

Primer: Naj bo $p = 467$, $\alpha = 2$ in $a = 127$.
Potem je $\beta \equiv \alpha^a \pmod{p} = 132$. Recimo, da želimo podpisati $x = 100$, izbrali pa smo si tudi $k = 213$.
Podpis je enak (γ, δ) , kjer je

$$\gamma \equiv 2^{213} \pmod{467} = 29$$

in

$$\delta \equiv (100 - 127 \cdot 29) \cdot 431 \pmod{466} = 51.$$

Pri preverjanju izračunamo

$$132^{29} \cdot 29^{51} \equiv 189 \pmod{467} \quad \text{in}$$

$$2^{100} \equiv 189 \pmod{467}.$$

Zadnji vrednosti se ujemata, zato je podpis pravi.

Varnost ElGamalovega sistema za podpisovanje

Kako bi lahko ponaredili podpis, ne da bi vedeli za vrednost skritega števila a ?

1. Za dano sporočilo x je potrebno najti tak par (γ, δ) , da bo veljalo $\beta^\gamma \gamma^\delta \equiv \alpha^x \pmod{p}$, torej

- če izberemo γ : rabimo $\delta = \log_\gamma \alpha^x \beta^{-\gamma} \pmod{p}$,
- če izberemo δ : glede na γ je potrebno rešiti enačbo $\beta^\gamma \gamma^\delta \equiv \alpha^x \pmod{p}$,
- hkrati računamo γ in δ (zaenkrat ni še nihče odkril hitrega postopka za reševanje zgornje enačbe).

2. Za podpis (γ, δ) je potrebno najti ustrezno sporočilo x :

$$x = \log_\alpha \beta^\gamma \gamma^\delta \pmod{p}.$$

3. Hkratno računanje x, γ in δ : naj bosta i in j takšni števili, da velja $0 \leq i, j \leq p-2$ in $D(j, p-1) = 1$. Potem števila

$$\begin{aligned} \gamma &\equiv \alpha^i \beta^j \pmod{p}, \\ \delta &\equiv -\gamma j^{-1} \pmod{p-1}, \\ x &\equiv -\gamma i j^{-1} \pmod{p-1} \end{aligned}$$

zadoščajo enačbi $\beta^\gamma \gamma^\delta \equiv \alpha^x \pmod{p}$.

Primer: Če je $p = 467$, $\alpha = 2$ in $\beta = 132$, z izbiro $i = 99$ in $j = 179$, dobimo veljaven podpis $(117, 41)$ za sporočilo 331.

4. Ali lahko pri veljavnem podpisu (γ, δ) za x še kakšen podpis za neko drugo sporočilo x' ?
Odgovor je "DA".

Naj bodo h, i in j takšna števila, da za $0 \leq h, i, j \leq p-2$ in $D(h\gamma - j\delta, p-1) = 1$.
Potem je par (λ, μ) veljaven podpis za x' , k

$$\begin{aligned} \lambda &= \gamma^h \alpha^i \beta^j \pmod{p}, \\ \mu &= \delta \lambda (h\gamma - j\delta)^{-1} \pmod{p-1}, \\ x' &= \lambda (hx + i\delta) (h\gamma - j\delta)^{-1} \pmod{p} \end{aligned}$$

Nevarnosti pri napačni uporabi ElGamalovega sistema

1. Če naključno število k ne ostane skrito, lahko izračunamo

$$a = (x - k\delta) \gamma^{-1} \pmod{p-1}.$$

2. Število k lahko uporabimo le enkrat, sicer ga je mogoče zlahka izračunati.

Digital Signature Standard

DSS je modifikacija ElGamalovega sistema za podpisovanje. Kot ameriški standard je bil predlagan leta 1991, sprejet pa leta 1994.

