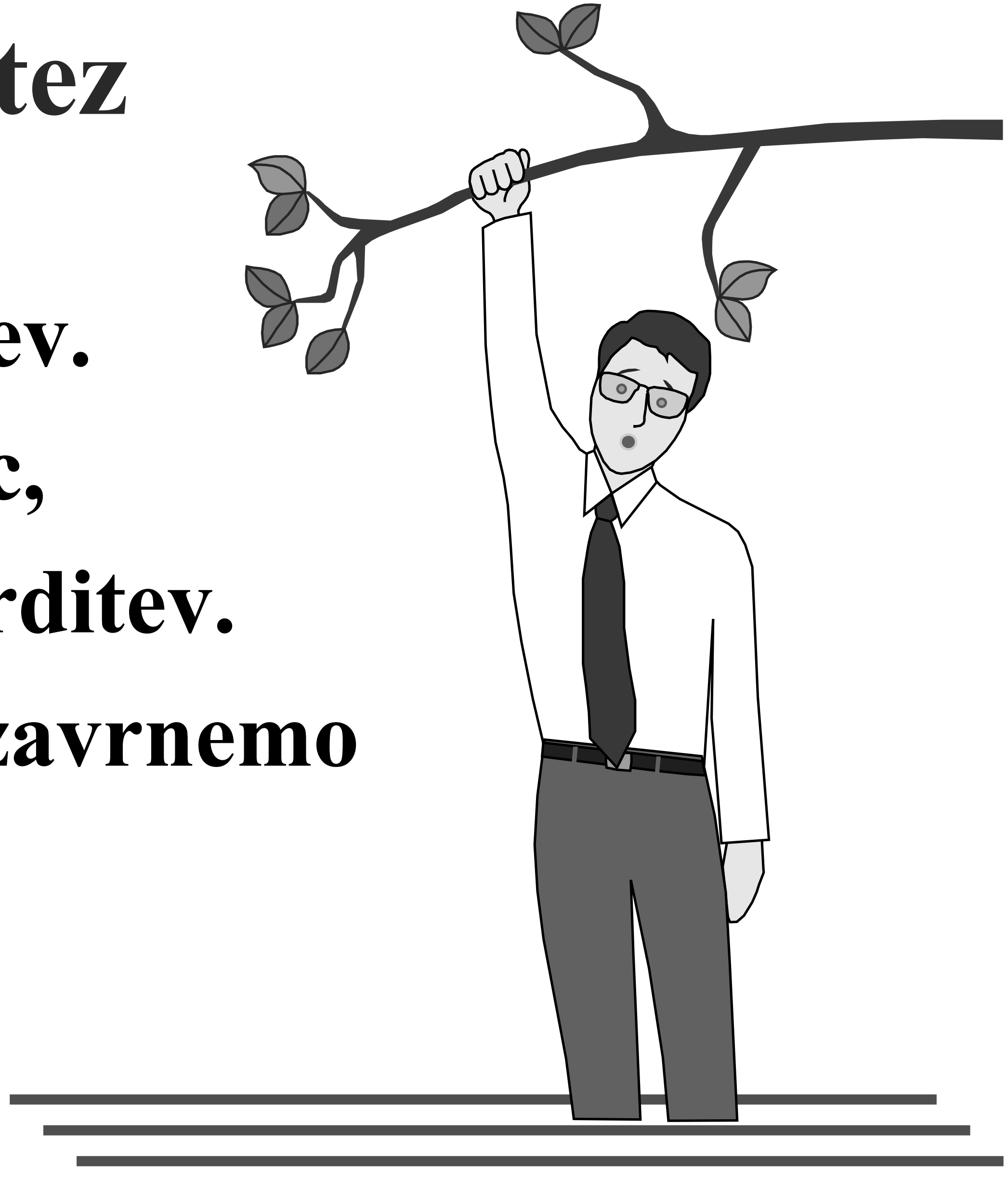
Testiranje hipotez

Testiranje hipotez

1. Postavimo trditev.
2. Izberemo vzorec, da preverimo trditev.
3. Sprejmemo ali zavrnemo trditev.



Hipoteza je testirana z določanjem verjetja, da dobimo določen rezultat, kadar jemljemo vzorce iz populacije s predpostavljenimi vrednostmi parametrov.

