

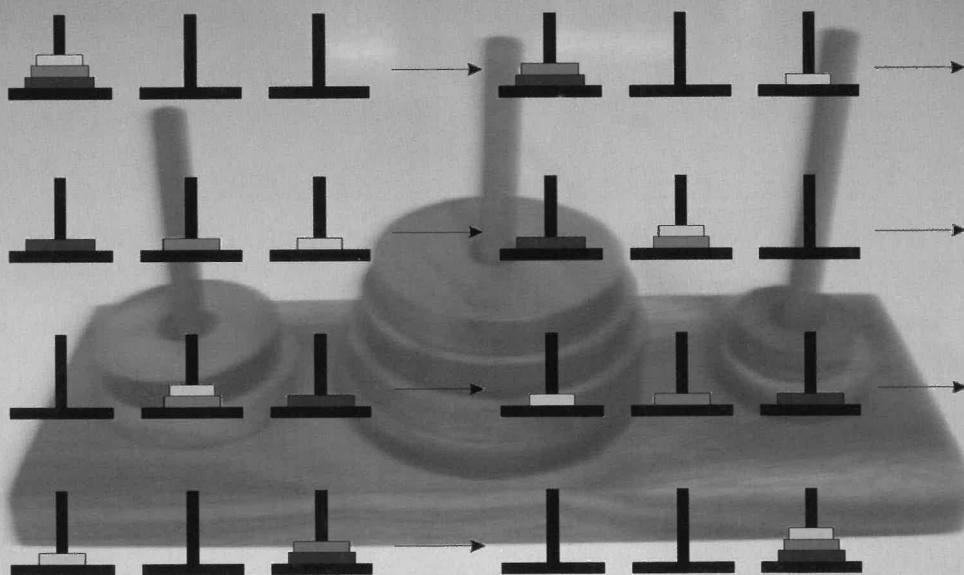
ODPISANO

2007

Letnik 54

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasiló Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2007, letnik 54, številka 5, strani 145–184

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Damjan Kobal, Peter Legiša, Aleš Mohorič, Petar Pavešić, Nada Razpet, Peter Šemrl, Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.

Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1300 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21,00 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 33,38 EUR, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 4,18 EUR, stare številke 2,17 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2007 DMFA Slovenije – 1688

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželená velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\LaTeX}$ oziroma $\text{\L\AA T\AA E X}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

POŽREŠNO ZAPOREDJE BREZ PONAVLJANJ IN PROBLEM HANOJSKEGA STOLPA

SANDI KLAVŽAR

Fakulteta za naravoslovje in matematiko
Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2000): 68R15, 05A99

Pokazano je, da požrešno zaporedje brez ponavljanj sovпада z zaporedjem premikov diskov v (enolični) optimalni rešitvi problema Hanojskega stolpa.

GREEDY NONREPETITIVE SEQUENCE AND THE TOWER OF HANOI PROBLEM

It is shown that the greedy nonrepetitive sequence coincides with the sequence of moves of disks in the (unique) optimal solution of the Tower of Hanoi problem.

1. Požrešno zaporedje brez ponavljanj

Pred kratkim je Boštjan Brešar v Obzorniku predstavil zanimiv koncept zaporedij brez ponavljanj [2]. Spomnimo se ključne definicije. Zaporedje $x_1, x_2, \dots, x_n$ je *brez ponavljanj*, če ne vsebuje podzaporedja **zaporednih** členov oblike

$$y_1, y_2, \dots, y_m, y_1, y_2, \dots, y_m,$$

kjer je $m \geq 1$. Takemu podzaporedju zaporednih členov pravimo *kvadrat*, zato za zaporedje brez ponavljanj rečemo tudi, da je *brez kvadratov*. Na primer, zaporedje a, b, c, d, e je očitno brez ponavljanj oz. brez kvadratov, medtem ko zaporedje $a, b, a, c, a, b, c, a, b, a$ vsebuje kvadrat c, a, b, c, a, b . V nadaljevanju bomo brez izgube za splošnost obravnavali zaporedja, katerih členi so naravna števila.

Pri algoritmičnem reševanju problemov pogosto uporabljamo t. i. *požrešni način*, ki, grobo povedano, rešitev gradi postopoma in na vsakem koraku postopka izbere delno rešitev, ki zadošča „požrešnemu kriteriju“. Poglejmo si, kaj dobimo s požrešnim načinom v primeru zaporedij brez ponavljanj. Natančneje, konstruirajmo neskončno zaporedje brez ponavljanj tako, da na vsakem koraku izberemo najmanjše možno število, ki ne naredi kvadrata. Očitno je na ta način zaporedje enolično določeno, zato ga poimenujmo *požrešno zaporedje brez ponavljanj*, označimo ga z $(a_i)_{i \geq 1}$.

Zagotovo imamo $a_1 = 1$ in $a_2 = 2$, saj bi začetek zaporedja 1, 1 predstavljal kvadrat. S podobnim premislekom zaporedje nadaljujemo takole:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \cancel{1} & 1 & \cancel{1} & 1 & \cancel{1} & 1 \\ & 2 & & \cancel{2} & & 2 & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

Skratka, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, $a_4 = 3$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$ in $a_7 = 1$. Kako je sedaj s členom a_8 ? Po vrsti ugotovimo:

$a_8 \neq 1$, saj bi sicer dobili kvadrat 1, 1;

$a_8 \neq 2$, saj bi sicer dobili kvadrat 1, 2, 1, 2; in

$a_8 \neq 3$, saj bi sicer dobili kvadrat 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 3.

Torej naš požrešni kriterij pravi: $a_8 = 4$. Splošneje:

Trditev 1. Za vsak $n \geq 1$ je $a_{2^{n-1}} = n$. Nadalje, za vse $i < 2^{n-1}$ je $a_i < n$.

Dokaz. Za $n = 1$ in $n = 2$ trditev velja. Naj bo $n \geq 3$ in predpostavimo, da trditev velja za vse vrednosti, manjše od n . Torej je $a_{2^{n-2}} = n - 1$ in vsi členi pred $a_{2^{n-2}}$ so manjši od $n - 1$. Zaradi slednjega razloga požrešni algoritem po členu $a_{2^{n-2}}$ konstruira zaporedje dolžine $2^{n-2} - 1$, ki sovпада s prvimi $2^{n-2} - 1$ členi zaporedja. Res, če bi imeli kvadrat med temi členi zaporedja, ta zagotovo ne bi vseboval člena $a_{2^{n-2}} = n - 1$, saj bi se v kvadratu $n - 1$ moral pojaviti vsaj še enkrat. Torej bi moral biti kvadrat pred členom $a_{2^{n-2}}$ (ali, ekvivalentno, za njim), kar pa že vemo, da ni možno. Tako dobimo zaporedje dolžine $(2^{n-2} - 1) + 1 + (2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} - 1$ oblike

$$1, 2, \dots, 1, n - 2, 1, 2, \dots, 1, n - 1, 1, 2, \dots, 1, n - 2, 1, 2, \dots, 1$$

in z indukcijskim razmislekom (ki je analogen tistemu za $n = 4$ pred trditvijo) zaključimo, da je $a_{2^{n-1}} = n$. Po konstrukciji tudi velja, da je $a_i < n$ za vse $i < 2^{n-1}$. ■

Začetek požrešnega zaporedja brez ponavljanj je torej videti takole:

$$1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 5, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 6, \dots$$

Brez dokaza navedimo, da lahko zaporedje (a_n) opišemo tudi eksplicitno z naslednjim predpisom, glej [4].

Trditev 2. Naj bo $n \geq 1$ in zapišimo $n = 2^r(2s + 1)$, kjer sta $r, s \geq 0$. Tedaj je $a_n = r + 1$.

Če postavimo $s = 0$, opazimo, da ta trditev posploši prvi del trditve 1.

Naredimo sedaj še formalen dokaz, da je naše zaporedje dejansko brez ponavljanj.

Trditev 3. *Zaporedje $(a_n)_{n \geq 1}$ je brez ponavljanj.*

Dokaz. Recimo nasprotno, naj bo

$$a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_{k+m+2}, \dots, x_{k+2m}$$

kvadrat zaporedja $(a_n)_{n \geq 1}$. Torej je $a_{k+r} = a_{k+m+r}$ za $r = 1, 2, \dots, m$. Ker je $a_n = 1$ natanko tedaj, ko je n liho število, mora biti m sod, sicer bi bil natanko eden od členov a_{k+1} in a_{k+m+1} enak 1, kar bi pomenilo, da je $a_{k+1} \neq a_{k+m+1}$.

Naj bo $k + 1$ sodo število in pogledjmo zaporedje

$$a_{k+1}, a_{k+3}, \dots, a_{k+m-1}, a_{k+m+1}, a_{k+m+3}, \dots, x_{k+2m-1},$$

torej podzaporedje kvadrata, ki ga tvorijo njegovi členi na sodih mestih. Ker v splošnem za vsak $n \geq 1$ velja $a_{2n} = a_n - 1$, zaporedje

$$a_{(k+1)/2}, a_{(k+3)/2}, \dots, a_{(k+m-1)/2}, a_{(k+m+1)/2}, a_{(k+m+3)/2}, \dots, x_{(k+2m-1)/2},$$

spet tvori kvadrat zaporedje (a_n) .

Kadar je $k + 1$ liho število, pogledamo zaporedje

$$a_{k+2}, a_{k+4}, \dots, a_{k+m}, a_{k+m+2}, a_{k+m+4}, \dots, x_{k+2m},$$

in ravnamo analogno kot v prejšnjem primeru.

