Dixonov algoritem in kvadratno rešeto

$$(x \not\equiv \pm y \pmod{n}, x^2 \equiv y^2 \pmod{n} \implies D(x-y,n) \neq 1)$$

Sestavimo bazo faktorjev $\mathcal{B} = \{p_1, \ldots, p_B\}$, kjer so p_i "majhna" praštevila. Naj bo C malo večji kot B (npr. $C = B + 10$). Najdemo C kongruenc:

$$x_j^2 \equiv p_1^{\alpha_{1,j}} \times p_2^{\alpha_{2,j}} \times \cdots \times p_B^{\alpha_{B,j}} \pmod{n}, \quad 1 \leq j \leq C$$

Označimo $a_j := (\alpha_{1,j} \bmod 2, \ldots, \alpha_{B,j} \bmod 2)$.
Če najdemo podmnožico $\{a_1, \ldots, a_C\}$, v kateri se vektorji seštejejo v $(0, 0, \cdots, 0) \bmod 2$, potem bo produkt x_j uporabil vsak faktor iz $\mathcal{B}$ sodo mnogokrat.

Primer: $n = 15770708441$, $\mathcal{B} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

$$\begin{aligned} 8340934156^2 &\equiv 3\times 7 \pmod{n} & a_1 &= (0,1,0,1,0,0) \\ 12044942944^2 &\equiv 2\times 7\times 13 \pmod{n}, & a_2 &= (1,0,0,1,0,1) \\ 2773700011^2 &\equiv 2\times 3\times 13 \pmod{n}, & a_3 &= (1,1,0,0,0,1) \end{aligned}$$

Iz $a_1 + a_2 + a_3 = (0,0,0,0,0,0) \bmod 2$ sledi

$$(8340934156 \times 12044942944 \times 2773700011)^2 \equiv$$

$$\equiv (2 \times 3 \times 7 \times 13)^2 \pmod{n}$$

oziroma $9503435785^2 \equiv 546^2 \pmod{n}$

in $D(9503435785 - 546, 15770708441) = 115759.$

- Linearno odvisnost med vektorji $\{a_1, a_2, \cdots, a_C\}$ poiščemo npr. z Gaussovo eliminacijo.
- $C > B + 1$: vendar imamo raje več različnih odvisnosti, da bo vsaj ena dala faktorizacijo.
- Števila x_j, za katere se da $x_j^2 \pmod n$ faktorizirati v $\mathcal{B}$, iščemo v množici $\{x_j = j + \lfloor\sqrt{n}\rfloor \mid j = 1, 2, ...\}$ z metodo **kvadratnega rešeta** (Pomerance).
- Če je $\mathcal{B}$ velik, je večja možnost, da se da neko število faktorizirati v $\mathcal{B}$, a potrebujemo več kongruenc, da najdemo linearno odvisnost. ($|\mathcal{B}| \approx \sqrt{e^{\sqrt{\ln n \ln \ln n}}}$).

Algoritmi za faktorizacijo v praksi

Kvadratno rešeto	$O(e^{(1+o(1))\sqrt{\ln n \ln\ln n}})$
Eliptične krivulje	$O(e^{(1+o(1))\sqrt{\ln p \ln\ln p}})$
Številsko rešeto	$O(e^{(1.92+o(1))(\ln n)^{1/3}(\ln\ln n)^{2/3}})$

$o(1) \to 0$, ko $n \to \infty$

p - najmanjši praštevilski faktor n

V najslabšem primeru, ko je $p \approx \sqrt{n}$, imata kvadratno rešeto in eliptične krivulje približno enako časovno zahtevnost, sicer pa je boljše kvadratno rešeto.

