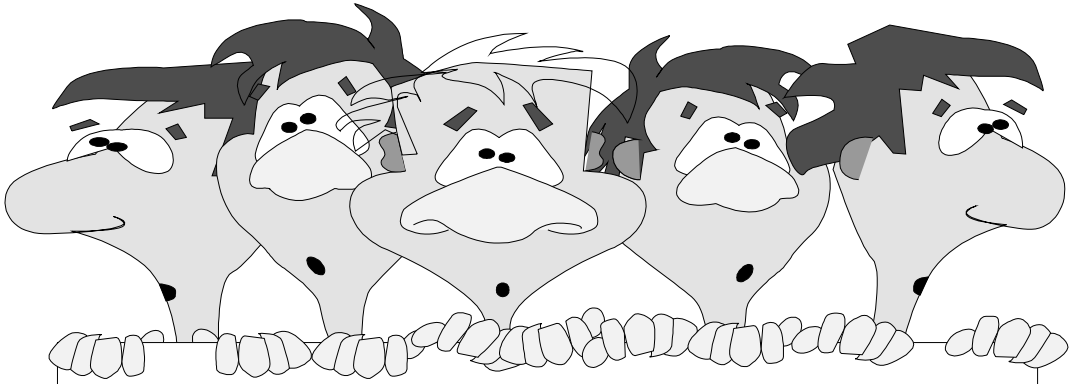


Intervalno ocenjevanje in cenilke

Merjenje slučajne spremenljivke

Vzorec: $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$**, kjer je** n **velikost, je slučajni vektor.**

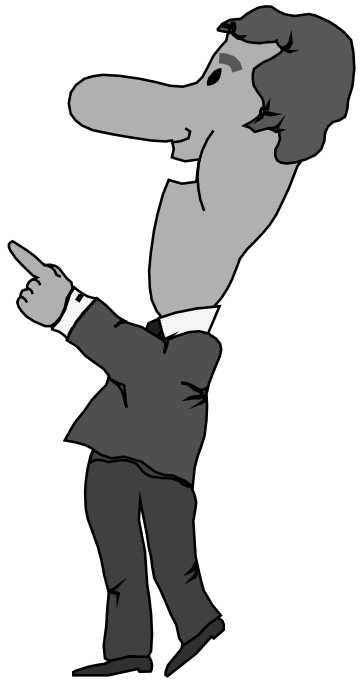
Če imajo komponente X_i **enako porazdelitev in so neodvisne, rečemo, da gre za enostavni slučajni vzorec.**

Lastnosti vzorčnega povprečja

- **Če je na preučevani populaciji slučajna spremenljivka porazdeljena normalno, je tako porazdeljeno tudi vzorčno povprečje.**
- **Vzorčno povprečje se pri velikih vzorcih porazdeljuje približno normalno tudi, če je spremenljivka na osnovni populaciji porazdeljena kako drugače.**
- **Matematični upanji spremenljivk X in $\overline{X}$ sta enaki.**

Točkovne cenilke

Točkovna cenilka je pravilo ali formula, ki nam pove, kako izračunati numerično cenilko na osnovi merjenj vzorca.



Število, ki je rezultat izračuna, se imenuje točkovna cenilka.

Nepristrana cenilka

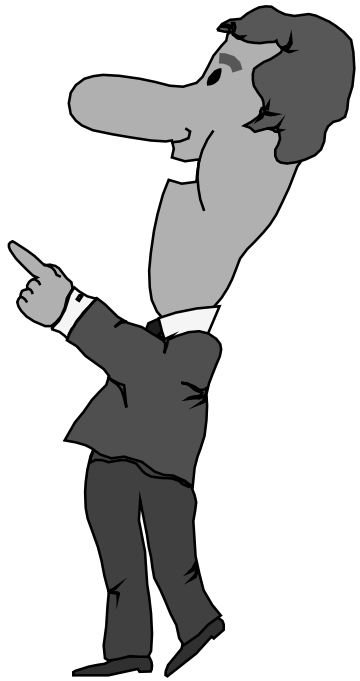
Cenilka $\hat{\theta}$ parametra θ je nepristrana, če velja

$$E\left(\hat{\theta}\right) = \theta .$$

Če je

$$E\left(\hat{\theta}\right) \neq \theta,$$

pravimo, da je cenilka pristrana.



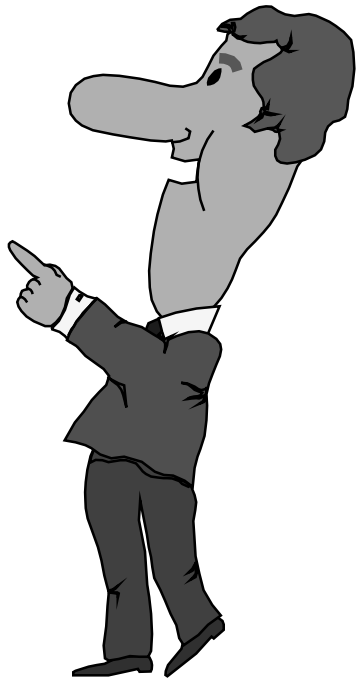
Pristranost

Pristranost (angl. bias) *B* cenilke $\hat{\theta}$ je enaka razliki med povprečjem