V obeh primerih smo torej našli kvadrat, ki je dvakrat krajši od začetnega kvadrata. S ponavljanjem postopka na koncu pridemo do kvadrata dolžine dva. Toda med dvema zaporednima členoma zaporedja (a_n) je natanko eden enak 1, kar je seveda protislovje. ■

Naj bo (x_n) poljubno zaporedje. Tedaj pravimo, da je to zaporedje *brez šibkih ponavljanj*, če ne vsebuje podzaporedja zaporednih členov oblike

$$y_1, y_2, \dots, y_m, z_1, z_2, \dots, z_m,$$

kjer je $m \geq 1$ in členi $z_1, z_2, \dots, z_m$ tvorijo permutacijo členov $y_1, y_2, \dots, y_m$. Zaporedje brez šibkih ponavljanj je seveda tudi brez ponavljanj, saj kvadratu ustreza šibko ponavljanje, kjer za permutacijo izberemo identiteto. Obratno ne velja, zaporedje $1, 2, 3, 2, 1, 3$ je brez ponavljanj, vsebuje pa šibko ponavljanje, saj zadnji trije členi tvorijo permutacijo prvih treh členov. Za požrešno zaporedje brez ponavljanj pa vseeno velja:

Trditev 4. *Zaporedje $(a_n)_{n \geq 1}$ je brez šibkih ponavljanj.*

To trditev dokažemo z isto idejo, kot smo dokazali trditev 3, zato argumenta ne bomo ponavljali.

2. Problem Hanojskega stolpa

Problem Hanojskega stolpa je eden najbolj znanih problemov rekreacijske matematike in ga med drugim obravnava skoraj vsaka knjiga o algoritmih, ko razpreda o rekurzivnih problemih. Problem s pridom uporabljajo tudi psihologi pri svojih testiranjih [5].

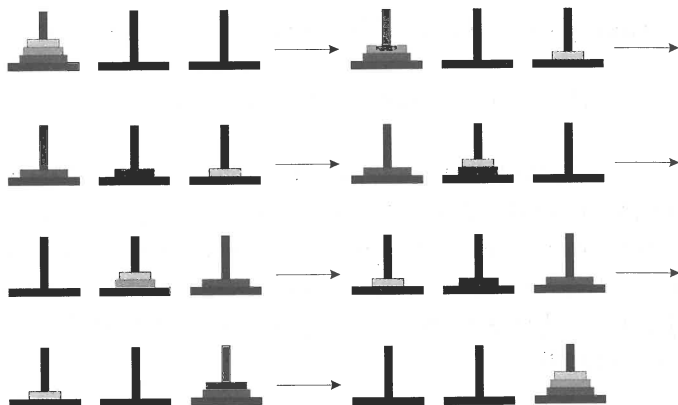
Problem Hanojskega stolpa sestavljajo trije stolpi, na katerih imamo n diskov različnih velikosti. Označimo diske s števili $1, 2, \dots, n$, kjer so diski urejeni po velikosti in 1 pomeni najmanjši ter n največji disk. Na začetku so vsi diski na enem izmed stolpov, ki mu pravimo *začetni stolp*, in sicer so razporejeni od največjega na dnu do najmanjšega na vrhu. Naša naloga je, da z minimalnim številom potez prenesemo vse diske na drug stolp, pravimo mu *končni stolp*. Pri tem ena poteza pomeni prestavitev zgornjega diska z enega stolpa na drug stolp, in sicer tako, da nikoli ne postavimo večjega diska na manjšega.

Preostalega izmed stolpov imenujemo *pomožni stolp*. Če želimo premakniti največji disk, moramo najprej z začetnega stolpa umakniti vse preostale diske, tj. diske $1, 2, \dots, n - 1$ na pomožni stolp (s pomočjo končnega stolpa). Nato premaknemo disk n z začetnega na končni stolp, nazadnje pa premaknemo diske $1, 2, \dots, n - 1$ s pomožnega stolpa na končni stolp s pomočjo začetnega stolpa. Poimenujmo opisano strategijo *direktna metoda*. Z indukcijo se ni težko prepričati, da je opisana strategija optimalna, torej da naredi minimalno število potez med vsemi možnimi strategijami in da je tudi enolična. Zanimivo je, da je bil prvi formalen dokaz tega dejstva narejen šele leta 1981 v [6], čeprav je bil problem Hanojskega stolpa postavljen že v 19. stoletju [3]. Natančneje, velja naslednji rezultat:

Izrek 5. *Direktna metoda je enolična optimalna rešitev problema Hanojskega stolpa. Za problem z n diski potrebuje $2^n - 1$ potez.*

Na sliki 1 je prikazana optimalna rešitev za $n = 3$, kjer je prvi stolp začetni, tretji stolp končni in srednji stolp pomožni.

Požrešno zaporedje brez ponavljanj in problem Hanojskega stolpa



Slika 1. Optimalna rešitev Hanojskega stolpa za tri diske

Zapišimo sedaj po vrsti diske, ki smo jih premaknili v posamezni potezi rešitve s slike 1:

$$1, 2, 1, 3, 1, 2, 1.$$

To je ravno začetek požrešnega zaporedja brez ponavljanj. In tule je glavno sporočilo tega kratkega prispevka:

Izrek 6. *Zaporedje diskov, ki jih po vrsti premaknemo v optimalni rešitvi problema Hanojskega stolpa z n diski, $n \geq 1$, sovpada s prvimi $2^n - 1$ členi požrešnega zaporedja brez ponavljanj.*

Dokaz. Če imamo en sam disk, izrek zagotovo velja. Predpostavimo, da je $n \geq 2$ in da izrek velja za $n - 1$ diskov. V optimalni strategiji najprej z začetnega stolpa prestavimo diske $1, 2, \dots, n - 1$ na pomožni stolp. Po induksijski predpostavki zaporedje premaknjenih diskov ustreza prvim $2^{n-1} - 1$ členom požrešnega zaporedja brez ponavljanj. Nato prestavimo disk n in po trditvi 1 je $a_{2^{n-1}} = n$. Nazadnje premaknemo diske $1, 2, \dots, n - 1$ s pomožnega na končni stolp in po induksijski predpostavki zaporedje premaknjenih diskov ustreza prvim $2^{n-1} - 1$ členom požrešnega zaporedja brez ponavljanj, ki pa sovpada s členi a_i , $i = 2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \dots, 2^n - 1$. ■

Zaporedje (a_n) , ki smo ga obravnavali v tem prispevku, vsebuje vsa naravna števila. Za konec opišimo, kako lahko s pomočjo problema Hanojskega stolpa konstruiramo neskončno zaporedje brez ponavljanj s šestimi simboli.

Opazujmo k -to potezo optimalne rešitve problema Hanojskega stolpa. Recimo, da smo v njej premaknili disk s stolpa i_k na stolp j_k . Opišimo to

potezo z urejenim parom (i_k, j_k) . Možni pari, ki opišejo k -to potezo, so:

$$(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 1), (3, 1) \text{ in } (3, 2).$$

Priredimo tem urejenim parom po vrsti števila od 1 do 6. Na primer, rešitev s slike 1 poraja zaporedje 2, 1, 6, 2, 4, 3, 2. V članku [1] so avtorji dokazali, da je tako konstruirano zaporedje brez kvadratov za poljubno število diskov. Drugačen dokaz tega izreka najdemo v [4], kjer je nadalje dokazano, da problem Hanojskega stolpa generira tudi neskončno zaporedje brez ponavljanj s samo petimi simboli.

LITERATURA

- [1] J.-P. Allouche, D. Astoorian, J. Randall in J. Shallit, *Morphisms, squarefree strings, and the Tower of Hanoi puzzle*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), str. 651–658.
- [2] B. Brešar, *Zaporedja brez ponavljanj*, Obzornik mat. fiz. **54** (2007), str. 73–80.
- [3] N. Claus (= E. Lucas), *La Tour d'Hanoi, Jeu de calcul*, Science et Nature **1** (1884), str. 127–128.
- [4] A. M. Hinz, *Square-free Tower of Hanoi sequences*, Enseign. Math. **42** (1996) 2, str. 257–264.
- [5] D. Klahr, *Goal formation, planning, and learning by pre-school problem solvers or: "My socks are in the dryer"*, v: R. S. Siegler (ur.), *Children's Thinking: What develops?*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale NJ (1978), str. 181–212.
- [6] D. Wood, *The Towers of Brahma and Hanoi revisited*, J. Recreational Math. **14** (1981–82), str. 17–24.

VESTI

POPRAVEK

V članku *Numerična matematika na Oddelku za matematiko FMF* (Obzornik mat. fiz. **54** (2007) 2, str. 57–62) sem navedel, da se je študij Tehniška matematika začel v šolskem letu 1961/62. V resnici se je študij začel leto prej, torej v šolskem letu 1960/61. Leto pozneje pa se je v okviru tega študija prvič predaval predmet Numerična analiza. Na to napako me je opozoril Edvard Košnjek iz Tržiča, ki je bil član prve generacije tehniških matematikov. Obenem je poudaril, da je leta 1966 tudi on diplomiral na tej smeri. Za neljubi napaki se bralcem Obzornika za matematiko in fiziko, posebej pa še Edvardu Košnjeku, iskreno opravičujem.

Zvonimir Bohte

FIZIKA MOLEKULARNIH VERIG

MATJAŽ LIČER

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 87.15.-v, 36.20.-r, 87.15.Rn

Prispevek obravnava nekaj osnovnih modelov za obravnavo linearnih makromolekularnih verig. Izpeljana je entropična elastičnost verige, nakazane pa so tudi nekatere fraktalne lastnosti dolgih molekul.

THE PHYSICS OF MOLECULAR CHAINS

The paper presents some of the basic models of linear macromolecular chains. Chain entropic elasticity is calculated, along with some of the fractal properties of long linear molecules.

