Kerberos

Doslej smo spoznali sisteme, kjer vsak par uporabnikov izračuna fiksen ključ, ki se ne spreminja.
Zaradi tega je preveč izpostavljen nasprotnikom.

Zato bomo vpeljali tako imenovan sejni ključ, ki se oblikuje brž, ko se pojavita dva, ki želita komunicirati.

Tak sistem, ki uporablja simetrične sisteme, je Kerberos. Slabost tega sistema pa je zahteva po sinhronizaciji ur uporabnikov omrežja.

Določena časovna variacija je dovoljena.

Predpostavimo, da vsak uporabnik deli z agencijo TA tajni DES ključ K_U. Tako kot prej imejmo tudi $\mathrm{ID}(U)$.

Ko dobi agencija TA zahtevo po novem sejnem ključu, si TA izbere naključni ključ K, zabeleži časovno oznako T (timestamp), določi življenjsko dobo L (lifetime) za ključ K ter vse skupaj pošlje uporabnikoma U in V.

Prenos sejnega ključa z uporabo Kerberosa

- *Uporabnik U zahteva od agencije TA sejni ključ za komunikacijo z uporabnikom V.*
- *Agencija TA izbere naključni sejni ključ K, časovno oznako T in življenjsko dobo L.*
- *TA izračuna* $m_1 = e_{K_U}(K, \mathrm{ID}(V), T, L)$
  in $m_2 = e_{K_V}(K, \mathrm{ID}(U), T, L)$
  ter ju pošlje uporabniku U.
- *U uporabi odšifrirno funkcijo d_{K_U}, da dobi iz m_1 K, T, L in $\mathrm{ID}(V)$. Potem izračuna $m_3 = e_K(\mathrm{ID}(U), T)$ in ga pošlje osebi V skupaj s sporočilom m_2, ki ga je dobil od agencije TA.*

- *V uporabi odšifrirno funkcijo d_{K_V}, da*
  m_2 K, T, L in $\mathrm{ID}(U)$. Potem upora
  da dobi T in $\mathrm{ID}(U)$ iz m_3. Preveri,
  tako dobljeni vrednosti za T in $\mathrm{ID}(U$
  prejšnjim. Če je tako, potem izračuna s

  $$m_4 = e_K(T+1)$$

  in ga pošlje uporabniku U.
- *U odšifrira m_4 z uporabo e_K in preveri*
  rezultat enak $T+1$.

V tem protokolu se prenašajo različne funkcije sporočil.

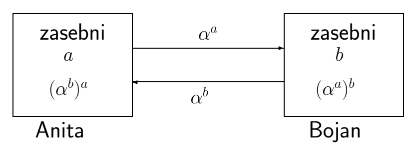
Sporočili m_1 in m_2 poskrbita za tajnost pri prenosu sejnega ključa K.

Sporočili m_3 in m_4 se uporabljata kot potrdilo sejnega ključa K tako, da se U in V prepričata, da imata res isti sejni ključ K.

Diffie-Hellmanova uskladitev ključev

Naj bo p praštevilo in α generator multiplikativne grupe $\mathbb{Z}_p^*$. Naj bosta oba javno poznana (ali pa naj ju oseba U sporoči osebi V).

1. *Oseba U izbere naključen a_U, $0 \le a_U \le p-2$, izračuna* $\alpha^{a_U} \bmod p$ *in ga pošlje osebi V.*
2. *Oseba V izbere naključen a_V, $0 \le a_V \le p-2$, izračuna* $\alpha^{a_V} \bmod p$ *in ga pošlje osebi U.*
3. *Osebi U in V izračunata zaporedoma*
   $K = (\alpha^{a_V})^{a_U} \bmod p$ *in* $K = (\alpha^{a_U})^{a_V} \bmod p$.



Anita in Bojan si delita skupni element grupe:

$$(\alpha^a)^b = (\alpha^b)^a = \alpha^{ab}.$$

Edina razlika med tem protokolom in pa
Diffie-Hellmanovim protokolom za distribucijo
ključev je, da si izberemo nova eksponenta
a_U in a_V uporabnikov U in V zaporedoma
vsakič, ko poženemo ta protokol.

