ASOCIATIVNE SHEME

Aleksandar Jurišić Štefko Miklavič

Politehnika Nova Gorica in IMFM
Vipavska 13, p.p. 301, Nova Gorica
Slovenija

23. maj 2003

Math. Subj. Class. (2000):
05E{20, 30, 35}, 05C{12, 62, 50}, 05B{20, 25, 30}, 68R{05, 10, 141}, 11T71, 51Exx, 52Cxx

Asociativne sheme prestavljajo enega izmed temeljev moderne kombinatorike. V tem sestavku z njimi obravnavamo prepletanje algebre in kombinatorike, ki je znano pod imenom *algebraična kombinatorika*. Gre za diskretno matematiko, kjer pa imajo objekti in strukture določeno stopnjo regularnosti. Pomembnejša področja praktičnih uporab algebraične kombinatorike so teorija kod za odpravljanje napak, teorija statističnega načrtovanja eksperimentov, ter prek končnih geometrij in končnih obsegov tudi kriptografija.

ASSOCIATION SCHEMES

Association schemes provide one of the fundations of modern combinatorics. Through them we study in this paper the interaction between algebra and combinatorics that is commonly known as *algebraic combinatorics*. This is part of discrete mathematics, in which there is certain level of regularity. Three important applications of this area are the theory of error-correcting codes, statistical design of experiments and, through finite geometries and the theory of finite fields, also cryptography.

1 Uvod

Za dani d-terici $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$ elementov iz abecede z $n \geq 2$ simboli, imamo glede na ujemanje $d+1$ možnih relacij: lahko sta enaki, lahko se ujemata na $d-1$ mestih, lahko se ujemata na $d-2$ mestih, ..., ali pa sta različni prav na vseh mestih.

Za dani d-elementni podmnožici A in B množice z n elementi, kjer je $n \geq 2d$, imamo $d+1$ možnih relacij: lahko sta enaki, lahko se sekata v $d-1$ elementih, lahko se sekata v $d-2$ elementih, ..., ali pa sta disjunktni.

Zgornja primera skupaj s seznamom relacij, ki spominja na popoln sistem dogodkov iz teorije verjetnosti, sta primera **asociativnih shem**, ki jih bomo bolj natančno definirali v tem razdelku. V tem članku bomo obravnavali prepletanje algebre in diskretne matematike, ki je znano pod imenom *algebraična kombinatorika*. Gre za diskretno matematiko, kjer pa imajo objekti in strukture določeno stopnjo regularnosti. To nam v večini znanih primerov zagotovi veliko grupo avtomorfizmov. Objekti algebraične kombinatorike ter njihove strukture pa so pogosto povezani z asociativnimi shemami. Preden preidemo na njihov podrobnejši opis, naštejmo še nekaj pomembnejših področij praktičnih uporab algebraične kombinatorike: *teorija kodiranja, teorija statističnega načrtovanja*, ter prek *končnih geometrij* in *končnih obsegov* tudi *kriptografija*.

(Simetrična) asociativna shema z d razredi in n vozlišči je množica neničelnih, simetričnih, $(n \times n)$-razsežnih 01-matrik $I = A_0, A_1, \ldots, A_d$, za katere velja:

(a) $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$, kjer je J matrika samih enic,
(b) za vsaka $i, j \in \{0, 1, \ldots, d\}$ je produkt $A_i A_j$ linearna kombinacija matrik $A_0, \ldots, A_d$.

Asociativno shemo bomo označevali z $\mathcal{A}$ in ji rekli na kratko kar shema. Ker je A_i simetrična binarna matrika, je matrika sosednosti nekega (neusmerjenega) grafa Γ_i na n vozliščih. Če sta vozlišči x in y povezani v grafu Γ_i, bomo to simbolično zapisali takole: $x \,\Gamma_i\, y$ in rekli, da sta v i-ti relaciji. Iz pogoja (a) sledi, da za poljubni vozlišči x in y obstaja natanko en i, da je $x \,\Gamma_i\, y$, ter da graf Γ_i, $i \neq 0$, nima zank. Iz pogoja (b) pa sledi, da obstajajo take konstante p_{ij}^h , $i, j, h \in \{0, \ldots, d\}$, da velja

$$A_i A_j = \sum_{h=0}^{d} p_{ij}^h A_h. \tag{1}$$

Pravimo jim **presečna števila** asociativne sheme $\mathcal{A}$. Ker so matrike A_i simetrične, s transponiranjem leve in desne strani enakosti (1) ugotovimo, da med seboj komutirajo. Zato za vsa presečna števila velja $p_{ij}^h = p_{ji}^h$. Iz enakosti (1) pa razberemo tudi naslednji kombinatorični pomen presečnih števil p_{ij}^h, ki pojasni njihovo ime in zagotovi, da so nenegativna cela števila. Naj bosta x in y poljubni vozlišči, za kateri je $x \,\Gamma_h\, y$. Število vozlišč z, za katere velja $z \,\Gamma_i\, x$ in $z \,\Gamma_j\, y$, je enako p_{ij}^h, tj.

$$p_{ij}^h = |\{z\,;\; z \,\Gamma_i\, x \;\text{ in }\; z \,\Gamma_j\, y\}|. \tag{2}$$

Torej je Γ_i regularen graf stopnje $k_i := p_{ii}^0$ in je $p_{ij}^0 = \delta_{ij} k_i$. Če štejemo trojice vozlišč (x, y, z), kjer je $x \,\Gamma_h\, y$, $z \,\Gamma_i\, x$ in $z \,\Gamma_j\, y$, na dva različna načina, dobimo še zvezo $k_h \, p_{ij}^h = k_j \, p_{ih}^j$.

Podprostor $n \times n$ razsežnih matrik nad $\mathbb{R}$, ki je generiran s matrikami $A_0, \ldots, A_d$, je zaradi identitete (1) komutativna algebra. Poznamo jo pod imenom **Bose-Mesnerjeva algebra** asociativne sheme $\mathcal{A}$ in jo označimo z $\mathcal{M}$.

Oglejmo si sedaj nekaj primerov asociativnih shem. Shema z enim razredom je sestavljena iz identične matrike in matrike sosednosti grafa, v katerem sta sosednji vsaki vozlišči, tj. grafa premera 1 oziroma polnega grafa K_n. Rekli bomo, da gre za **trivialno shemo**.

