Graf $\Gamma = (V, E)$ je sestavljen iz množice **vozlišč** V in družine 2-elementnih podmnožic E, katere elementom pravimo **povezave** (tako definiran graf je brez zank in večkratnih povezav).

Naj bo $V(\Gamma) = \{1, \ldots, n\}$. Potem je A $(n \times n)$-razsežna **matrika sosednosti** grafa Γ, če velja

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{če je } \{i, j\} \in E, \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}$$

Število $\theta \in \mathbb{R}$ je lastna vrednost grafa Γ, če za nek vektor $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ velja

$$Ax = \theta x \quad \text{oziroma} \quad (Ax)_i = \sum_{\{j,i\} \in E} x_j = \theta x_i.$$

Graf je **regularen**, če ima vsako vozlišče enako število sosedov. Podobni pogoji so:

(a) sosednji vozlišči imata natanko λ skupnih sosedov,
(b) nesosednji vozlišči imata natanko μ skupnih sosedov.

Graf je **krepko regularen**, če je regularen ter ima lastnosti (a) in (b).

Za $2 \leq s \leq v$ je **graf blokov** transverzalnega designa $TD(s, v)$ (dva bloka sta sosednja, če se sekata) krepko regularen graf s parametri $n = v^2$,

$$k = s(v-1), \;\; \lambda = (v-2)+(s-1)(s-2), \;\; \mu = s(s-1).$$

in lastnimi vrednostmi $s(v–1)^1, v–s^{s(v–1)}, –s^{(v–1)(v–s+1)}$.

Naj bo J $(n \times n)$-razsežna matrika samih enic.

Graf na n vozliščih je krepko-regularen, če in samo, če za njegovo matriko sosednjosti A velja

$$A^2 = kI + \lambda A + \mu(J - I - A),$$

in je $AJ = kJ$ za neka naravna števila k, λ in μ.

(Z matematično indukcijo se lahko hitro prepričamo, da velja $(A^h)_{ij}$ = #sprehodov od i do j dolžine h.)

Od tod sledi, da je ena lastna vrednost k z večkratnostjo 1, preostali vrednosti, ki ju označimo z σ in τ, pa korena naslednje kvadratne enačbe

$$x^2 - (\lambda - \mu)x + (\mu - k) = 0$$

in zato $\lambda - \mu = \sigma + \tau$, $\mu - k = \sigma\tau$.

Število povezav med sosedi in nesosedi nekega vozlišča krepko-regularnega grafa je enako

$$\mu(n-1-k)=k(k-\lambda-1),$$

torej je za povezan graf, tj. $\mu \neq 0$

$$n=\frac{(k-\theta)(k-\tau)}{k+\theta\tau},$$

večkratnosti lastnih vrednosti σ in τ pa sta

$$m_\sigma=\frac{(n-1)\tau+k}{\tau-\sigma}=\frac{(\tau+1)k(k-\tau)}{\mu(\tau-\sigma)}$$

in $m_\tau = n-1-m_\sigma$.

Asociativne sheme

Za dani d-terici $\boldsymbol{a}$ in $\boldsymbol{b}$ elementov iz abecede z $n \geq 2$ simboli, imamo glede na ujemanje $d+1$ možnih relacij:

lahko sta enaki, lahko se ujemata na $d-1$ mestih, lahko se ujemata na $d-2$ mestih, $\ldots$, ali pa sta različni prav na vseh mestih.

Za dani d-elementni podmnožici A in B množice z n elementi, kjer je $n \geq 2d$, imamo $d+1$ možnih relacij:

lahko sta enaki, lahko se sekata v $d-1$ elementih, lahko se sekata v $d-2$ elementih, $\ldots$, ali pa sta disjunktni.

Zgornja primera, skupaj s seznamom relacij, sta primera **asociativnih shem**, ki jih bomo bolj natančno še definirali.

Prva sta konec tridesetih let prejšnjega stoletja vpeljala asociativne sheme **Bose** in **Nair** za potrebe statistike.

Toda **Delsarte** je pokazal, da nam lahko služijo kot povezava med številnimi področji matematike, naprimer teorijo kodiranja in teorijo načrtov. Tu so še

– teorija grup (primitivnost in neprimitivnost),
– linerna algebra (spektralna teorija),
– metrika,
– študij dualnosti in povezava s teorijo karakterjev,
– reprezentacije in ortogonalni polinomi.

Bannai in Ito:

Algebraično kombinatoriko se da opisati kot

"študij kombinatoričnih objektov
s pomočjo teorije karakterjev"

ali pa kot

"teorijo grup brez grup".