Varnost Diffie-Hellmanovega protokola

Protokol ni varen pred aktivnim sovražnikom,
ki prestreže sporočila in jih nadomesti s svojimi.
Ta napad bomo imenovali **napad srednjega moža**.

$$U \quad \underset{\alpha^{a'_V}}{\overset{\alpha^{a_U}}{\rightleftarrows}} \quad W \quad \underset{\alpha^{a_V}}{\overset{\alpha^{a'_U}}{\rightleftarrows}} \quad V$$

Na koncu sta osebi U in V vzpostavili z napadalcem W zaporedoma ključa $\alpha^{a_U a'_V}$ in $\alpha^{a'_U a_V}$.

Tako bo zašifrirano sporočilo osebe U odšifriral napadalec W ne pa oseba V.

Uporabnika U in V bi bila rada prepričana, da ni prišlo namesto medsebojne izmenjave sporočil do izmenjave z napadalcem W.

Potrebujeta protokol za medsebojno identifikacijo (predstavitev).

Dobro bi bilo, če bi potekala identifikacija istočasno z uskladitvijo ključev, saj bi s tem onemogočili aktivnega sovražnika.

Overjena uskladitev ključev

Diffie, Van Oorschot in Wiener so predlagali protokol **uporabnik-uporabniku** (station-to-station - STS), ki je protokol za *overjeno uskladitev ključa* in je modifikacija Diffie-Hellmanove uskladitve ključev.

Vsak uporabnik ima **certifikat (potrdilo)**

$$C(U) = \Big(\mathrm{ID}(U), \mathrm{ver}_U, \mathrm{sig}_{\mathrm{TA}}\big(\mathrm{ID}(U), \mathrm{ver}_U\big)\Big),$$

kjer je shranjena njegova identifikacija $\mathrm{ID}(U)$.

Poenostavljen protokol uporabnik-uporabniku

1. *Oseba U izbere naključen $a_U \in \{0, \ldots$*
   izračuna $\alpha^{a_U} \bmod p$ *in pošlje osebi V*
2. *Oseba V izbere naključen $a_V \in \{0, \ldots$*
   izračuna $\alpha^{a_V} \bmod p$,
   $K = (\alpha^{a_U})^{a_V} \bmod p$ in $y_V = \mathrm{sig}_V(\alpha^{a}$
   ter pošlje potrdilo $(C(V), \alpha^{a_V}, y_V)$ *os*

3. *Oseba U izračuna* $K = (\alpha^{a_V})^{a_U} \bmod p$ *ter preveri podpis y_V z uporabo ver_V in potrdilo $C(V)$ z $\mathrm{ver}_{\mathrm{TA}}$.*

   Nato izračuna $y_U = \mathrm{sig}_U(\alpha^{a_U}, \alpha^{a_V})$ *in pošlje potrdilo* $(C(U), y_U)$ *osebi V.*
4. *Oseba V preveri podpis y_U z uporabo ver_U in potrdilo $C(U)$ z uporabo $\mathrm{ver}_{\mathrm{TA}}$.*

Varnost protokola STS

Uporabnika U in V si izmenjata naslednje informacije (izpustimo potrdila):

$$U \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad\quad \alpha^{a_U} \qquad\quad} \\ \xleftarrow{\ \alpha^{a_V},\ \mathrm{sig}_V(\alpha^{a_V}, \alpha^{a_U})\ } \\ \xrightarrow{\quad \mathrm{sig}_U(\alpha^{a_U}, \alpha^{a_V}) \quad} \end{array} \quad V$$

Kaj lahko naredi napadalec W (mož na sredini):

$$U \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad \alpha^{a_U} \qquad} \\ \xleftarrow{\alpha^{a'_V},\ \mathrm{sig}_V(\alpha^{a'_V}, \alpha^{a_U}) = ?} \\ \xrightarrow{\ \mathrm{sig}_U(\alpha^{a_U}, \alpha^{a'_V})\ } \end{array} \quad W \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad \alpha^{a'_U} \qquad} \\ \xleftarrow{\alpha^{a_V},\ \mathrm{sig}_V(\alpha^{a_V}, \alpha^{a'_U})} \\ \xrightarrow{\ \mathrm{sig}_U(\alpha^{a'_U}, \alpha^{a_V}) = ?\ } \end{array} \quad V$$

Poenostavljeni STS protokol je torej varen pred napadom srednjega moža.