Hammingova shema $H(d,n)$. Naj bosta d in n poljubni naravni števili in $\Sigma = \{0,1,\ldots,n-1\}$. Vozlišča asociativne sheme $H(d,n)$ so vse d-terice elementov iz Σ. Vozlišči x in y sta v i-ti relaciji, $0 \leq i \leq d$, natanko takrat, ko se razlikujeta v i mestih. Dobimo asociativno shemo z d razredi in n^d vozlišči. Omenimo še različico iz linearne algebre, ki ji pravimo **shema bilinearnih form** $\mathcal{M}_{d\times m}(q)$. Končnemu obsegu s q elementi pravimo Galoisov obseg in ga označimo z $\mathrm{GF}(q)$. Naj bosta d in $m \geq d$ naravni števili ter q potenca nekega praštevila. Naj vse $(d \times m)$-razsežne matrike nad $\mathrm{GF}(q)$ predstavljajo vozlišča sheme, vozlišči pa sta v i-ti relaciji, $0 \leq i \leq d$, če je rang njune razlike enak i.

Johnsonova shema $J(n,d)$. Naj bosta n in d poljubni naravni števili, za kateri je $d \leq n$ in X poljubna množica z n elementi. Vozlišča asociativne sheme $J(n,d)$ so vse d-elementne podmnožice množice X. Vozlišči x in y sta v i-ti relaciji, $0 \leq i \leq \min\{d, n-d\}$, natanko takrat, ko ima njun presek $d-i$ elementov. Na ta način dobimo asociativno shemo z $\min\{d, n-d\}$ razredi in $\binom{n}{d}$ vozlišči. Opišimo še **q-analogijo Johnsonove sheme $J_q(n,d)$** (poznano tudi pod imenom **Grassmanova shema**): za vozlišča vzamemo vse d-razsežne podprostore n-razsežnega vektorskega prostora V nad $\mathrm{GF}(q)$. Podprostora A in B razsežnosti d sta v i-ti relaciji, $0 \leq i \leq d$, če je $\dim(A \cap B) = d - i$.

Ciklomatične sheme. Naj bo q potenca praštevila in d delitelj števila $q-1$. Naj bo C_1 podgrupa multiplikativne grupe obsega $\mathrm{GF}(q)$ indeksa d, in naj bodo $C_1, \ldots, C_d$ odseki podgrupe C_1. Vozlišča sheme so vsi elementi obsega $\mathrm{GF}(q)$. Vozlišči x in y sta v i-ti relaciji, ko je $x - y \in C_i$ (in v 0-ti relaciji ko je $x = y$). Da bi dobili asociativno shemo, mora biti $-1 \in C_1$, tako da so relacije simetrične, tj. $2 \mid d$, če je q lih.

Na prvi pogled bo morda kdo pomislil, da sploh ni tako lahko preveriti, ali določene matrike sestavljajo asociativno shemo. Vendar nam pogoja (b) običajno ni potrebno preverjati neposredno. Dovolj je že, da se prepričamo, da je vrednost izraza na desni strani relacije (2) neodvisna od izbire vozlišč (ne da bi računali presečna števila). Pogosto si lahko pomagamo s simetrijo. Naj bo X množica vozlišč in $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_d$ množica grafov za katere velja $V(\Gamma_i) = X$ in katerih matrike sosednosti, skupaj z identično matriko, ustrezajo pogoju (a). **Avtomorfizem** te množice grafov je permutacija vozlišč, ki za vsak graf ohranja sosednost. Matrike sosednosti grafov $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_d$, skupaj z identično matriko, tvorijo asociativno shemo, kakor hitro grupa avtomorfizmov deluje za vsak i tranzitivno na parih vozlišč, ki so sosedni v grafu Γ_i. Seveda pa je to le zadosten in ne tudi potreben pogoj. V tem duhu si oglejmo še en zanimiv primer asociativne sheme.

Permutacijska grupa G, ki deluje na množici X, je **krepko-tranzitivna**, če za poljubna elementa x in y množice X obstaja tak $g \in G$, da je $xg = y$ in $yg = x$. Grupa avtomorfizmov cikla na n vozliščih je primer krepko-tranzitivne grupe. Diagonala kartezičnega produkta $X \times X$ je množica parov $\{(x,x) \mid x \in X\}$. Grupa G deluje naravno tudi na množici $X \times X$: element (x,y) preslika v element (xg, yg). Očitno je delovanje grupe G na X tranzitivno natanko takrat, ko je diagonala množice $X \times X$ orbita delovanja grupe G na $X \times X$. V tem primeru lahko na vsako nediagonalno orbito delovanja G na $X \times X$ gledamo kot na usmerjen graf z množico vozlišč X. Ko pa je grupa G krepko-tranzitivna, so orbite njenega delovanja na množici $X \times X$ simetrične. Nediagonalna orbita nam v tem primeru definira neusmerjen graf. Matrike sosednosti teh grafov tvorijo, skupaj z identično matriko, asociativno shemo. Število njenih razredov je enako številu nediagonalnih orbit, število vozlišč pa moči množice X.

Prva sta konec tridesetih let prejšnjega stoletja vpeljala asociativne sheme Bose in Nair [2] za potrebe statistike. Toda Delsarte [8] je pokazal, da nam lahko služijo kot povezava med številnimi področji matematike, naprimer teorijo kodiranja in teorijo načrtov.

V tem članku se bomo najprej podali v teorijo grup (primitivnost in neprimitivnost) in linerno algebro (spektralna teorija). Sledila bo vpeljava metrike, študij dualnosti in povezava

s teorijo karakterjev. Poseben pomen pa ima tudi geometrijski aspekt (reprezentacije in ortogonalni polinomi).

Omenimo še izjavo iz knjige Bannai in Ito [1]: *Algebraično kombinatoriko se da opisati kot "študij kombinatoričnih objektov s pomočjo teorije karakterjev"* ali pa kot *"teorijo grup brez grup"*. Za konec naštejmo še nekaj zanimivih povezav z asociativnimi shemami, kot so teorija vozlov (spin moduli) [12], linearno programiranje [8], in končne geometrije [6]

2 Primitivnost in neprimitivnost

V teoriji grup so enostavne končne grupe osnovni objekti iz katerih lahko zgradimo poljubne končne grupe. Pri asociativnih shemah koncept primitivnih asociativnih shem ustreza tistemu pri enostavnih grupah, vendar pa je primitivnih asociativnih shem veliko več in izgleda zaenkrat njihova klasifikacija nemogoča. Še več, način, na katerega dobimo primitivne asociativne sheme iz neprimitivnih, je, kot bomo videli v tem razdelku, veliko bolj zapleten.

Asociativna shema z d razredi je **primitivna**, če so vsi njeni grafi Γ_i, $1 \leq i \leq d$, povezani, in **neprimitivna** sicer. Trivialna shema je seveda primitivna. Johnsonova shema $J(n, d)$ je primitivna natanko takrat, ko je $n \neq 2d$. V primeru ko je $n = 2d$, je graf Γ_d nepovezan. Hammingova shema $H(d, n)$ je primitivna natanko takrat, ko je $n \neq 2$. V primeru ko je $n = 2$, so nepovezani grafi Γ_i, $1 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor$, ter graf Γ_d.

