EKVITABILNE PARTICIJE IN TOEPLITZOVE MATRIKE

Aleksandar Jurišić Štefko Miklavič

Politehnika Nova Gorica in IMFM
Vipavska 13, p.p. 301, Nova Gorica
Slovenija

30. okt. 2003

Math. Subj. Class. (2000):
05E{20, 30, 35}, 05C{12, 62, 50}, 05B{20, 25, 30}, 68R{05, 10, 141}, 11T71, 51Exx, 52Cxx,

Predstavili bomo ekvitabilne particije vozlišč grafa, ki nam omogočajo, da pridobimo informacije o lastnih vrednostih in lastnih vektorjih grafa iz manjšega kvocientnega grafa. S pomočjo ekvitabilnih particij bomo poiskali lastne vrednosti razdaljno-regularnega grafa in faktorizirali determinanto simetrične Töplitzeve matrike.

1 Uvod

Konstrukcija kvocientnega grafa je v teoriji grafov pomemben in koristen postopek. Z njo lahko iz "velikega" grafa G dobimo graf, ki ima marsikaj skupnega z grafom G. Ker pa je kvocientni graf manjši od prvotnega grafa G, pridemo pogosto do informacij o skupnih lastnostih dosti lažje s študiranjem kvocientnega grafa, kot pa grafa G. Tak primer je recimo računanje lastnih vrednosti grafa. Vzemimo naprimer graf povezav Petersenovega grafa. Namesto da bi njegove lastne vrednosti računali kot lastne vrednosti matrike dimenzije 15×15, je dovolj, da izračunamo lastne vrednosti matrike dimenzije 4×4.

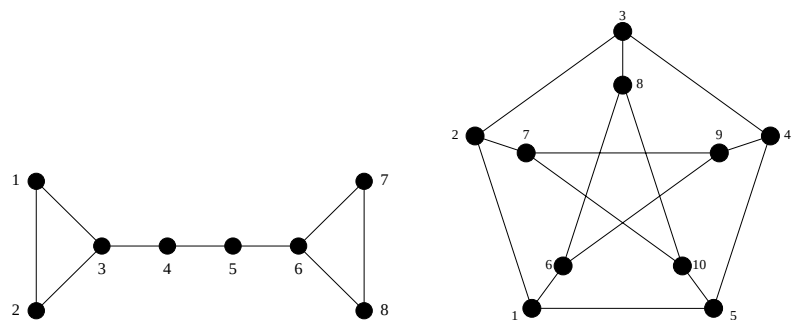
Kvocientni graf definiramo preko ekvitabilnih particij vozlišč grafa. V nekaterih primerih (razdaljno-regularni grafi) lahko iz kvocientnega grafa dobimo celotno informacijo o lastnih vrednostih in lastnih vektorjih originalnega grafa. Seveda pa ekvitabilne particije niso uporabne samo za konstrukcijo kvocientnih grafov. Uporabne so pri študiju asociativnih shem, pri iskanju grupe avtomorfizmov grafa, definicijo pa lahko razširimo tudi na ekvitabilne particije matrike.

V naslednjem poglavju, ki je povzeto po Godsil [1, podpoglavji 5.1, 5.2], bomo najprej definirali ekvitabilne particije in kvocientne grafe. Nato si bomo ogledali povezavo med lastnimi vrednostmi ter lastnimi vektorji kvocientnega grafa in lastnimi vrednostmi ter lastnimi vektorji originalnega grafa. V tretjem razdelku pa bomo s pomočjo ekvitabilnih particij faktorizirali determinanto simetrične Töplitzove matrike.

2 Ekvitabilne particije

Ker je najbolj naravno, da nove pojme vpeljemo preko primerov, začnimo z dvema zanimivima kombinatoričnima objektoma – dodekaedrom in Petersenovim grafom. Vozlišča dodekaedra naj bodo elementi dvoelementnih množic: v vsaki množici naj bosta tisti dve vozlišči dodekaedra, ki imata medsebojno razdaljo enako 5. Naj bodo sedaj te dvoelementne podmnožice vozlišča novega grafa. Dve vozlišči naj bosta povezeni natanko takrat, kadar ustrezni dve množici vsebujeta sosednji vozlišči dodekaedra. Graf, ki ga na tak način dobimo, je Petersenov graf.