1. Uvod

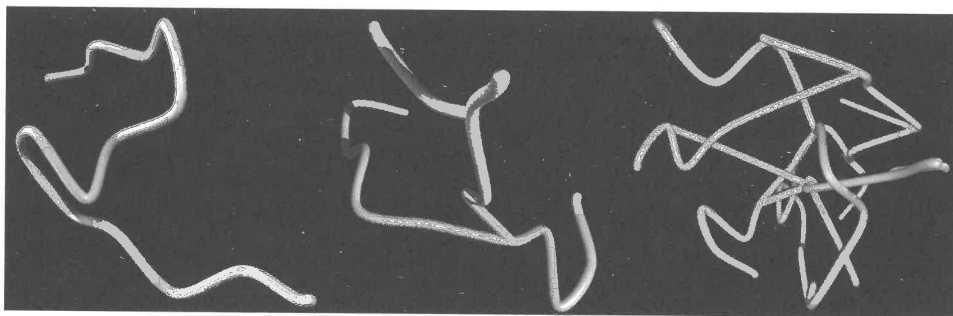
Med mikrosvetom kvantne mehanike in makrosvetom teorije relativnosti se v zadnjih desetletjih na mezoskopskih skalah razvija nova fizika, ki neposredno ne spada v nobeno od zgoraj omenjenih veličastnih domen. To je fizika kompleksnih sistemov in mehkih snovi, kamor spada tudi fizika molekularnih verig, o kateri želimo nekaj malega povedati v tem prispevku. Fizika kompleksnih snovi poskuša pojasniti makroskopske lastnosti materialov na podlagi mikroskopskih interakcij med njihovimi gradniki. Rojstvo fizike molekularnih verig postavljamo v dvajseta leta prejšnjega stoletja, ko je Hermann Staudinger postavil hipotezo, da so polimeri dolge molekule, ki nastanejo, ko se manjše molekule povežejo v verigo. Teorijo elastičnosti takšnih sistemov je prvi formuliral Werner Kuhn v letih 1940–42, statistično fiziko polimernih verig pa je v petdesetih letih konstruiral John Flory. Sam F. Edwards je leta 1965 odkril povezavo med konformacijami polimernih verig in trajektorijami kvantnih delcev: za opis polimerov se poslej lahko uporablja funkcionalne metode kvantne teorije polja. Pregled avtoritet lahko sklenemo s Pierrom G. de Gennesom, ki je odkril analogije med polimernimi in magnetnimi sistemi, ter Alanom Heegerjem, ki je eden od izumiteljev prevodnih plastik. Namen tega članka ni podroben pregled omenjenih formalizmov – z njimi se lahko bralec поблиže seznani iz seznama navedene literature – temveč vpeljava osnovnih fizikalnih konceptov ter formalna obravnava najpreprostejših zgledov omenjenega vsebinskega polja.

Z besedo *polimer* označujemo veliko molekulo, sestavljeno iz manjših, ponavljajočih se enot. Veriga polimera polioksietilena (POE) je npr. sestavljena iz N enot ($\text{CH}_2\text{--CH}_2\text{--O}$), kjer je $N \sim 10^5$. Beseda *makromolekula* je sinonim za polimer.

Monomer je molekula, ki se s kovalentno vezjo povezuje z drugimi enakimi ali različnimi molekulami v polimerno verigo. Molekula polietilena ima npr. obliko $\cdots\text{--CH}_2\text{--CH}_2\text{--CH}_2\text{--}\cdots$, sestavljena pa je iz monomerov $\text{--CH}_2\text{--}$. Polimer polistiren je linearna veriga iz monomerov $\text{--}(\text{CH}_2\text{--CH}(\text{C}_6\text{H}_6))\text{--}$, polimer polivinilklorid (PVC) pa je npr. sestavljen iz monomerov $\text{--}(\text{CH}_2\text{--CH}(\text{Cl}))\text{--}$. In še bi lahko naštevali.

Oligomer je kratek polimer, ki vsebuje vsaj dva monomera. Natančne ločnice med oligomerom in polimerom ni niti možno niti potrebno začrtati, saj v splošnem med enim in drugim ni ostrega prehoda pri nobeni količini, ki bi bila praktično pomenljiva.

Linearni polimer je polimer, katerega monomeri so povezani le z dvema drugima in tvorijo linearno verigo, medtem ko se monomeri *nelinearnih* ali *razvejanih polimerov* ne povezujejo v verige, temveč v bolj razvejane strukture. Med prostorske mreže polimerov sodijo npr. gume in geli (slika 1).



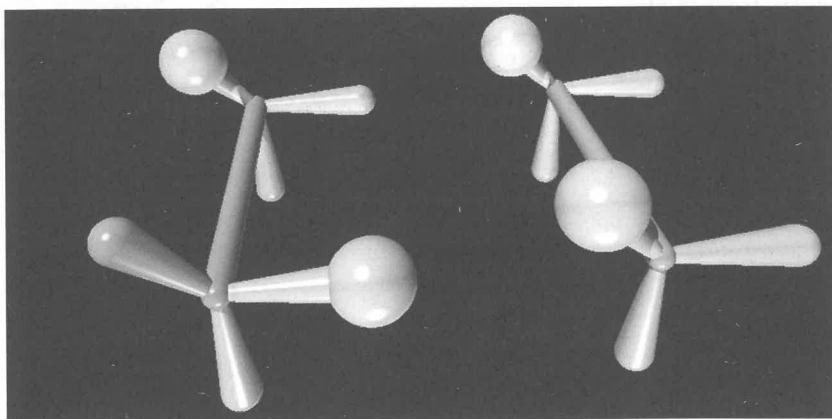
Slika 1. Sheme polimernih struktur: na levi linearni polimer, v sredini razvejani polimer, na desni model gume: prostorska mreža polimernih verig.

Homopolimer je sestavljen iz enega tipa monomerov, *kopolimer* pa iz dveh različnih monomerov.

Biopolimeri so polimeri, ki se pojavljajo v bioloških sistemih. Običajno so sestavljeni iz cele vrste različnih monomerov in so precej bolj zapleteni kot nebiološki polimeri. Biopolimeri se v splošnem delijo na štiri glavne tipe: nukleinske kisline, proteine, lipide in polisaharide. Najbolj znamenita molekula v tej skupini je makromolekula DNK.

Konstitucija polimera pove, kateri atomi so povezani v molekulo in s

kakšnimi vezmi. *Konfiguracija* polimera določa relativno medsebojno ureditev vezi v molekuli ne glede na spremembe v molekularni obliki, ki izhajajo iz rotacij okrog posameznih vezi. *Konformacija* polimera določa različne prostorske razvrstitve atomov v molekuli, ki lahko nastanejo zaradi rotacij okrog posameznih vezi. Dva polimera imata torej lahko pri enaki konstituciji in konfiguraciji različno konformacijo (slika 2).

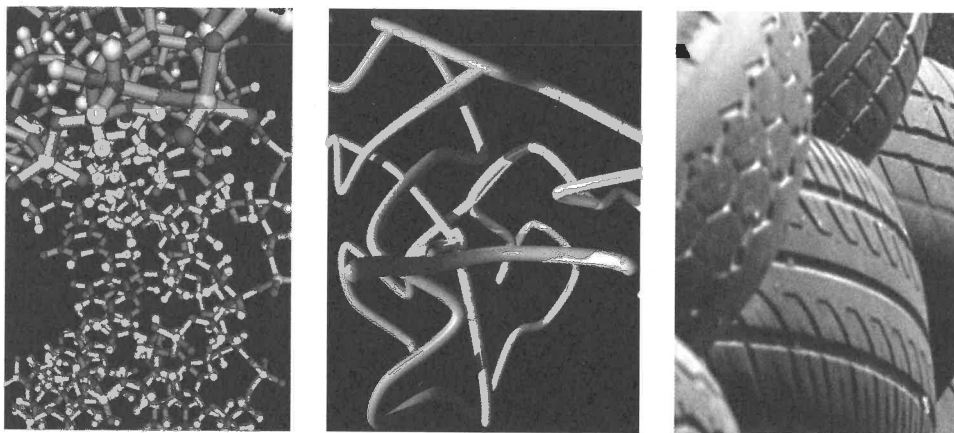


Slika 2. Molekuli z enako konstitucijo, enako konfiguracijo in različno konformacijo: molekuli sta sestavljeni iz enakih gradnikov (enaka konstitucija), ki so med seboj povezani s paroma enakimi tipi vezi (enaka konfiguracija), vezi pa so med seboj paroma različno prostorsko usmerjene (različna konformacija).

2. Fizikalni modeli polimerov

Med polimere oz. makromolekule spadajo zelo raznoliki materiali s široko paleto različnih morfologij, faz in fizikalnih lastnosti. Taki sistemi imajo običajno zelo veliko število prostostnih stopenj, zato je njihovo obnašanje težko zajeti z golo posplošitvijo tradicionalnih formalizmov, ki so bili razviti za preproste sisteme na atomski skali. Makromolekule in druge kompleksne sisteme lahko opisujemo na različnih nivojih, nivo konkretnega opisa pa je odvisen od tega, na katere lastnosti sistema se želimo osredotočiti (slika 3).

Predmet (in domet) statistične fizike so tako predvsem makroskopski, globalni parametri kompleksnih sistemov, za opis dogajanja na molekularni ali atomski ravni pa moramo uporabiti drugačne prijeme. Statistični modeli so običajno razmeroma preprosti, vendar nam kljub temu omogočajo dokaj natančen izračun nekaterih makroskopskih ravnovesnih lastnosti kompleksnih sistemov. Mikroskopski (lokalni) modeli so narejeni tako, da čimbolj



Slika 3. Različni nivoji opisa polimera. Na levi mikroskopski opis na skali ~ 10 nm, v sredini mezoskopski opis (guma kot prostorska mreža polimernih verig) na skali ~ 1 μ m, na desni makroskopski izdelek.