$E\left(\hat{\theta}\right)$ **vzorca porazdelitve** $\hat{\theta}$

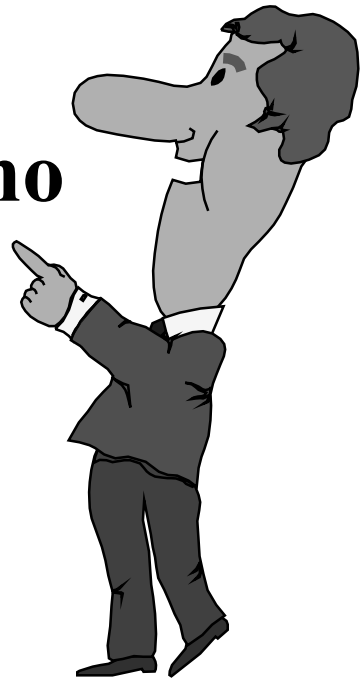
in θ **, tj.,**

$$B = E\left(\hat{\theta}\right) - \theta$$



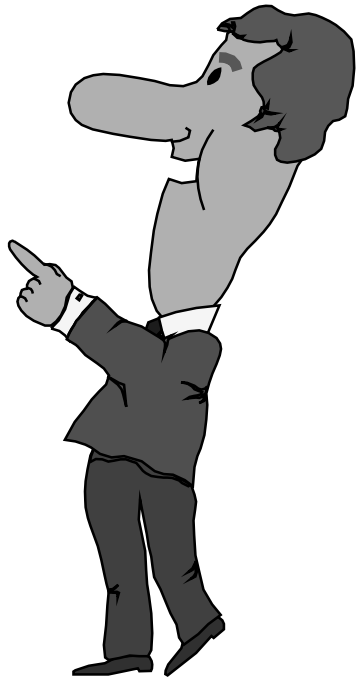
Cenilke z najmanjšo varianco

Če obravnavamo vse možne cenilke za neki parameter θ, potem imenujemo tisto z najmanjšo varianco cenilka z najmanjšo varianco.



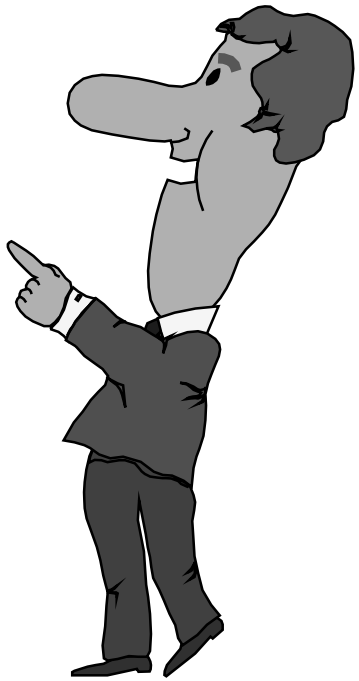
Nepristranska cenilka z najmanjšo varianco

Nepristranska cenilka z najmanjšo varianco parametra θ je tista cenilka $\hat{\theta}$, ki ima najmanjšo varianco med vsemi nepristranskimi cenilkami.



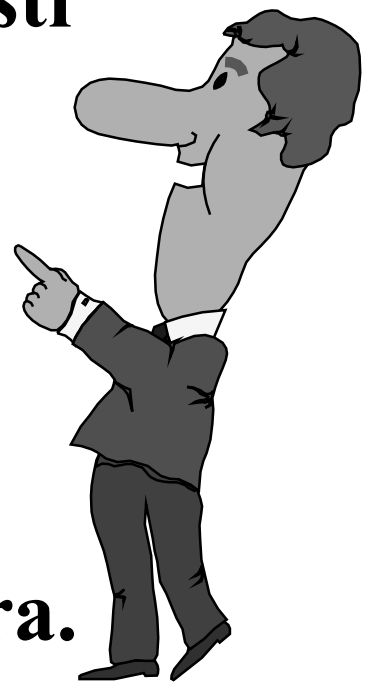
Intervalna cenilka

Intervalna cenilka je enačba, ki nam pove, kako uporabiti vzorec za izračun intervala, ki oceni populacijski parameter.



Teoretična interpretacija koeficienta zaupanja (1 - α)

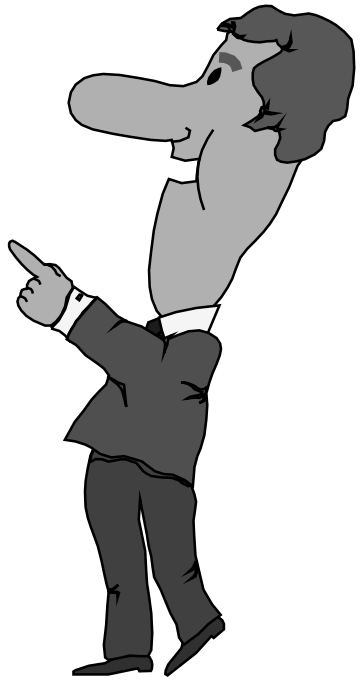
Če zaporedoma izbiramo vzorce velikosti *n* iz dane populacije in konstruiramo [(1 - α) 100]% interval zaupanja za vsak vzorec, potem lahko pričakujemo, da bo [(1 - α) 100]% intervalov dalo prvo vrednost parametra.



