Verjetnost

- Osnovni pojmi
- Računanje z dogodki
- Verjetnost
- Pogojna verjetnost
- Relejni poskusi

Osnovni pojmi

Verjetnostni račun obravnava zakonitosti, ki se pokažejo v velikih množicah enakih ali vsaj zelo podobnih pojavov. Predmet verjetnostnega računa je torej empirične narave in njegovi osnovni pojmi so povzeti iz izkušnje.

Osnovni pojmi v verjetnostnem računu so:
1. POSKUS
2. DOGODEK
3. VERJETNOST DOGODKA

Poskus je realizacija neke množice skupaj nastopajočih dejstev (kompleksa pogojev).
Poskus je torej vsako dejanje, ki ga opravimo v natanko določenih pogojih.

Primera:

- met igralne kocke,
- iz kupa dvajsetih igralnih kart izberemo eno karto.

Pojav, ki v množico skupaj nastopajočih dejstev ne spada in se lahko v posameznem poskusu zgodi ali pa ne imenujemo **dogodek**. Poskuse lahko neomejeno ponavljamo.

Primer: Pri poskusu meta igralne kocke je na primer dogodek, da vržemo šest pik.

Poznamo več vrst dogodkov ti so lahko:
1. GOTOVI(G)- To so dogodki, ki se zgodijo ob vsaki ponovitvi poskusa.
Primer: Dogodek, da vržemo $1, 2, 3, 4, 5$ ali 6 pik pri metu igralne kocke.

2. NEMOGOČI(N)- To so dogodki, ki se ne zgodijo nikoli.
Primer: Dogodek, da vržemo 7 pik pri metu igralne kocke.

3. SLUČAJNI- To so dogodki, ki se včasih zgodijo včasih pa ne.
Primer: Dogodek, da vržemo 6 pik pri metu igralne kocke.

Računanje z dogodki

1. Dogodek A je način dogodka B ($A \subset B$), če se vsakič, ko se zgodi dogodek A, zagotovo zgodi tudi dogodek B.

Primer: Pri metu kocke je dogodek A, da pade šest pik, način dogodka B pa, da pade sodo število pik.

2. Če je dogodek A način dogodka B in dogodek B način dogodka A, potem sta se dogodka zgodila hkrati.

3. **Vsota dogodkov** A in B ($A \cup B$) je, če se zgodi vsaj eden od dogodkov A in B.

Primer: Vsota dogodka A, da vržemo sodo število pik in dogodka B, da vržemo liho število pik je gotov dogodek. Velja:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cup N = A;$$

$$A \cup G = G; \quad A \cup A = A.$$

4. **Produkt dogodkov** A in B ($A \cap B$) se imenuje dogodek, če se zgodita A in B hkrati.

Primer: Produkt dogodka A, da vržemo sodo število pik, in dogodka B, da vržemo liho število pik je nemogoč dogodek. Velja:

$$A \cap B = B \cap A; \quad A \cap N = N,$$

$$A \cap G = A; \quad A \cap A = A.$$

(komutativnost)

5. Dogodku A **nasproten dogodek** $\overline{A}$ imenujemo negacijo dogodka A.

Primer: Nasproten dogodek dogodku, da vržemo sodo število pik, je dogodek, da vržemo liho število pik. Velja:

$$A \cap \overline{A} = N; \quad A \cup \overline{A} = G$$

$$\overline{N} = G; \quad \overline{(\overline{A})} = A.$$

6. Dogodka A in B sta **nezdružljiva**, če se ne moreta zgoditi hkrati, njun produkt je torej nemogoč dogodek $A \cap B = N$.

Primer: Dogodka, da pri metu kocke pade sodo število pik (A) in da pade liho število pik (B) sta nezdružljiva.

Poljuben dogodek in njegov nasprotni dogodek sta vedno nezdružljiva. Ob vsaki ponovitvi poskusa se zagotovo zgodi eden od njiju, zato je njuna vsota gotov dogodek.

$$A \cap \overline{A} = N \qquad \wedge \qquad A \cup \overline{A} = G.$$

7. Če lahko dogodek A izrazimo kot vsoto nezdružljivih in mogočih dogodkov, rečemo, da je A **sestavljen dogodek**. Dogodek, ki ni sestavljen imenujemo **elementaren dogodek**.

