Pisni izpit pri tečaju iz algebraične kobinatorike
Interdisciplinarni študij računalništva in matematike
(8. junij, 2007)

Iz vsakega razdelka si izberite vsaj po eno nalogo in skupaj vsaj 10 nalog.

Rok za oddajo je petek, 15. junija.

Dogovorili smo se, da lahko sodelujete pri reševanju nalog, vendar morate rešitve napisati vsak sam (prosim brez copy/paste). Lepo bi bilo, če bi rešili vse naloge (torej ne bi reševali čisto vseh nalog skupaj).

Če vam naloga res ne gre, vendar si jo zares želite rešiti, lahko vprašate za kakšen namig.

1. Konstrukcije kombinatoričnih objektov

Latinski kvadrat reda n je četverica $(R, C, S; L)$, kjer so R, C in S množice reda n in L taka preslikava $L : R \times C \longrightarrow S$, da ima za vsak $i \in R$ in $x \in S$ enačba

$$L(i,j) = x$$

enolično rešitev $j \in C$, in ima za vsaka $j \in C$ in $x \in S$ ista enačba enolično rešitev $i \in R$. To pomeni, da sta vsaka dva med $i \in R$, $j \in C$ in $x \in S$ določata tretjega tako da velja $L(i,j) = x$. Elementi R se imenujejo vrstice (angl. rows), element C stolpci (angl. columns), elementi S pa simboli latinskega kvadrata. Običajno ga predstavimo kot $n \times n$ matriko, v kateri na (i,j)-to mesto postavimo simbol $L(i,j)$.

1. Naj bo $(R, C, S; L)$ latinski kvadrat reda 6. Definirajmo $\mathcal{P} := R \times C$.

Naj bo $\mathcal{B}$ množica blokov naslednje oblike

$$B_{ij} := \{(x,y) \in R \times C \mid x = i \text{ ali } y = j \text{ ali } L(x,y) = L(i,j)\} \setminus \{(i,j)\}$$

za $(i,j) \in R \times C$.

(a) Pokaži, da smo na ta način definirali 2-(36,15,6) design.

(b) Pokaži, da obstaja regularna Hadamardova matrika reda 36.

Definirati moramo še kdaj je Hadamardova matrika regularna. Spomnimo se najprej definicije Hadamardove matrike. $(n \times n)$-razsežno matriko H z elementi ± 1, za katero velja

$$HH^T = nI_n$$

imenujemo *Hadamardova matrika* reda n. To pomeni, da sta poljubna dva stolpca matrike H ortogonalna. Ta lastnost se ohrani tudi, če premutiramo vrstice ali stolpce ali če pomnožimo nekatere vrstice z -1. Taki dve matriki imenujemo *ekvivalentni.* Za dano Hadamardovo matriko poiščemo ekvivalentno Hadamardovo matriko, ki bo imela v prvi vrstici in prvemu stolpcu same $+1$. Taki Hadamardovi matriki bomo rekli, da je *normalizirana.*

Če je Hadamardova matrika reda n normalizirana, potem ima očitno število njenih elementov, ki so enaki $+1$, za natanko n večje od števila elementov, ki so enaki -1. Vpeljemo *presežek* Hadamarove matrike kot vsoto vseh njenih elementov in z $\sigma(n)$ označimo maksimalno vrednost presežka vseh Hadamarovih matrik reda n. Potem je Best leta 1977 pokazal, da $\sigma(n)$ raste kot $n^{3/2}$.

Če so za Hadamardovo matriko reda $4u^2$ vse vsote vrstic enake $2u$ (in imajo v tem smislu maksimalni presežek), potem rečemo, da je Hadamardova matrika *regularna.*

2. Grafi, lastne vrednosti in regularnost

1. Pokaži, da ni moč najti tri po povezavah disjuktne kopije Petersenovega grafa v polnem grafu na desetih točkah.

2. Za kvadratno matriko A, katere stolpci in vrstice so označeni z elementi množice X, bomo rekli, da je *nerazcepna*, če ni mogoče najti pravo podmnožico S množice X, tako da je $A(x, y) = 0$ za $x \in S$ in $y \in X \backslash S$. Ekvivalentno bi lahko rekli, da matrika A ni nerazcepna, če lahko z usklajeno permutacijo vrstic in stolpcev dobimo matriko naslednje oblike:

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Naj bo A matrika sosednosti usmerjenega grafa D. Pokaži, da je matrika A nerazcepna natanko tedaj, ko je D *krepko povezan*, tj. ko za vsaki vozlišči x in y usmerjenega grafa D obstaja usmerjena pot od x do y.