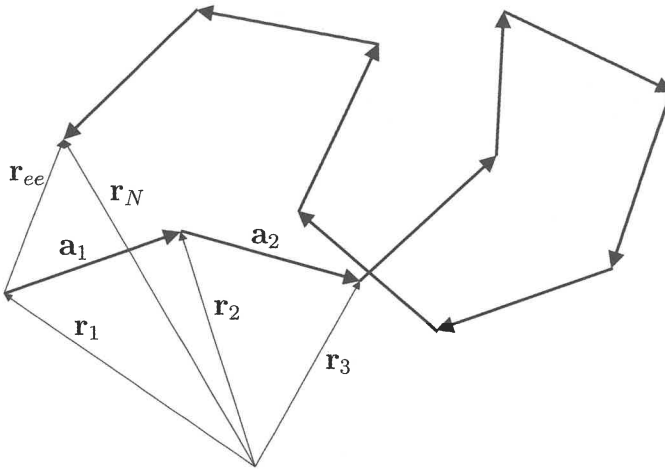
natančno opisujejo interakcije na kvantnem nivoju, posplošitve na večje skale pa so le redko samoumevne. Takšni opisi so neizbežni pri razvoju aplikacij: izboljšave konkretnih materialov zahtevajo podrobno poznavanje lokalnih pojavov, vezi med gradniki, njihovih odvisnosti in interakcij ipd. Ko polimer opisujemo na mikroskopskem nivoju, nas zanimajo npr. specifične lastnosti kemijske vezi, ki povezuje monomere. Ko ga opisujemo na višjem, npr. mezoskopskem nivoju, poskušamo zmanjšati število sistemskih prostostnih stopenj: polimer opišemo npr. kot dolgo nit, torej na način, ki popolnoma ignorira značilnosti njegovih mikroskopskih sestavnih delov, pridobimo pa osnovni vtis o nekaterih njegovih globalnih značilnostih, linearni dimenziji, entropiji, prosti energiji in podobno. Na tem mestu bomo razvili le najenostavnejše mikroskopske modele linearnih polimerov (tj. polimernih verig) in si ogledali nekaj njihovih posledic.

2.1 Model naključnega gibanja

Eden najpreprostejših modelov linearnega polimera je model, kjer obliko polimerne verige aproksimiramo s potekom naključnega gibanja po prostoru. Naključno gibanje se začne v (poljubni) izhodiščni točki, ki predstavlja en konec polimera, in konča v končni točki, ki predstavlja drug konec polimera. Od enega do drugega konca pridemo v N korakih v naključne smeri, ki opisujejo N naključno orientiranih, v verigo povezanih monomerov. Orientacijo i -tega monomera opišemo z vektorjem $\mathbf{a}_i$, njegovo dolžino pa ozna-

čimo z a . Začetno in končno točko i -tega monomera označimo s krajevnima vektorjema $\mathbf{r}_i$ in $\mathbf{r}_{i+1}$, tako da velja $\mathbf{a}_i = \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i$. Vektor, ki povezuje oba konca polimera, označimo z $\mathbf{r}_{ee}$ (ang. *end-to-end vector*). Očitno velja

$$\mathbf{r}_{ee} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i = \mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1 \text{ (slika 4).}$$



Slika 4. Modeliranje polimera z naključnim gibanjem. Orientacijo prvega monomera predstavlja vektor $\mathbf{a}_1$, orientacijo drugega predstavlja vektor $\mathbf{a}_2$, ki je od $\mathbf{a}_1$ popolnoma neodvisen, itd.

Oglejmo si, kako je tipična prostorska razsežnost polimera odvisna od njegove dolžine. Pred tem omenimo, da ni samoumevno, kaj naj bi tipična razsežnost polimera pomenila. V polimernem sistemu lahko namreč definiramo različne karakteristične velikosti. Primeri takih karakterističnih velikosti so: (i) koren povprečne vrednosti kvadrata razdalje med koncema polimera $\langle \mathbf{r}_{ee}^2 \rangle^{1/2}$, (ii) povprečna razdalja med koncema polimera $\langle |\mathbf{r}_{ee}| \rangle$, (iii) povprečna maksimalna razdalja med katerimakoli segmentoma polimera $\langle \max_{i,j} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \rangle$, itd. Navedena povprečja $\langle \cdot \rangle$ pomenijo povprečenje po vseh polimernih konformacijah. Vse tri navedene velikosti so sorazmerne produktu $N^{1/2}a$, razlikujejo se zgolj za multiplikativno konstanto – to bomo pokazali v poglavju o fraktalni naravi polimerov. V prispevku se bomo ukvarjali skoraj izključno s prvo zgoraj navedeno karakteristično velikostjo, torej z $\langle \mathbf{r}_{ee}^2 \rangle^{1/2}$. Ker gre za naključno gibanje, je orientacija vektorja $\mathbf{a}_i$ popolnoma neodvisna od orientacije kateregakoli vektorja $\mathbf{a}_{j \neq i}$, torej v primeru

$j \neq i$ velja $\langle \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \rangle = \langle \mathbf{a}_i \rangle \cdot \langle \mathbf{a}_j \rangle = 0$ in

$$\langle \mathbf{r}_{ee}^2 \rangle = \sum_{i,j} \langle \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j \rangle = \sum_i \langle \mathbf{a}_i^2 \rangle = Na^2.$$

Dobili smo za naključno gibanje značilen rezultat: tipična dimenzija polimera v okviru tega modela narašča s korenem števila monomerov, torej kot $\langle \mathbf{r}_{ee}^2 \rangle^{1/2} = aN^{1/2}$. Ker so orientacije monomerov neodvisne druga od druge, lahko konformacijo polimera zapišemo kot produkt orientacij vseh N monomerov

$$\prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{a}_i),$$

kjer s $\psi(\mathbf{a}_i)$ označimo verjetnostno porazdelitev orientacije enega monomera, ki je kar naključna porazdelitev vektorja z dolžino a :

$$\psi(\mathbf{a}_i) = \frac{1}{4\pi a^2} \delta(|\mathbf{a}_i| - a). \quad (1)$$

Verjetnostno porazdelitev vektorja $\mathbf{r}_{ee}$, da bosta po N korakih konca polimera napenjala vektor $\mathbf{r}_{ee}$, dobimo iz konformacije polimera s pomočjo integrala

$$P_N(\mathbf{r}_{ee}) = \int d\mathbf{a}_1 \int d\mathbf{a}_2 \dots \int d\mathbf{a}_N \delta^3\left(\mathbf{r}_{ee} - \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i\right) \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{a}_i). \quad (2)$$

Za dovolj velike N je porazdelitev $P_N(\mathbf{r}_{ee})$ Gaussova (za natančni izračun gl. npr. [1, str. 306] ali [2, str. 12]:

$$P_N(\mathbf{r}_{ee}) = \left(\frac{3}{2\pi Na^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3\mathbf{r}_{ee}^2}{2Na^2}\right). \quad (3)$$

Do enakega rezultata pridemo tudi v primeru, ko polimer modeliramo na kak drug način. Gaussovska oblika porazdelitve $P_N(\mathbf{r}_{ee})$ namreč ne izhaja iz lastnosti našega konkretnega modela naključnega gibanja, temveč je posledica statističnega centralnega limitnega izreka in ena od temeljnih lastnosti (dovolj dolgih) polimerov.

2.2 Entropična elastičnost

Iz porazdelitve (3) lahko z logaritmiranjem izračunamo entropijo verige $S = k_B \ln P_N(\mathbf{r}_{ee})$ pri fiksni prečni dimenziji r_{ee}

$$S(\mathbf{r}_{ee}) = S_0 - \frac{3k_B r_{ee}^2}{2Na^2}, \quad (4)$$

kjer je k_B Boltzmannova konstanta. Od tod je do ustrezne proste energije le korak:

$$F(\mathbf{r}_{ee}) = E - TS = F_0 + \frac{1}{2} \left(\frac{3k_B T}{Na^2} \right) r_{ee}^2. \quad (5)$$

Tako smo izpeljali zanimivo lastnost polimerne verige, ki v polimerni fiziki nosi ime *entropična elastičnost*. Ko polimerno verigo raztegnemo, tj. povečamo r_{ee} , njena entropija pade, prosta energija pa zraste: za razteg smo morali opraviti delo – veriga se globalno vede elastično, čeprav je lokalno sestavljena iz togih monomerov. Elastičnost polimerne verige je povezana z njeno entropijo. Pri neraztegnjenem polimeru je število možnih konformacij večje kot pri raztegnjenem, zato je entropija pri raztegnjenem polimeru manjša kot pri neraztegnjenem, medtem ko je prosta energija raztegnjenega polimera večja od proste energije neraztegnjenega polimera. Iz enačbe (5) lahko preberemo tudi efektivno „konstanto vzmeti“ polimerne verige $k = 3k_B T / Na^2$. Konstanta vzmeti s temperaturo narašča – pri višjih temperaturah moramo za enak raztezek polimer obremeniti z večjo silo. Če polimer ob konstantni obremenitvi grejemo, se začne krčiti. Ta pojav lahko enostavno opazujemo: ko segrevamo zavijalno folijo iz polietilena, se ta krči, podoben pojav krčenja ob segrevanju pa opazimo tudi pri gumah. Takšno vedenje je ravno nasprotno od tistega, ki ga opazimo pri kristalih, kjer je koeficient linearnega raztezka tipično pozitivno odvisen od temperature.