Tako oblikovan protokol ne vsebuje potrditve
kakor je slučaj v Kerberosovi shemi.

Protokol, v katerem je vključena potrditev klj

$y_V = e_K(\mathrm{sig}_V(\alpha^{a_V}, \alpha^{a_U}))$, $y_U = e_K(\mathrm{sig}_U(\alpha^{a_U}$

se imenuje STS protokol.

MTI protokoli

Matsumoto, Takashima, Imai so modificirali Diffie-Hellmanovo uskladitev ključev, tako da uporabniki U in V ne potrebujejo podpisov.

Kadar moramo izmenjati dve pošiljki, pravimo, da gre za **protokole z dvema izmenjavama**.

Predstavili bomo en njihov protokol.

Osnovne predpostavke so enake kot pri Diffie-Hellmanovi uskladitvi ključev: praštevilo p in generator α multiplikativne grupe $\mathbb{Z}_p^*$ sta javna.

Vsak uporabnik U ima svoj *zasebni* eksponent a_U $(0 \le a_U \le p-2)$ in *javno* vrednost $b_U = \alpha^{a_U} \bmod p$.

Agencija TA ima shemo za digitalni podpis, z *javnim* algoritmom $\mathrm{ver}_{\mathrm{TA}}$ in *tajnim* algoritmom $\mathrm{sig}_{\mathrm{TA}}$.

Vsak uporabnik U ima svoj certifikat:

$$C(U) = (\mathrm{ID}(U), b_U, \mathrm{sig}_{\mathrm{TA}}(\mathrm{ID}(U), b_U)).$$

1. *Oseba U izbere naključen $r_U \in \{0, \dots, p-2\}$, izračuna $s_U = \alpha^{r_U} \bmod p$ in pošlje osebi V $(C(U), s_U)$.*
2. *Oseba V izbere naključen $r_V \in \{0, \dots, p-2\}$, izračuna $s_V = \alpha^{r_V} \bmod p$ in pošlje osebi U $(C(V), s_V)$.*
3. *Osebi U in V izračunata zaporedoma*

   $K = s_V^{a_U} b_V^{r_U} \bmod p$ in $K = s_U^{a_V} b_U^{r_V} \bmod p$,

   kjer sta b_V in b_U zaporedoma iz $C(V)$ in $C(U)$.

Varnost protokola MTI

Ta MTI protokol je enako varen pred pa... sovražniki kot Diffie-Hellmanov protokol.

Varnost pred aktivnimi sovražniki je bolj vp... Brez uporabe podpisnega algoritma nismo va... napadom srednjega moža.

$$U \;\underset{C(V),\ \alpha^{a_V} \bmod p}{\overset{C(U), \alpha^{r_U} \bmod p}{\rightleftarrows}}\; V$$

Ključ uporabnikov, ki komunicirata, je težko izračunati, ker je v ozadju težko izračunljiv diskretni logaritem.

Tej lastnosti pravimo **implicitna overitev ključev**.

Uskladitev ključev s ključi, ki se sami overijo

Giraultova shema ne potrebuje certifikatov, saj uporabnike razlikujejo že njihovi javni ključi in identifikacije.

Vsebuje lastnosti RSA sheme in diskretnega logaritma.

Uporabnik naj ima identifikacijo $\mathrm{ID}(U)$.
Javni ključ za osebno overitev dobi od agencije TA.

Naj bo $n = pq$, kjer je $p = 2p_1 + 1$, $q = 2q_1 + 1$, in so p, q, p_1, q_1 velika praštevila. Potem je

$$(\mathbb{Z}_n^*, \cdot) \sim (\mathbb{Z}_p^* \times \mathbb{Z}_q^*, \cdot).$$

Največji red poljubnega elementa v $\mathbb{Z}_n^*$ je najmanjši skupni večkratnik elementov $p-1$ in $q-1$ oziroma $2p_1q_1$.

Naj bo α generator ciklične podgrupe v $\mathbb{Z}_p^*$ reda $2p_1q_1$, problem diskretnega logaritma v tej podgrupi pa naj bo računsko prezahteven za napadalca.