Ničelna HIPOTEZA

H_0: $\mu = 9$ mm

Premer 9 milimeterskega kroga,

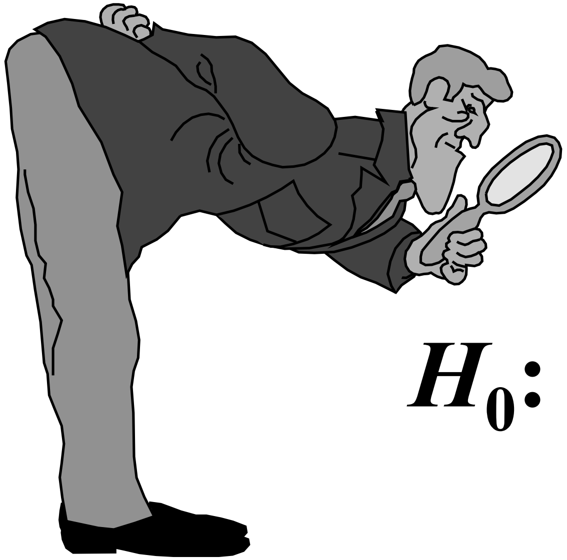
H_0: $\mu = 600$ km

Proizvajalec trdi, da je to
doseg novih vozil,

H_0: $\mu = 3$ dnevi

Čas odsotnosti določenga artikla
pri neposredni podpori.

Ne-usmerjena alternativna hipoteza

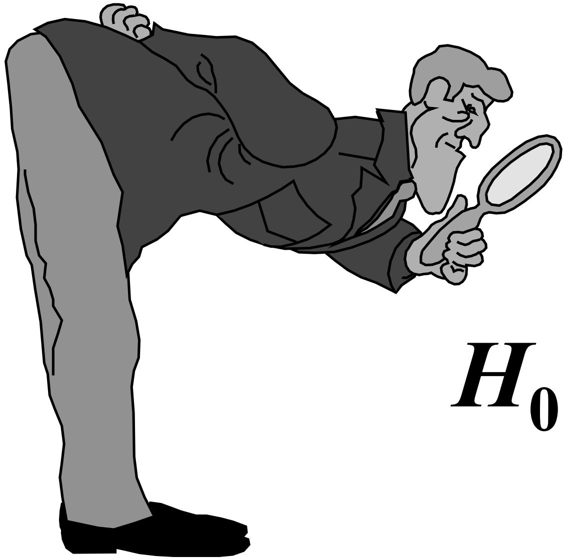


H_0: μ = 9 milimetrov

H_a: μ ni enak 9 milimetrov

Premer 9 milimetrskega kroga

Manj kot alternativna hipoteza



H_0: $\mu = 600$ km

H_a: $\mu < 600$ km

Proizvajalec trdi, da je to doseg novih vozil

Več kot alternativna hipoteza

H_0: $\mu = 3$ **dnevi**

H_a: $\mu > 3$ **dnevi**

Čas odsotnosti določenga artikla pri neposredni podpori.