Še nekaj zanimivih povezav z asociativnimi shemami:

– teorija vozlov (spin moduli),
– linearno programiranje,
– končne geometrije.

(Simetrična) **asociativna shema**
z d razredi in n vozlišči
je množica neničelnih, simetričnih, $(n \times n)$-razsežnih 01-matrik $I = A_0, A_1, \ldots, A_d$, za katere velja:

(a) $\sum_{i=0}^{d} A_i = J$, kjer je J matrika samih enic,

(b) za vsaka $i, j \in \{0, 1, \ldots, d\}$ je produkt $A_i A_j$ linearna kombinacija matrik $A_0, \ldots, A_d$.

Asociativno shemo bomo označevali z $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ in ji rekli na kratko kar **shema**.

Podprostor $n \times n$ razsežnih matrik nad $\mathbb{R}$, ki je generiran s matrikami $A_0, \ldots, A_d$, je zaradi lastnosti (b) *komutativna algebra.*

Poznamo jo pod imenom **Bose-Mesnerjeva algebra** asociativne sheme $\mathcal{A}$ in jo označimo z $\boldsymbol{\mathcal{M}}$.

Ker je A_i simetrična binarna matrika, je matrika sosednosti nekega (neusmerjenega) grafa Γ_i na n vozliščih.

Če sta vozlišči x in y povezani v grafu Γ_i, bomo to simbolično zapisali z $\boldsymbol{x\,\Gamma_i\,y}$ in rekli, da sta v ***i*-ti relaciji**.

Iz pogoja (a) sledi, da za poljubni vozlišči x in y obstaja natanko en i, da je $x\,\Gamma_i\,y$, ter da graf Γ_i, $i \neq 0$, nima zank.

Iz pogoja (b) pa sledi, da obstajajo take konstante p_{ij}^h , $i, j, h \in \{0, \ldots, d\}$, da velja

$$A_i A_j = \sum_{h=0}^{d} p_{ij}^h A_h. \tag{1}$$

Pravimo jim **presečna števila** asociativne sheme $\mathcal{A}$. Ker so matrike A_i simetrične, med seboj komutirajo. Zato za vsa presečna števila velja $p_{ij}^h = p_{ji}^h$.

Iz (1) pa razberemo kombinatorični pomen presečnih števil p_{ij}^h, ki zagotovi, da so nenegativna cela števila.

Naj bosta x in y poljubni vozlišči, za kateri je $x\,\Gamma_h\,y$.

$$p_{ij}^h = |\{z\,;\; z\,\Gamma_i\,x \;\text{ in }\; z\,\Gamma_j\,y\}|. \tag{2}$$

Torej je Γ_i regularen graf stopnje $k_i := p_{ii}^0$ in je $p_{ij}^0 = \delta_{ij} k_i$.

Če štejemo trojice vozlišč (x, y, z), kjer je

$$x\,\Gamma_h\,y, \quad z\,\Gamma_i\,x \;\text{ in }\; z\,\Gamma_j\,y,$$

na dva različna načina, dobimo še zvezo $k_h\,p_{ij}^h = k_j\,p_{ih}^j$.

Oglejmo si sedaj nekaj primerov asociativnih shem.

Shema z enim razredom je sestavljena iz identične matrike in matrike sosednosti grafa, v katerem sta sosednji vsaki vozlišči, tj. grafa premera 1 oziroma polnega grafa K_n.

Rekli bomo, da gre za **trivialno shemo**.

Hammingova shema $H(d, n)$

Naj bosta d in n poljubni naravni števili in $\Sigma = \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Vozlišča asociativne sheme $H(d, n)$ so vse d-terice elementov iz Σ. Naj bo $0 \leq i \leq d$.

Vozlišči x in y sta v i-ti relaciji, natanko takrat, ko se razlikujeta v i mestih.

Dobimo asociativno shemo z d razredi in n^d vozlišči.

Shema bilinearnih form $\mathcal{M}_{d\times m}(q)$

(različica iz linearne algebre) Naj bosta d in $m \geq d$ naravni števili ter q potenca nekega praštevila.

Vse $(d \times m)$-razsežne matrike nad $\mathrm{GF}(q)$ predstavljajo vozlišča sheme,

vozlišči pa sta v i-ti relaciji, $0 \leq i \leq d$,
če je rang njune razlike enak i.

Johnsonova shema $J(n, d)$

Naj bosta n in d poljubni naravni števili, za kateri je $d \leq n$ in X poljubna množica z n elementi.