Naj matrike $A_0, \ldots, A_d$ predstavljajo asociativno shemo $\mathcal{A}$ z d razredi ter množico vozlišč X in naj bo π particija množice $\{1, \ldots, d\}$ na $m \in \mathbb{N}$ nepraznih celic. Naj bodo $A'_1, \ldots, A'_m$ matrike

$$\sum_{i \in C} A_i,$$

kjer C teče po vseh celicah particije π, in naj bo $A'_0 = I$. Te binarne matrike so elementi Bose-Mesnerjeve algebre $\mathcal{M}$, medsebojno komutirajo, njihova vsota pa je matrika J. V mnogih primerih tvorijo matrike $A'_0, \ldots, A'_m$ asociativno shemo. Takrat pravimo, da smo dobili to shemo iz sheme $\mathcal{A}$ z **zlivanjem** razredov (tudi **fuzijo**). Za $m = 1$ dobimo trivialno asociativno shemo. Brouwer in Van Lint [5] sta v svojem preglednem članku predstavila zlivanje, ki je bilo uporabljeno tudi za konstrukcijo novih 2-razrednih asociativnih shem, torej primer $m = 2$. Če npr. v Johnsonovi shemi $J(7, 3)$ zlijemo A_1 in A_3, dobimo 2-razredno asociativno shemo, v kateri en izmed grafov ustreza bločnemu grafu projektivne geometrije $PG(3, 2)$, drugi pa seveda njegovemu komplementu.

V tem razdelku bomo videli, da v neprimitivni asociativni shemi vedno obstaja netrivialno zlivanje, ki nam da asociativno shemo. Pravzaprav bomo iz neprimitivne asociativne sheme skonstruirali kar tri manjše sheme, glej npr. Godsil [9, str. 232-234].

Naj bo $\mathcal{A}$ neprimitivna asociativna shema z d razredi in množico vozlišč $X = \{1, \ldots, n\}$, v kateri graf Γ_ℓ ni povezan. Naj bo $C_1, C_2, \ldots, C_m$ particija π množice X, ki jo določajo povezane komponente grafa Γ_ℓ. Ni se težko prepričati, da neprazne zožitve grafov Γ_i na vsako komponento tvorijo asociativno shemo, ki ji pravimo **podshema**. Prav tako se na osnovi (2) in $p^h_{ij} = p^h_{ji}$ ni težko prepričati, da imajo vse množice C_j enako moč. Označimo jo z r.

Za števili $i, j \in \{0, \ldots, d\}$ bomo rekli, da sta v relaciji $\approx$ če in samo če velja naslednje: med poljubnima elementoma zgornje particije obstaja povezava iz grafa Γ_i če in samo če obstaja med njima tudi povezava iz grafa Γ_j. Relacija $\approx$ je ekvivalenčna relacija, poleg tega pa za vsak $i \in \{0, \ldots, d\}$ obstaja taka simetrična matrika B_i, da velja

$$\sum_{j \in [i]} A_j = B_i \otimes J_r,$$

kjer je $[i]$ ekvivalenčni razred števila i, z $\otimes$ pa smo označili tenzorski produkt matrik. Pri tem je B_0 identična matrika, matrike B_i pa se seštejejo v matriko samih enic. Z uporabo znane identitete $(B_i \otimes J_r)(B_j \otimes J_r) = r(B_iB_j \otimes J_r)$ se je moč prepričati, da matrike B_i tvorijo asociativno shemo, ki jo imenujemo **kvocientna shema** asociativne sheme $\mathcal{A}$. Matrike I_{mr}, $(B_0 \otimes J_r) - I_{mr}$ in $B_i \otimes J_r$ za vse $i \neq 0$ tvorijo še eno asociativno shemo. Ker le-ta razpenja podprostor Bose-Mesnerjeve algebre asociativne sheme $\mathcal{A}$, ki vsebuje matriki I in J, ter je zaprta za običajno množenje matrik in Schurovo množenje, ji pravimo **podalgebra** sheme $\mathcal{A}$ (ali pa tudi **fuzijska shema**).

3 Lastne vrednosti

Pomembno vlogo pri študiju asociativnih shem igrajo lastne vrednosti. Ker so matrike $A_0, \ldots, A_d$ asociativne sheme $\mathcal{A}$ linearno neodvisne, tvorijo bazo Bose-Mesnerjeve algebre $\mathcal{M}$. Naslednji izrek opiše še eno zanimivo bazo te algebre, glej npr. [9, Izrek 12.2.1].

Izrek 3.1 *Naj bo $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ asociativna shema nad n vozlišči. Potem obstajajo paroma pravokotne idempotentne matrike $E_0, \ldots, E_d$ in realna števila $p_i(j)$, tako da velja:*

(a) $\sum_{j=0}^{d} E_j = I$,

(b) $A_iE_j = p_i(j)E_j$ *oziroma* $A_i = \sum_{j=0}^{d} p_i(j)E_j$,

(c) $E_0 = \frac{1}{n}J$,

(d) matrike $E_0, \ldots, E_d$ so baza $(d+1)$-razsežnega vektorskega prostora, generiranega z matrikami $A_0, \ldots, A_d$.

Dokaz. Naj bo $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$. Iz spektralne analize normalnih matrik vemo, da za vsako matriko A_i obstajajo paroma pravokotne idempotentne matrike Y_{ij} in realna števila θ_{ij}, tako da je $A_iY_{ij} = \theta_{ij}Y_{ij}$ in

$$\sum_j Y_{ij} = I. \tag{3}$$

Prav tako vemo tudi, da se vsaka matrika Y_{ij} izraža kot nek polinom matrike A_i. Ker je $\mathcal{M}$ komutativna algebra, matrike Y_{ij} komutirajo med seboj in z matrikami $A_0, \ldots, A_d$. Torej je vsak produkt teh matrik idempotentna matrika (ki pa je lahko tudi ničelna). Enačba (3) velja za $i = 1, \ldots, d$. Če teh d enačb med seboj pomnožimo, dobimo enačbo oblike

$$I = \sum_j E_j, \tag{4}$$

kjer je vsak E_j idempotent, ki je enak produktu d idempotentov Y_{ik_i}, kjer je Y_{ik_i} idempotent iz spektralne dekompozicije matrike A_i. Torej so idempotenti E_j med seboj pravokotni, za vsako matriko A_i pa obstajajo realna števila $p_i(j)$, tako da velja $A_iE_j = p_i(j)E_j$. Zato velja tudi enakost

$$A_i = A_iI = A_i \sum_j E_j = \sum_j p_i(j)E_j, \tag{5}$$

ki pa nam pove, da je vsaka matrika A_i linearna kombinacija matrik E_j. Ker so neničelne matrike E_j paroma pravokotne, so tudi linearno neodvisne. Torej tvorijo bazo Bose-Mesnerjeve algebre $\mathcal{M}$. To pa nam pove, da je med matrikami E_j natanko $d+1$ neničelnih.