dejansko stanje

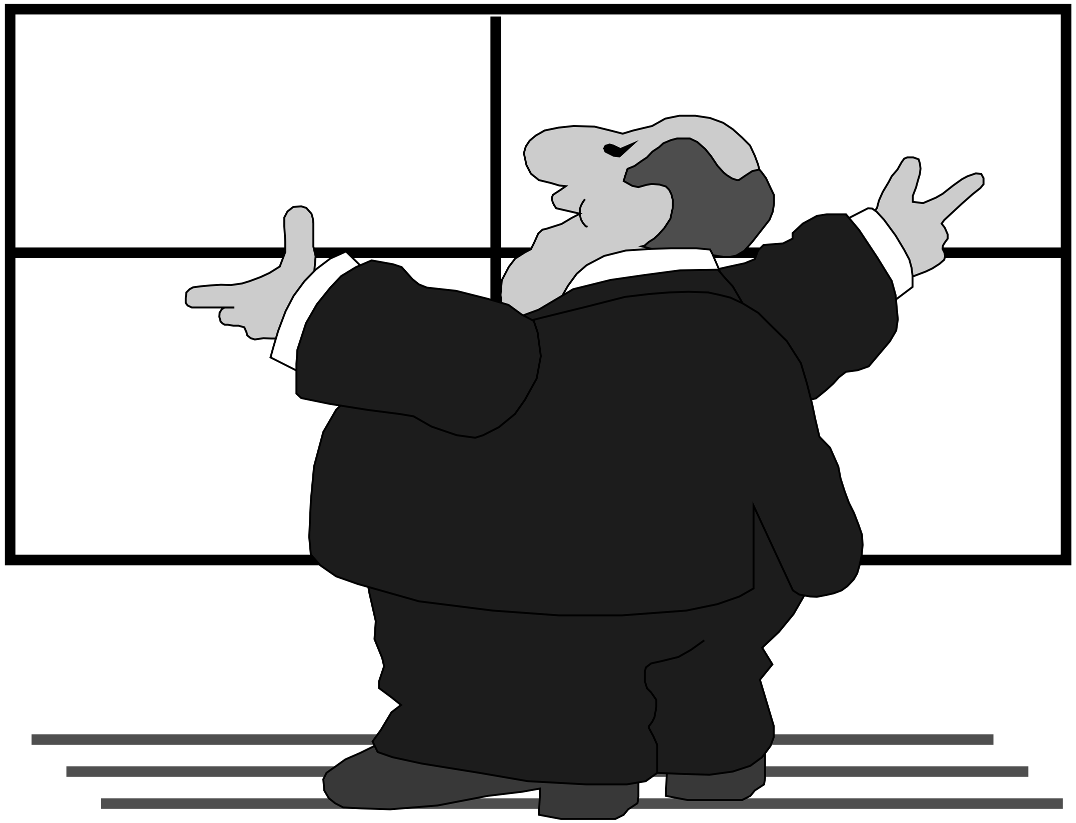
H_0 drži

H_0 ne drži

odločitev

zavrni H_0

ni osnove za zavrnitev H_0



dejansko stanje

odločitev	**H_0 drži**	**H_0 ne drži**
zavrni H_0		pravilna odločitev
ni osnove za zavrnitev H_0	pravilna odločitev	

odločitev

dejansko stanje

	H_0 drži	H_0 ne drži
zavrni H_0	napaka 1.stopnje P(napaka 1.vrste)=α	
ni osnov za zavrnitev H_0		

dejansko stanje

Odločitev

	H_0 drži	H_0 ne drži
Zavrni H_0		
ni osnov za zavrnitev H_0		napaka 2. stopnje P(napaka 2.vrste)=β

dejansko stanje

odločitev

	H_0 drži	H_0 ne drži
zavrni H_0	napaka 1.vrste	pravilna odločitev
ni osnove za zavrnitev H_0	pravilna odločitev	napaka 2.vrste

Definicije

1. **Zavrnitev ničelne hipoteze, če je le-ta pravilna, je napaka 1. vrste.**

   Verjetnost, da naredimo napako 1. vrste, označimo s simbolom α in ji pravimo stopnja tveganja,

   $(1- \alpha)$ pa je stopnja zaupanja.

2. **Če ne zavrnemo ničelno hipotezo, v primeru, da je napačna, pravimo, da gre za napako 2. vrste.**

   Verjetnost, da naredimo napako 2. vrste, označimo s simbolom β.

Definicije

3. Moč statističnega testa, (1 - β),

je verjetnost zavrnitve ničelne hipoteza v primeru, ko je le-ta v resnici napačna.

Naloga 9.4 na strani 429

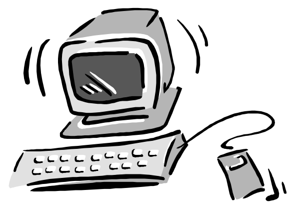
Pascal je visoko-nivojski programski jezik, ki smo ga nekoč pogosto uporabljali na miniračunalnikih in microprocesorjih.

Narejen je bil eksperiment, da bi ugotovili delež Pascalovih spremenljivk, ki so tabelarične spremenljivke (v kontrast skalarim spremenljivkam, ki so manj učinkovite, glede na čas izvajanja).

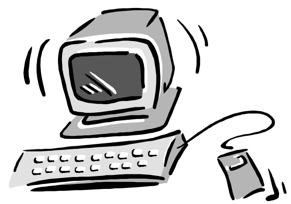
20 spremenljivk je bilo naključno izbranih iz množice Pascalskih programov in *y*, število array spremenljivk je bilo zabeleženo.