Javni ključ za osebno overitev

Naj bosta števili n, α javni, števila p, q, p_1, q_1 pa naj pozna samo agenc...

Število e je javni RSA šifrirni eksponen... izbere agencija TA, $d = e^{-1} \bmod \varphi(n)$ pa ... odšifrirni eksponent.

1. *Oseba U izbere tajni eksponent a_U, izračuna $b_U = \alpha^{a_U} \bmod n$ in izroči a_U ter b_U agenciji TA.*
2. *Agencija TA izračuna $p_U = (b_U - \mathrm{ID}(U))^d \bmod n$ ter ga izroči o...*

Giraultov protokol za uskladitev ključev

1. *Oseba U izbere naključen zasebni r_U, izračuna*
$$s_U = \alpha^{r_U} \bmod n$$
ter pošlje $\mathrm{ID}(U)$, p_U *in* s_U *osebi* V.
2. *Oseba V izbere naključen zasebni r_V, izračuna*
$$s_V = \alpha^{r_V} \bmod n$$
ter pošlje $\mathrm{ID}(V)$, p_V *in* s_V *osebi* U.
3. *Osebi U in V izračunata ključ K zaporedoma z*

$$s_V^{a_U}(p_V^e + \mathrm{ID}(V))^{r_U} \bmod n, \quad s_U^{a_V}(p_U^e + \mathrm{ID}(U))^{r_V} \bmod n.$$

Varnost Giraultovega protokola

Ključ za osebno overitev varuje pred sovražniki.

Protokol implicitno overi ključe, zato napad srednjega moža ni možen.

Agencija TA je prepričana, da uporabnik pozna vrednost števila a predno izračuna ključ za osebno overitev.

9. poglavje

Identifikacijske sheme

oziroma **sheme za predstavljanje**:

- Uporaba in cilji identifikacijskih shem
- Protokol z izzivom in odgovorom
- Schnorrova identifikacijska shema
- Okomotova identifikacijska shema
- Guillou-Quisquater
- Pretvarjanje identifikacijske sheme v shemo za digitalni podpis

Pogosto hočemo dokazati svojo identiteto, npr

- **dvig denarja**
  (na bankomatu rabimo kartico in PIN)
- **nakup/plačilo**
  (prek telefona, potrebujemo kartico in rok v
- **telefonska kartica** (telefonska številka in
- **prijava na svojo šifro na računalnik**
  (uporabniško ime in geslo)

Cilji identifikacijskih shem

- priča Anitine predstavitve Bojanu se ne more kasneje lažno predstaviti za Anito,
- tudi Bojan se ne more po Anitini predstavitvi lažno predstaviti za Anito,
- enostavnost (npr. za pametno/čip kartico)

Anita s svojo predstavitvijo ne izda informacije, ki jo identificira/predstavlja.

Kartica se predstavi sama, nepooblaščeno uporabo (kraja/izguba) pa preprečimo s PIN-om.

Protokol z **izzivom in odgovorom**:

Anita in Bojan delita tajni (skrivni) ključ K, ki ga uporabljata za šifriranje.

1. *Bojan izbere 64-bitni izziv x in ga pošlje Aniti.*
2. *Anita izračuna $y = e_K(x)$ in ga pošlje Bojanu,*
3. *Bojan izračuna $y' = e_K(x)$ in preveri* $y = y'$.

Skoraj vse sheme uporabljajo protokole z izzivom in odgovorom, vendar pa najbolj koristne ne uporabljajo skupnih ključev.

Schnorrova identifikacijska shema

Je ena od najbolj praktičnih shem in potrebuje agencijo TA.

1. *praštevilo p, za katero je DLP nedosegljiv (npr. $p \geq 2^{512}$),*
2. *velik delitelj q števila $p-1$ (npr. $q \geq 2^{140}$),*
3. *element $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ reda q,*
4. *varnostni parameter t, za katerega je $q > 2^t$ (v praksi ponavadi vzamemo $t = 40$),*
5. *TA z algoritmoma za tajno podpisovanje* $\mathrm{sig}_{\mathrm{TA}}$ *in javno preverjanje* $\mathrm{ver}_{\mathrm{TA}}$,
6. *predpisana varna zgoščevalna funkcija.*

Parametri p, q in α, algoritem za preverjanje zgoščevalna funkcija so javni.