3. Krepko regularni grafi

1. Pokaži, da je krepko regularen graf ekstremalen v naslednjem smislu. Naj bo Γ graf z v vozlišči, vsako stopnje največ k. Predpostavimo, da imata vsaki sosednji vozlišči vsaj λ skupnih vozlišč in vsaki nesosednji vozlišči vsaj μ skupnih vozlišč. Potem velja

$$k(k - 1 - \lambda) \geq \mu(v - k - 1),$$

pri čemer velja enakost natanko tedaj, ko je Γ krepko regularen graf.

2. Naj bo Γ krepko regularen graf z istimi parametri kot $L_2(n) = K_n \times K_n$, tj. $\mathrm{SRG}(n^2, 2(n-1), n-2, 2)$. Pokaži, da je za $n > 4$ Γ izomorfen $L_2(n)$. Za $n = 4$ pa trditev očitno ne drži, saj ima enake parametre tudi Shrikhandejev graf, ki smo ga spoznali na predavanjih.

3. Naj bo Γ krepko regularen graf s parametri $\mathrm{SRG}(v, k, \lambda, 1)$. Pokaži, da je lokalni graf poljubnega vozlišča unija klik. Preštej števil $(\lambda + 2)$-klik in s tem pokaži, da sta

$$\frac{k}{\lambda + 1} \quad \text{in} \quad \frac{vk}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}$$

celi števili.

4. Geometrija

(m,k)-*lok* v projektivni ravnini reda n je množica m točk, med katerimi nobenih $k+1$ ni kolinearnih. Zanj velja naslednja neenakost

$$m \leq 1 + (n+1)(k-1).$$

(Bi znal premisliti zakaj?) (m,k)-lok A je popoln, kadar v zgornji neenakosti velja enakost. Vsaka premica, ki vsebuje točko popolnega (m,k)-loka očitno vsebuje natanko k točk loka, tj. $|L \cap A| = 0$ ali k za vsako premico L.

1. Naj bo A popoln (m,k)-lok v projektivni ravnini reda n, $1 \leq k \leq n$. Naj bo A^* množica premic, ki ne sekajo loka A. Pokaži, da je množica A^* popoln $(m^*, \lfloor n/k \rfloor)$-lok v dualni ravnini P^*, in izrazi m^* s pomočjo m, k in n.

---

5. Asociativne sheme

Asociativna shema $\mathcal{A}$ z matrikami $A_0, \ldots, A_d$ je ***P*-polinomska** kadar za neko permutacijo indeksov matrik $A_0, \ldots, A_d$ velja

$$\exists \,\text{polinomi } p_i \text{ stopnje } i, \text{ tako da velja } A_i = p_i(A_1),$$

za $i = 0, \ldots, d$. Za asociativno shemo $\mathcal{A}$ s presečnimi števili p_{ij}^h rečemo, da je **metrična** če njena presečna števila zadovoljujejo **Δ-pogoj:** za vse $i, j, h \in \{0, \ldots, d\}$ velja $p_{ij}^{i+j} \neq 0$ in $p_{ij}^h = 0$ za $h > i+j$.

1. Dokaži, da je asociativna shema P-polinomska natanko tedaj, ko je metrična.

2. Naj bosta A in B simetrični kvadratni matriki reda n z lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in $\mu_1, \ldots, \mu_n$ zaporedoma.

(a) Določi lastne vrednosti matrike $A \otimes B$. Hadamarjev produkt $A \circ B$ matrik A in B je kvadratna matrika reda n z elementi $a_{ij}b_{ij}$.

(b) Pokaži, da je $A \circ B$ glavna (angl. principle) podmatrika matrike $A \otimes B$ (glavno podmatriko definira naslednja lastnost – njena diagonala leži na diagonali originalne matrike).

(c) Kaj lahko poveš o lastnih vrednostih matrike $A \circ B$?