Naj bo G graf in $V(G)$ množica njegovih vozlišč. Particija množice $V(G)$ naj bo kot običajno množica disjunktnih in nepraznih podmnožic množice $V(G)$, katerih unija je enaka množici $V(G)$. Particija $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ je **ekvitabilna**, če za poljubna dva indeksa i in j velja, da je število sosedov, ki jih ima poljubno vozlišče iz množice C_i v množici C_j neodvisno od izbire vozlišča iz C_i. Podgraf, ki je induciran s poljubno množico ekvitabilne particije π je torej regularen, saj ima vsako vozlišče iz množice C_i v množici C_i isto število sosedov. Podobno je vsak dvodelen graf, ki ga sestavljajo povezave, ki povezujejo vozlišča dveh različnih množic particije π, "polregularen" - vozlišča, ki pripadajo isti množici particije, imajo isto stopnjo. Na sliki 1 vidimo dva primera ekvitabilnih particij.



Slika 1: Particija $\pi = \{\{1, 2, 4, 5, 7, 8\}, \{3, 6\}\}$ je ekvitabilna particija McKay-evega grafa G_1 na levi, particija $\sigma = \{\{1\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 7, 8, 9, 10\}\}$ pa ekvitabilna particija Petersenovega grafa G_2 na desni strani slike.

Celo družino primerov ekvitabilnih particij dobimo s pomočjo grupe avtomorfizmov grafa. Naj bo G graf in Γ neka podgrupa njegove grupe avtomorfizmov. Orbite grupe Γ določajo particijo množice vozlišč grafa G. Naj bosta x in y vozlišči grafa G, ki ležita v isti množici te particije. Potem obstaja tak $f \in \Gamma$, da je $f(x) = y$. Ker pa f preslika vsako podmnožico te particije samo nase, imata x in y v vsaki množici particije isto število sosedov. Particija je zato ekvitabilna. Na sliki 1 množice particije McKayevega grafa niso orbite nobene podgrupe grupe avtomorfizmov tega grafa, medtem ko so množice particije Petersenovega grafa orbite stabilizatorja točke 1.

Naj bo dana ekvitabilna particija $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ množice vozlišč grafa G. S c_{ij} označimo število sosedov, ki jih ima poljubno vozlišče iz množice C_i v množici C_j. Števila c_{ij} $(1 \leq i, j \leq k)$ imenujemo *parametri* ekvitabilne particije π. **Kvocientni graf** G/π je usmerjen graf z množico vozlišč $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$, v katerem gre od vozlišča C_i do vozlišča C_j natanko c_{ij} usmerjenih povezav. V splošnem ima lahko kvocientni graf tako večkratne povezave kot tudi zanke. Matrika sosednosti kvocientnega grafa G/π je matrika dimenzije $k \times k$, ki ima ij-ti element enak c_{ij}. V prejšnjih dveh primerih je

$$A(G_1/\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad A(G_2/\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ekvitabilne particije se izkažejo za zelo uporabne. Kot bomo videli, je vsaka lastna vrednost kvocientnega grafa G/π tudi lastna vrednost grafa G, karakteristični polinom kvocientnega grafa G/π pa vedno deli karakteristični polinom grafa G.
Karakteristična matrika $P = P(\pi)$ particije $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ grafa z n vozlišči je matrika dimenzije $n \times k$, katere ij-ti element je 1, če je i-to vozlišče grafa G vsebovano v množici C_j, in 0 sicer. Pokažimo sedaj naslednjo lemo.

Lema 2.1 *Naj bo $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ particija vozlišč grafa G, P njena karakteristična matrika in A matrika sosednosti grafa G. Particija π je ekvitabilna natanko tedaj, ko obstaja taka matrika B, da je*

$$AP = PB.$$

Matrika B je v tem primeru enaka matriki sosednosti kvocientnega grafa G/π.