Algoritem: Naj bo p praštevilo velikosti L bitov, kjer je $512 \leq L \leq 1024$ in $64 \mid L$, q 160-bitno praštevilo, da $q \mid p-1$, ter $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$ q -ti koren enote po modulu p . Definirajmo $\mathcal{P} = \mathbb{Z}_p^*$, $\mathcal{A} = \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_q$ in

$$\mathcal{K} = \{(p, q, \alpha, a, \beta) : \beta \equiv \alpha^a \pmod{p}\}.$$

Vrednosti p, q, α in β so javne, število a pa skrito.

Podpisovanje: podpisnik izbere naključno skrito število k , $1 \leq k \leq q-1$ in določi

$$\text{sig}_K(x, k) = (\gamma, \delta),$$

kjer je

$$\gamma \equiv (\alpha^k \pmod{p}) \pmod{q}$$

in

$$\delta \equiv (x + a\gamma) k^{-1} \pmod{q}.$$

Za število δ mora veljati $\delta \not\equiv 0 \pmod{q}$.

Preverjanje podpisa: najprej izračunamo

$$e_1 \equiv x\delta^{-1} \quad \text{in} \quad e_2 \equiv \gamma\delta^{-1}.$$

Potem je

$$\text{ver}_K(x, \gamma, \delta) = \text{true}$$

\Updownarrow

$$(\alpha^{e_1} \beta^{e_2} \pmod{p}) \pmod{q} = \gamma.$$

Podobno kot pri ElGamalovi shemi je podpis hitrejši od preverjanja (za razliko od RSA).

Prikrit kanal v algoritmu DSA

V algoritmu DSA obstaja prikrit kanal, ki omogoča:

- vključitev šifriranega sporočila v podpis, ki ga lahko prebere le tisti, ki pozna dodaten ključ;
- razkritje skritega ključa, brez vednosti njegovega lastnika.

Eno možnost za (a) si oglejmo na naslednji foliji, točko (b) pa prihranimo za domačo nalogo.

Primer: Izberimo n tajnih praštevil p_1, \dots, p_n in poskusimo v podpis skriti binarno zaporedje b_1, \dots, b_n . Naključno število k izbiramo toliko časa, da za vsak $1 \leq i \leq n$ velja

$$b_i = 1 \implies \gamma \text{ je kvadratni ostanek po modulu } p_i,$$

$$b_i = 0 \implies \gamma \text{ ni kvadratni ostanek po modulu } p_i,$$

kjer je $\text{sig}_K(x, k) = (\gamma, \delta)$.

Napadi

Uganjevanje fraz, ki jih uporabljamo za gesla

primer	število znakov	zahtevnost	dolžina gesla	čas za razbijanje
mucka	5	25 (majhne črke)	12 bitov	40 minut
br1a9Az	7	62 (črke in številke)	24 bitov	22 let
TH,X1lb<V+	10	95 (znaki na tipkov.)	40 bitov	nedosegljivo

Če uporabimo angleško ali slovensko besedo, dobimo zaporedje s približno 1.3 biti entropije na en znak (t.j. prostor za besedo proti popolnoma naključnim znakom).

Napadi z grobo silo (angl. Brute Force Attack)

posameznik ima 1 PC in programsko opremo $(2^{17} - 2^{24}$ klj)

majhna skupina, 16 PC $(2^{21} - 2^{28}$ klj)

akademska omrežja, 256 PC $(2^{25} - 2^{32}$ klj)

veliko podjetje z \$1.000.000 za strojno opremo $(2^{43}$ klj)

vojaška obveščevalna organizacija z \$1.000.000.000 za strojno opremo in napredno tehnologijo $(2^{55}$ klj)

Napadi z grobo silo

dolžina ključa (v bitih)	posamični napadalec	majhne skupine	raziskovalna omrežja	velika podjetja	vojaške obveščevalne službe
40	tedni	dnevi	ure	milisekunde	mikrosekunde
56	stoletja	desetletja	leta	ure	sekunde
64	tisočletja	stoletja	destletja	dnevi	minute
80	∞	∞	∞	stoletja	stoletja
128	∞	∞	∞	∞	tisočletja