Primer: Pri metu kocke je šest elementarnih dogodkov.

8. Množico dogodkov $S = \{A_1, A_2, ...A_n\}$ imenujemo **popoln sistem dogodkov**, če se v vsaki ponovitvi zgodi natanko eden od dogodkov iz množice S.

$$A_i \neq N,$$

$$A_i \cap A_j = N; i \neq j.$$

To pomeni, da so vsi mogoči dogodki paroma nezdružljivi in njihova vsota je gotov dogodek.

$$A_1 \cup A_2 \cup ...... \cup A_n = G$$

Primer: Popoln sistem pri metu kocke.

Verjetnost

Denimo, da smo n-krat ponovili dan poskus in da se je k-krat zgodil dogodek A. Ponovitve poskusa v katerih se A zgodi, imenujemo ugodne za dogodek A, število $f(A)$ pa je relativna frekvenca dogodka A v opravljenem poskusu.

$$f(A) = \frac{k}{n}$$

Statistični zakon, ki ga kaže izkušnja: Če poskus X dolgo ponavljamo se relativna frekvenca slučajnega dogodka ustali in sicer skoraj zmeraj toliko bolj, kolikor več ponovitev poskusa opravimo.

To temeljno zakonitost so empirično preverjali na več načinov. Najbolj znan je poskus s kovanci, kjer so določali relativno frekvenco grba na kovancu. Ti poskusi kažejo, da se relativna frekvenca grba pri metih običajno ustali blizu $0,5$.

Osnovne lastnosti verjetnosti

1. Ker je relativna frekvenca vedno nenegativna je verjetnost
$$P(A) \geq 0$$
2. $P(G) = 1$

3. Naj bosta dogodka A in B nezdružljiva. Potem velja:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
4. Lahko predpostavimo še eno lastnost: verjetnost nemogočega dogodka je enaka 0.

Klasična definicija verjetnosti: Vzemimo, da so dogodki iz popolnega sistema dogodkov $\{E_1, E_2....E_s\}$ enako verjetni

$$P(E_1) = P(E_2) = \cdots = P(E_s) = p.$$

Tedaj je verjetnost enega od dogodkov:

$$P(E_i) = \frac{1}{s}, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Če je nek dogodek A sestavljen iz k dogodkov iz tega popolnega sistema dogodkov, potem je njegova verjetnost:

$$P(A) = \frac{k}{s}.$$

Še dve lastnosti verjetnosti:
1. Za poljubna dogodka A in B (torej tudi v primeru, ko je $A \cap B \neq N$) velja:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Primer: Denimo, da je verjetnost, da študent naredi izpit iz sociologije $P(S) = 2/3$. Verjetnost, da naredi izpit iz politologije $P(P) = 5/9$. Če je verjetnost, da naredi vsaj enega od obeh $P(S \cup P) = 4/5$, je verjetnost, da naredi oba izpita enaka:

$$P(S \cap P) = P(S) + P(P) - P(S \cup P).$$

2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Primer: 32 kart, povlečemo 3 krat. Kolikšna je verjetnost, da je med tremi kartami vsaj en as?

Vseh dogodkov v popolnem sistemu je $\binom{32}{3}$, ugodni so tisti, kjer zbiramo med ne-asi to je $\binom{28}{3}$. Torej je:

$$P(\overline{A}) = \frac{\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}} = 0,66.$$

Pogojna verjetnost

Opazujemo dogodek A ob poskusu X, ki je realizacija kompleksov pogojev K. Verjetnost dogodka A je tedaj $P(A)$. Kompleksu pogojev K pridružimo dogodek B. Realizacija tega kompleksa pogojev $K' = K \cap B$ je poskus X' in verjetnost dogodka A v tem poskusu $P'(A)$, ki se z verjetnostjo $P(A)$ ujema ali pa ne. Poskus X' je poskus X s pogojem B in verjetnostjo $P'(A)$.