“stopnja tveganja” = 1 – “stopnja zaupanja”

I. (1- α)%-ni interval zaupanja za povprečje μ populacije, kadar poznamo standardni odklon σ:

točki $$\overline{y} \pm z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



predstavljata krajišči intervala zaupanja,

kjer je $z_{\alpha/2}$ vrednost spremenljivke *z*, ki zavzame površino $\alpha/2$ na svoji desni.

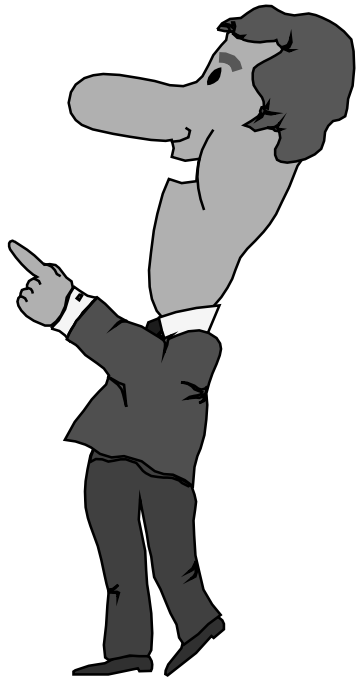
σ **je standardni odklon za populacijo.**

n **je velikost vzorca.**

$\overline{y}$ **je vrednost vzorčnega povprečja.**

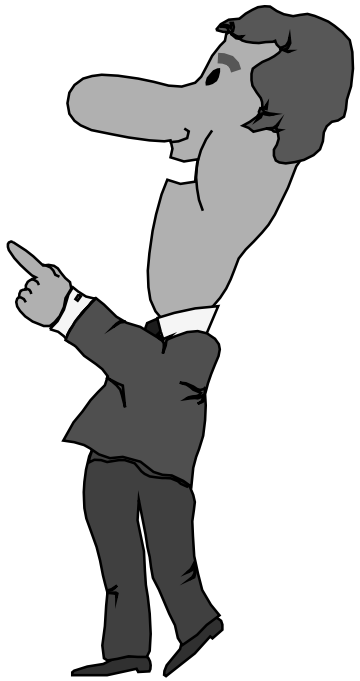
II. Veliki vzorec za (1 - α)%-ni interval zaupanja za povprečje μ populacije:

$$\overline{y} \pm z_{\alpha/2}\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right),$$



kjer je *s* standardni odklon vzorca.

III. Majhen vzorec za (1 - α)%-ni interval zaupanja za povprečje μ populacije:



$$\bar{y} \pm t_{\alpha/2} \left(\frac{s}{\sqrt{n}} \right),$$

kjer je porazdelitev spremenljivke *t* vzeta na osnovi (*n* - 1) prostostnih stopenj.

***Privzeli smo*: populacija, iz katere smo izbrali vzorec, ima priblizno normalno porazdelitev.**

IV. (1- α)%-ni interval zaupanja za μ_1 - μ_2, če poznamo σ_1 in σ_2 in sta vzorca izbrana neodvisno:

$$\left(\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^{\ 2}}{n_1} + \frac{\sigma_2^{\ 2}}{n_2}}$$

V. Veliki vzorec za (1 - α)%-ni interval zaupanja za razliko $\mu_1 - \mu_2$, kadar ne poznamo odklonov σ_1 in σ_2, vzorce pa izbiramo neodvisno:

$$\left(\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right) \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{s_1^{\,2}}{n_1} + \frac{s_2^{\,2}}{n_2}}$$

VI. Majhen vzorec za (1 - α)%-ni interval zaupanja za razliko μ_1-μ_2, kadar ne poznamo odklonov σ_1 in σ_2, ki pa sta si enaka, vzorci pa so majhni in izbrani neodvisno:

$$\left(\bar{y}_1 - \bar{y}_2\right) \pm t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \sqrt{s_p^{\,2}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)},$$

kjer je

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

***Privzeli smo*:**

1. **Obe populaciji sta približno normalni.**
2. **Varianci sta enaki.**
3. **Naključni vzorci so izbrani neodvisno.**

VII. Majhen vzorec (1 - α)%-ni interval zaupanja za razliko $\mu_1 - \mu_2$, kadar ne poznamo odklonov σ_1 in σ_2, vzorci pa so majhni in so izbrani neodvisno:

$$\left(\overline{y}_1 - \overline{y}_2\right) \pm t_{\alpha/2,\nu} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}},$$

kjer je

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^{\,2}}{n_1} + \frac{s_2^{\,2}}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^{\,2}}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{s_2^{\,2}}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

Če ν ni naravno število, potem zaokroži ν navzdol do najbližjega naravnega števila za uporabo *t* tabele.