Agencija TA izda Aniti certifikat:

1. *TA preveri Anitino identiteto po običa (potni list, rojstni list, osebna izkazni in izda* $\mathrm{ID}(\mathrm{Anita})$*, ki vsebuje identifi podatke,*
2. *Anita si izbere zasebno naključno štev* $a \in [0, \dots, q-1]$, *izračuna* $v = \alpha^{-a}$ mo *ga izroči agenciji TA.*
3. *Agencija TA izračuna* $s = \mathrm{sig}_{\mathrm{TA}}(\mathrm{ID}(\mathrm{A}$ *ter izroči Aniti potrdilo*
$$C(\mathrm{Anita}) = \big(\mathrm{ID}(\mathrm{Anita}), v, s\big).$$

Bojan preveri Anitino identiteto:

1. *Anita si izbere naključno število* $k \in [0, \dots, q{-}1]$ *in izračuna* $\gamma = \alpha^k \bmod p$, *ki ga pošlje hkrati s svojim potrdilom* $C(\text{Anita})$ *Bojanu.*
2. *Bojan preveri podpis TA, izbere naključno število* $r \in [1, \dots, 2^t]$ *in ga pošlje Aniti.*
3. *Anita izračuna* $y{=}k{+}ar \bmod q$ *in ga da Bojanu.*
4. *Bojan preveri, ali je* $\gamma \equiv \alpha^y v^r \pmod p$.

Podpis s potrdi Anitin certifikat
(tako kot pri uskladitvi ključa).

V drugem delu tajno število a deluje kot nekakšen PIN, saj prepriča Bojana, da je Anita res lastnica certifikata.

Za razliko od PIN-a Anita (oziroma bolj natančno pametna kartica) ne izda števila a, kljub temu, da "dokaže" z odgovorom na izziv z računanjem y-a v 3. koraku, da ga pozna.

Tej tehniki pravimo **dokaz brez razkritja znanja**.

Namen varnostnega parametra t je preprečiti, da bi napadalka, ki bi se hotela predstaviti za Anito, vnaprej uganila Bojanov izziv r (verjetnost $> 2^{40}$).

Če bi napadalka uganila r, bi si lahko za y izbrala poljubno število, izračunala

$$\gamma = \alpha^y v^r \bmod p$$

in ga poslala v 1. koraku Bojanu.
Ko bi prejela Bojanov izziv v drugem koraku, bi mu v 3. koraku dala že izbrani y in identiteta bi bila potrjena v 4. koraku.

Očitno Bojan ne sme uporabiti isti izziv r dvakrat.

Napadalka ne more ponarediti Anitin certifika

$C'(\text{Anita}) = (\text{ID}(\text{Anita}), v', s')$, kjer je v

saj bi v tem primeru znala ponarediti podp $(\text{ID}(\text{Anita}), v')$, ki ga v drugem koraku prever

(Vrednosti v' si ne moremo prosto izbirati, saj primeru morali izračunati DLP, da bi dobili a'.)

Napadalka ne more uporabiti niti Anitinega certifikata $C(\text{Anita}) = (\text{ID}(\text{Anita}), v, s)$ (lah spoznala pri prejšnjem preverjanju identitete) pozna a, ki ga potrebuje v 3. koraku za račun

Izrek 1. *Če napadalka pozna število* γ, *za katero se zna z verjetnostjo* $\varepsilon \geq 1/2^{t-1}$ *predstaviti kot Anita, potem zna napadalka izračunati število* a *v polinomskem času.*

Dokaz: Predpostavimo, da lahko napadalka za ε od 2^t možnih izzivov r izračuna vrednost y, ki jo bo Bojan sprejel. Potem lahko zaradi $2^t \varepsilon \geq 2$ napadalka poišče taka para (y_1, r_1) in (y_2, r_2), da je

$$y_1 \not\equiv y_2 \pmod q \quad \text{in} \quad \gamma \equiv \alpha^{y_1} v^{r_1} \equiv \alpha^{y_2} v^{r_2} \pmod p.$$