Točko (c) izreka naj poskusi dokazati bralec sam. ∎

Matrike $E_0, \ldots, E_d$ bomo imenovali **minimalni idempotenti** asociativne sheme $\mathcal{A}$. **Schurov** (oziroma Hadamardov) produkt matrik je množenje matrik po komponentah. Označevali ga bomo z "$\circ$". Ker je $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$, je Bose-Mesnerjeva algebra zaprta tudi za Schurov produkt. Matrike A_i so paroma pravokotni idempotenti za to množenje, zato jim pravimo tudi **Schurovi idempotenti** asociativne sheme $\mathcal{A}$. Ker pa so matrike $E_0, \ldots, E_d$ baza vektorskega prostora napetega na matrike $A_0, \ldots, A_d$, velja naslednja posledica.

Posledica 3.2 *Naj bo $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ asociativna shema in $E_0, \ldots, E_d$ njeni minimalni idempotenti. Potem obstajajo taka realna števila q_{ij}^h in $q_i(h)$ $(i, j, h \in \{0, \ldots, d\})$, da velja*

(a) $E_i \circ E_j = \dfrac{1}{n} \sum_{h=0}^{d} q_{ij}^h E_h,$

(b) $E_i \circ A_j = q_i(j) A_j$ *oziroma* $E_i = \dfrac{1}{n} \sum_{h=0}^{d} q_i(h) A_h,$

(c) matrike A_i imajo kvečjemu $d+1$ različnih lastnih vrednosti. ∎

Števila $p_i(0), \ldots, p_i(d)$ so (ne nujno različne) **lastne vrednosti** matrike A_i. Števila $q_i(0), \ldots, q_i(d)$ pa imenujemo **dualne** lastne vrednosti matrike E_i. **Matrika lastnih vrednosti** in **matrika dualnih lastnih vrednosti** asociativne sheme $\mathcal{A}$ sta $(d+1) \times (d+1)$ razsežni matriki P in Q, definirani s $(P)_{ij} = p_j(i)$ in $(Q)_{ij} = q_j(i)$. Prvi stolpec v obeh primerih sestavljajo same enice, medtem ko je število $p_i(1)$ lastna vrednost matrike A_1 z večkratnostjo $m_i = q_i(0)$. Le-ta je enaka $\mathrm{rang}(E_i)$. Iz (5) in posledice 3.2(b) sledi $PQ = nI$=QP. Ni se težko prepričati tudi o zvezi $\Delta_n Q = (\Delta_m P)^T$, kjer sta Δ_n in Δ_m diagonalni matriki z $(\Delta_n)_{ii} = k_i$ in $(\Delta_m)_{ii} = m_i$. Števila q_{ij}^h, ki so, kot bomo videli kasneje, nekakšen dual presečnih števil, imenujemo **Kreinovi parametri** asociativne sheme $\mathcal{A}$.

Z lastnimi vrednostmi lahko izrazimo vsa presečna števila in Kreinove parametre. Naprimer, če enakost (a) pomnožimo z E_h, dobimo $q_{ij}^h E_h = n E_h (E_i \circ E_j)$ oziroma

$$q_{ij}^h = \frac{n}{m_h} \,\mathrm{sled}(E_h(E_i \circ E_j)) = \frac{n}{m_h} \,\mathrm{vsota}(E_h \circ E_i \circ E_j), \tag{6}$$

kjer je vsota matrike A enaka vsoti vseh njenih elementov. Iz (a) in (b) sledi še $E_i \circ E_j \circ E_h = (1/n^3) \sum_{\ell=0}^{d} q_i(\ell) q_j(\ell) q_h(\ell) A_\ell$, torej zaradi $\Delta_n Q = (\Delta_m P)^T$ dobimo

$$q_{ij}^h = \frac{1}{n m_h} \sum_{\ell=0}^{d} q_i(\ell) q_j(\ell) q_h(\ell) k_\ell = \frac{m_i m_j}{n} \sum_{\ell=0}^{d} \frac{p_\ell(i) p_\ell(j) p_\ell(h)}{k_\ell^2}.$$

Naj bo s premer grafa Γ_i. Potem so matrike $A_i^0, A_i^1, \ldots, A_i^s$ linearno neodvisne, graf Γ_i pa ima zato vsaj $s+1$ različnih lastnih vrednosti. Seveda je $s \leq d$. Primeru, ko je $s = d$, bomo posvetili posebno pozornost v naslednjem razdelku.

4 Metrika

Že sama presečna števila nam nakažejo, da je smiselno posebno pozornost nameniti razredu asociativnih shem z metriko. Asociativna shema $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ je **metrična** za razvrstitev $A_0, \ldots, A_d$, če presečna števila zadovoljujejo naslednja pogoja:

(i) **(trikotniški pogoj)**: če je eno izmed števil i, j, h večje od vsote drugih dveh, je število p_{ij}^h enako 0,

(ii) **(povezanost)**: če je $i, j \in \{0, 1, \ldots, d\}$ in $i + j \leq d$, je $p_{ij}^{i+j} \neq 0$.

Metrične asociativne sheme igrajo pomembno vlogo v algebraični kombinatoriki. Naj bo $\mathcal{A}$ metrična asociativna shema. Potem je prva matrika vedno identična. Pokazati se da, da je vrstni red odvisen že od matrike A_1. Velja tudi, da je asociativna shema metrična glede na A_1 natanko takrat, ko ima ustrezen graf Γ_1 premer d, [9, lema 12.3.2]. Če velja slednja lastnost, potem pravimo, da je graf Γ_1 **razdaljno-regularen**.

Asociativna shema $\mathcal{A}$ je **kometrična** za razvrstitev matrik $E_0, \ldots, E_d$ če trikotniškemu pogojema in pogoju povezanosti zadoščajo Kreinovi parametri. Johnsonova in Hammingova asociativna shema sta primera shem, ki so hkrati metrične in kometrične. Naj omenimo tudi, da je asociativna shema lahko metrična (oziroma kometrična) za različne razvrstitve matrik $A_0, A_1, \ldots, A_d$ (oziroma $E_0, E_1, \ldots, E_d$). V primeru $p_{11}^0 > 2$ pa je asociativna shema metrična za največ dve razvrstitvi, glej [4, Izrek 4.2.12].