Privzeli smo:

1. **Obe populaciji sta porazdeljeni približno normalno.**

2. **Naključni vzorci so izbrani neodvisno.**

Primer:

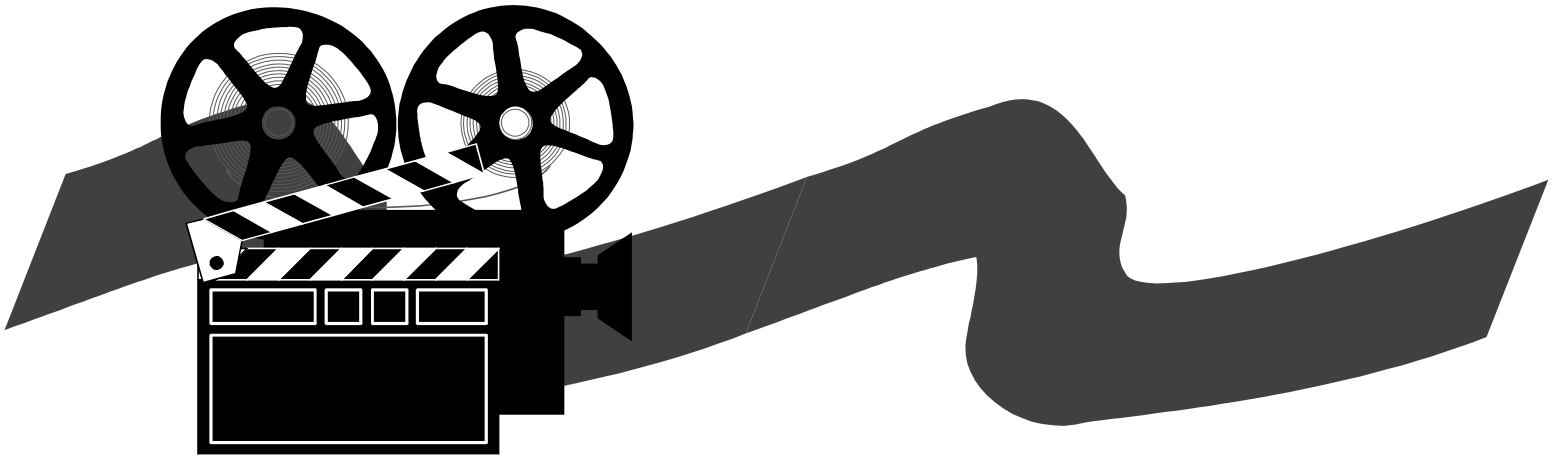
Naslednji podatki predstavljajo dolžine filmov, ki sta jih naredila dva filmska studija.

Izračunaj 90%-ni interval zaupanja za razliko med povprečnim časom filmov, ki sta jih producirala ta dva studija.

Predpostavimo, da so dolžine filmov porazdeljene približno normalno.

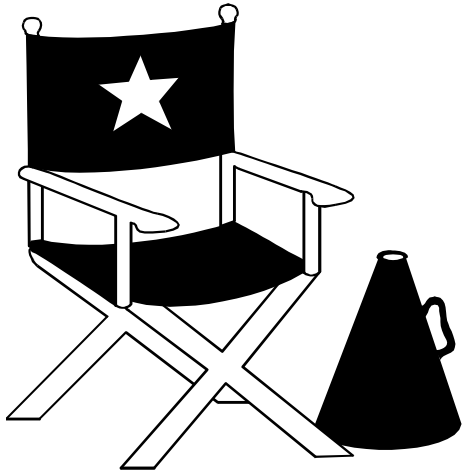
Čas (v minutah)

Studio 1	103	94	110	87	98		
Studio 2	97	82	123	92	175	88	118



Podatke vnesemo v Minitab

Film.MTW



C1	C2
103	97
94	82
110	123
87	92
98	175
	88
	118

Dva vzorca T-Test in interval zaupanja

Dva vzorca T za C1 : C2

	N	povpr.	St.odk.	SE povpr.
C1	5	98.40	8.73	3.9
C2	7	110.7	32.2	12

90%-ni interval zaupanja za mu C1-mu C2:

(-36.5, 12)

T-TEST mu C1=mu C2 (vs ni=):

T = -0.96 P = 0.37 DF = 7

VIII. (1 - α)%-ni interval zaupanja za $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$, ujemajoči se pari, veliki vzorci:

$$\overline{d} \pm z_{\alpha/2}\left(\frac{s_d}{\sqrt{n}}\right)$$

kjer je *n* je število parov.

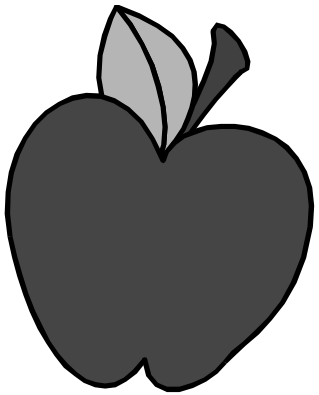
IX. (1 - α)%-ni interval zaupanja za $\mu_d = \mu_1 - \mu_2$, ujemajoči se pari, majhni vzorci:

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2,\, n-1} \left(\frac{s_d}{\sqrt{n}} \right)$$

***Privzeli smo*: populacija razlik parov je normalno porazdeljena.**

Nal. 8-39. Špricanje jabolk lahko povzroči kontaminacijo zraka. Zato so v času najbolj intenzivnega špricanja zbrali in analizirali vzorce zraka za vsak od 11ih dni.

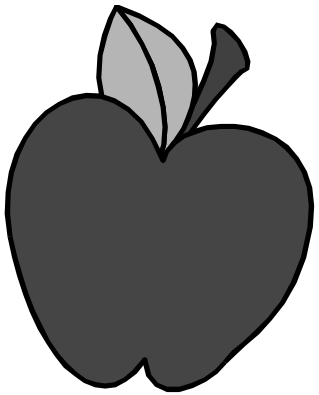
Raziskovalci želijo vedeti ali se povprečje ostankov škopiv (diazinon) razlikuje med dnevom in nočjo.