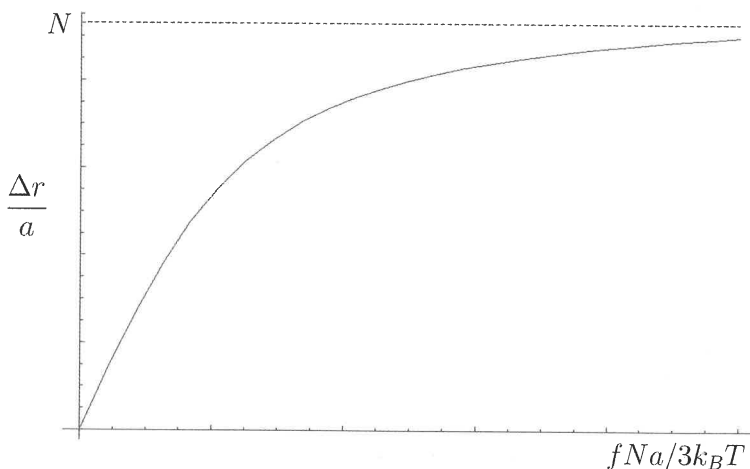
Poglejmo, kako se polimer obnaša, če za oba konca potegnemo s silama $\mathbf{f}$ in $-\mathbf{f}$. Če sili nista preveliki (za opazne raztezke polimerov so potrebne sile velikosti $\sim 0,1\text{--}10$ pN) in je raztezek Δr mnogo manjši od konturne dolžine polimera Na , lahko uporabimo kar Hookov zakon $f = k\Delta r$ in dobimo

$$\Delta r = f/k = f \frac{Na^2}{3k_B T}. \quad (6)$$

Ta rezultat velja blizu ravnovesja, daleč stran pa ne, saj je sila, ki jo potrebujemo, da polimer popolnoma raztegnemo, zelo velika. Zelo velika sila je namreč edini način, da ostane polimerna veriga tudi ob končnih fluktuacijah, ki se v takem sistemu pojavljajo, popolnoma iztegnjena, tj. $r_{ee} = Na$. Naša odvisnost $f = 3k_B T (\Delta r / Na^2)$ te divergence ne vsebuje. Odvisnost sile od raztega je za naš model možno izračunati analitično, mi navajamo le rezultat. Rešitev je implicitno podana zveza med obema količinama

$$\frac{\Delta r}{a} = \mathcal{L}(fNa/3k_B T), \quad (7)$$

kjer je $\mathcal{L}(x) = \coth x - 1/x$ Langevinova funkcija. Ta rešitev je veljavna tudi v limiti $\Delta r \rightarrow Na$ in sila v tem primeru divergira (slika 5). V praksi to pomeni, da polimer prej raztrgamo kot pa popolnoma raztegnemo.

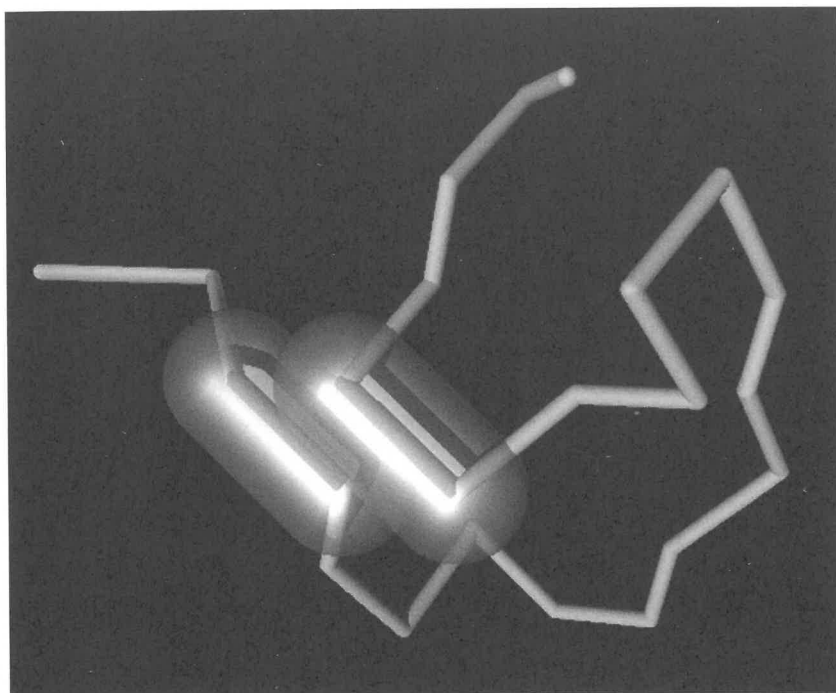


Slika 5. Sila, potrebna za popoln razteg polimera, ko je $r_{ee} = Na$, je neskončna. V nasprotnem primeru zaradi konformacijskih fluktuacij polimer ne bi bil popolnoma raztegnjen in bi veljalo $r_{ee} < Na$.

2.3 Izključitveni volumni: Floryjev model

Pri modelu naključnega gibanja se obnašamo, kot da je polimer t. i. fantomska veriga, katere segmenti se lahko neomejeno prekrivajo v prostoru. Realnejši modeli polimerov upoštevajo, da ima polimer končen volumen, kar omeji možnosti naključnega gibanja, saj se dva različna segmenta polimera v resnici ne moreta znajti na istem kraju ob istem času. V takih modelih, ki jih je prvi formuliral Flory v letu 1940, lahko prvič začnemo govoriti o interakcijah dolgega dosega med različnimi segmenti polimera, ki so si na verigi daleč, v prostoru pa blizu (slika 6).

V modelu naključnega gibanja takih interakcij ni. Najpreprostejši interakcijski potencial je kar *sterični* potencial, s katerim simuliramo zgolj trdo sredico interakcije: tak potencial je enak nič povsod, kjer se različni segmenti polimera ne dotikajo, ob dotiku pa zraste prek vseh meja. Takemu modelu pravimo model samoizogibajočega gibanja (ang. *self-avoiding flight*). Zaradi omenjenih interakcij pakiranje polimera ne more biti več tako tesno



Slika 6. Izboljšava modela naključnega gibanja je Floryjev model: med konturno oddaljenima in prostorsko bližnjima segmentoma polimera (na sredini slike sta prikazana vzporedno) prihaja do odbojnih interakcij, ker segmenta ne moreta prodreti drug skozi drugega. Okrog vsakega segmenta obstaja neko prostorsko območje, ki mu pravimo *izključitveni volumen*, od koder ta segment učinkovito izrinja vse preostale segmente – na sliki sta kot prosojni kapsuli skicirana (in zgolj skicirana!) izključitvena volumna okrog omenjenih „bližnjih“ segmentov.

kot v primeru naključnega gibanja. Okrog vsakega segmenta polimera lahko namreč definiramo t. i. *izključitveni volumen*, v katerega ne more prodreti noben drug segment polimera. Volumen, ki ga zavzame polimer, ki se ogiba samega sebe, bo torej v primerjavi z volumnom fantomske verige narastel. Temu pravimo *efekt izključitvenih volumnov*. Flory in Kuhn sta pokazala, da tovrstne interakcije dolgega dosega vplivajo na statistične parametre verige. Tipična dimenzija polimera npr. ne narašča več s korenom iz števila monomerov N , temveč z višjo potenco

$$\langle \mathbf{r}_{ee}^2 \rangle \propto N^{2\nu(d)}. \quad (8)$$

Kritični eksponent $\nu(d)$ je odvisen od dimenzije problema d . V prostorskem

($d = 3$) primeru ν pri naključnem gibanju znaša $1/2$, ob upoštevanju izključitvenih volumnov pa je $\nu(3) \approx 3/5$:

$$\text{3-d fantomska veriga: } r_{ee} \sim N^{1/2},$$

$$\text{3-d ogibajoča se veriga: } r_{ee} \sim N^{3/5}.$$

Efekt izključitvenih volumnov je pri dolgih verigah nezanemarljiv, saj spremeni kritični eksponent in ne le amplitude. Ko želijo v model poleg trdega steričnega odboja kratkega dosega vpeljati še šibke van der Waalsove privlačne sile dolgega dosega, v prvem približku običajno uporabijo Lennard-Jonesov potencial oblike $V(r) = \epsilon[(\sigma/r)^{12} - (\sigma/r)^6]$, kjer sta ϵ in σ modelska parametra. Več o obravnavi izključitvenih volumnov in dodatnih modifikacij modelov bralec najde npr. v [3] in [2].

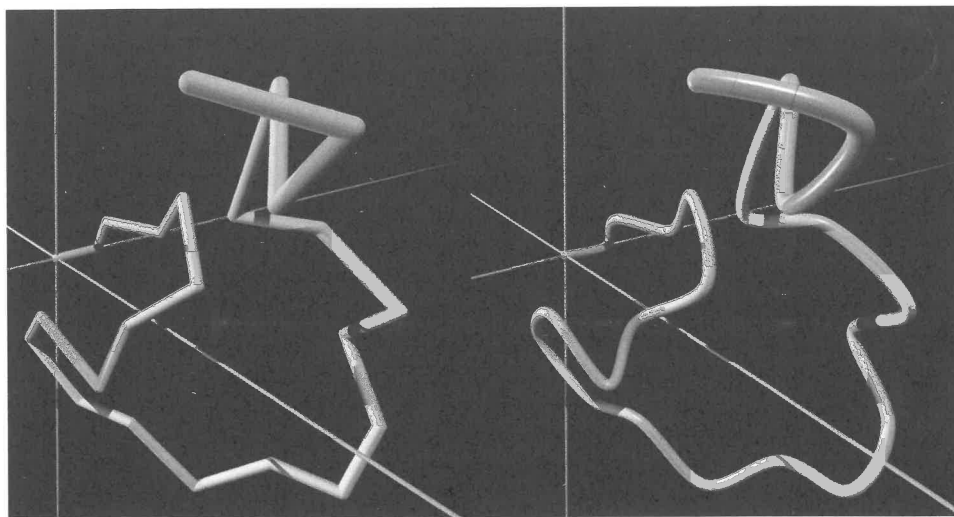
2.4 Model Kratky-Porod in persistenčna dolžina

Realni polimeri v resnici niso popolnoma gibki in upogljivi v zglobeh med monomeri verige, ampak lahko vsaki deformaciji pripišemo od nič različno elastično energijo. V takih primerih molekularno verigo bolje opišemo z modelom, ki sta ga leta 1949 predstavila Kratky in Porod. Molekulo v modelu Kratky-Porod opisujemo kot povsod zvezno in zvezno odvedljivo nit (v uporabi je tudi oznaka WLC model, ang. *Worm-Like Chain*). Pri modelu naključnega gibanja je bil polimer upogljiv le v diskretni množici točk, pri modelu Kratky-Porod je upogljiv povsod, z upogibom pa je povezana določena elastična energija.