Faktorizacije velikih števil s kvadratnim rešetom:
$(n = p \cdot q,\ p \approx q)$

69	cifer	1983	Davis, Holdredge, Simmons (sestavljen faktor od $2^{251} - 1$)
< 106	cifer	1989	Lenstra, Manasse + pomočniki
129	cifer	1994	Atkins, Graff, Lenstra, Leyland +600 pomočnikov

Fermatova števila:

$2^{2^{11}} - 1$ eliptične krivulje: 1988 (Brent)

$2^{2^{9}} - 1$ številsko rešeto:
1990 (Lenstra, Lenstra, Manasse, Pollard)

Prof. Vidav je leta 1997 zastavil naslednje vprašanje (morda tudi zato, da preveri trenutne moči namiznih računalnikov): poišči prafaktorje števila

$$10^{64} + 1$$

in namignil, da so vsi prafaktorji, če jih je kaj, oblike $128k + 1$.

Večina osebnih računalnikov z Mathematica/Maple hitro najde en faktor:

$$1265011073$$

55-mestni ostanek pa povzroči težave.
V Waterlooju sem končno našel hiter računalnik (cacr: Alpha ???) ter hitro programsko opremo (glej `http://www.informatik.th-darmstadt.de/TI/LiDIA/`), ki je v manj kot 10-ih minutah našla še preostala prafaktorja

$$1534316818888913781836 9$$

$$515217525265213267447869906815873.$$

5. poglavje

Drugi javni kriptosistemi

- ElGamalovi kriptosistemi in Massey-Omura shema
- Problem diskretnega logaritma in napadi nanj
- Metoda velikega in malega koraka
- Pohlig-Hellmanov algoritem
- Index calculus
- Varnost bitov pri diskretnem logaritmu
- Končni obsegi in eliptične krivulje (ponovitev)
- Eliptični kriptosistemi
- Merkle-Hellmanov sistem z nahrbtnikom
- Sistem McEliece

Javna kriptografija

L. 1976 sta Whit **Diffie** in Martin **Hellman** predstavila koncept kriptografije z javnimi ključi.

Le-ta za razliko od simetričnega sistema uporablja dva različna ključa, **privatnega** in **javnega**.
V prejšnjem poglavju smo spoznali RSA (1978).

Taher ElGamal (1985): enkripcije z javnimi ključi in sheme digitalnih podpisov.

Varianta: algoritem za digitalni podpis
(**Digital Signature Algorithm – DSA**),
ki ga je prispevala vlada ZDA.

V razvoju javne kriptografije je bilo razbitih veliko predlaganih sistemov.

Le tri vrste so se ohranile in jih danes lahko smatramo za varne in učinkovite.

Glede na matematični problem, na katerem temeljijo, so razdeljene v tri skupine:

- **Sistemi faktorizacije celih števil**
  (Integer Factorization Systems)
  z RSA (Rivest-Adleman-Shamir)
  kot najbolj znanim predstavnikom,
- **Sistemi diskretnega logaritma**
  (Discrete Logarithem Systems),
  kot na primer DSA,
- **Kriptosistemi z eliptičnimi krivuljami**
  (Elliptic Curve Cryptosystems).

Problem diskretnega logaritma v grupi G

za dana $\alpha, \beta \in G$*, kjer je red elementa* α *enak* n*, najdi* $x \in \{0, \ldots, n-1\}$*, tako da je* $\alpha^x = \beta$*.*

Število x se imenuje **diskretni logaritem** osnove α elementa β.

Medtem ko je diskretni logaritem (verjetno) težko izračunati (v splošnem), lahko potenco izračunamo hitro (primer enosmerne funkcije).

Problem diskretnega logaritma v grupi $\mathbb{Z}_p$

Trenutno ne poznamo nobenega polinomskega algoritma za DLP.

Praštevilo p mora imeti vsaj 150 mest (500 bitov), $p-1$ pa mora imeti vsaj en "velik" prafaktor.

ElGamalovi protokoli

Delimo jih v tri razrede:

1. protokoli za izmenjavo ključev,
2. sistemi z javnimi ključi,
3. digitalni podpisi.

Te protokole lahko uporabimo s poljubno končno grupo G.