Kot primer si poglejmo asociativne sheme z dvema razredoma: $\mathcal{A} = \{I, A_1, A_2\}$. Enakost $p_{ij}^0 = \delta_{ij} k_i$ nam zagotavlja, da so presečna števila p_{10}^0, p_{20}^0 in p_{21}^0 enaka 0, presečna števila p_{00}^0, p_{11}^0 in p_{22}^0 pa različna od nič. Ker velja $p_{ij}^h = p_{ji}^h$ in $k_h\, p_{ij}^h = k_j\, p_{ih}^j$, je potrebno ugotoviti le še ali je $p_{11}^2 \neq 0$ za razvrstitev I, A_1, A_2 in $p_{22}^1 \neq 0$ za razvrstitev I, A_2, A_1. Pogoj $p_{11}^2 \neq 0$ je izpolnjen natanko tedaj, ko je graf Γ_1 povezan, tj. kadar je diameter grafa Γ_1 enak 2. Enako vlogo igra pogoj $p_{22}^1 \neq 0$ v grafu Γ_2. Če je shema $\mathcal{A}$ primitivna, sta zaradi povezanosti grafov Γ_1 in Γ_2 števili p_{11}^2 in p_{22}^1 različni od 0, in je shema $\mathcal{A}$ metrična za obe razvrstitvi. Brez škode na splošnosti je potrebno preveriti še primer, ko je $p_{11}^2 = 0$. Potem iz (1) dobimo $A_1^2 = p_{11}^0 I + p_{11}^1 A_1$. V grafu Γ_1 je število sprehodov dolžine 2 od vozlišča x do vozlišča y enako številu njunih skupnih sosedov, to je $(A_1^2)_{xy}$. To pa pomeni, da v grafu Γ_1 ni vozlišč, ki bi bila na medsebojni razdalji 2. Ker je $\mathcal{A}$ dvorazredna shema, je graf Γ_1 disjunktna unija vsaj dveh klik, presečno število $p_{22}^1 = 0$, shema $\mathcal{A}$ pa je neprimitivna. V tem primeru je torej graf Γ_2 poln večdelen graf, shema $\mathcal{A}$ pa je metrična za razvrstitev I, A_2, A_1.

Podobno ugotovimo, da je 2-razredna asociativna shema tudi kometrična, in da je kometrična za dve razvrstitvi natanko takrat, ko je primitivna.

Asociativne sheme z dvema razredoma so ekvivalentne **krepko-regularnim grafom**. To so regularni grafi, ki niso polni grafi, za katere obstajata taki nenegativni celi števili λ in μ, da imata vsaki sosednji vozlišči natanko λ skupnih sosedov, vsaki nesosednji vozlišči pa natanko μ skupnih sosedov.

Metričnost oziroma kometričnost asociativne sheme pa lahko definiramo tudi s povsem algebraičnega vidika. Rekli bomo, da je shema $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ ***P*-polinomska**, če lahko matrike $A_0, A_1, \ldots, A_d$ uredimo tako, da je matrika A_i polinom stopnje i v matriki A_1, $0 \leq i \leq d$. Podobno definiramo Q-polinomske asociativne sheme. Za poljubno matriko E z $E^{(r)}$ označimo Schurov produkt r kopij matrike E, pri tem pa naj bo $E^{(0)} = J$. Za poljuben polinom $q(x) = \sum_{i=0}^m q_i x^i$ definirajmo $q \circ E$ z

$$q \circ E = \sum_{i=0}^{m} q_i E^{(i)}.$$

Matriko $q \circ E$ bomo imenovali **Schurov polinom** v matriki E. Asociativna shema $\mathcal{A}$ z minimalnimi idempotenti $E_0, E_1, \ldots, E_d$ je ***Q*-polinomska**, če lahko njene minimalne idempotente uredimo tako, da je matrika E_i Schurov polinom stopnje i v matriki E_1, $0 \leq i \leq d$.

Izkaže se (glej [4, Trditev 2.7.1]), da je asociativna shema metrična (oz. kometrična) natanko takrat, ko je P-polinomska (oz. Q-polinomska).

5 Dualnost

Na določene rezultate iz teorije kodiranja in teorije t-načrtov (ki so jih odkrili neodvisno) lahko danes gledamo kot na formalno dualne poglede določenih idej iz teorije asociativnih shem. Tako je Fisherjeva neenakost in njene posplošitve [20, Izrek 19.8], [4, str. 138] formalno dualna oceni za zlaganje krogel [20, Izrek 21.1], [22]. Lloydov izrek za popolne kode [21], [8], [4, str. 56] je formalen dual izreka o tesnih načrtih (angl. tight design) in ortogonalnih tabelah (ang. orthogonal array) [23]. Delsartova neenakost za porazdelitveni vektor podmnožice asociativne sheme [8, str. 26], [20, Izrek 30.3], [4, Trditev 2.5.2] predstavlja oceno linearnega programa za velikost kod. V tem razdelku si bomo ogledali za kakšno dualnost pravzaprav gre.

Bose-Mesnerjeva algebra $\mathcal{M}$ asociativne sheme $\mathcal{A}$ ni zaprta samo za običajno matrično množenje, ampak tudi za množenje po komponentah (Schurovo oziroma Hadamardovo množenje matrik). Matrike A_i tvorijo bazo minimalnih Schurovih idempotentov glede na to množenje in relacijo, ki je definirana z $A \leq A'$ če in samo če je $A' \circ A = A$.

Dualnost med običajnim matričnim množenjem, števili p_{ij}^h in matrikami A_i in P na eni strani, ter Schurovim množenjem matrik, števili q_{ij}^h in matrikami E_i in Q na drugi, je osnovna gonilna sila teorije asociativnih shem in tudi teorije razdaljno-regularnih grafov. Tako se naprimer imprimitivnost in dualna imprimitivnost ujemata, podshema in kvocientna shema imprimitivne asociativne sheme pa sta dualna koncepta. Za asociativne sheme imajo presečna števila enostavno kombinatorično interpretacijo in so zato cela števila. Ne poznamo pa ničesar podobnega za poljubne Kreinove parametre. Deloma to vrzel zapolni naslednji izrek, ki nam poda močan kriterij za obstoj asociativnih shem.

Izrek 5.1 (Scott, [24]) *Naj bo $\mathcal{A}$ asociativna shema na n vozliščih in $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$. Naj bo $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^n \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i$. Potem so Kreinovi parametri q_{ij}^h nenegativni, oziroma bolj natančno*

$$q_{ij}^h = \frac{n}{m_h} \|(E_i \otimes E_j \otimes E_h)\boldsymbol{v}\|^2,$$

in $q_{ij}^h = 0$ natanko tedaj ko je $(E_i \otimes E_j \otimes E_h)\boldsymbol{v} = 0$.

Dokaz (Godsil [10, Lema 1.8.3]). Iz (6) in znane tenzorske identitete $(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By$ za $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $x, y \in \mathbb{R}^n$ dobimo

$$q_{ij}^h = \frac{n}{m_h} \text{ vsota}(E_i \circ E_j \circ E_h) = \frac{n}{m_h} \boldsymbol{v}^T (E_i \otimes E_j \otimes E_h)\boldsymbol{v}.$$

Sedaj trditev sledi iz dejstva, da je $E_i \otimes E_j \otimes E_h$ simetričen idempotent. ∎

Še en močan kriterij za obstoj asociativne sheme je **absolutna meja**, ki omeji rang matrike $E_i \circ E_j$, in jo podajamo v naslednjem izreku, glej npr. [4, Izrek 2.3.3].