Pogojno verjetnost dogodka A glede na dogodek B zapišemo takole:

$$P'(A) = P(A/B).$$

Pogojna verjetnost $P(A/B)$ v poskusu X' je verjetnost dogodka A v poskusu X pri pogoju B.

$$P'(A) = P(A/B) = P_B(A)$$

Denimo, da smo n-krat ponovili poskus X. Ob tem se je K_B-krat zgodil dogodek B. Poskus X' smo napravili K_B-krat. Dogodek A se je zgodil, le če se je zgodil dogodek B, to je $A \cap B$, ki se je zgodil ob ponovitvi poskusa $K_A \cap B$-krat.

Relativna frekvenca dogodka A je:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

kjer je pogoj $P(B) > 0$.

Pogojna verjetnost ima iste lastnosti kot brezpogojna:

$$0 \leq P(A/B) \leq 1.$$

Primer: V nekem naselju je 900 prebivalcev. Zanima nas struktura prebivalstva po spolu in po zaposlenosti. Podatke po obeh spremenljivkah uredimo v tabelo:

	zap.	nezap.	skupaj
moški	460	40	500
ženske	240	160	400
skupaj	700	200	900

Poglejmo si kakšna je verjetnost, da je slučajno izbrana oseba moški, pri pogoju, da je zaposlen.
Z = {oseba je zaposlena}
M = {oseba je moški}

$$P(Z) = \frac{700}{900}$$

$$P(M \cap Z) = \frac{460}{900}$$

Verjetnost, da je oseba moški pri pogoju, da je zaposlen:

$$P(M/Z) = \frac{P(M \cap Z)}{P(Z)} = \frac{(460 \cdot 900)}{(900 \cdot 700)} = \frac{460}{700}.$$

Neposredno iz tabele lahko preberemo, kakšna je verjetnost, da je oseba moški, pri pogoju, da je ta oseba zaposlena:

$$P(M/Z) = \frac{460}{700}.$$

Iz formule za pogojno verjetnost sledi:

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B),$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A).$$

Torej velja:

$$P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B).$$

Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja:

$$P(A/B) = P(A).$$

Zato za neodvisna dogodka velja:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Primer: Iz posode v kateri imamo 8 belih in 2 rdeči krogli dvakrat na slepo izberemo po eno kroglo. Kolikšna je verjetnost dogodka, da je prva krogla bela in druga rdeča?

B_1= {prva izvlečena krogla je bela}

R_2= {druga izvlečena krogla je rdeča}

a) Če po prvem vlečenju krogle ne vrnemo v posodo (odvisna dogodka):

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P(R_2/B_1) = 0,18.$$

b) Če po prvem vlečenju kroglo vrnemo v posodo (neodvisna dogodka):

$$P(B_1 \cap R_2) = P(B_1)P(R_2/B_1) = P(B_1)P(R_2) = 0,16.$$

Večstopenjski poskusi

Poskus poteka v več stopnjah in šele izidi na prejšnjih stopnjah določajo, kako bo potekal poskus na naslednji stopnji. V našem primeru se bomo omejili na poskus z dvema stopnjama.

Prva stopnja: $H_1, H_2 ... H_n$ so vsi mogoči izidi, ki jih imenujemo hipoteze. Hipoteze sestavljajo popolen sistem dogodkov, če je

$$H_i \cap H_j = N, \quad za \quad i \neq j; \quad \cup_{i=1}^{n} H_i = G.$$

Hipoteze so enostavni dogodki.

Druga stopnja: naj bo A eden izmed mogočih dogodkov. Zanima nas verjetnost dogodka A, če poznamo verjetnosti $P(H_1), \cdots P(H_n)$ in pogojne verjetnosti $P(A/H_1), \ldots, P(A/H_n)$. Ker je $H_1 \cup H_2 \cdots H_n = G$ in $A \cap G = A$, lahko zapišemo

$$A = A \cap (H_1 \cup H_2 \cdots H_n) = (A \cap H_1) \cup \cdots \cup (A \cap H_n).$$

Ker so dogodki $A \cap H_i$ paroma nezdružljivi, velja:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i).$$

Enačba za popolno verjetnost dogodka A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i).$$