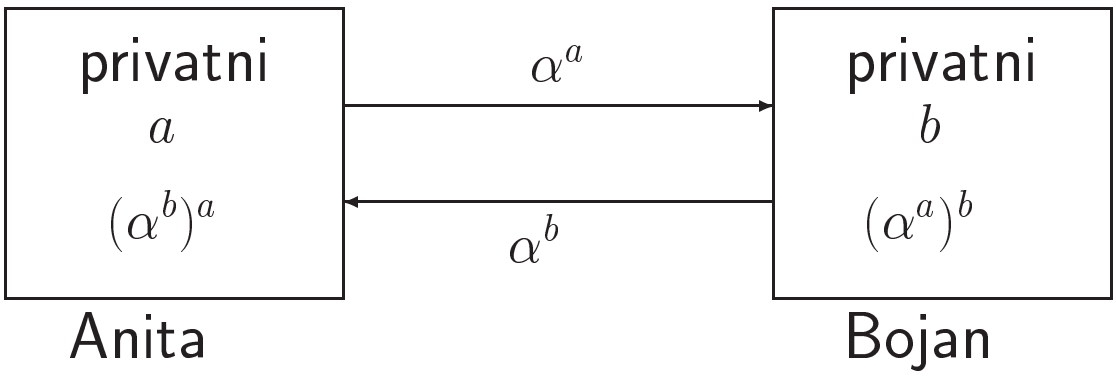
Osnovna razloga za uporabo različnih grup:

- operacije v nekaterih grupah so izvedene enostavneje v programih (software) in programski opremi (hardware) kot v drugih grupah,
- problem diskretnega logaritma je lahko v določeni grupi zahtevnejši kot v drugi.

Naj bo $\alpha \in G$ in naravno število n red tega elementa (t.j., $\alpha^n = 1$ in $\alpha^k \neq 1$ za vsak $k < n$).

1. Izmenjava ključev

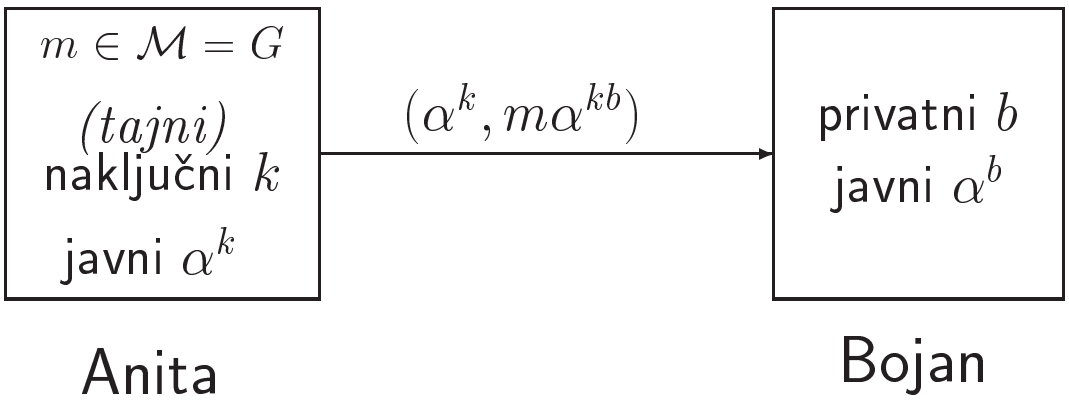
(Diffie-Hellman)



Anita in Bojan si delita skupni element grupe: $(\alpha^a)^b = (\alpha^b)^a = \alpha^{ab}$.

2. ElGamalov kriptosistem javnih ključev

(dva ključa, asimetrični sistem)