Potem je

$$\alpha^{y_1 - y_2} \equiv v^{r_2 - r_1} \pmod p$$

in zaradi $v = \alpha^{-a}$ velja

$$y_1 - y_2 \equiv a(r_2 - r_1) \pmod q.$$

Končno je $0 < |r_2 - r_1| < 2^t$, število $q > 2^t$ pa je praštevilo, torej $D(r_2 - r_1, q) = 1$ in lahko izračunamo

$$a = (y_1 - y_2)(r_1 - r_2)^{-1} \bmod q.$$

■

Ugotovili smo, da Anita zna potrditi svojo identiteto (*polnost*), vsak drug, ki zna to storiti z neznatno verjetnostjo (z uporabo identifikacijskega protokola) pa bodisi pozna zasebni a bodisi ga zna izračunati v polinomskem času (*uglašenost*).

To pa še ne pomeni, da je Schnorrov protokol varen, saj ima protokol, po katerem bi se Anita identitificirala enostavno tako, da bi odkrila svoj zasebni eksponent a, obe zgornji lastnosti.

Če napadalka ne izračuna nobene informacije zasebnem eksponentu a medtem, ko je priča polinomskemu številu ponovitev Anitinega identifikacijskega protokola, potem je ta protokol **varen**.

Odprt problem: *Ali je Schnorrova shema*

Naj ima ID(Anita) 512 bitov. Tudi v ima 51 Podpis s bo imel 320 bitov, če uporabimo DSS ima $C(\text{Anita})$ 1344 bitov. V prvem koraku mor potencirati po modulu p, vendar pa lahko te v izračunamo vnaprej, če je potrebno.

$$\text{Anita}\quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\qquad C,\gamma \qquad} \\ \xleftarrow{\qquad r \qquad} \\ \xrightarrow{\qquad y \qquad} \end{array} \quad \text{Bojan}$$

Anita pošlje 1344+512=1856 bitov, nato Bojan pošlje 40 bitov in končno Anita pošlje še 140 bitov.

Okomotova identifikacijska shema

Izberimo parametra p, q tako kot v Schnorrovi shemi.

Naj imata elementa $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}_p^*$ red q,
vrednost $c = \log_{\alpha_1} \alpha_2$ pa naj ne pozna niti Anita.

Kot pri Schnorrovi shemi si agencija TA izbere shemo za digitalni podpis in zgoščevalno funkcijo.

Agencija TA izda Aniti certifikat:

1. *Agencija TA preveri Anitino identiteto in ji izda* ID(*Anita*),
2. *Anita si izbere zasebni naključni števili* $a_1, a_2 \in [0, \dots, q-1]$, *izračuna* $v = \alpha_1^{-a_1} \alpha_2^{-a_2} \bmod p$ *in ga izroči agenciji TA.*
3. *TA izračuna* $s = \mathrm{sig}_{\mathrm{TA}}(\mathrm{ID}(\mathrm{Anita}), v)$ *ter izroči Aniti potrdilo*
$$C(\mathrm{Anita}) = \big(\mathrm{ID}(\mathrm{Anita}), v, s\big).$$

Bojan preveri Anitino identiteto:

1. *Anita si izbere naključni števili* $k_1, k_2 \in$
in izračuna $\gamma = \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \bmod p$, *ki ga po*
hkrati s svojim potrdilom $C(\mathrm{Anita})$ *Bo*
2. *Bojan preveri podpis TA, izbere naklju*
število $r \in [1, \dots, 2^t]$ *in ga da Aniti.*
3. *Anita izračuna* $y_i = k_i + a_i r \bmod q$, *za*
in ju da Bojanu.
4. *Bojan preveri, ali je* $\gamma \equiv \alpha_1^{y_1} \alpha_2^{y_2} v^r$ (m

Okomotova shema je *polna*, za razliko od Schnorrove shema pa zanjo znamo pokazati, da je *varna*, kakor hitro je diskretni logaritem $\log_{\alpha_1} \alpha_2$ prezahteven.

Predspostavimo, da se je Anita identificirala tako, da je ponovila dani protokol polinomsko število krat in da je napadalka uspela priti do informacije o tajnih eksponentih a_1 in a_2. Pokazali bomo, da v tem primeru znamo izračunati c v polinomskem času, kar je seveda v protislovju s predpostavko.