Predpostavimo, da želimo testirati hipotezo, da je Pascal bolj učinkovit jezik kot Algol, pri katerem je 20% spremenljivk tabelaričnih spremenljivk. To pomeni, da bomo testirali H_0: $p = 0{,}20$, proti H_a: $p > 0{,}20$, kjer je p verjetnost da imamo array spremenljivko na vsakem poskusu. (Predpostavimo, da je 20 poskusov neodvisnih.)

a. Določi α za območje zavrnitve $y \geq 8$.



b. **Določi α za območje zavrnitve $y \geq 5$.**

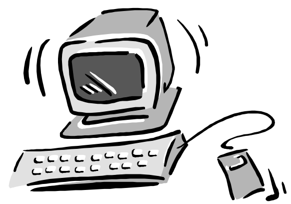


c. Določi β za območje zavrnitve

$y \geq 8$, če je $p = 0{,}5$.

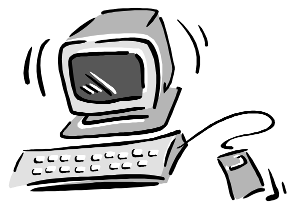
[Pozor: Dosedanje izkušnje so pokazale, da je približno polovica spremenljivk v večini Pascalskih programov tabelaričnih spremenljivk.]

d. Določi β za območje zavrnitve $y \geq 5$, če je $p = 0,5$.



e. **Katero od območij zavrnitve:**
$y \geq 8$ ali $y \geq 5$ je bolj zaželjeno,
če želimo minimizirati
verjetnost napako 1. stopnje?

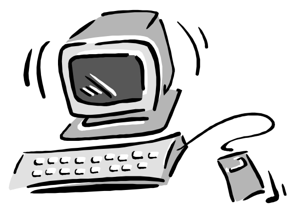
Napako 2. stopnje?



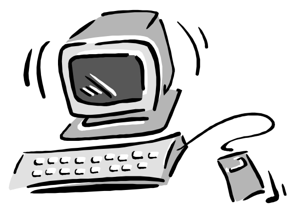
f. Določi območje zavrnitve oblike

$y \geq a$ tako, da je α približno 0,01.

g. **Za območje zavrnitve določeno v točki (f), določi moč testa, če je v resnici $p = 0{,}4$.**



h. Za območje zavrnitve določeno v točki (f), določi moč testa, če je v resnici $p = 0{,}7$.

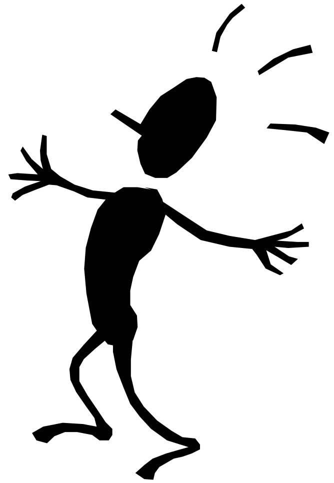


Formalen postopek za testiranje hipotez

1. Postavi hipotezo:
   ničelna,
   alternativna.
2. Določi odločitveno pravilo.
3. Zberi/manipuliraj podatke.
4. Izračunaj testno statistiko.
5. Primerjaj in naredi zaključek.

I. $$H_0 : \mu = \mu_0$$

Če poznamo odklon σ, potem



$$\text{T.S.} = \frac{\overline{y} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

sledi
***z*-porazdelitev.**

II. $H_0 : \mu = \mu_0$

Če ne poznamo odklona σ in je *n* večji ali enak 30, potem

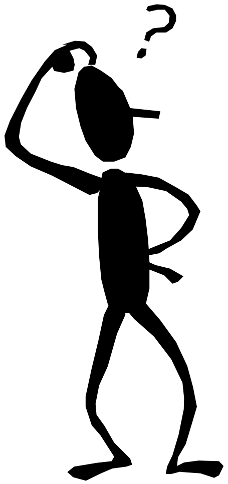
$$\text{T.S.} = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