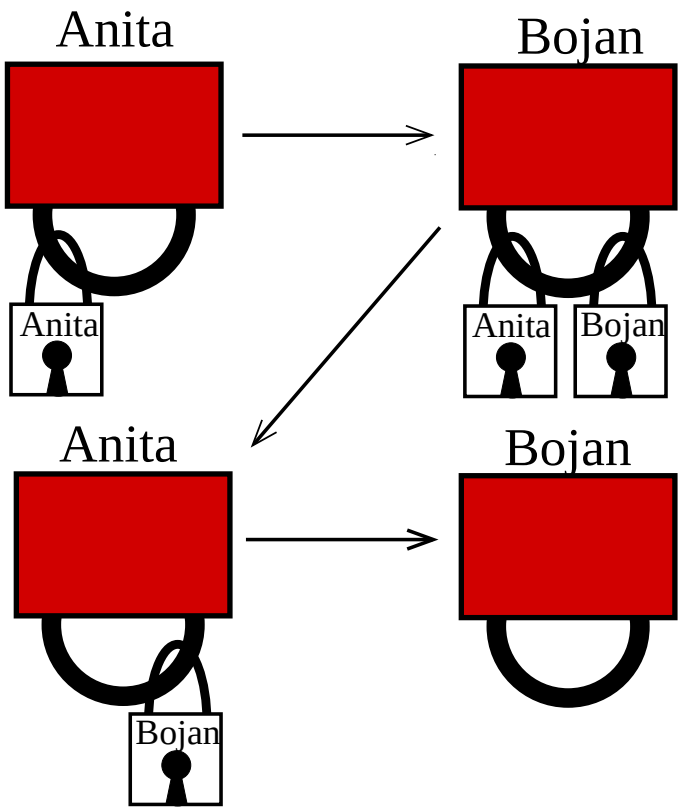
Če je $(y_1, y_2) = e_K(m, k) = (\alpha^k, m\alpha^{kb})$, potem je odšifriranje definirano z $d_K(y_1, y_2) = y_2(y_1^b)^{-1}$.

Sporočilo m lahko prebere le Bojan (s svojim b), ni pa nikjer rečeno, da mu ga je res poslala Anita (saj ni uporabila svojega privatnega ključa).

V javni kriptografiji smatramo, da nam javni del (npr. α^k, α^b) v ničemer ne pomaga pri iskanju tajnega/privatnega dela (npr. k, b).

(Digitalni podpis bo obravnavan v 6. poglavju.)

Massey-Omura shema



Zgled:
za G si izberemo grupo $GF(23)^*$.

Elementi obsega $GF(23)$ so: $0, 1, \ldots, 22$.

Definirajmo:
$a + b = r_1$, kjer je r_1 vsota $a + b$ mod 23.
$ab = r_2$, kjer je r_2 produkt ab mod 23.

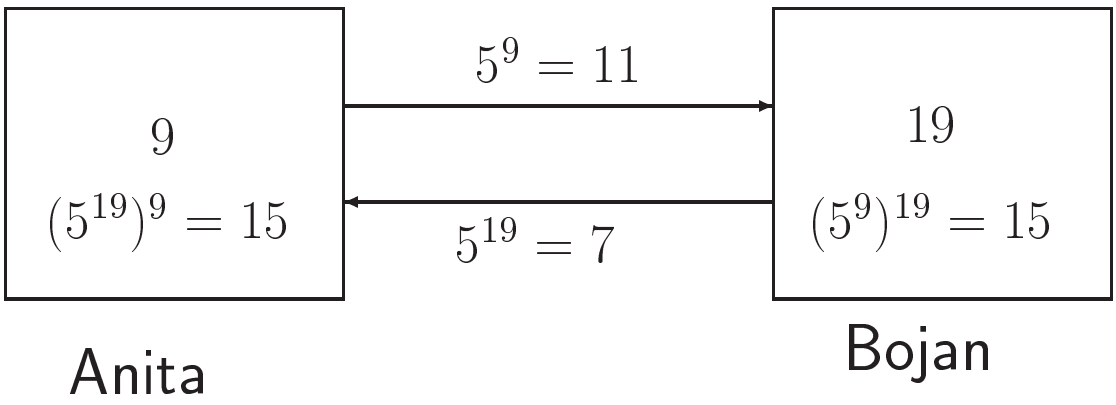
Primer: $12 + 20 = 32 = 9$, $8 \cdot 9 = 72 = 3$.