Povprečen čas za napad z grobo silo

dolžina ključev (v bitih)	število možnih ključev	potreben čas za eno šifriranje/μsek.	potreben čas za 10^6 šifriranj/μsek.
32	$2^{32} = 4.3 \times 10^9$	$2^{31} \mu\text{sec} \approx 36 \text{ min}$	$\approx 2 \text{ milisek.}$
56	$2^{56} = 7.2 \times 10^{16}$	$2^{55} \mu\text{sec} \approx 1142 \text{ let}$	$\approx 10 \text{ ur}$
128	$2^{128} = 3.4 \times 10^{38}$	$2^{127} \mu\text{sec} \approx 5 \times 10^{24} \approx 5 \times 10^{18} \text{ let}$	

Napadi na PKS

Napadi na DSA

- Metoda Index Calculus ($p \approx 2^{1024}$)

- Pollardova ρ -metoda ($\sqrt{\pi q/2}$, $q \approx 2^{160}$)

Napadi na ECDSA

- Pollardova ρ -metoda ($\sqrt{\pi n/2}$, $n \approx 2^{160}$)

Programski napadi

MIPS računalnik lahko opravi 4×10^4 seštevanj na eliptični krivulji na sekundo.

(Ta ocena je precej konzervativna. Posebaj p integrirano vezje s frekvenco ure 40 MHz, ki operacije na eliptični krivulji nad obsegom G in lahko izvede 40.000 seštevanj na sekundo.)

Na osnovi tega zaključimo, da je število s na eliptični krivulji na $GF(2^{155})$ izvedeno n računalniku v času enega leta naslednje

$$(4 \times 10^4) \cdot (60 \times 60 \times 24 \times 365) \approx 2^{40}$$

Spodnja tabela nam kaže kolikšno računsko moč potrebujemo za računanje problema diskretnega logaritma z uporabo Pollard ρ -metodo za različne vrednosti števila n . MIPS leto je ekvivalentno računski moči 1 MIPS računalnika, ki je na voljo eno leto.

velikost obsega (v bitih)	velikost števila n	$\sqrt{\pi n/2}$	MIPS let
155	150	2^{75}	3.8×10^{10}
210	205	2^{103}	7.1×10^{18}
239	234	2^{117}	1.6×10^{23}

Npr. če imamo na voljo 10.000 računalnikov z močjo 1.000 MIPS in je $n \approx 2^{150}$, potem je lahko problem diskretnega logaritma na eliptični krivulji rešen v 3.800 letih.

Prejšnjo tabelo je zanimivo primerjati s Odlyzko-vo tabelo, ki kaže kolikšno računsko moč potrebujemo za faktorizacijo celih števil s sedanjo verzijo splošnega NFS algoritma.

velikost števila n (v bitih)	MIPS let
512	3×10^4
768	2×10^8
1024	3×10^{11}
1280	1×10^{14}
1536	3×10^{16}
2048	3×10^{20}

Hardwarski napadi

Za bolj perspektiven napad (s strani dobro financiranega napadalca) na ECC, bi bilo potrebno narediti specializirano programsko opremo za paralelno iskanje na osnovi Pollard ρ -metode.

Van Oorschot and Wiener ocenjujeta: za $n \approx 10^{36} \approx 2^{120}$ bi računalnik z $m = 325.000$ procesorji (cena okoli 10 milijonov USD) lahko izračunal diskretni logaritem v približno 35 dneh.

Poudariti moramo, da računanje diskretnega logaritma na $E(\mathbb{Z}_p)$ v zgoraj omenjenih napadih odkrije en sam privatni ključ.

M. Blaze, W. Diffie, R. Rivest, B. Schneier, S. Shimomura, E. Thompson, and M. Wiener, 1996, (<http://theory.lcs.mit.edu/rivest/publications.html>) govori o minimalnih dolžinah ključev potrebnih za varen simetrični sistem (npr. DES ali IDEA):

Da bi zagotovili ustrezno zaščito proti modernim resnim grožnjam (npr. velike komercialne ustanove in vladne agencije) mora ključ dolž vsaj 75 bitov. Za zaščito za naslednjih 10 let morajo ključ biti dolgi vsaj 90 bitov (pri čemer upoštevamo pričakovano rast računske moči).