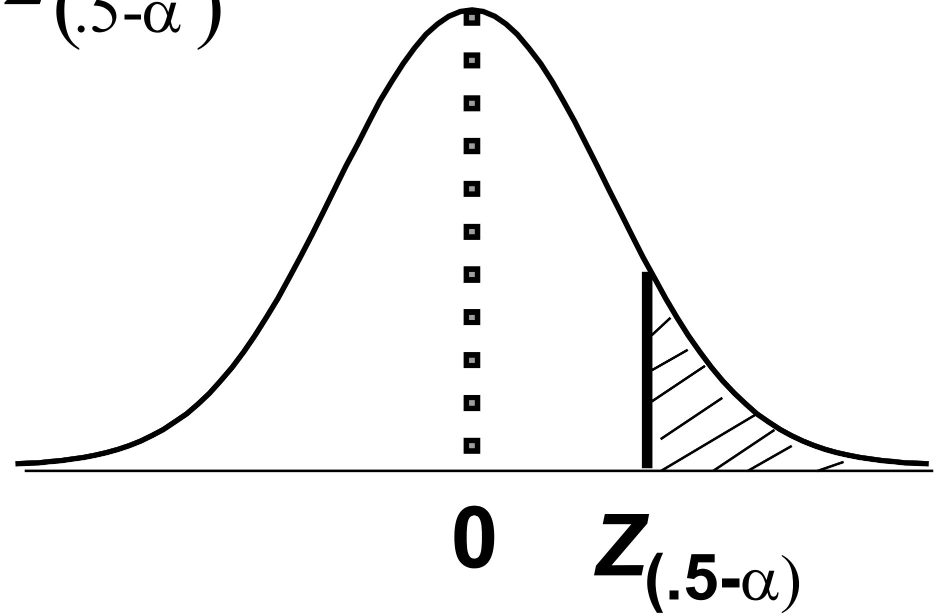
sledi *z*-porazdelitev.