Izrek 5.2 *Naj bo $\mathcal{A}$ d-razredna asociativna shema. Potem njene večkratnosti m_i, $1 \leq i \leq d$, zadoščajo neenakosti*

$$\sum_{q_{ij}^h \neq 0} m_h \leq \begin{cases} m_i m_j & \text{if } i \neq j, \\ \frac{1}{2} m_i (m_i + 1) & \text{if } i = j. \end{cases}$$

Dokaz. Leva stran je enaka $\text{rang}(E_i \circ E_j)$, ki je kvečjemu $\text{rang}(E_i \otimes E_j) = m_i m_j$. Naj bo sedaj $i = j$. Med vrsticami matrike E_i si lahko izberemo m_i vrstic, ki jih generirajo. Potem so vrstice matrike $E_i \circ E_i$, katere elementi so kvadrati elementov matrike E_i, generirane z $m_i + \binom{m_i}{2}$ vrsticami, ki so Schurovi produkti katerih koli dveh izmed teh m_i vrstic. ∎

Čeprav smo omenili, da za poljubne Kreinove parametre ne poznamo kombinatorične interpretacije, v nekaterih primerih stanje le ni tako brezupno. Prvi tak rezultat je naslednji izrek, ki so ga dokazali Cameron, Goethals in Seidel v [7, Izrek 5.4].

Izrek 5.3 *Naj bo Γ krepko-regularen graf in privzemimo, da je $q_{ii}^i = 0$ za nek $i \in \{1, 2\}$. Potem sta za vsako vozlišče x grafa Γ krepko regularna tudi grafa, inducirana s sosedi oziroma nesosedi vozlišča x.* ∎

Podobne kombinatorične interpretacije pa so za razdaljno-regularne grafe premera 3 in 4 dokazali Godsil in Hansel [11] ter Jurišić in Koolen [17].

Če za neki asociativni shemi velja, da so presečna števila ene sheme ravno Kreinovi parametri druge, potem je tudi obratno res. Za taki shemi pravimo da sta **formalno dualni**. Asociativna shema, ki je fomalen dual metrične asociativne sheme, je kometrična. Jaeger [13] je dokazal, da vsak spin model pripada Bose-Mesnerjevi algebri formalno sebi dualne asociativne sheme. Glej tudi [14] in [15]. Asociativna shema ima lahko več formalnih dualov ali pa sploh nobenega. Formalna dualnost je pač stvar parametrov, ne pa strukture same. V nekaterih primerih pa lahko vedno na naraven način definiramo dualno asociativno shemo, kar bomo pokazali v naslednjem razdelku.

6 Algebra

Oglejmo si sedaj zvezo med teorijo reprezentacij in zgoraj opisano dualnostjo. Omejili se bomo na abelove grupe, vendar pa se da celoten pristop uporabiti tudi bolj splošno.

Naj bo G abelova grupa reda n z enoto 0. **Karakter** grupe G je homomorfizem iz grupe G v multiplikativno grupo neničelnih kompleksnih števil. Množico vseh karakterjev označimo z G^*. **Trivialen** karakter je homomorfizem, ki vsak element grupe G preslika v 1. Za vsak $g \in G$ velja, da je $ng = 0$. Zato za poljuben karakter Φ velja $1 = \Phi(ng) = \Phi(g)^n$, torej je $\Phi(g)$ n-ti koren enote.

Naj bo $\Phi \in G^*$. Z $\overline{\Phi}$ označimo preslikavo, ki vsak $g \in G$ preslika v konjugirano število števila $\Phi(g)$. Ni se težko prepričati, da je $\overline{\Phi}$ karakter. Za vsak $g \in G$ velja $\Phi(g)\overline{\Phi}(g) = 1$, od tod pa sledi, da je $\overline{\Phi}(g) = \Phi(g^{-1})$. V množici G^* za poljubna elementa $\Phi, \Psi \in G^*$ definirajmo produkt $\Phi\Psi$ s $(\Phi\Psi)(g) = \Phi(g)\Psi(g)$ za vsak $g \in G$. Iz zgornjih dejstev ni težko ugotoviti, da je množica G^* za tako definirano množenje grupa. Enota je trivialni karakter, inverz karakterja Φ pa karakter $\overline{\Phi}$. Dokaz naslednje pomembne trditve, kakor tudi dokaze vseh ostalih trditev iz tega razdelka, si bralec lahko ogleda npr. v Godsil [9, razdelki 12.8, 12.9 in 12.10].

Izrek 6.1 *Če je G končna abelova grupa, potem sta grupi G in G^* izomorfni.* ∎

Tabela karakterjev grupe G je kompleksna matrika H katere vrstice in stolpci so indeksirani zaporedoma s karakterji in elementi grupe G, ij-ti element pa je enak vrednosti i-tega karakterja na j-tem elementu grupe G. Potem je $HH^* = nI$.

Naj bo G poljubna grupa. Za vsako njeno podmnožico C definirajmo $C^{-1} := \{c^{-1} \mid c \in C\}$. Naj bo C taka podmnožica grupe G, da je $C^{-1} = C$ in C ne vsebuje enote grupe G. Vpeljimo **Cayleyev graf** grupe G glede na množico C. Množica njegovih vozlišč je množica elementov grupe G, elementa g in h pa sta povezana natanko takrat, ko je $hg^{-1} \in C$. Cayleyev graf grupe G glede na množico C bomo označevali z $\Gamma(C)$. Ni se težko prepričati, da je za vsak $g \in G$ permutacija, ki vozlišče v grafa $\Gamma(C)$ preslika v vozlišče vg, avtomorfizem grafa $\Gamma(C)$. Torej grupa G deluje z desne na množici vozlišč grafa $\Gamma(C)$ kot grupa avtomorfizmov grafa $\Gamma(C)$.

Poleg tega je to delovanje tudi regularno, kar pomeni da je tranzitivno in da je enota edini element, ki ima fiksno točko. Velja tudi naslednja lema.

Lema 6.2 *Naj bo Γ graf. Podgrupa G grupe avtomorfizmov grafa Γ deluje regularno na množici vozlišč $V(\Gamma)$ natanko tedaj, ko je $\Gamma = \Gamma(C)$ za neko podmnožico C grupe G, ki ne vsebuje enote in za katero je $C = C^{-1}$.* ∎

Naj bo $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \ldots, A_d\}$ asociativna shema. Ker je vsota matrik A_i enaka matriki J, lahko vsako izmed matrik A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ smatramo za matriko sosednosti nekega grafa Γ_i. Kot smo že omenili, je avtomorfizem asociativne sheme $\mathcal{A}$ permutacija njenih vozlišč, ki je avtomorfizem vsakega izmed grafov Γ_i.