Polimer dolžine l parametriziramo s parametrom $s \in [0, l]$, ki teče vzdolž konture polimera, polje tangentnih vektorjev na verigi označimo s $\mathbf{t}(s)$, do poljubne točke na verigi pa vodi krajevni vektor $\mathbf{r}(s)$. V tej sliki je $\mathbf{t} = \partial \mathbf{r} / \partial s$ in

$$\mathbf{r}_{ee} = \int_0^l \mathbf{r}(s) ds.$$

Iz teorije elastičnih deformacij tankih palic sledi, da je za upogib ravne palice potrebna energija, ki je obratno sorazmerna s kvadratom krivinskega radija R upognjene palice $E \propto 1/R^2$. Večje lokalne deformacije zahtevajo več vloženega dela kot manjše. Energijsko je torej ugodneje, da se molekula upogiba gladko in povsod, kot pa ostro na diskretnih mestih. Zatorej pričakujemo, da bodo tangentni vektorji v dveh bližnjih točkah polimera kazali v približno enako smer in da bodo korelacijo izgubljali šele zlagoma, na večjih



Slika 7. Različna modela polimera. Na levi je prikazan model naključnega gibanja, kjer je polimer popolnoma gibek zgolj v diskretnih točkah prostora, na desni pa model Kratky-Porod, kjer je polimer upogiben povsod – a vsak upogib zahteva vloženo delo.

razdaljah. Pokazati se da (gl. npr. [2]), da korelacija med orientacijami segmentov polimera pada eksponentno s polimerno konturno razdaljo, in sicer s tipičnim parametrom l_p , ki mu pravimo *persistenčna dolžina* polimera

$$\langle \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(0) \rangle = e^{-s/l_p}. \quad (9)$$

Persistenčna dolžina torej predstavlja tipično dolžino vzdolž polimera, na kateri polimerni tangentni vektorji popolnoma dekorelirajo. V prvem približku se o tem prepričamo, če eksponent v enačbi (9) razvijemo v Taylorjevo vrsto do členov prvega reda. V tem primeru korelacijska funkcija pade na nič pri $s = l_p$. Možna je tudi interpretacija, da se lahko polimer močno zvije šele na razdaljah, ki so precej večje od l_p , medtem ko je za razdalje pod persistenčno dolžino razmeroma raven. Iz persistenčne dolžine lahko ugotovimo, kako upogljiv je polimer. Zelo mehki in upogljivi polimeri imajo majhne persistenčne dolžine, kar pomeni, da tangentni vektorji na verigi zelo hitro dekorelirajo. Pri dolgih linearnih polimerih alkanih persistenčna dolžina znaša ~ 1 nm. Pri manj upogljivih verigah je dekorelacija počasnejša, persistenčna dolžina pa večja. Primer za to je npr. molekula DNK, katere persistenčna dolžina znaša ~ 53 nm, čemur ustreza okrog 150 baznih parov v dvojni vijačnici. Pri modelih naključnega gibanja persistenčne dolžine ni moč vpeljati, ker je po definiciji enaka nič, saj so orientacije monomerov

popolnoma nekorelirane.

3. Fraktali, Gaussove verige in skaliranje

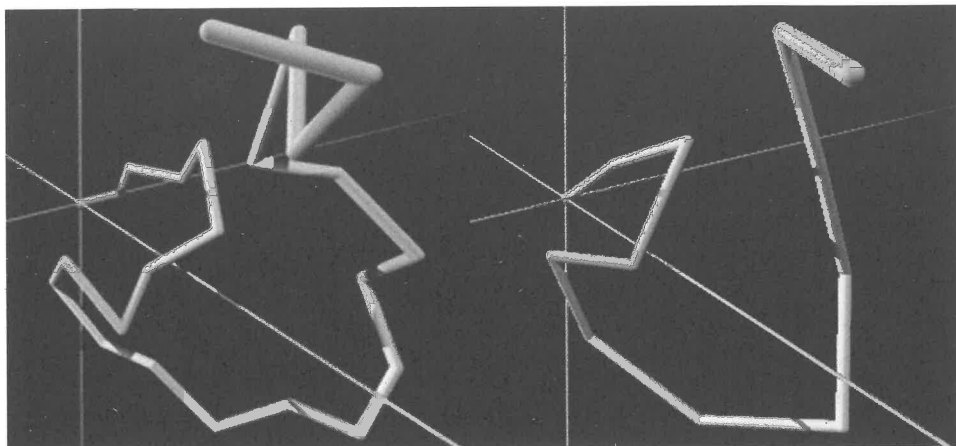
Polimer se na razdaljah mnogo pod persistenčno dolžino vede kot toga palica, na razdaljah nad persistenčno dolžino pa korelacijska funkcija $\langle \mathbf{t}(s) \cdot \mathbf{t}(0) \rangle$ eksponentno razpade. Na skalah nad persistenčno dolžino lahko zato polimer – vsaj kar se tiče njegovih globalnih lastnosti – opišemo v modelu naključnega gibanja, kjer v vsakem koraku skočimo za persistenčno dolžino daleč. Vsak korak tu igra vlogo nekakšnega „monomera“ dimenzije l_p . Lahko gremo še dlje: fiksiranje dolžine skoka na persistenčno dolžino l_p je v resnici nepotrebno. Dovolj je, če zahtevamo zgolj to, da so dolžine skokov normalno porazdeljene okrog persistenčne dolžine l_p . Gibko verigo modela Kratky-Porod lahko torej na velikih skalah opišemo kot naključno gibanje, za dolžine korakov gibanja pa velja Gaussova porazdelitev

$$\psi(\mathbf{r}) = (3/2\pi l_p^2)^{3/2} \exp[-3\mathbf{r}^2/2l_p^2], \quad (10)$$

tako da je $\langle \mathbf{r}^2 \rangle = l_p^2$. Taki verigi pravimo *Gaussova veriga* in je zaradi centralnega limitnega izreka v termodinamski limiti $N \rightarrow \infty$ ekvivalentna verigi, ki jo generiramo z modelom naključnega gibanja s *fiksno* dolžino koraka, gl. npr. [1, str. 308]. Pomembno je, da se statistične lastnosti naključnih in Gaussovih verig pri spremembi števila monomerov spremenijo le za multiplikativno konstanto, funkcijske odvisnosti pa ostanejo enake, gl. npr. [2, str. 32].

Te lastnosti molekularnih verig so torej enake na vseh merskih lestvicah, zato pravimo, da se molekularna veriga vede kot fraktalna struktura. To si lahko tudi grafično predočimo: trajektorija naključnega gibanja ima značilni kaotični potek in je videti enako „cikcakasto“ na vseh dolžinskih skalah. Vse lastnosti verige seveda niso invariantne na mersko lestvico – ena od takih je dolžina polimera, ki ni definirana, dokler ne definiramo dolžine koraka naključne hoje, persistenčne dolžine ipd. Medtem ko lahko Gaussovo verigo raztegnemo do poljubne dolžine, je dolžina realnega polimera, četudi pogosto makroskopska, navzgor omejena. Dokler nas torej verige zanimajo na statistični ravni, lahko namesto z začetno verigo iz N „monomerov“ dolžine l_p (no, v resnici velja le $\langle \mathbf{r}^2 \rangle = l_p^2$) delamo tudi z novo verigo iz N/λ daljših „monomerov“ dolžine $l_p\sqrt{\lambda}$. Taki transformaciji:

$$N \rightarrow N/\lambda, \quad l_p \rightarrow l_p\sqrt{\lambda} \quad (11)$$



Slika 8. Skaliranje: na levi originalna veriga, na desni veriga, ki smo jo iz leve dobili tako, da smo iz dveh zaporednih monomerov definirali nov, daljši monomer, ki se začne v izhodišču prvega monomera in konča v koncu drugega monomera. Če je leva veriga sestavljena iz N monomerov, je desna iz $N/2$ monomerov – desna veriga je skalirana s faktorjem $\lambda = 2$. Statistične lastnosti Gaussovih verig ob skaliranju ohranijo isto funkcijsko odvisnost, spremenijo se le za multiplikativno konstanto. Verigo lahko na različnih dimenzijskih skalah opišemo na enak način, torej veriga kaže fraktalno vedenje.