Analiziraj podatke za 90% interval zaupanja.

Nal. 8-39

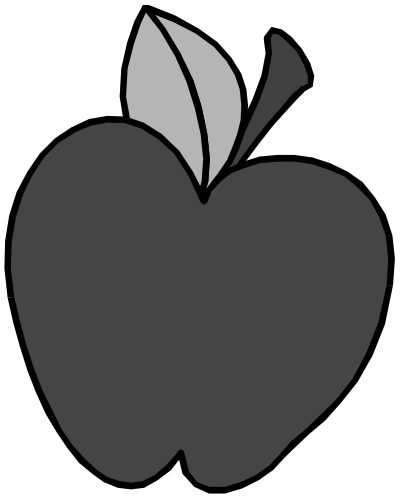
Datum	Diazinon Residue dan	noč
Jan. 11	5,4	24,3
12	2,7	16,5
13	34,2	47,2
14	19,9	12,4
15	2,4	24,0
16	7,0	21,6
17	6,1	104,3
18	7,7	96,9
19	18,4	105,3
20	27,1	78,7
21	16,9	44,6



Datum	Diazinon Residue dan	noč	razlika dan-noč
Jan. 11	5.4	24.3	-18.9
12	2.7	16.5	-13.8
13	34.2	47.2	-13.0
14	19.9	12.4	7.5
15	2.4	24.0	-21.6
16	7.0	21.6	-14.6
17	6.1	104.3	-98.2
18	7.7	96.9	-89.2
19	18.4	105.3	-86.9
20	27.1	78.7	-51.6
21	16.9	44.6	-27.7

Podatke vnesemo v Minitab

Ex8-39.MTW

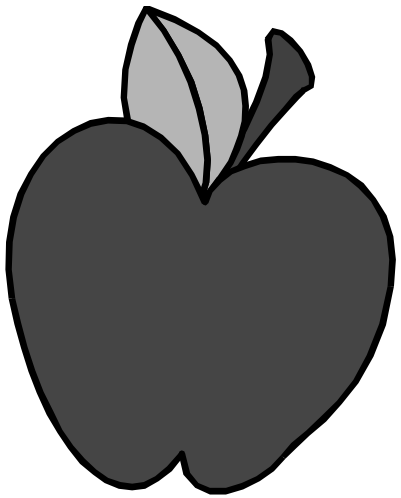


C1	C2
5.4	24.3
2.7	16.5
34.2	47.2
19.2	12.4
2.4	24.0
7.0	21.6
6.1	104.3
7.7	96.9
18.4	105.3
27.1	78.7
16.9	44.6

MTB > Let C3=C1-C2.

T interval zaupanja

Spremen.	*N*	povpr.	Stdev	SEpovpr.
C3	11	-38.9	36.6	11.0



90.0% interval zaupanja je

(-58.9, -18.9)

Za deleže

p = **delež populacije**

$\hat{p}$ = **delež vzorca**

$$\hat{p} = \frac{y}{n}$$

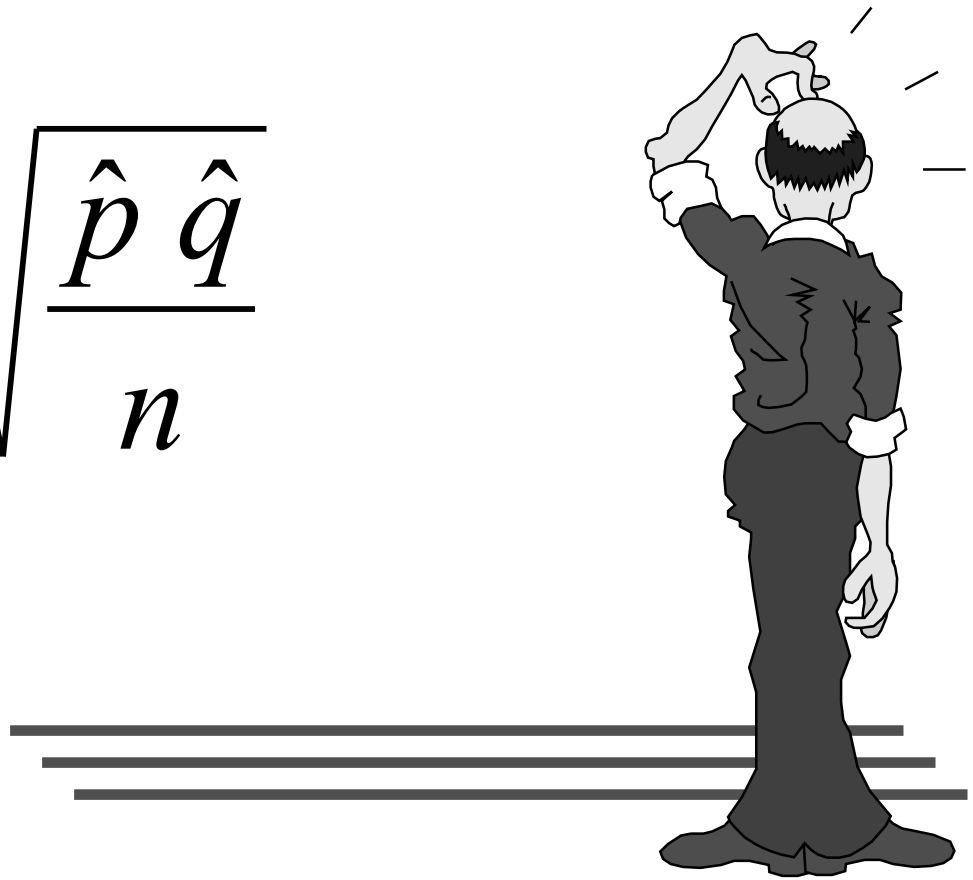
y = **število uspehov v *n* poskusih.**

X. (1-α)%-ni interval zaupanja za delež populacije *p*, kadar poznamo $\sigma_{\hat{p}}$:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\,\sigma_{\hat{p}}$$