Dokaz. Naj bo π ekvitabilna particija vozlišč grafa G in naj bodo števila c_{ij} $(1 \leq i, j \leq k)$ njeni parametri. Element ij matrike AP je enak številu sosedov, ki jih ima i-to vozlišče grafa G v množici C_j. Ker je particija π ekvitabilna, je to število odvisno samo od množice particije π, v kateri i-to vozlišče grafa G leži. Torej so tiste vrstice produkta AP, ki pripadajo vozliščem iz množice C_ℓ enake $(c_{\ell 1}, c_{\ell 2}, \ldots, c_{\ell k})$ $(1 \leq \ell \leq k)$. Prav to pa so tudi vrstice produkta PB, kjer je B matrika sosednosti kvocientnega grafa G/π.
Naj bo sedaj $AP = PB$ za neko matriko B in naj bosta i, j vozlišči grafa G iz množice C_ℓ particije π. Naj bo C_r poljubna množica particije π. Vozlišče i ima $(AP)_{ir}$ sosedov v C_r, vozlišče j pa $(AP)_{jr}$. Ker pa je $(AP)_{ir} = (PB)_{ir}$ in $(AP)_{jr} = (PB)_{jr}$, je

$$(AP)_{ir} = \sum_{a=1}^{k} p_{ia} b_{ar} = b_{\ell r} \qquad \text{in} \qquad (AP)_{jr} = \sum_{a=1}^{k} p_{ja} b_{ar} = b_{\ell r}.$$

Torej imata dve poljubni vozlišči iz C_ℓ vedno $b_{\ell r}$ sosedov v C_r, kar pa pomeni, da je particija π ekvitabilna, matrika B pa je očitno ravno matrika sosednosti kvocientnega grafa G/π. ∎

Definicijo ekvitabilne particije pa lahko povemo tudi jeziku linearne algebre. Velja namreč naslednja lema.

Lema 2.2 *Naj bo G graf, matrika A njegova matrika sosednosti in π particija vozlišč grafa G s karakteristično matriko P. Potem je π ekvitabilna natanko tedaj, ko je vektorski podprostor, ki ga napenjajo stolpci matrike P, A-invarianten.*

Dokaz. Vemo, da je vektorski podprostor, ki ga napenjajo stolpci matrike P, A-invarianten natanko tedaj, ko obstaja taka matrika B, da velja $AP = PB$. Trditev sedaj sledi iz leme 2.1. ∎

Z naslednjim izrekom bomo povezali lastne vrednosti in lastne vektorje kvocientnega grafa G/π z lastnimi vrednostmi in lastnimi vektorji grafa G.

Izrek 2.3 *Naj bo $\pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ ekvitabilna particija množice vozlišč grafa G, P njena karakteristična matrika, A matrika sosednosti grafa G in B matrika sosednosti kvocientnega grafa G/π. Dalje naj bo $\boldsymbol{x}$ vektor dimenzije $k \times 1$, $\boldsymbol{y}$ vektor dimenzije $n \times 1$, kjer je n število vozliš č grafa G, in θ realno število. Potem velja:*

a) Če je $B\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$, potem je $AP\boldsymbol{x} = \theta P\boldsymbol{x}$.

b) Če je $A\boldsymbol{y} = \theta\boldsymbol{y}$, potem je $\boldsymbol{y}^T PB = \theta\boldsymbol{y}^T P$.

c) Karakteristični polinom matrike B deli karakteristični polinom matrike A.

Dokaz. Če je $B\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$, potem je po lemi 2.1

$$AP\boldsymbol{x} = PB\boldsymbol{x} = P\theta\boldsymbol{x} = \theta P\boldsymbol{x}.$$

Podobno, če je $A\boldsymbol{y} = \theta\boldsymbol{y}$, potem je zopet po lemi 2.1

$$\boldsymbol{y}^T PB = \boldsymbol{y}^T AP = \theta\boldsymbol{y}^T P.$$

Dokazati moramo še točko c). Če je vektor $\boldsymbol{x}$ različen od vektorja $\mathbf{0}$, potem je tudi vektor $P\boldsymbol{x}$ neničeln. Vektor $P\boldsymbol{x}$ ima namreč na vseh koordinatah, ki pripadajo elementom množice C_i konstanto vrednost - ravno i-to koordinato vektorja $\boldsymbol{x}$. Naj bo $\boldsymbol{x'}$ vektor dimenzije $k \times 1$, ki je linearno neodvisen od vektorja $\boldsymbol{x}$. Zaradi pravkar omenjene lastnosti vektorjev $P\boldsymbol{x}$ in $P\boldsymbol{x'}$ se ni težko prepričati, da sta tudi vektorja $P\boldsymbol{x}$ in $P\boldsymbol{x'}$ linearno neodvisna. Po točki a) je torej vsaka lastna vrednost θ matrike B tudi lastna vrednost matrike A. Poleg tega pa je večkratnost θ kot lastne vrednosti matrike A vsaj tolikšna, kot je večkratnost θ kot lastne vrednosti matrike B. Točka c) je tako dokazana. ∎