6. Ekvitabilne particije

Naj bo A kvadratna simetrična matrika. Označimo njeno k-to največjo lastno vrednost s $\theta_k(A)$. Naj bo f realna funkcija na $\mathbb{R}^n$ definirana z

$$f(\boldsymbol{x}) := \frac{(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

Naj bosta $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{u}$ pravokotna enotska vektorja v $\mathbb{R}^n$. Postavimo $\boldsymbol{x}(\varepsilon) := \boldsymbol{x} + \varepsilon\boldsymbol{u}$. Potem je $\big(\boldsymbol{x}(\varepsilon), \boldsymbol{x}(\varepsilon)\big) = 1 + \varepsilon^2$,

$$f(\boldsymbol{x}(\varepsilon)) = \frac{(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) + 2\varepsilon(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{x}) + \varepsilon^2(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{u})}{1 + \varepsilon^2}$$

in

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}(\varepsilon)) - f(\boldsymbol{x})}{\varepsilon} = 2(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{x}).$$

Naslednje trditve so ekvivalentne:

- funkcija f ima lokalni ekstrem,
- $(\boldsymbol{u}, A\boldsymbol{x}) = 0$ za vsak enotski vektor $\boldsymbol{u}$, ki je pravokoten na $\boldsymbol{x}$,
- vsak vektor $\boldsymbol{u}$, ki je pravokoten na $\boldsymbol{x}$, je pravokoten tudi na $A\boldsymbol{x}$,
- $A\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$ za nek $\theta \in \mathbb{R}$.

Bolj natančno

Izrek [Courant-Fischer]. *Naj bo A simetrična $n \times n$ matrika z lastnimi vrednostmi $\theta_1 \geq \cdots \geq \theta_n$. Potem*

$$\theta_k = \max_{\dim(U)=k} \min_{x \in U} \frac{(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \min_{\dim(U)=n-k+1} \max_{x \in U} \frac{(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})}{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

Z uporabo tega rezultata ni težko dokazati naslednji izrek o (posplošenem) prepletanju.

Izrek [Haemers]. *Naj bo A simetrična $n \times n$ matrika in S taka $(n \times m)$-razsežna matrika, da je $S^T S = I_m$. Potem za $k = 1, \ldots, m$ velja*

$$\theta_k(A) \geq \theta_k(S^T A S) \geq \theta_{n-m+k} \tag{1}$$

1. Naj bo P karakteristična matrika particije π množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ in $S = P(P^T P)^{-1/2}$. Število celic particije π označimo z m. Pokaži, da je v zgornji neenakosti (1) ena izmed enakosti izpolnjena natanko tedaj, ko je π ekvitabilna particija.

2. Naj bo π ekvitabilna particija grafa Γ. Če je $A(\Gamma/\pi)$ 01-matrika, potem pokaži, da mora biti simetrična.

3. Naj bosta X in Y grafa ter σ in π ustrezni ekvitabilni particiji. Če je

$$A(X/\sigma) = A(Y/\pi),$$

potem pokaži, da obstaja graf Z, ki je krov obeh grafov X in Y.

4. Naj bo Γ graf, matrika A njegova matrika sosednosti in π particija vozlišč grafa Γ s karakteristično matriko P. Potem je π ekvitabilna natanko tedaj, ko je vektorski podprostor, ki ga napenjajo stolpci matrike P, A-invarianten.

---

7. Razdaljno-regularni grafi

1. Naj bo Γ incidenčni graf projektivne ravnine reda n. Nah bo H graf, ki ga dobimo iz Γ tako, da izbrišemo dve sosednji vozlišči in vse njune sosede. Pokaži, da je H razdaljno-regularen in antipoden.

2. Če ima graf $\overline{m \cdot K_n}$ razdaljno-regularen krov in je $n > 2$, potem pokaži, da je $m \leq 2$.

3. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d v katerem velja $k_{d-1} = k$. Pokaži, da je Γ cikel ali $k_d = 1$ (ali oboje).

4. Pokaži, da ima 1-skelet poljubnega Platonskega telesa lastno vrednost z večkratnostjo vsah 3.

5. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d in naj bo θ njena lastna vrednost s kosinusnim zaporedjem $\omega_0, \ldots, \omega_d$. Pokaži, da velja $(\theta - a_d)\omega_d = (k - a_d)\omega_{d-1}$ in iz tega izpelji, da w_d ne more biti 0.

6. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d in naj bo θ njena lastna vrednost s kosinusnim zaporedjem $\omega_0, \ldots, \omega_d$. Pokaži, da iz $\omega_2 = -1$ sledi, da je Γ neprimitiven.