Če posplošimo te zaključke na eliptične kriptosisteme, mora biti praštevilo n , ki zagotavlja kratko življenjsko dobo, dolgo vsaj 150 bitov, za srednjeročno pa vsaj 180 bitov.

Dolžina ključev

simetrične šifre (AES)	asimetrične (RSA, DSA, DH)	eliptične krivulje
40 bitov	274 bitov	80 bitov
56 bitov	384 bitov	106 bitov
64 bitov	512 bitov	132 bitov
80 bitov	1024 bitov	160 bitov
96 bitov	1536 bitov	185 bitov
112 bitov	2048 bitov	237 bitov
120 bitov	2560 bitov	256 bitov
128 bitov	3072 bitov	270 bitov

Digitalni podpisi v \mathbb{Z}_p in na EC

grupa	\mathbb{Z}_p	$E(\mathbb{Z}_p)$
elementi	množica celih števil $\{1, 2, \dots, p-1\}$	točke (x, y) , ki zadoščajo enačbi eliptične krivulje E in še točka v neskončnosti
operacija	množenje po modulu p	seštevanje točk na eliptični krivulji
oznake	elementi: g, h množenje: $g \times h$ multiplikativni inverz: h^{-1} deljenje: g/h potenciranje: g^a	elementi: P, Q seštevanje: $P + Q$ nasprotna točka: $-Q$ odštevanje: $P - Q$ skalarno množenje točke: aP
problem diskretnega logaritma	Za dana $g, h \in \mathbb{Z}_p^*$ poišči tako celo število a da je $h = g^a \pmod p$.	Za dani točki $P, Q \in E(\mathbb{Z}_p)$ poišči tako celo število a da je $Q = aP$.

Grupe

Digital Signature Algorithm (DSA) eliptični analog ECDSA

DSA	ECDSA
1. Izberi praštevilo p in q velikosti $2^{1023} < p < 2^{1024}$, $2^{159} < q < 2^{160}$, tako da $q p - 1$.	1. Izberi tako eliptično krivuljo $E: y^2 = x^3 + ax + b$ nad \mathbb{Z}_q , da je število $ E(\mathbb{Z}_q) $ deljivo s praštevilom $n \approx 160$ -bitov.
2. $t \in \mathbb{Z}_p^*$, izračunaj $g = t^{(p-1)/q} \pmod p$, potem je $g \neq 1$ in ima red q v \mathbb{Z}_p^* .	2. Izberi točko P na $E(\mathbb{Z}_q)$, katere red je praštevilo n .
3. Uporabi multiplikativno grupo $\{g^0, g^1, \dots, g^{q-1}\}$	3. Uporabi aditivno grupo $\{O, P, 2P, \dots, (n-1)P\}$

Generiranje ključa pri DSA in ECDSA

DSA	ECDSA
1. Izberi naključno celo število $x \in [2, q-2]$, tj. zasebni ključ	1. Izberi naključno celo število $d \in [2, n-2]$, tj. zasebni ključ
2. Izračunaj $y = g^x \pmod p$, javni ključ je (p, q, g, y) .	2. Izračunaj $Q = dP$, javni ključ je (E, n, Q) .

DSA	ECDSA
q	n
g	P
x	d
y	Q

Podpisovanje sporočila m

DSA	ECDSA
1. Izberi naključno celo število $k \in [2, q - 2]$.	1. Izberi naključno celo število $k \in [2, n - 2]$.
2. Izračunaj $g^k \bmod p$, $r = (g^k \bmod p) \bmod q$, $0 \neq s = k^{-1}(h(m) + xr) \bmod q$.	2. Izračunaj $kP = (x_1, y_1)$, $r = x_1 \bmod n$, $0 \neq s = k^{-1}(h(m) + dr) \bmod n$.
Podpis je par (r, s) .	