Opomba 2.4 *Dokaz izreka 2.3 se da očitno razširiti na primer, ko sta A in B poljubni dve simetrični matriki, za kateri obstaja taka matrika P, da je $AP = PB$.*

Točka b) izreka 2.3 nam pove, da če je $\boldsymbol{y}$ lastni vektor matrike A, potem je $\boldsymbol{y}^T P$ lastni vektor matrike B natanko tedaj, ko je različen od vektorja $\mathbf{0}$. To pa se zgodi natanko takrat, ko je za vsak i $(1 \leq i \leq k)$ vsota tistih koordinat vektorja $\boldsymbol{y}$, ki predstavljajo vozlišča iz množice C_i, enaka 0.

3 Simetrične Töplitzove matrike

Začnimo z definicijo. **Simetrična Töplitzova matrika** T dimenzije $n \times n$ je matrika, za katero velja

$$|i - j| = |k - h| \Longrightarrow (T)_{ij} = (T)_{kh}.$$

Simetrični Töplitzovi matriki dimenzije 5×5 in 6×6 sta torej matriki oblike

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & b & c & d \\ c & b & a & b & c \\ d & c & b & a & b \\ e & d & c & b & a \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ b & a & b & c & d & e \\ c & b & a & b & c & d \\ d & c & b & a & b & c \\ e & d & c & b & a & b \\ f & e & d & c & b & a \end{pmatrix}.$$

S pomočjo programskega paketa Mathematica oz. Maple lahko hitro razcepimo determinanto zgornjih dveh matrik na dva faktorja. V prvem primeru je determinanta enaka

$$\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ b & a+c & b+d \\ c & b+d & a+e \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a-c & b-d \\ b-d & a-e \end{vmatrix},$$

v drugem pa

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+d \\ b+c & a+d & b+e \\ c+d & b+e & a+f \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ b-c & a-d & b-e \\ c-d & b-e & a-f \end{vmatrix}.$$

Vendar pa se tako iskanje razcepa ustavi že pri n=11. Poskusimo najti pravilo za faktorizacijo determinante Töplitzove matrike v splošnem primeru. Najprej predpostavimo, da ima matrika T sodo dimenzijo $n = 2k$. V tem primeru je matrika T oblike

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & A \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kjer sta A in B matriki dimenzije $k \times k$.

Izrek 3.1 *Naj bo T Töplitzova matrika dimenzije $2k \times 2k$, matriki A in B pa naj bosta definirani kot zgoraj. Potem je*

$$\det(T) = \det(A + B_v) \cdot \det(A - B_v),$$

kjer smo z B_v označili preko vodoravne osi prezrcaljeno matriko B.

Dokaz. Naj bo P_{2k} pot na $2k$ vozliščih in naj bo $\pi = \{\{k, k{+}1\}, \{k{-}1, k{+}2\}, \ldots, \{1, 2k\}\}$ particija njenih vozlišč. Particija π je ekvitabilna, P_1 pa naj bo njena karakteristična matrika. Matrika P_1 je oblike

$$\begin{pmatrix} I_v \\ I \end{pmatrix},$$

kjer je I identična matrika dimenzije $k \times k$, I_v pa matrika I, prezrcaljena preko vodoravne osi. Ker je matrika A simetrična, se s pomočjo (1) brez težav prepričamo, da velja $TP_1 = P_1(A + B_v)$. Zato so po izreku 2.3 in opombi 2.4 lastne vrednosti matrike $A + B_v$ tudi lastne vrednosti matrike T z vsaj tako večkratnostjo. Ker je determinanta matrike enaka produktu njenih lastnih vrednosti, velja

$$\det(A + B_v) \mid \det(T).$$

Podobno definirajmo matriko P_2:

$$P_2 = \begin{pmatrix} I_v \\ -I \end{pmatrix}.$$

Potem velja $TP_2 = P_2(A - B_v)$, in zato zopet po izreku 2.3 in opombi 2.4

$$\det(A - B_v) \mid \det(T).$$

Pokažimo sedaj, da tudi produkt $\det(A + B_v)\det(A - B_v)$ deli $\det(T)$. Naj imata matriki $A + B_v$ in $A - B_v$ isto lastno vrednost θ s pripadajočima lastnima vektorjema $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$. Če sta vektorja $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$ linearno neodvisna, potem sta linearno neodvisna tudi vektorja $P_1\boldsymbol{x}$ in $P_2\boldsymbol{y}$, torej ima θ kot lastna vrednost matrike T večkratnost vsaj 2. Prav tako sta tudi v primeru, ko sta vektorja $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$ linearno odvisna, vektorja $P_1\boldsymbol{x}$ in $P_2\boldsymbol{y}$ linearno neodvisna, zato ima θ kot lastna vrednost matrike T zopet večkratnost vsaj 2. Torej

$$\det(A + B_v)\det(A - B_v) \mid \det(T)\,.$$

Ker pa sta matriki $A + B_v$ in $A - B_v$ dimenzije k, mora veljati enačaj:

$$\det(A + B_v)\det(A - B_v) = \det(T)\,.$$

∎

Poglejmo si sedaj še primer, ko je dimenzija matrike T enaka $2k+1$. V tem primeru je matrika T take oblike:

$$\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{x} & B \\ \boldsymbol{x}^T & a_{11} & (\boldsymbol{x}^T)_n \\ B^T & \boldsymbol{x}_v & A \end{pmatrix}, \tag{2}$$

kjer sta A in B matriki dimenzije $k \times k$ in $\boldsymbol{x}$ vektor dimenzije $k \times 1$. Indeksa v in n označujeta zrcaljenje preko vodoravne oziroma navpične osi. Definirajmo matriko C dimenzije $(k+1) \times (k+1)$ takole:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & 2(\boldsymbol{x}^T)_n \\ \boldsymbol{x}_v & A + B_v \end{pmatrix}.$$

Izrek se v tem primeru glasi takole.

Izrek 3.2 *Naj bo T Töplitzova matrika dimenzije $(2k+1) \times (2k+1)$. Matrike A, B in C naj bodo definirane kot zgoraj. Potem je*

$$\det(T) = \det(C)\det(A - B_v).$$

Dokaz. Naj bo I identična matrika dimenzije $k \times k$, matrika I_v naj bo preko vodoravne osi prezrcaljena matika I, $\mathbf{0}$ pa naj bo ničelni vektor dimenzije $k \times 1$. Podobno kot v dokazu izreka 3.1 definirajmo matriki P_1 dimenzije $(2k+1) \times (k+1)$ in P_2 dimenzije $(2k+1) \times k$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I_v \\ 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & I \end{pmatrix} \quad , \quad P_2 = \begin{pmatrix} I_v \\ \mathbf{0}^T \\ -I \end{pmatrix}.$$

Matrika P_1 je tudi karakteristična matrika ekvitabilne particije $\pi = \{\{k+1\}, \{k, k+2\}, \{k-1, k+3\}, \ldots, \{1, 2k+1\}\}$ vozlišč poti na $2k+1$ vozliščih. Podobno kot prej tudi v tem primeru s pomočjo (2) vidimo, da veljata enakosti

$$TP_1 = P_1 C \quad \text{in} \quad TP_2 = P_2(A - B_v).$$

Zato so po izreku 2.3 in opombi 2.4 lastne vrednosti matrik C in $A - B_v$ tudi lastne vrednosti matrike T. Torej

$$\det(C) \mid \det(T) \quad \text{in} \quad \det(A - B_v) \mid \det(T).$$

Naj bo sedaj θ skupna lastna vrednost matrik C in $A - B_v$, $\boldsymbol{x}$ in $\boldsymbol{y}$ pa pripadajoča lastna vektorja. V vsakem primeru sta vektorja $P_1\boldsymbol{x}$ in $P_2\boldsymbol{y}$ linearno neodvisna, zato ima θ kot lastna vrednost matrike T večkratnost vsaj 2. Torej

$$\det(C)\det(A - B_v) \mid \det(T).$$

Spet pa zaradi dimenzij matrik C in $A - B_v$ velja enačaj:

$$\det(C)\det(A - B_v) = \det(T).$$

Izrek je s tem dokazan. ∎

Literatura

[1] C. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman & Hall, New York, 1993.

[2] A. Jurišić, *Antipodal Covers*, doktorska disertacija, University of Waterloo, Canada, 1995