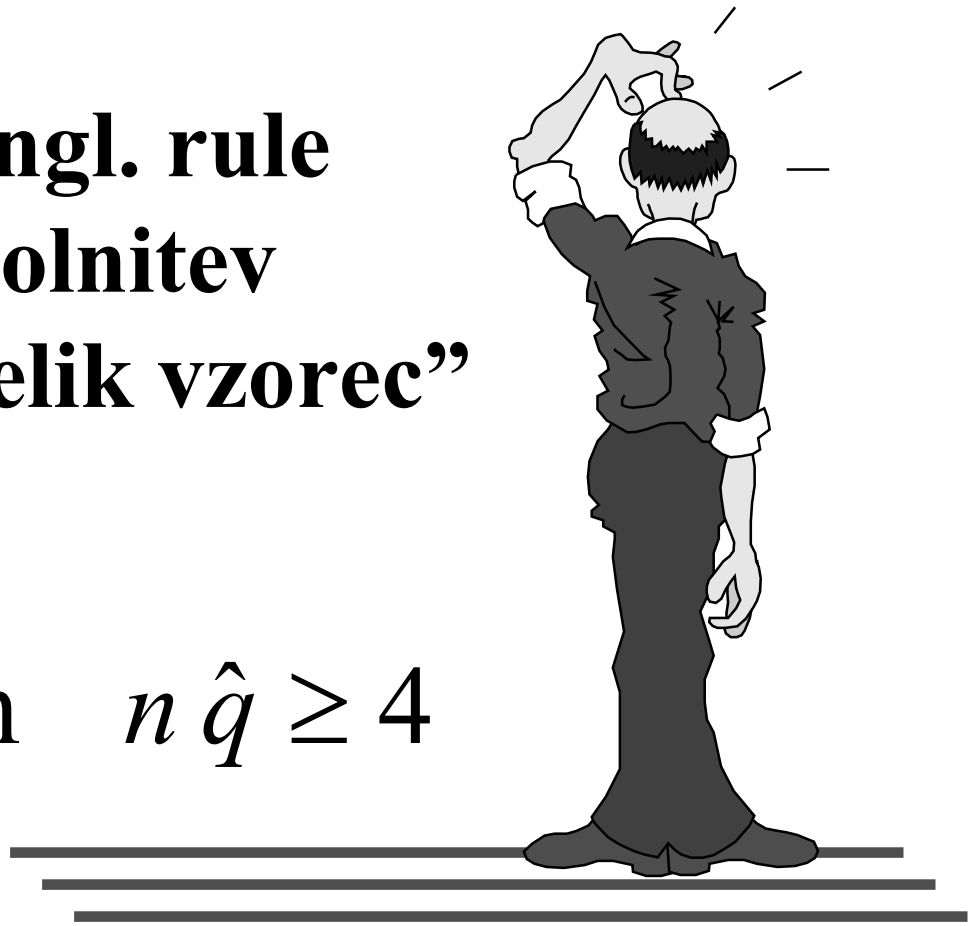
XI. Veliki vzorec za (1 - α)%-ni interval zaupanja za delež populacije:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}\,\hat{q}}{n}}$$



***Privzeli smo*: Velikost vzorca *n* je dovolj velika, da je aproksimacija veljavna.**

Dobro pravilo (angl. rule of thumb) za izpolnitev pogoja "dovolj velik vzorec" je:



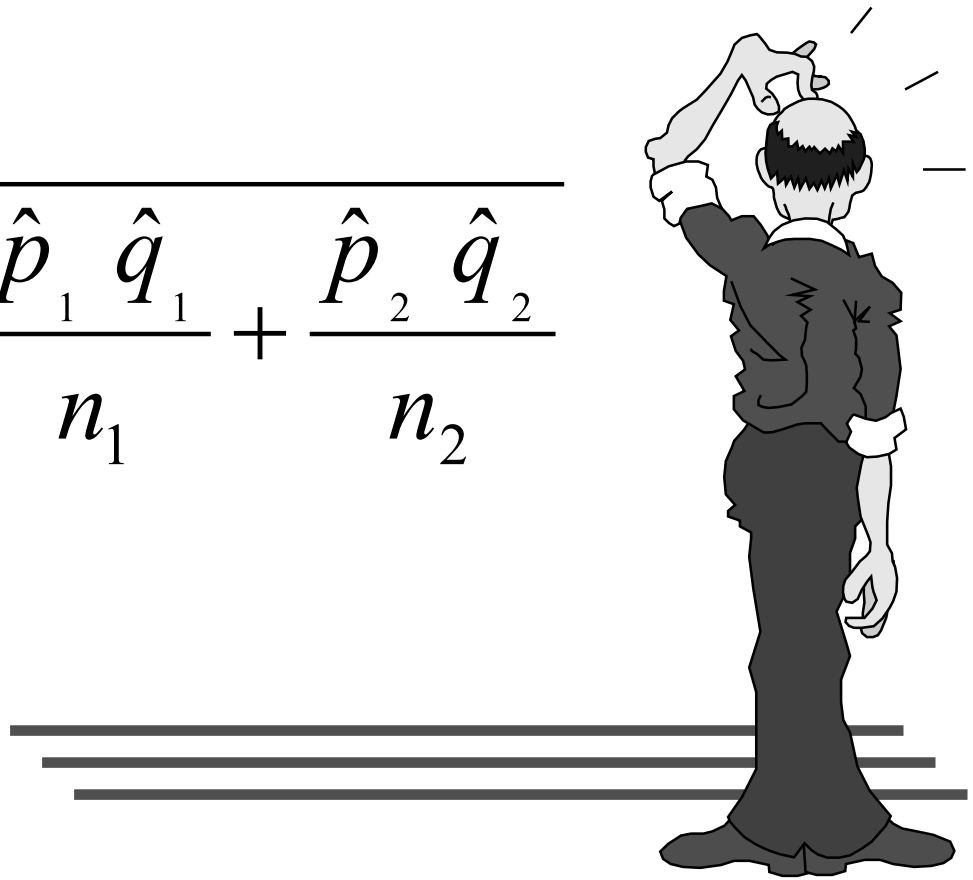
$$n\,\hat{p} \geq 4 \quad \text{in} \quad n\,\hat{q} \geq 4$$

XII. (1 - α)% interval zaupanja za $p_1 - p_2$, kadar poznamo $\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$:

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right) \pm z_{\alpha/2}\, \sigma_{\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right)}$$

XIII. Veliki vzorec za (1 - α)%-ni interval zaupanja za $p_1 - p_2$:

$$\left(\hat{p}_1 - \hat{p}_2\right) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\,\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\,\hat{q}_2}{n_2}}$$

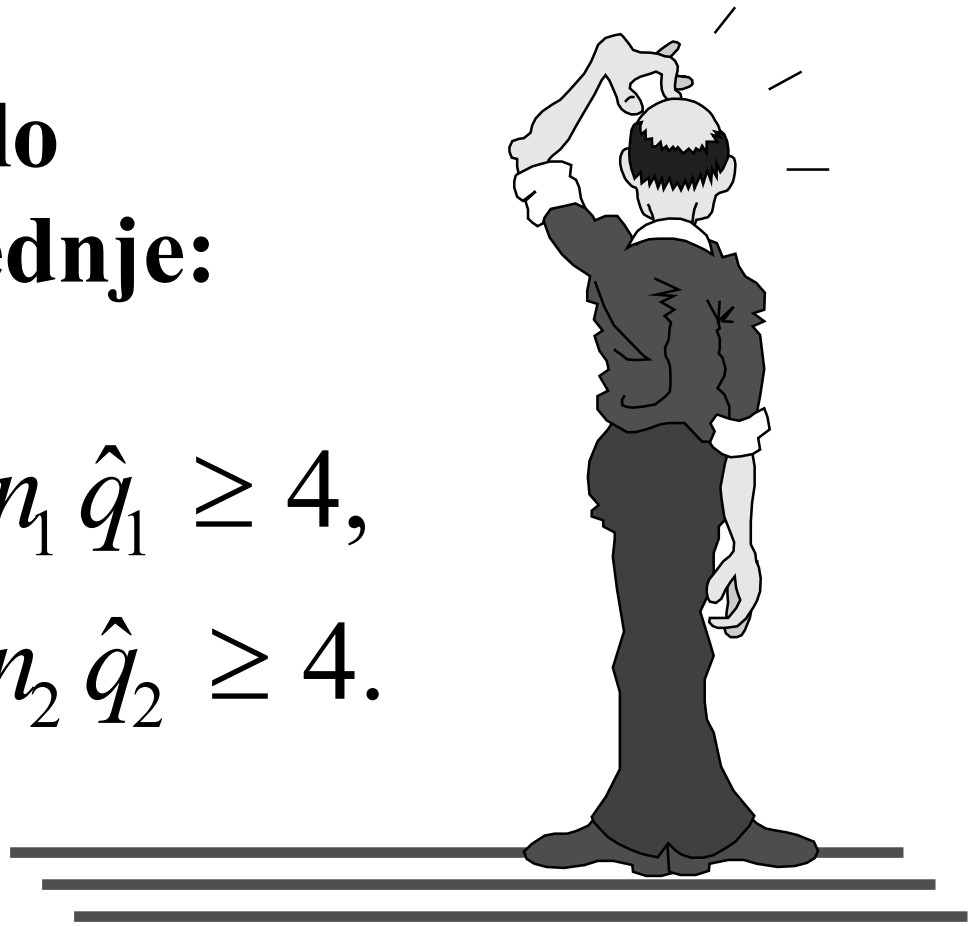


***Privzeli smo*: Velikost vzorca *n* je dovolj velika, da je aproksimacija veljavna.**

Kot splošno pravilo privzamemo naslednje:

$$n_1 \hat{p}_1 \geq 4, \qquad n_1 \hat{q}_1 \geq 4,$$

$$n_2 \hat{p}_2 \geq 4 \quad \text{in} \quad n_2 \hat{q}_2 \geq 4.$$



XIV. (1 - α)% interval zaupanja za varianco populacije σ^2:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(\alpha/2,n-1)}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2,n-1)}}$$

Privzeli smo:

Populacija, iz katere izbramo vzorce, ima približno normalno porazdelitev.