pravimo transformacija *skaliranja* (ang. *scaling*, slika 8). In zakaj bi to sploh počeli? Zato, ker lahko v primeru, ko vemo, kako se določena fizikalna količina verige ob skaliranju spremeni, sklepamo o naravi odvisnosti te količine od parametrov skaliranja N in l_p . Za primer si oglejmo vedenje karakterističnih velikosti polimera $\langle \mathbf{r}_{ee}^2 \rangle^{1/2}$ (koren povprečne vrednosti kvadrata razdalje med koncema polimera), $\langle |\mathbf{r}_{ee}| \rangle$ (povprečna razdalja med koncema polimera) ter $\langle \max_{i,j} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \rangle$ (povprečna maksimalna razdalja med katerimakoli segmentoma polimera). Pokažimo, da so vse tri količine sorazmerne produktu $N^{1/2}l_p$. Kakorkoli jo že definiramo, mora imeti karakteristična velikost polimera enoto dolžine in mora biti oblike

$$\text{karakteristična velikost polimera} = f(N)l_p, \quad (12)$$

kjer je $f(N)$ neznana funkcija števila monomerov N . Velikost polimera mora biti invariantna na transformacijo skaliranja (11)

$$f(N)l_p = f(N/\lambda)l_p\sqrt{\lambda}, \quad (13)$$

kar pa velja le, ko je $f(N) = \alpha \cdot \sqrt{N}$, kjer je α konstanta. Torej se karakteristične velikosti polimera razlikujejo le za multiplikativno konstanto. Tu

predstavljeni razmisleki so zgodovinsko služili kot podlaga za obravnavo kritičnih pojavov s t. i. *renormalizacijsko grupo*, ki zaradi svoje kompleksnosti presega pričujočo obravnavo. Več o skaliranju in fraktalni strukturi polimerov bralec najde v [2, 3, 4, 5], renormalizacijska grupa pa je podrobneje predstavljena npr. v [1].

4. Sklep

Fizika molekularnih verig je dinamična in razvijajoča se veja znanosti kompleksnih sistemov. V zadnjih letih se močno večajo fizikalni apetiti po razumevanju bioloških sistemov in v svetovni literaturi opazamo vedno več prispevkov o fizikalnih obravnavah prevodnosti DNK, virusov, konformacijske dinamike proteinov, interakcijah med polimeri in površinami in podobno. Kot součinkujoče dejstvo so se pojavile interdisciplinarne povezave med različnimi vejami znanosti, ki najlepše predstavljajo kreativno margino, na kateri so možna nova odkritja. Znanosti o polimerih tako ni moč omejevati na fiziko, saj nujno posega tudi v kemijo, biologijo, medicino, materiale in tehnologijo ipd. V pričujočem članku, ki se giblje bolj ali manj v domeni fizike, so zbrani zapisi o najosnovnejših fizikalnih pristopih k tej problematiki. Obravnavo je omejena na statične lastnosti polimerov, dinamika polimernih sistemov bo morala počakati na drugo priložnost. Prav tako smo povsem izključili obravnavo nabitih polimerov, čeprav elektrostatske interakcije pomembno vplivajo na vedenje takih sistemov – konsistentne fizikalne obravnave molekule DNK si brez pripoznanja dejstva, da je DNK močno nabita veriga, obdana s protiioni, sploh ni moč misliti. V tekstu so prisotni tudi namigi, in res zgolj namigi, na nekatera od področij fizike, ki so trenutno najbolj aktualna pri obravnavi molekularnih verig in drugih kompleksnih sistemov. Nadaljnje branje, na katero nas napoti seznam literature, je morda zanimivo zato, ker se tu stikajo področja fizike, kjer danes največkrat prihaja do tistega, česar si raziskovalci pogosto najbolj želijo – do presenečenj, ki že obstoječi korpus znanja razširijo ter osvetlijo s popolnoma novih strani in celotno znanstveno skupnost prisilijo v ponovno ovrednotenje ustaljenih vzorcev razumevanja svojega predmeta.

LITERATURA

- [1] M. Plischke, in M. Bergersen *Equilibrium Statistical Physics*, 2. izd., World Scientific Publishing, London, 1994.
- [2] S. F. Edwards in M. Doi, *The Theory of Polymer Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1986.

- [3] P. G. de Gennes, *Scaling Concepts in Polymer Physics*, Cornell University Press, Ithaca, 1988.
- [4] T. Kawakatsu, *Statistical Physics of Polymers*, Springer, Berlin, 2001.
- [5] M. Daoud in C. E. Williams (ur.), *Soft Matter Physics*, Springer, Berlin, 1995.
- [6] T. Tanaka (ur.), *Experimental Methods in Polymer Science*, Academic Press, San Diego, 2000.
- [7] R. Cotteril, *Biophysics*, John Wiley & Sons, Chichester, 2002.
- [8] A. Rudin, *Polymer Science and Engineering*, 2. izd., Academic Press, San Diego, 1999.

VESTI

DNEVI FIZIKE IN VERIŽNI EKSPERIMENT 2008

Maja 2008 bodo v prostorih Tehniškega muzeja Slovenije že tretje leto potekali dnevi fizike, ki so namenjeni predstavitvi in popularizaciji fizike med mladimi. V sodelovanju z različnimi fakultetami in znanstvenimi inštituti bomo poskušali mladim na zanimiv in praktičen način približati to osnovno naravoslovno vedo. Obiskovalci si bodo lahko ogledali zanimive stare in nekatere nove eksperimente, ki jih bodo predstavili študentje fizike, in se udeležili predavanj in delavnic. Dnevi fizike bodo potekali od torka,

20. 5. 2008, do četrтка, 22. 5. 2008, med 9. in 16. uro, v soboto, 24. 5. 2008, od 9. do 17. ure in v nedeljo, 25. 5. 2008, od 10. do 18. ure. Osrednji dogodek bo tudi tokrat **verižni eksperiment**, ki bo potekal v soboto, 24. maja, v Tehniškem muzeju Slovenije v Bistri. Razpis za sodelovanje v verižnem eksperimentu je objavljen na spletnih straneh muzeja. Za popularizacijo aktivnosti je pripravljena demo veriga, ki je na voljo za prikaz po zainteresiranih šolah. Veriga je premična in jo lahko pripeljemo kamorkoli v Sloveniji. Prevoz in demonstracija sta za gostitelja popolnoma brezplačna. Prijave sprejemamo na info@tms.si. Več informacij o dnevih fizike, verižnem eksperimentu in demo verigi najdete na <http://www2.pfmb.uni-mb.si/tms/>.



Irena Drevenšek-Olenik

KAJ NAJ ŠTUDENTE NAUČIMO O FUNKCIJAH?

PETAR PAVEŠIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 97D30, 97D40

Uspešno učenje vedno sloni na pravilnem razumevanju osnovnih pojmov. V članku bomo razložili, kakšno razumevanje pojma funkcije po našem mnenju potrebujejo študenti, da lahko osvojijo matematične vsebine, ki jih običajno predavamo na univerzitetni stopnji.

WHAT SHOULD WE TEACH STUDENTS ABOUT FUNCTIONS?

Successful learning is always based on adequate understanding of fundamental concepts. We will try to explain what level of understanding of functions is in our opinion necessary in order to master thoroughly the mathematical knowledge, which is normally taught at the university level.

1. K pisanju tega sestavka me je spodbudil zanimiv članek Petra Šemrla *Kako približati učencu pojma funkcije in njenega grafa* (Obzornik za matematiko in fiziko **48** (2001), str. 51–55). V njem se avtor najprej retorično vpraša, kam pravzaprav gre ves tisti čas, ki ga porabimo za predavanja iz matematike. Le-ta namreč krepko presega čas, ki bi zadoščal, da na glas preberemo celoten učbenik. Odgovor je: porabimo ga za postopno in motivirano uvajanje zahtevnih novih pojmov, in to je tudi osnovni namen predavanj pri predmetu matematika. Šemrl je to postopno uvajanje ponazoril na enem najpomembnejših primerov – pojmu funkcije. Večina njegovega članka je posvečena uvajanju pojma funkcije na srednješolski stopnji. V tem članku nameravam predstaviti svoje mnenje, kako se lotiti naslednjega koraka, nadgradnje tega znanja na univerzi.

Govoril bom predvsem o študentih naravoslovnih in tehničnih univerzitetnih študijev. Njihove osnovne značilnosti – matematično predznanje, zanimanje in odnos do matematičnih predmetov, obseg in zahtevnost matematičnih vsebin v njihovih študijskih programih – so dovolj primerljive, da jih lahko obravnavamo skupaj. Marsikaj od povedanega pa bo gotovo veljalo tako za študente matematike kot tudi za študente raznih strokovnih študijev.

2. Premislimo najprej, kakšno predznanje o funkcijah pridobi tipični študent pred prihodom na univerzo. Pojem funkcije in njenega grafa je srečal večkrat, spoznal je osnovne elementarne funkcije, z nekaj pomoči zna naštet

njihove lastnosti in narisati pripadajoče grafe. Poleg tega je srečal pojem limite funkcije ter se naučil odvajati in integrirati preproste funkcije. Čeprav je spoznal tudi zahtevnejše metode, se risanja grafov pogosto loteva s tabeliranjem točk. Izjema so le racionalne funkcije, pri katerih praviloma obvlada risanje grafov s pomočjo ničel, polov in asimptot. Funkcijo si največkrat predstavlja bodisi kot formulo ali kot tabelo vrednosti.

Program matematike na univerzi je v primerjavi s tem predznanjem bistveno obsežnejši. Podrobnosti variirajo od programa do programa, vendar se običajno obdelajo naslednje vsebine: odvod in integral funkcij ene spremenljivke, osnove linearne algebre, odvod funkcij več spremenljivk, ekstremi in vezani ekstremi, regresija, večkratni integrali, Taylorjeva formula, navedne diferencialne enačbe, osnove verjetnosti, slučajne spremenljivke in porazdelitve, osnovne statistične metode. Pri nekaterih študijskih programih se obravnavajo tudi Fourierove vrste, Fourierova in Laplaceova transformacija ter nekateri tipi parcialnih diferencialnih enačb.