Multiplikativna grupa $GF(23)^*$

Elementi $GF(23)^*$ so elementi $GF(23)\backslash\{0\}$ in jih lahko generiramo z enim elementom:

$5^0 = 1$	$5^8 = 16$	$5^{16} = 3$
$5^1 = 5$	$5^9 = 11$	$5^{17} = 15$
$5^2 = 2$	$5^{10} = 9$	$5^{18} = 6$
$5^3 = 10$	$5^{11} = 22$	$5^{19} = 7$
$5^4 = 4$	$5^{12} = 18$	$5^{20} = 12$
$5^5 = 20$	$5^{13} = 21$	$5^{21} = 14$
$5^6 = 8$	$5^{14} = 13$	$5^{22} = 1$
$5^7 = 17$	$5^{15} = 19$	

Diffie–Hellmanov protokol v $GF(23)^*$



Anita in Bojan si sedaj delita skupen element $5^{9 \cdot 19} = 15$.

Log tabela

log	elt	log	elt	log	elt
0	1	8	16	16	3
1	5	9	11	17	15
2	2	10	9	18	6
3	10	11	22	19	7
4	4	12	18	20	12
5	20	13	21	21	14
6	8	14	13		
7	17	15	19		

Grupo G in generator α si izberemo tako, da je red elementa α velik (s tem pa je velika tudi log tabela).

Antilog tabela

elt	log	elt	log	elt	log
1	0	9	10	17	7
2	2	10	3	18	12
3	16	11	9	19	15
4	4	12	20	20	5
5	1	13	14	21	13
6	18	14	21	22	11
7	19	15	17		
8	6	16	8		

Algoritmi za računanje diskretnega logaritma

- Shankov algoritem
  (veliki korak – mali korak),
- Pollardov ρ-algoritem,
- Pohlig-Hellmanov algoritem,
- metoda "index calculus".

Danes si bomo ogledali samo prvega in zadnja dva.

Metoda veliki korak – mali korak:

$GF(23)^*$ z gen. 5: sestavi tabelo elementov $5^0, 5^5, 5^{10}, 5^{15}, 5^{20}$ in njihovih logaritmov.

element	1	20	9	19	12
logaritem	0	5	10	15	20

Izračunaj log(18): računaj $5 \times 18, 5^2 \times 18, \cdots$, vse dokler ne dobiš elementa iz tabele.
$5 \times 18 = 21, \quad 5^2 \times 18 = 13, \quad 5^3 \times 18 = 19.$
Iz tabele dobimo $\log(5^3 \times 18) = \log 19 = 15.$
Sledi $3 + \log 18 = 15$ oziroma $\log 18 = 12.$

$GF(89)^*$ z generatorjem 3: sestavi tabelo elementov $3^0, 3^{10}, 3^{20}, \cdots, 3^{80}$ in njihovih algoritmov.

elt	1	42	73	40	78	72	87	5	32
log	0	10	20	30	40	50	60	70	80

Izračunaj log(36): računaj $3 \times 36, 3^2 \times 36, \cdots$, vse dokler ne dobiš elementa iz tabele.
$3 \times 36 = 19$, $3^3 \times 36 = 82$, $3^5 \times 36 = 26$, $3^2 \times 36 = 57$, $3^4 \times 36 = 68$, $3^6 \times 36 = 78$.
Iz tabele preberemo $\log(3^6 \times 36) = \log 78$. Sledi $6 + \log 36 = 40$ oziroma $\log 36 = 34$.

Čim daljša je tabela, ki jo sestavimo, tem dlje časa jo je treba računati (enkratni strošek), po drugi strani pa hitreje naletimo na element v krajši tabeli.

Običajno sestavimo tabelo velikosti $m = \lfloor \sqrt{|G|} \rfloor$ in za iskanje potrebujemo $O(m)$ časa.

Pollardov ρ algoritem (s Floydovim algoritmom za iskanje ciklov)

Ima isto časovno zahtevnost kot metoda veliki korak – mali korak, porabi pa le malo spomina.

Pohlig-Hellmanov algoritem

$$p - 1 = \Pi_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$$

za različna praštevila p_i. Vrednost $a = \log_\alpha \beta$ je natanko določena po modulu $p - 1$.

Najprej izračunamo $a \bmod p_i^{c_i}$ za vsak $i = 1, \ldots, k$ in nato izračunamo $a \bmod (p - 1)$ po kitajskem izreku o ostankih.