XV. (1 - α)%-ni interval zaupanja za kvocient varianc dveh populacij: σ_1^2/σ_2^2 :

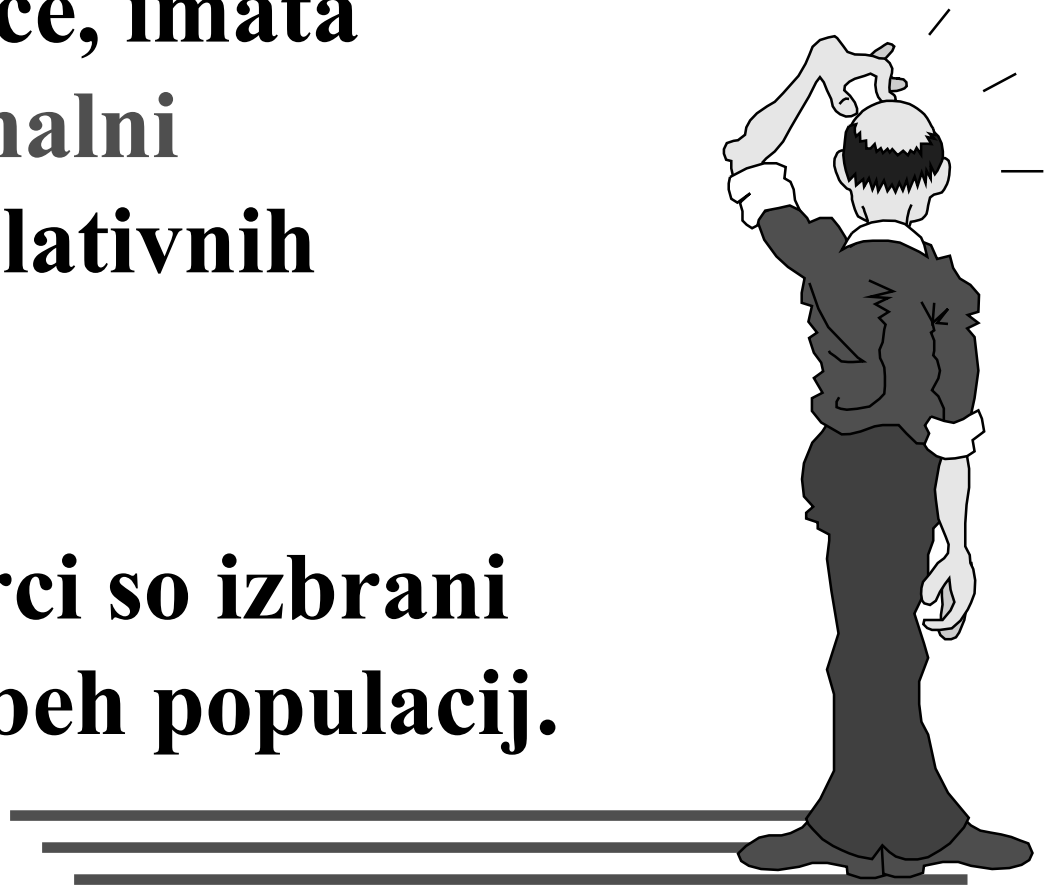
$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{(\alpha/2,\ n_1-1,\, n_2-1)}} \leq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq$$

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot F_{(\alpha/2,\ n_2-1,\, n_1-1)}$$

Privzeli smo:

1. **Obe populaciji, iz katerih izberamo vzorce, imata približno normalni porazdelitvi relativnih frekvenc.**

2. **Naključni vzorci so izbrani neodvisno iz obeh populacij.**



XVI. Izbira velikosti vzorca za oceno populacijskega povprečja μ znotraj *H* enot z verjetnostjo (1 - α):

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\ \sigma}{H} \right)^2$$

Populacijski standardni odklon mora biti običajno aproksimiran.

XVII. Izbira velikosti vzorca za oceno razlike $\mu_1 - \mu_2$ med parom populacijskih povprečij, ki je pravilna znotraj *H* enot z verjetnostjo $(1 - \alpha)$:

$$n_1 = n_2 = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{H} \right)^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \right)$$

XVIII. Izbira velikosti vzorca za oceno deleža populacije *p* znotraj *H* enot z verjetnostjo (1 - α):

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{H} \right)^2 pq$$

Opozorilo: Ta tehnika potrebuje predhodni oceni za *p* in *q*. Če nimamo nobene na voljo, potem uporabimo $p = q = 0{,}5$ za konzervativno izbiro števila *n*.

XIX. Izbiramo velikost vzorca za cenilko razlike $p_1 - p_2$ med dvema deležema populacije znotraj H enot z verjetnostjo $(1 - \alpha)$:

$$n_1 = n_2 = \left(\frac{z_{\alpha/2}}{H} \right)^2 \left(p_1 q_1 + p_2 q_2 \right)$$