Za $H_a : \mu > \mu_0$

odločitveno pravilo: zavrni H_0

če je T.S. $\geq z_{(.5-\alpha)}$

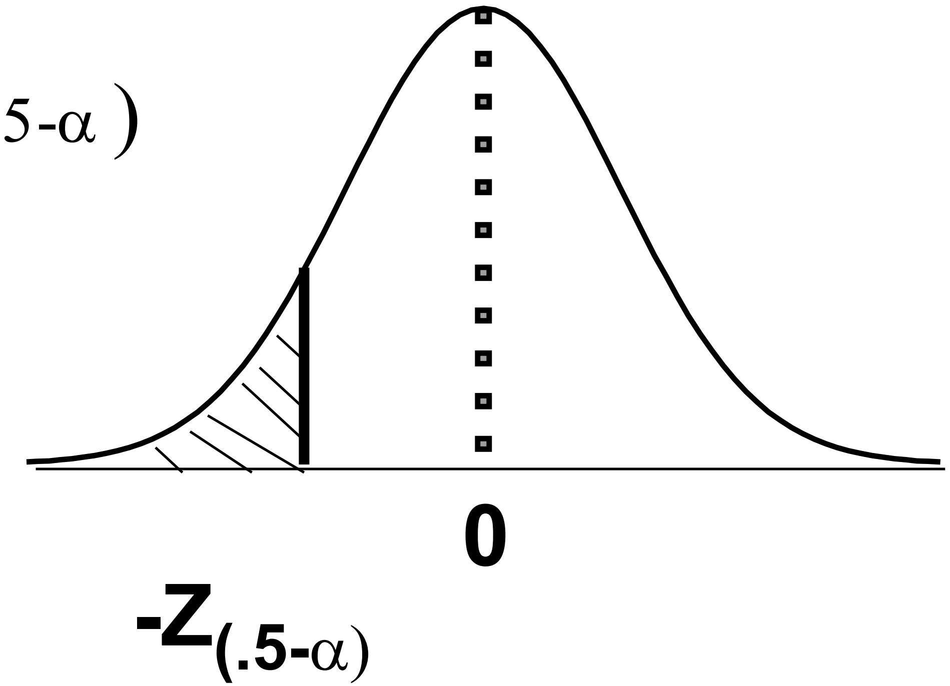




Za $H_a : \mu < \mu_0$

odločitveno pravilo: zavrni H_0

če je T.S. $\leq -z_{(.5-\alpha)}$

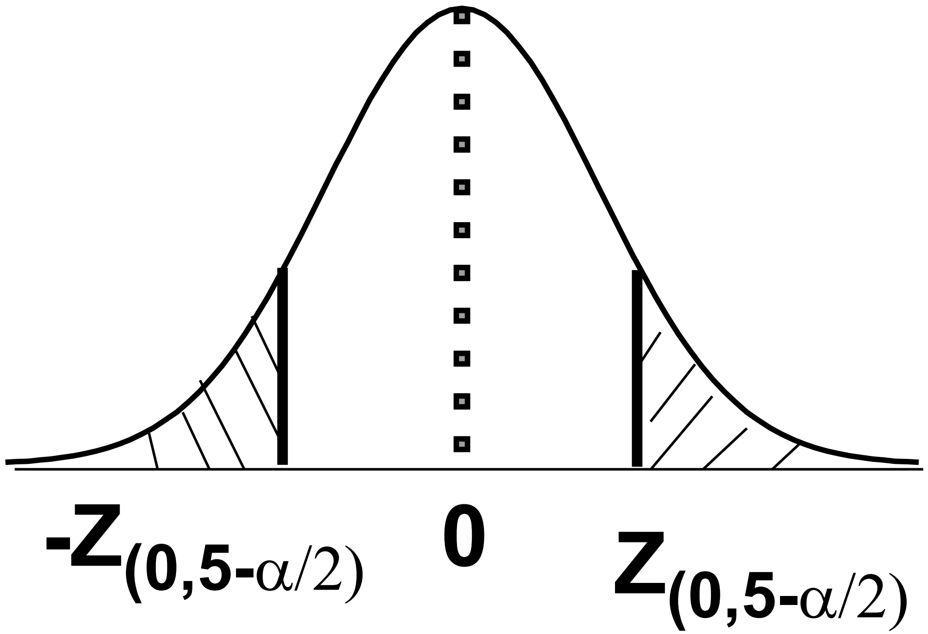


Za $H_a : \mu \neq \mu_0$

odločitveno pravilo: zavrni H_0

če je T.S. $\leq$ **-** $z_{(0,5-\alpha)}$

ali če je T.S. $\geq$ $z_{(0,5-\alpha)}$



$-Z_{(0,5-\alpha/2)}$
0
$Z_{(0,5-\alpha/2)}$

p-vrednost

***p*-vrednost** **ali ugotovljena bistvena stopnja za določen statistični test je verjetnost (ob predpostavki, da drži H_0) da ugotovimo vrednost testne statistike, ki je vsaj toliko v protislovju z ničelno hipotezo, in podpira alternativno hipotezo kot tisto, ki je izračunana iz vzorčnih podatkov.**

III. $$H_0 : \mu = \mu_0$$

Če ne poznamo odklona σ, populacija je normalna, in je *n* manjši od 30, potem

$$\text{T.S.} = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

sledi *t*-porazdelitev z *n*-1 prostostnimi stopnjami.

Data into Minitab

Ex9-23.MTW

C1
2610
2750
2420
2510
2540
2490
2680

T-Test of the Mean

Test of mu = 2500.0 vs mu > 2500.0

	N	MEAN	STDEV	SE MEAN
C1	7	2571.4	115.1	43.5

T	*p*-VALUE
1.64	0.076

Razlaga *p*-vrednosti

1. **Izberi največjo vrednost za α, ki smo jo pripravljeni tolerirati.**

2. **Če je *p*-vrednost testa manjša kot maksimalna vrednost parametra α, potem zavrni ničelno hipotezo.**

IV. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$

Če poznamo σ_1 in σ_2 in jemljemo vzorce neodvisno, potem

$$\mathrm{T.S.} = \frac{\left(\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right) - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

sledi *z*-porazdelitev.

V. $$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$$

Če ne poznamo σ_1 in/ali σ_2, ter jemljemo vzorce neodvisno,
n_1 je večji ali enak 30 in/ali
n_2 je večji ali enak 30, potem

$$\mathrm{T.S.} = \frac{\left(\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right) - D_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

sledi
***z*-porazdelitev.**

VI. $$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$$

Če ne poznamo σ_1 in/ali σ_2,
vzorce jemljemo neodvisno,
populacija je normalno porazdeljena,
varianci obeh populacij sta enaki,
n_1 je manj kot 30 ali n_2 je manj kot 30,
potem

T.S.=

$$\frac{\left(\bar{y}_1-\bar{y}_2\right)-D_0}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1{}^2+(n_2-1)s_2{}^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

sledi *t*-porazdelitev z n_1+n_2-2 stopnjami prostosti.