Predpostavimo, da je q praštevilo in c največje naravno število, za katero velja

$$p - 1 \equiv 0 \pmod{q^c}.$$

Kako izračunamo

$$x = a \bmod q^c, \quad \text{kjer je } 0 \leq x \leq q^c - 1?$$

Zapišimo x v številskem zapisu z osnovo q:

$$x = \sum_{i=0}^{c-1} a_i q^i, \quad \text{kjer je } 0 \leq a_i \leq q-1.$$

Od tod dobimo

$$a = a_0 + a_1 q + \cdots + a_{c-1} q^{c-1} + s q^c,$$

kjer je s neko naravno število in $a = a_0 + Kq$.
a_0 izračunamo iz naslednje identitete

$$\beta^{(p-1)/q} \equiv \alpha^{a_0 (p-1)/q} \bmod p.$$

Dokažimo slednjo kongruenco:

$$\begin{aligned}
\beta^{(p-1)/q} &\equiv (\alpha^a)^{(p-1)/q} \bmod p \\
&\equiv \left(\alpha^{a_0+Kq}\right)^{(p-1)/q} \mod p \\
&\equiv \alpha^{a_0(p-1)/q}\, \alpha^{(p-1)K} \mod p \\
&\equiv \alpha^{a_0(p-1)/q} \mod p.
\end{aligned}$$

Najprej torej izračunamo

$$\beta^{(p-1)/q} \mod p.$$

Če je $\beta^{(p-1)/q} \equiv 1 \mod p$, je $a_0 = 0$,
sicer pa zaporedoma računamo

$$\gamma = \alpha^{(p-1)/q} \mod p, \quad \gamma^2 \mod p, \quad \ldots,$$

vse dokler ne dobimo

$$\gamma^i \mod p = \beta^{(p-1)/q} \mod p$$

in je $a_0 = i$.

Sedaj moramo določiti $a_1, \ldots, a_{c-1}$ (če je $c > 1$). Naj bo

$$\beta_j = \beta\alpha^{a_0 + a_1 q + \cdots + a_{j-1} q^{j-1}} \mod p,$$

za $0 \leq j \leq c-1$. Tokrat velja splošnejša identiteta

$$(\beta_j)^{(p-1)/q^{j+1}} \equiv \alpha^{a_j (p-1)/q} \mod p,$$

ki jo dokažemo na enak način kot prejšnjo.

Za dani β_j ni težko izračunati a_j, omenimo pa še rekurzijo

$$\beta_{j+1} = \beta_j \alpha^{-a_j q^j} \mod p.$$

Za dano faktorizacijo števila n je časovna zahtevnost Pohlig-Hellmanovega algoritma $O(\sum_{i=0}^{k} c_i(\log n + \sqrt{p_i}))$ grupnih multiplikacij.

Primer: naj bo $p = 251$, potem je

$$n = p - 1 = 250 = 2 \cdot 5^3.$$

Naj bo $\alpha = 71$ in $\beta = 210$,
torej želimo izračunati $a = \log_{71} 210$.

Modul 2: $\gamma_0 = 1$,

$$\gamma_1 \equiv \alpha^{250/2} \equiv 250 \mod p$$

in

$$\beta^{250/2} \equiv 250 \mod p,$$

torej $a_0 = 1$ in $\log_{71} 210 \equiv 1 \pmod 2$.

Modul 5: $\gamma_0 = 1$,

$$\gamma_1 \equiv \alpha^{250/5} \equiv 20 \mathrm{mod} \ \ p$$

in

$$\beta^{250/5} \equiv 149 \quad \mathrm{mod} \ \ p,$$

torej $a_0 = 2$. ...
$a_1 = 4 = \log_{20} 113$ in $a_2 = 2 = \log_{20} 149$,

$\log_{71} 210 \equiv 2 + 4{\cdot}5 + 2{\cdot}5^2 \equiv 72 \pmod{125}$.

Končno nam CRT da $\log_{71} 210 = 197$.