Recimo, da grupa avtomorfizmov asociativne sheme $\mathcal{A}$ vsebuje tako abelovo podgrupo G, ki deluje regularno na vsakem izmed grafov Γ_i. Takim asociativnim shemam pravimo **translacijske** asociativne sheme. Po lemi 6.2 za vsak graf Γ_i obstaja taka podmnožica C_i grupe $G \setminus \{0\}$ (kjer je 0 enota grupe G), da je $C_i^{-1} = C_i$ in $\Gamma_i = \Gamma(C_i)$. Pokažimo, da množice C_i tvorijo particijo množice $G \setminus \{0\}$. Naj bo g poljuben element množice $G \setminus \{0\}$. Ker je g povezan z 0 v natanko enem izmed grafov Γ_i, je g element natanko ene od množice C_i.

Sedaj pa začnimo z drugega konca. Naj bo G abelova grupa s particijo množice $G \setminus \{0\}$ na podmnožice C_i, za katere velja $C_i^{-1} = C_i$. Kdaj Cayleyevi grafi $\Gamma_i = \Gamma(C_i)$ določajo asociativno shemo? Da bi odgovorili na to vprašanje najprej povejmo, da vsaka particija σ grupe G porodi particijo σ^* grupe G^*: karakterja Φ in Ψ naj bosta v isti množici particije σ^* natanko takrat, ko je $\Phi(C) = \Psi(C)$ za vsako množico C particije σ. Število blokov particije σ označimo z $|\sigma|$. Naslednji izrek sta prva dokazala Bridges in Mena [3].

Izrek 6.3 *Naj bo G končna abelova grupa in $\sigma = \{C_0, \ldots, C_d\}$ particija grupe G, za katero velja $C_i^{-1} = C_i$, $i \in \{0, 1, \ldots, d\}$ in $C_0 = \{0\}$. Potem je $|\sigma^*| \geq |\sigma|$. Grafi $\Gamma(C_i)$ tvorijo asociativno shemo $\mathcal{A}$, katere vozlišča so elementi grupe G, natanko takrat, ko je $|\sigma^*| = |\sigma|$. V tem primeru σ^* določa asociativno shemo $\mathcal{A}^*$, katere vozlišča so elementi grupe G^*, shemi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$ pa sta formalno dualni.*

7 Geometrija

Naj bo Γ graf z množico vozlišč $\{1, 2, \ldots, n\}$ in matriko sosednosti A. Naj bo θ lastna vrednost matrike A z večkratnostjo m, U_θ pa $n \times m$ razsežna matrika, katere stolpci tvorijo ortonormirano bazo njenega lastnega podprostora. Z $u_i = u_i(\theta)$ označimo i-to vrstico matrike U_θ. Za poljuben lastni vektor $\boldsymbol{x}$ lastne vrednosti θ velja $A\boldsymbol{x} = \theta\boldsymbol{x}$, oziroma $\sum_{j \sim i} x_j = \theta x_i$ za $1 \leq i \leq n$. Zato velja $AU_\theta = \theta U_\theta$ oziroma

$$\sum_{j \sim i} u_j(\theta) = \theta u_i(\theta). \tag{7}$$

Zgornja enačba je smiselna tudi za poljubno asociativno shemo, če vzamemo $\Gamma = \Gamma_i$. Vsako preslikavo iz množice vozlišč grafa Γ v $\mathbb{R}^m$, za katero velja zgornja enakost, bomo imenovali *Evklidska reprezentacija grafa* Γ glede na lastno vrednost θ. Evklidske reprezentacije razdaljno-regularnih grafov so še posebej zanimive zaradi naslednje lastnosti:

Trditev 7.1 *Naj bo Γ razdaljno-regularen graf in naj bo θ lastna vrednost njegove matrike sosednosti A. Za poljubni vozlišči i in j je skalarni produkt $\langle u_i(\theta), u_j(\theta) \rangle$ odvisen samo od njune razdalje v grafu Γ.*

Dokaz. Enačbo (5) lahko za $i = 1$ zapišemo takole: $A = \sum\{\theta E_\theta \,|\, \theta \in ev(A)\}$, kjer smo z $ev(A)$ označili množico lastnih vrednosti matrike A. Ker pa so matrike E_i idempotenti, za vsak polinom f velja $f(A) = \sum\{f(\theta)E_\theta \,|\, \theta \in ev(A)\}$. Vzemimo sedaj za f polinom $f(x) = \prod\{(x-\tau) \,|\, \tau \in ev(A)\setminus\{\theta\}\}$. Potem je $f(A) = f(\theta)E_\theta$ in $f(\theta) \neq 0$. Matrika $f(A)$ pa je linearna kombinacija matrik $A_0, A_1, \ldots, A_d$, zato je vrednost $(f(A))_{ij}$, oziroma vrednost $(E_\theta)_{ij}$, odvisna samo od indeksa h. Ker pa je $E_\theta = U_\theta U_\theta^T$, velja $(E_\theta)_{ij} = \langle u_i(\theta), u_j(\theta)\rangle$ in trditev je dokazana. ∎

V primeru, ko je $i = j$, nam zgornji rezultat zagotovi, da imajo vektorji $u_i(\theta)$ za $i = 1, 2, \ldots, n$ enako dolžino, oziroma da reprezentacija U_θ preslika vsa vozlišča razdaljno-regularnega grafa Γ na neko sfero v $\mathbb{R}^m$. Za poljubni vozlišči i in j razdaljno-regularnega grafa Γ, ki sta na razdalji r, naj bo funkcija $\sigma_r(\theta)$ definirana z

$$\sigma_r(\theta) = \frac{\langle u_i(\theta), u_j(\theta)\rangle}{\langle u_i(\theta), u_i(\theta)\rangle}.$$