Preverjanje podpisa (r, s) sporočila m osebe A

DSA	ECDSA
1. Preskrbi si avtentično kopijo javnega ključa osebe A : (p, q, g, y)	(E, n, q, Q)
2. Izračunaj $s^{-1} \bmod p$ in $h(m)$, $u_1 = h(m)s^{-1} \bmod q$, $u_2 = rs^{-1} \bmod q$, $v = (g^{u_1}y^{u_2} \bmod p) \bmod q$.	2. Izračunaj $s^{-1} \bmod n$ in $h(m)$, $u_1 = h(m)s^{-1} \bmod n$, $u_2 = rs^{-1} \bmod n$, $u_1P + u_2Q = (x_0, y_0)$ in $v = x_0 \bmod n$.
Sprejmi podpis samo in samo če je $v = r$.	

SigGen z EC

Razvita je bila v **Certicom Corp., Kanada**, v sodelovanju s Schlumberger Smart Cards and Systems.



Uporablja Motorolin čip 68SC28:
- ROM 12.790 zlogov,
- EEPROM 8.112 zlogov,
- RAM 240 zlogov.

Vsebuje tehnologijo MULTIFLEXTM ter tehnologijo eliptičnih krivulj $(CE)^2$, ki jo razvija podjetje Certicom Corp.

SigGen kartica je zelo prikladna za končnega uporabnika ter za proces prepoznavanja:

- je poceni,
- podpis je opravljen v pol sekunde,
- rabi samo 90 zlogov RAM-a,
- program ne zasede niti 4 KB.

Je edina pametna kartica, ki opravi digitalni kar z obstoječim procesorjem.

Eliptični kriptosistemi nudijo največjo moč glede na število bitov ključa med današnjimi javnimi kriptosistemi.

Manjši ključi omogočajo

- manjše sistemske parametre,
- manjša potrdila z javnimi ključi,
- hitrejšo implementacijo,
- manjše zahteve po energiji,
- manjše procesorje,
- itd.

Enkratni podpis

Z istim ključem lahko podpišemo le en dokument. Ponavadi algoritem temelji na enosmernih funkcijah.

Lamportova shema: $\mathcal{P} = \{0, 1\}^{k \in \mathbb{N}}$, $|Y| < \infty$, enosmerna funkcija $f: Y \rightarrow Z$.

Naključno izberemo matriko $(y_{ij}) \in Y^{k \times 2}$ in določimo matriko enake velikosti z elementi $z_{ij} = f(y_{ij})$.

Ključ K sestavljata obe matriki, prva je skrita, druga pa javna.

Podpisovanje:

$$\text{sig}_K(x_1, \dots, x_k) = (y_{1,x_1}, \dots, y_{k,x_k}).$$

Preverjanje podpisa:

$$\text{ver}_K(x_1, \dots, x_k, a_1, \dots, a_k) = \text{true} \\ \iff f(a_i) = z_{i,x_i}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Napadalec ne more ponarediti podpisa, saj ne more obrniti enosmerne funkcije f , da bi izračunal y -e.

Če pa bi podpisali dve različni sporočili z isto shemo, potem bi napadalec lahko poveril podpis novih sporočil.

Primer: Naj bo $f(x) = 3^x \pmod{7879}$, Y sestavljen iz matrik

$$\begin{pmatrix} 5831 & 735 \\ 803 & 2467 \\ 4285 & 6449 \end{pmatrix} \text{ in } \begin{pmatrix} 2009 & 3810 \\ 4672 & 4721 \\ 268 & 5731 \end{pmatrix}.$$

Potem je podpis za $x = (1, 1, 0)$ enak $(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,0}) = (735, 2467, 4285)$.

Pomanjkljivost te sheme je velikost podpisa (za vsak bit čistopisa število med 1 in Y).

Spernerjeva lema

Naj bo \mathcal{F} taka družina podmnožic n -elementne množice, da noben njen element ni vsebovan v kakem drugem elementu iz \mathcal{F} . Potem ima družina \mathcal{F} največ

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \text{ elementov.}$$