Privzeli smo:

1. Populaciji iz katerih jemljemo vzorce imata obe približno normalno relativno porazdelitev frekvenc.
2. Varianci obeh populacij sta enaki.
3. Naključni vzorci so izbrani neodvisno iz obeh populacij.

VII. $$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = D_0$$

Če ne poznamo σ_1 in/ali σ_2,
vzorce jemljemo neodvisno,
populaciji sta normalno porazdeljeni,
varianci populacij nista enaki,
n_1 je manj kot 30 ali n_2 je manj kot 30,
potem

$$\text{T.S.} = \frac{\left(\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right) - D_0}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$$

sledi *t*-porazdelitev
z ν prostostnimi stopnjami.

kjer je

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} \right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2} \right)^2}{n_2 - 1}}$$

Če ν ni naravno število, zaokroži ν navzdol do najbližjega naravnega števila za uporabo *t* tabele.

VIII. $H_0 : \mu_d = D_0$

Če vzorce ne jemljemo neodvisno, in je *n* večji ali enak 30, potem je

$$\text{T.S.} = \frac{\bar{d} - D_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

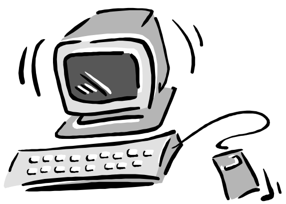
sledi *z*-porazdelitev.

IX. Če vzorce ne jemljemo neodvisno, potem je populacija razlik normalno porazdeljena in je *n* manjši od 30, potem

$$\text{T.S.} = \frac{\bar{d} - D_0}{\frac{s_d}{\sqrt{n}}}$$

sledi *t*-porazdelitev z *n*-1 prostostnimi stopnjami.

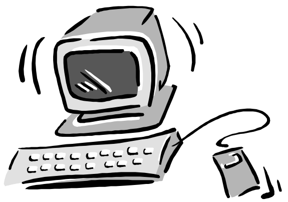
naloga	člověk. urnik	avtomatizirana metoda
1	185,4	180,4
2	146,3	248,5
3	174,4	185,5
4	184,9	216,4
5	240,0	269,3
6	253,8	249,6
7	238,8	282,0
8	263,5	315,9



Naloga	človek. urnik	avtomatizirana metoda	razlika
1	185,4	180,4	5,0
2	146,3	248,5	-102,2
3	174,4	185,5	-11,1
4	184,9	216,4	-31,5
5	240,0	269,3	-29,3
6	253,8	249,6	4,2
7	238,8	282,0	-43,2
8	263,5	315,9	-52,4

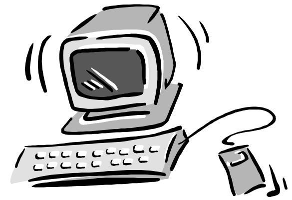
Data into Minitab

Ex9-40.MTW



C1	C2
185,4	180,4
146,3	248,5
174,4	185,5
184,9	216,4
240,0	269,3
253,8	249,6
238,8	282,0
263,5	315,9

T-test za parjenje in interval zaupanja



Parjen *T* za C1 - C2

	N	povpr.	StDev	SE povpr.
C1	8	210,9	43,2	15,3
C2	8	243,4	47,1	16,7
Razlika	8	-32,6	35,0	12,4

95% IZ za razliko povprečja: (-61,9; -3,3)

T-Test za razliko povpr. = 0 (vs ni = 0):

T-vrednost = -2,63 P-vrednost = 0,034

X. $$H_0 : p = p_0$$

Če je *n* dovolj velik, potem

$$\text{T.S.} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0 q_0}{n}}}$$

sledi
***z*-porazdelitev.**

Kot splošno pravilo, bomo zahtevali, da velja

$$n\hat{p} \geq 4 \quad \text{in} \quad n\hat{q} \geq 4.$$

Velik vzorec za testiranje hipoteze o $p_1 - p_2$

Kot splošno pravilo, bomo zahtevali, da velja

$$n_1\hat{p}_1 \geq 4, \qquad n_1\hat{q}_1 \geq 4,$$
$$n_2\hat{p}_2 \geq 4 \quad \text{in} \quad n_2\hat{q}_2 \geq 4.$$

XI. Velik vzorec za testiranje hipoteze o $p_1 - p_2$ kadar je D_0 enak 0

$$\text{T.S.} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2)}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

kjer je

$$\hat{p} = \frac{y_1 + y_2}{n_1 + n_2}$$

Testne statistike sledijo *z*-porazdelitev.