Izrek 2. *Če napadalka pozna število* γ, *za katero se zna z verjetnostjo* $\varepsilon \geq 1/2^{t-1}$ *predstaviti kot Anita, potem zna napadalka v polinomskem času izračunati taki števili* b_1 *in* b_2, *da je* $v \equiv \alpha_1^{-b_1} \alpha_2^{-b_2} \pmod{p}$.

Dokaz: Predpostavimo, da lahko napadalka za ε od 2^t možnih izzivov r izračuna vrednost y, ki jo bo Bojan sprejel. Potem lahko zaradi $2^t \varepsilon \geq 2$ napadalka poišče taka para (y_1, y_2, r) in (z_1, z_2, s), da je $r \neq s$ in
$$\gamma \equiv \alpha_1^{y_1} \alpha_2^{y_2} v^r \equiv \alpha_1^{z_1} \alpha_2^{z_2} v^s \pmod{p}.$$

Definirajmo $b_i \equiv (y_i - z_i)(r-s)^{-1} \bmod q$ za $i = 1, 2$ in preverimo
$$v \equiv \alpha_1^{-b_1} \alpha_2^{-b_2} v^r \pmod{p}.$$
■

Izrek 3. *Če napadalka pozna število* γ, *za katero se zna z verjetnostjo* $\varepsilon \geq 1/2^{t-1}$ *predstaviti kot Anita, potem znata z verjetnostjo* $1 - 1/q$ *Anita in napadalka v polinomskem času izračunati* $\log_{\alpha_1} \alpha_2$.

Dokaz: Iz prejšnjega izreka sledi, da zna na
priti do števil b_1 in b_2, za kateri velja:
$$v \equiv \alpha_1^{-b_1} \alpha_2^{-b_2} \pmod{p}.$$
Anita izda vrednosti a_1 in a_2 tako, da imamo
$$v \equiv \alpha_1^{-a_1} \alpha_2^{-a_2} \pmod{p}$$
in od tod
$$\alpha_1^{a_1 - b_1} \equiv \alpha_2^{b_2 - a_2} \pmod{p}.$$

Če je $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$, potem obstaja $(a_2 - b_2)^{-1} \bmod q$ in je
$$c = \log_{\alpha_1} \alpha_2 = (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)^{-1} \bmod$$

Naj bo sedaj $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$. Pokazali bomo, da se lahko to zgodi le z zelo majhno verjetnostjo $1/q$, kar pomeni, da Anita in napadalka lahko skoraj vedno izračunata c.

Definirajmo množico vseh urejenih parov, ki bi bili lahko Anitini tajni eksponenti:

$$\mathcal{A} = \{(a_1', a_2') \in \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q \mid \alpha_1^{-a_1'} \alpha_2^{-a_2'} \equiv \alpha_1^{-a_1} \alpha_2^{-a_2} \pmod{p}\}.$$

Potem ima množica $\mathcal{A}$ natanko q elementov, saj je

$$\mathcal{A} = \{(a_1 - c\theta, a_2 + \theta) \mid \theta \in \mathbb{Z}_q\}.$$

Po Okomotovemu protokolu si izbere Anita γ, napadalka si izbere r, Anita pa izračuna

$$\gamma \equiv \alpha_1^{y_1} \alpha_2^{y_2} v^r \pmod{p}$$

iz

$$y_i = k_i + a_i r \bmod q, \quad \text{za} \quad i = 1, 2,$$

kjer je

$$\gamma \equiv \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \pmod{p}$$

in ne izda k_1, k_2 (ne a_1 in a_2).

Ena četverica (γ, r, y_1, y_2) je navidez odvisna od urejenega para (a_1, a_2). Pokažimo, da bi lahko ta četverica bila generirana od poljubnega drugega para $(a_1', a_2') \in \mathcal{A}$, tj. $a_1' = a_1 - c\theta$ in $a_2' = a_2 + \theta$, $\theta \in [0..q-1]$:

$$y_1 = k_1 + a_1 r = k_1 + (a_1' + c\theta)r = (k_1' + rc\theta) + a_1' r,$$

in

$$y_2 = k_2 + a_2 r = k_2 + (a_2' - \theta)r = (k_2' - r\theta) + a_2' r,$$

Torej če bi začeli z (a_1', a_2') in bi si lahko izbrali $k_1' = k_1 + r\,c\,\theta$ in $k_2' = k_2 - r\,\theta$, bi dobili isti γ. ■

Guillou-Quisquaterjeva identifikacijska shema

Ta shema je zasnovana na sistemu RSA.