Pravimo ji **r-ti kosinus** lastne vrednosti θ. Če enačbo (7) skalarno pomnožimo z $u_\ell(\theta)$, kjer je razdalja med i in ℓ enaka r, dobimo tročleno rekurzivno zvezo

$$\theta\sigma_r = p^r_{1,r+1}\sigma_{r+1} + p^r_{1,r}\sigma_r + p^r_{1,r-1}\sigma_{r-1}, \tag{8}$$

z začetnima pogojema $\sigma_0(\theta) = 1$ in $\sigma_1(\theta) = \theta/p^0_{11}$. Od tod lahko nato izračunamo še ostale kosinuse. Za $r = 2$ dobimo naprimer $\sigma_2(\theta) = (\theta^2 - p^1_{11}\theta - p^0_{11})/(p^0_{11}p^1_{12})$. Če v tričleni rekurzivni formuli nadomestimo lastno vrednost θ z neodvisno spremenljivko, dobimo zaporedje ortogonalnih polinomov. V tem kontekstu lahko štejemo razdaljno-regularne grafe za kombinatorično interpretacijo ortogonalnih polinomov. Leonard [19] je pokazal, da so ortogonalni polinomi asociativnih shem, ki so hkrati metrične in kometrične, bodisi Askey-Wilsonovi polinomi ali pa limitni primeri le-teh. Posledica tega močnega razultata je, da se da izraziti vse parametre teh asociativnih shem z le petimi parametri. Za Hammingovo asociativno shemo dobimo naprimer Krawtchoukove polinome [1, str. 209], [25, str. 240]:

$$K_k(x; n) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{x}{j}\binom{n-x}{k-j}$$

na množici $\{0, 1, \ldots, n\}$ za utež $w(i) = \binom{n}{i}$. Za Johnsonovo shemo pa Eberleinove polinome [1, str. 220], [25, str. 244] (oziroma dualne Hahnove polinome):

$$E_k(x, n, d) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{d-j}{k-j}\binom{d-x}{j}\binom{n-d+j-x}{j}$$

na množici $\{z_i = i(n+1-i) \mid i = 0, \ldots, n\}$ za utež $w(z_i) = \binom{n}{i} - \binom{n-1}{i}$. Seveda lahko s številnimi orodji, ki jih uporabljamo pri delu z ortogonalnimi polinomi (npr. Sturmovo zaporedje), dobimo veliko nadaljnjih informacij o razdaljno-regularnih grafih. Naprimer, če so $\theta_0 > \theta_1 > \cdots > \theta_d$ lastne vrednosti razdaljno-regularnega grafa Γ, potem velja

$$\sigma_0(\theta_1) > \sigma_1(\theta_1) > \cdots > \sigma_d(\theta_1) \quad \text{in} \quad (-1)^i\sigma_i(\theta_d) \geq 0. \tag{9}$$

Prva izmed zgornjih dveh lastnosti nam pove, da je 1-skelet konveksne ogrinjače evklidske reprezentacije grafa Γ glede na lastno vrednost θ_1 ravno graf Γ, glej Godsil [9, Lema 13.3.3]. Lepa posledica tega rezultata pa je, da je razdaljno-regularen graf Γ ravninski, brž ko ima

njegova druga največja lastna vrednost θ_1 večkratnost 3. Če pa je večkratnost lastne vrednosti θ_1 enaka 4, potem je ravninski graf, ki je induciran na sosedih poljubnega vozlišča x grafa Γ. Iz lastnosti (9) in (8) pa se da izpeljati parametrizacijo presečnih števil s pomočjo kosinusov, ki pripadajo lastnima vrednostima θ_1 in θ_d, glej Jurišić, Koolen in Terwilliger [18, Lema 10.1].

Za konec omenimo še, da se da precej teorije o simetričnih asociativnih shemah posplošiti tudi na nesimetrične asociativne sheme, ki jih dobimo, če v definiciji asociativne sheme $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_d\}$ nadomestimo pogoj, da so matrike iz $\mathcal{A}$ simetrične, s pogojem, da je $A_i^T \in \mathcal{A}$ za vsak i in da poljubni matriki iz $\mathcal{A}$ komutirata. V tem primeru so lahko nekatere lastne vrednosti sheme kompleksne. Konjugiranke končne grupe predstavljajo v tem primeru razrede asociativne sheme, tabela karakterjev pa je v bistvu matrika lastnih vrednosti sheme (zvezi $PQ = nI$ in $P^T\Delta_m = \Delta_n Q$ sta zvezi za pravokotnost karakterjev).

References

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, Benjamin-Cummings, California, 1984.

[2] R. C. Bose and K. R. Nair, *Partially balanced incomplete block designs*, Sankhya **4** (1939), 337–372.

[3] W. G. Bridges and R. A. Mena, *On the rational spectra of graphs with abelian Singer groups*, Linear Algebra Appl. **46** (1982), 51–60.

[4] A. E. Brouwer, A. M. Cohen and A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[5] Brouwer, A. E. and J. H. van Lint, Strongly regular graphs and partial geometries, in: *Enumeration and Design - Proc. Silver Jubilee Conf. on Combinatorics*, Waterloo 1982 (D.M. Jackson & S.A. Vanstone, eds.), Academic Press, Toronto (1984), pp. 85–122.

[6] F. Buekenhout, ed. *Handbook of incidence geometry, Buildings and Foundations*, North-Holland 1995.

[7] P. J. Cameron, J. M. Goethals and J. J. Seidel, *Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents*, J. of Algebra **55** (1978), 257–280.

[8] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips research reports supplements No. 10, 1973.

[9] C. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman & Hall, New York, 1993.

[10] C. D. Godsil, *Association schemes*, rokopis, 2002.

[11] C. D. Godsil and A. D. Hensel, *Distance regular covers of the complete graph*, J. Combin. Th. (B) **56** (1992), 205–238.

[12] F. Jaeger, *Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial*, Geom. Dedicata **44** (1992), 23–52.

[13] F. Jaeger, Towards a classification of spin models in terms of association schemes. In *Progrss in algebraic combinatorics (Fukuoka, 1993)*, vol. **24**. Math. Soc. Japan, Tokyo, 1996, pp. 197–225.

[14] F. Jaeger, M. Matsumoto, and K. Nomura, *Bose-Mesner algebras related to type II matrices and spin models*, J. Algebraic Combin. **8** (1998), 39–72.

[15] F. Jaeger, *On four-weight spin models and their gauge transformations*, J. Algebraic Combin. **11** (2000), 241–268.

[16] A. Jurišić, *Antipodal Covers*, doktorska disertacija, University of Waterloo, Canada, 1995

[17] A. Jurišić and J. Koolen, *Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4*, Discr. Math. **244** (2002), 181–202.

[18] A. Jurišić, J. Koolen and P. Terwilliger, *Tight Distance-Regular Graphs*, J. Alg. Combin. **12** (2000), 163–197.

[19] D. A. Leonard, *Orthogonal polynomials, duality and association schemes*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 656–663.

[20] J. H. Van Lint and R. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2nd ed. (2001).

[21] S. P. Lloyd, *Binary block coding*, Bell System Tech. J. **36** (1957), 517–535.

[22] A. M. Odlyzko and N. J. A. Sloane, *New upper bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphare in n dimensions*, J. Combin. Th. A **26** (1979), 210–214.

[23] D. K Ray-Chaudhuri and R. M. Wilson, *On t-designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–747.

[24] L. L. Scott, *A condition on Higman's parameters*, Notices Amer. Math. Soc. **20** (1973), A-97.

[25] N. J. A. Sloane, *An introduction to association schemes and coding theory*, Theory and application of special functions (Proc. Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., Publ. No. 35, Academic Press, New York, 1975), pp. 225–260.