XII. Velik vzorec za testiranje hipoteze o $p_1 - p_2$ kadar D_0 ni enak 0

$$\text{T.S.} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - D_0}{\sqrt{\dfrac{\hat{p}_1 \hat{q}_1}{n_1} + \dfrac{\hat{p}_2 \hat{q}_2}{n_2}}}$$

Testne statistike sledijo *z*-porazdelitev.

Primer

Neka tovarna cigaret proizvaja dve znamki cigaret. Ugotovljeno je, da ima 56 od 200 kadilcev raje znamko *A* in da ima 29 od 150 kadilcev raje znamko *B*.

Testiraj hipotzo pri 0.06 level of significance, da bo prodaja znamke *A* boljša od prodaje znamke *B* za 10% proti alternativni hipotezi, da bo razlika manj kot 10%.

XIII. Testiranje hipoteze o varianci σ^2 populacije

Ničelna hipoteza

$$H_0\text{:}\ \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Testiranje hipoteze o varianci σ^2 populacije

Če je H_a: $\sigma^2 > \sigma_0^2$,

potem je odločitveno pravilo

zavrni ničelno hipotezo, če je test statistike večji ali enak $\chi^2_{(\alpha,\, n-1)}$.

Testiranje hipoteze o varianci σ^2 populacije

Če je H_a: $\sigma^2 < \sigma_0^2$,

potem je odločitveno pravilo

zavrni ničelno hipotezo, če je test statistike manjši ali enak $\chi^2_{(1-\alpha,\, n-1)}$.

Testiranje hipoteze o varianci σ^2 populacije

Če je H_a: σ^2 ni enaka σ_0^2,

potem je odločitveno pravilo

zavrni ničelno hipotezo, če je test statistike manjši ali enak $\chi^2_{(1-\alpha/2,\, n\text{-}1)}$ **ali če je test statistike večji ali enak** $\chi^2_{(\alpha/2,\, n\text{-}1)}$.

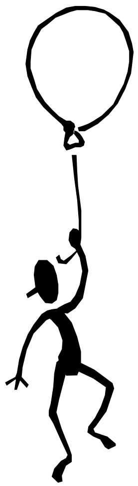
Testiranje hipoteze o varianci σ^2 populacije

Test statistik

$$\text{T.S.} = \frac{(n-1)\, s^2}{\sigma_0^2}$$

XIV. Testiranje hipoteze o razmerju varianc dveh populacij neodvisnih vzorcev

Ničelna hipoteza



$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$

Test hipoteze o razmerju varianc dveh populacij neodvisnih vzorcev

Če velja $H_a : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$,

potem je test statistik enak $\dfrac{s_1^2}{s_2^2}$

in odločitveno pravilo je

zavrni ničelno hipotezo, če velja

$$\text{T.S.} \geq F_{(\alpha,\, n_1 - 1,\, n_2 - 1)}.$$

Test hipoteze o razmerju varianc dveh populacij neodvisnih vzorcev

Če velja $H_a : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$ **,**

potem je test statistik enak $\dfrac{s_2^2}{s_1^2}$

in **odločitveno pravilo** **je**

zavrni ničelno hipotezo, če velja

$$\mathbf{T.S.} \geq F_{(\alpha,\, n_2 - 1,\, n_1 - 1)}.$$

Test hipoteze o razmerju varianc dveh populacij neodvisnih vzorcev

Če velja $$H_a : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \ ,$$

potem je test statistik enak

$$\frac{\textbf{varianca večjega vzorca}}{\textbf{varianca manjčega vzorca}}$$

in odločitveno pravilo je

zavrni ničelno hipotezo, če velja

$s_1^2 > s_2^2$ **in T.S.** $\geq F_{(\alpha/2,\, n_1 - 1,\, n_2 - 1)}$

ali

zavrni ničelno hipotezo, če velja

$s_2^2 > s_1^2$ **in T.S.** $\geq F_{(\alpha/2,\, n_2 - 1,\, n_1 - 1)}$.