Vozlišča asociativne sheme $J(n, d)$ so vse d-elementne podmnožice množice X.

Vozlišči x in y sta v i-ti relaciji, $0 \leq i \leq \min\{d, n-d\}$, natanko takrat, ko ima njun presek $d - i$ elementov.

Dobimo asociativno shemo z $\min\{d, n - d\}$ razredi in $\binom{n}{d}$ vozlišči.

q-analogija Johnsonove sheme $J_q(n, d)$ (Grassmanova shema)

Za vozlišča vzamemo vse d-razsežne podprostore n-razsežnega vektorskega prostora V nad GF(q).

Podprostora A in B razsežnosti d sta v i-ti relaciji, $0 \leq i \leq d$, če je $\dim(A \cap B) = d - i$.

Ciklomatične sheme

Naj bo q potenca praštevila in d delitelj števila $q-1$.

Naj bo C_1 podgrupa multiplikativne grupe obsega $\mathrm{GF}(q)$ indeksa d, in naj bodo $C_1, \ldots, C_d$ odseki podgrupe C_1.

Vozlišča sheme so vsi elementi obsega $\mathrm{GF}(q)$.
Vozlišči x in y sta v i-ti relaciji, ko je $x-y \in C_i$
(in v 0-ti relaciji, ko je $x = y$).

Da bi dobili asociativno shemo, mora biti $-1 \in C_1$, tako da so relacije simetrične, tj. $2 \,|\, d$, če je q lih.

Kako preveriti ali določene matrike sestavljajo asociativno shemo?

Pogoj (b) ni potrebno preverjati neposredno.

Dovolj je, da se prepričamo, da je vrednost izraza na desni strani (2) neodvisna od vozlišč (ne da bi računali p_{ij}^h).

Pomagamo si s *simetrijo*.

Naj bo X množica vozlišč in $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$ množica grafov za katere velja $V(\Gamma_i) = X$ in katerih matrike sosednosti, skupaj z identično matriko, ustrezajo pogoju (a).

Avtomorfizem te množice grafov je permutacija vozlišč, ki za vsak graf ohranja sosednost.

Matrike sosednosti grafov $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_d$, skupaj z identično matriko, tvorijo asociativno shemo, kakor hitro grupa avtomorfizmov deluje za vsak i tranzitivno na parih vozlišč, ki so sosedni v grafu Γ_i
(to je le zadosten pogoj).

Asociativna shema je ***P*-polinomska**, če obstajajo taki polinomi p_i stopnje i, da velja $A_i = p_i(A_1)$ (za neko permutacijo indeksov matrik A_i).

Ekvivalentno je asociativna shema ***P*-polinomska** če obstaja taka permutacija indeksov matrik sosednjosti A_i, da presečna števila zadovoljujejo

trikotniški pogoj: $\forall\, h,\, i,\, j \in \{0, \ldots, d\}$, presečna števila $p^h_{ij} = 0$ (zaporedoma $p^h_{ij} \neq 0$) kakor hitro je eno število izmed $h,\, i,\, j\ \geq$ (zaporedoma $=$) vsoti preostalih dveh.

Zato P-polinomski asociativni shemi pravimo tudi **metrična**.

Dve bazi, dualnost

Naj bo $E_0, E_1, \ldots, E_d$ množica minimalnih primitivnih idempotentov Bose-Mesnerjeve algebre $\mathcal{M}$. Potem velja

$$E_i \circ E_j = \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^{d} q_{ij}^h E_h, \quad A_i = \sum_{h=0}^{d} p_i(h) E_h$$

$$\text{in} \quad E_i = \frac{1}{|X|} \sum_{h=0}^{d} q_i(h) A_h \quad (0 \le i, j \le d),$$

kjer "$\circ$" označuje produkt po posameznih koordinatah, takoimenovan **Schurov produkt**.

Parametre q_{ij}^h imenujemo **Kreinovi parameteri**,

$p_i(0), \ldots, p_i(d)$ so **lastne vrednosti** matrike A_i, in

$q_i(0), \ldots, q_i(d)$ so **dualne lastne vrednosti** od E_i.

Za **Kreinove parametre** oziroma **dualne** velja

$$\boxed{q_{ij}^h \geq 0.}$$

Asociativna shema $\mathcal{A}$ je ***Q*-polinomska** oziroma **kometrična**
(za na dano permutacijo indeksov idempotentov E_i),
če permutacija Kreinovih parameterov q_{ij}^h zadovoljuje trikotniško neenakost.