Agencija TA si izbere dve praštevili p in q ter i
$n = pq$. Slednje število je javno, medtem
vrednosti p in q zasebni in izbrani tako, da je
faktorizacije prezahteven.

TA si izbere še shemo za digitalni podpis, zgos
funkcijo ter 40-bitno praštevilo b, ki bo slu
varnostni parameter in šifrirni eksponent.

Izdaja certifikata poteka na naslednji način:

1. *Agencija TA preveri Anitino identiteto in izda* ID(Anita).
2. *Anita si izbere zasebno naključno število* $u \in [0, \ldots, n-1]$, *izračuna* $v = u^{-b} \bmod n$ *in ga izroči agenciji TA.*
3. *Agencija TA izračuna* $s = \text{sig}_{\text{TA}}(\text{ID(Anita)}, v)$ *ter izroči Aniti potrdilo*

$$C(\text{Anita}) = \big(\text{ID(Anita)}, v, s\big).$$

GQ-identifikacija (Bojan preveri Anitino identiteto):

1. *Anita si izbere naključno število* $k \in [0,\ldots,n-1]$ *in izračuna* $\gamma = k^b \bmod n$, *ki ga da hkrati s svojim certifikatom* C(Anita) *Bojanu.*
2. *Bojan preveri podpis agencije TA, izbere naključno število* $r \in [1, \ldots, b-1]$ *in ga da Aniti.*
3. *Anita izračuna* $y = ku^r \bmod n$ *in ga da Bojanu.*
4. *Bojan preveri, ali je* $\gamma \equiv y^b v^r \pmod{n}$.

Prepričali se bomo, da je ta shema polna in uglašena, nihče pa ni uspel dokazati, da je tudi varna
(tudi če bi privzel, da je krpitosistem RSA varen).

Polnost je očitna

$$v^r y^b \equiv (u^{-b})^r (ku^r)^b \equiv k^b \equiv \gamma \pmod{n},$$

za uglašenost pa privzamemo, da ni mogoče izračunati števila u iz v (le-tega smo dobili iz u z RSA šifriranjem).

Izrek. *Če napadalka pozna število* γ, *za katerega se zna z verjetnostjo* $\varepsilon \geq 1/b$ *predstaviti kot Anita, potem zna napadalka izračunati število* u *v polinomskem času.*

Dokaz: Za nek γ izračuna napadalka take v
y_1, y_2, r_1, r_2, da je $r_1 > r_2$ in

$$\gamma \equiv v^{r_1} y_1^b \equiv v^{r_2} y_2^b \pmod{n}.$$

Potem velja

$$(y_2/y_1)^b \equiv v^{r_1 - r_2} \pmod{n}$$

in je $r_1 - r_2 < b$, tako da lahko izračunamo t
$r_2)^{-1} \bmod b$ z razširjenim Evklidovim algoritm
tod dobimo tak s, da je $(r_1 - r_2)t = sb + 1$ in

$$(y_2/y_1)^{bt} \equiv v^{(r_1 - r_2)t} \equiv v^{sb+1} \pmod{n},$$

$$v \equiv (y_2/y_1)^{bt} v^{-sb} \pmod{n}.$$

Obe strani zgornje kongruence potenciramo na $b^{-1} \bmod \phi(n)$ ter ju nato invertiramo po modulu n

$$u \equiv (y_1/y_2)^t v^s \pmod{n} \qquad \blacksquare$$

Popularne identifikacijske sheme so še Brickel in McCurleyjeva shema, Feige-Fiat-Shamirjeva shema in Shamirjeva shema s permutiranim jedrom. Zanjo je Shamir dokazal, da je varna s pomočjo metod za dokazovanje brez razkrivanja znanja.