poskusov potrebnih, da se dogodek A zgodi prvič.

Hipergeometrijska porazdelitev $H(n; M, N)$

Hipergeometrijska porazdelitev ima zalogo vrednosti $\{0, 1, 2, \ldots\}$, verjetnostna funkcija pa je

$$p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

kjer so $k \leq n \leq \min(M, N - M)$ dani parametri.

Opisuje verjetnost dogodka, da je med n izbranimi kroglicami natanko k belih, če je v posodi M belih in $N - M$ črnih kroglic in izbiramo n–krat brez vračanja.

Zvezne slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka X je *zvezno porazdeljena*, če obstaja taka integrabilna funkcija p, imenovana *gostota verjetnosti*, da za vsak $x \in \mathbb{R}$ velja:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt$$

kjer $p(x) \geq 0$. To verjetnost si lahko predstavimo tudi grafično v koordinatnem sistemu, kjer na abscisno os nanašamo vrednosti slučajne spremenljivke, na ordinatno pa gostoto verjetnosti $p(x)$. Verjetnost je tedaj predstavljena kot ploščina pod krivuljo, ki jo določa $p(x)$. Velja $p(x) = F'(x)$ ter

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1 \quad \text{in} \quad P(x_1 \leq X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(t)dt.$$