7. Naj bo Γ razdaljno-regularen graf premera d, ki vsebuje induciran četverokotnik. Nadalje naj bo θ njena netrivialna lastna vrednost s kosinusnim zaporedjem $\omega_0, \ldots, \omega_d$. Pokaži, da velja

$$1 - 2\omega_1 + \omega_2 \geq 0,$$

enačaj pa velja natanko tedaj, ko je $\theta = b_1 - 1$. Nadalje pokaži, da je v primeru enačaja $\omega_i = 1 - (a_1 + 2)\, i/k$ za $i = 0, \ldots, d$.

8. Pokaži, da je primitiven razdaljno-regularen graf z lastno vrednostjo večkratnosti 2 cikel.

8. 1-homogeni grafi

1. N.L. Biggs, A.G. Boshier in John Shawe-Taylor (slednji je opravil dodiplomski študij v Ljubljani) so leta 1986 klasificirali vse kubične razdaljno-regularne grafe. Le-ti so

- K_4, tj. tetraeder, $\{3;1\}$, $v = 4$,
- $K_{3,3}$, tj. poln dvodelen graf, $\{3,2;1,3\}$, $v = 6$, (imenujemo ga tudi graf Kuratovskega – se spomnite naloge o treh sosedih in treh vodnjakih),
- O_3, tj. Petersenov graf, $\{3,2;1,1\}$, $v = 10$,
- Q_3, tj. kocka, $\{3,2,1;1,2,3\}$, $v = 8$,
- Heawoodov graf, $\{3,2,2;1,1,3\}$, $v = 14$,
- Pappusov graf, $\{3,2,2,1;1,1,2,3\}$, $v = 18$,
- Coxeterjev graf, $\{3,2,2,1;1,1,1,2\}$, $v = 28$,
- Tutte-ova 8-kletka, $\{3,2,2,2;1,1,1,3\}$, $v = 30$,
- 1-skelet dodekaedra, $\{3,2,1,1,1;1,1,1,2,3\}$, $v = 20$,
- Desarguesov graf, $\{3,2,2,1,1;1,1,2,2,3\}$, $v = 20$,
- Tutte-ova 12-kletka, $\{3,2,2,2,2,2;1,1,1,1,1,3\}$, $v = 126$, (gre za GD$(1,2)$, torej posplošeni 10-kotnik, pa mimogrede polovički pri tem grafu nista izomorfni, pa čeprav imata enake parametre),
- Biggs-Smithov graf, $\{3,2,2,2,1,1,1;1,1,1,1,1,1,3\}$, $v = 102$,
- Fosterjev graf, $\{3,2,2,2,2,1,1,1;1,1,1,1,2,2,2,3\}$, $v = 90$.

Vemo, da so kubični grafi 1-homogeni. Nariši razdaljno particijo glede na vozlišči na razdalji 1 in določi vse parametre, ki ustrezajo tej ekvitabilni particiji. (za dodekaeder, Coxeterjev graf in Biggs-Smithov graf smo ustrezne slike pokazali že na predavanjih).

2. Naj bo Γ 1-homogen graf. Z matematično indukcijo pokaži, da nam delovanje BM-algebre na ogrinjači karakterističnih vektorjev dveh sosednjih vozlišč x in y iz Γ ter karakterističnega vektorja njunih skupnih sosedih, da ogrinjačo karakterističnih vektorjev množic, ki ustrezajo razdaljni particiji grafa Γ glede na omenjenih sosednjih vozlišč.

3. Utemelji, zakaj lahko delovanje BM-algebre na nekem podprostoru nadomestimo z delovanjem minimalnih idempotentov na tem prostoru.

9. Tesni grafi

1. Poišči vse tesne grafe premera 2.

2. Poišči vse povezane grafe, ki so lokalno polni večdelni grafi.

3. Naj bo Γ krepko regularen graf v katerem je vsak lokalen graf točkovni graf posplošenega četverokotnika GQ(2,2), vsak μ-graf enak $K_{3,3}$, konveksno zaprtje vsakega induciranega $K_{3,3}$ grafa enako $K_{3,3,3}$ in $\alpha = 2$. Ali je graf Γ natanko določen s temi pogoji? V primeru pritrdilnega odgovora dokaži enoličnost, sicer pa poišči vse grafe, ki ustrezajo tem pogojem.