Metoda index calculus

$GF(23)^*$ z generatorem 5.
Izberi bazo 'majhnih' faktorjev: $B = \{-1, 2, 3\}$
in sestavi tabelo njihovih logaritmov:

elt	-1	2	3
log	11	2	16

Iščemo logaritem elementa β (Las Vegas).
Poišči 'gladko' potenco elementa β,
tj. β^x, ki se da razstaviti na faktorje iz B.

Izračunaj log(13): $13^2 = 169 = 2^3 \iff$
$\log 13^2 = \log 2^3 \iff 2\log 13 \equiv 3\log 2 \iff$
$2\log 13 \equiv 6 \pmod{22}$

Sledi $\log 13 \equiv 3$ ali $14 \pmod{22}$.
Preverimo $\log 13 = 14$.

Izračunaj log(14):
$14^3 = 2^3 7^3 = 2^3 \cdot 21 = 2^3 \cdot (-2) = -2^4$.
$3\log 14 = \log(-2^4) = \log(-1) + \log 2^4 = 11 + 4 \cdot 2 = 19$,
$\log 14 = \frac{19}{3} = 19 \cdot (-7) = (-3)(-7) = 21$.

Izračunaj log(15):

$15^3 = 3^3 \cdot 5^3 = 3^3 \cdot 2 \cdot 5 = (-1) \cdot 2 \cdot 3,$

$3 \log 15 = \log(-1) + \log 2 + \log 3 = 11 + 2 + 16 = 29 = 7,$

$\log 15 = \frac{7}{3} = 7(-7) = -49 = -5 = 17.$

Izračunaj log(7):

$7^3 = 49 \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21 = (-1) \cdot 2,$

$3 \log 7 = \log(-1) + \log 2 = 11 + 2 = 13,$

$\log 7 = \frac{13}{3} = 13 \cdot (-7) = 63 = -3 = 19.$

Še en primer: $GF(89)^*$ z gen. 3.

tabela logaritmov:

elt	-1	2	3	5
log	44	16	1	70

Izračunaj log(7):
$7^3 = 76 = 2^2 \cdot 19, \;\; 7^5 = 3 \cdot 5^2,$
$5 \log 7 = \log 3 + 2 \log 5 = 1 + 2 \cdot 70 = 141 = 53,$
$\log 7 = \frac{53}{5} = 53 \cdot (-35) = 81.$

Izračunaj log(53):
$53^3 = 3 \cdot 23, 53^5 = 2^2 \cdot 17, 53^7 = 2 \cdot 3^2,$
$7 \log 53 = \log 2 + 2 \log 3 = 16 + 2 = 8,$
$\log 53 = \frac{18}{7} = 18 \cdot (-25) = 78.$

Metoda index calculus (splošno)

1. Izberi bazo faktorjev $\mathcal{B} = \{p_1, \ldots, p_t\}$, tako da se da dovolj veliko število elementov grupe G dovolj hitro razstaviti v $\mathcal{B}$.

2. Poišči $t + 10$ lineranih zvez z logaritimi elementov iz $\mathcal{B}$:

izberi število $k < n$, izračunaj α^k in ga poskusi zapisati kot

$$\alpha^k = \Pi_{i=1}^{t} p_i^{c_i} \quad \Longleftrightarrow \quad k \equiv \sum_{i=1}^{t} c_i \log p_i \bmod p - 1.$$

3. Sestavi tabelo logaritmov elementov iz $\mathcal{B}$.

4. Izberi naključno število $k \in \{1, \ldots, n\}$, izračunaj $\beta\alpha^k$ in ga poskusi zapisati kot

$$\beta\alpha^k = \Pi_{i=1}^{t} p_i^{d_i}.$$

Končno dobimo

$$\log_\alpha \beta = (\sum_{i=1}^{t} d_i \log_\alpha p_i - k) \mod n.$$

Obstajajo različni slučajni algoritmi za metodo Index calculus. Ob sprejemljivih predpostavkah je njihova časovna zahtevnost za pripravljalno fazo

$$\mathcal{O}\left(e^{1+o(1))\sqrt{\log p \log\log p}}\right),$$

za izračun vsakega posameznega logaritma pa

$$\mathcal{O}\left(e^{1/2+o(1))\sqrt{\log p \log\log p}}\right).$$