Vidimo, da od študentov naravoslovja in tehnike pričakujemo, da v letu ali dveh znatno povečajo obseg matematičnih znanj in pripadajočih računskih spretnosti. Ni presenetljivo, da imajo mnogi pri tem težave, ki so včasih celo nepremagljive. Vzrokov je seveda cela vrsta, v tem sestavku se bom omejil na enega, za katerega domnevam, da povzroča pomemben del teh težav. Menim namreč, da višanju zahtevnosti snovi ne sledi ustrezeni napredek pri razumevanju pojma funkcije in da nastali razkorak prispeva ne le k težavam pri učenju, temveč tudi k bistveno manjši uporabnosti pridobljenega znanja. Praktično vse matematične vsebine, ki jih obravnavamo na univerzitetni ravni, slonijo na obravnavanju funkcije kot enovitega objekta, na katerem izvajamo operacije, kot so odvajanje, integriranje, razvijanje v vrsto in podobno. Poleg tega rišemo grafe funkcij, rešujemo diferencialne in druge funkcijske enačbe ter še vrsto drugih reči, pri katerih spet delamo s funkcijami na način, ki ga študenti niso vajeni iz srednje šole. To morda ni huda ovira na začetku študija, narobe pa je, če zadostnega razumevanja pri študentih ne dosežemo niti potem, ko nehalo poslušati matematične predmete. Na ta problem sem postal pozoren pri izpitih, ko sem opazil, da mnogi študenti, navkljub obsežnemu in zahtevnemu tečaju, niso bistveno napredovali pri razumevanju pojma funkcije.

Kaj imam v mislih? Predstavljajmo si, kakšen odgovor bomo dobili, če študenta vprašamo, zakaj je bolj pravilno reči „funkcija f “ kot „funkcija $f(x)$ “? Ali kaj pomeni formula $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$? Kakšna je pravzaprav zveza med definicijo odvoda ali integrala in računskim postopkom? Zakaj je graf funkcije dveh spremenljivk ploskev, kako integral s premičnimi mejami definira funkcijo, kakšna je zveza med porazdelitveno funkcijo in nekim naključnim dogajanjem in tako naprej. Zanimivo, da sem na tovrstna vprašanja dobival napačne ali vsaj neprepričljive odgovore tudi od študentov, ki jim definicije in računska praksa niso delale težav. No, tudi pri računskih nalogah se je zapletlo, kakor hitro naloga ni bila standardna in je

bilo za reševanje treba pravilno razumeti, kaj je funkcija. Tako se kot nepričakovano težke izkažejo naloge, pri katerih je treba izračunati kompozitum dveh odsekoma podanih funkcij ali funkcij, podanih z limito ali integralom.

Edina razlaga, ki jo imam, je, da mnogi študenti tudi ob koncu študija funkcijo še vedno enačijo s skupkom funkcijskih vrednosti ali pa s predpisom v obliki eksplicitne formule. Od tod lahko izvirajo težave, če je funkcija določena s predpisom, v katerem nastopata dve ali več formul, ali če sploh nimamo eksplicitnega predpisa. Jasno je, da je za uporabo preveč omejevalno, če se ukvarjamo le s funkcijami, ki so podane z eno eksplicitno formulo. V tem primeru bi tudi obravnava splošnih lastnosti, kot so zveznost, odvedljivost ali integrabilnosti, izgubila precej smisla. Morda je nekoliko manj jasno, kaj je narobe, če rečemo, da kdo razume funkcijo kot skupek posameznih funkcijskih vrednosti. Saj to je vendar ravno definicija funkcije! Že res, vendar se način, kako matematiki funkcijo abstraktno definiramo, razlikuje od načina, kako jo potem razumemo in z njo delamo.

Ali torej lahko trdimo, da matematično znanje naših študentov sloni na trhljih temeljih? Odgovor ni preprost. Povedal sem že, da študenti lahko pridobijo precejšnjo računsko spretnost kljub le bazičnemu razumevanju pojma funkcije. Naučili se bodo risati grafe funkcij, tudi če ne bodo prav dobro razumeli, zakaj določanje ključnih točk funkcije pripelje do boljšega rezultata kot povezovanje točk, izračunanih pri naključno izbranih vrednostih argumenta. Znali bodo odvajati in integrirati elementarne funkcije, razvijali bodo funkcije v vrste, izravnavali numerične podatke, reševali diferencialne enačbe, preskušali statistične domneve in vrsto drugih rutinskih in manj rutinskih nalog. Občasno pa se bo nepričakovano zataknilo pri vmesnem koraku kakšne daljše naloge: morda se ne bo dalo določiti kompozituma, področje definicije bo napačno, ali se ne bo izšla kakšna druga elementarna operacija. Zavedati se moramo, da današnje pojmovanje funkcij ni nastalo v hipu, ampak se je gradilo skozi stoletja. Odsekoma definiranih funkcij dolgo niso priznavali za eno funkcijo, nejasna je bila vloga definicijskega območja in tako naprej. In vendarle to ni ustavilo razvoja matematike in njenih aplikacij. Po drugi strani pa način, kako danes poučujemo, sloni na definiciji funkcije kot predpisa, ki točkam definicijskega območja enolično prireja vrednosti iz kodomene. Istočasno pa matematiki operativno pojmujejo in obravnavamo funkcijo kot celoto, kot element nekega abstraktnega prostora. V našem jeziku je torej pomen besede „funkcija“ pogosto različen od pomena, ki ga isti besedi pripisujejo poslušalci. Ni presenetljivo, da nas včasih, kljub obojestranskemu trudu, preprosto ne razumejo.

Sčasoma sem si utrdil prepričanje, da bi moralo dojemanje pojma funkcije kot celote, kot enovitega objekta, na katerem gradimo celotni matematični aparat, biti eden osnovnih „meta-ciljev“ poučevanja na univerzitetni ravni. To je namreč bistvena sestavina jezika sodobne matematike, je osnova, na kateri temelji zanesljiva in ustvarjalna uporaba matematike v tehniki in naravoslovju. Kot vsako temeljno znanje bo ostalo tudi potem, ko bodo

pozabljene formule in računski postopki. Nenazadnje, obravnavanje zapletenih pojmov in procesov kot enovitih objektov ter njihovo proučevanje kot sestavni del množice podobnih ali sorodnih objektov je eden najmočnejših raziskovalnih prijemov, katerega uporabnost sega daleč čez okvir matematike. Skratka, mnenja sem, da matematične izobrazbe na univerzitetni ravni, pri kateri študentom ne uspemo zgraditi ustreznega pojmovanja funkcij, ne moremo šteti za povsem uspešno.

Kako doseči ta cilj? Predlagam, da ga sistematično vgradimo v pouk, tako eksplicitno kot implicitno. Eksplicitno pomeni, da vsakič, ko gradimo našo razlago na pojmovanju funkcije kot celote, to poudarimo in poslušalcem razložimo, zakaj je ta korak nujen in morda celo ključen. Implicitno pa oblikujemo pojmovanje funkcij skozi načrtno izbrane naloge in vaje. V naslednjem razdelku sem podal nekakšen okvirni seznam vsebin, pri katerih pride do izraza obravnavanje funkcije kot celote. V zadnjem razdelku pa sem navedel nekaj primerov nalog in vaj, katerih osnovni namen je doseganje primernega razumevanja pojma funkcije.

3. Naštel bom dele študijskih programov matematike, pri katerih je naprednejše pojmovanje funkcije bistveno za razumevanje snovi. Omenil bom tudi osnovne težave, ki jih opažam pri študentih. Deli razlage se bodo morda komu zdeli samoumevni, vendar moramo upoštevati, da je profesionalnemu matematiku pojem funkcije tako rekoč zlezal pod kožo, zato pogosto izgublja občutek, da gre pri tem za pomemben miselni preskok, ki ga je pri študentih šele treba doseči.

- Graf je upodobitev funkcije kot celote. Da bo študent zares razumel, kaj počne, ko riše graf funkcije, ga moramo prepričati, da so lastnosti, ki jih upodablamo (monotonost, ukrivljenost, trend na robu definicijskega območja), nekakšne osnovne „obrazne poteze“ funkcije. Brez tega bo na določanje grafa še naprej gledal kot na povezovanje dokaj poljubno izbranih točk.
- Študenti imajo včasih težave, ko morajo pojasniti zvezo med nepretrganostjo grafa in definicijo zveznosti. To ne preseneča, saj morajo povezati lokalno definicijo zveznosti z globalno podobo grafa. Nasploh je zveznost prva pomembna globalna lastnosti funkcije, ki jo obravnavamo, zato je vredno natančno pojasniti, kako je zveznost funkcije v neki točki odvisna od funkcijskih vrednosti v bližnjih točkah.
- Snov, ki se običajno predava na začetku univerzitetnih tečajev, je v precejšnji meri le poglobitev tistega, kar so študenti zvedeli že v gimnaziji. Še posebej na področju računske prakse ni velikih razlik in nemalokrat od študentov slišimo očitke, da jih ne naučimo nič novega. Zato je dobro, če študentom večkrat pojasnimo smisel obravnavanja podobne snovi, a na višji zahtevnostni stopnji. Na primer, pri razlaganju odvodov lahko poudarimo, da je ključni korak pri izpeljavi računskih tehnik prav prehod iz

opredelitve odvoda v posameznih točkah (definiranih s pomočjo limit) na funkcijo odvod. Šele na podlagi tako definirane odvoda dobimo pravila za odvajanje, ki pa ne zahtevajo več računanja nobenih limit.

- Podobno je z integrali. Integral običajno definiramo kot ploščino, ali strožje, kot limito integralskih vsot. Geometrijski in fizikalni pomen te operacije je jasen, na podlagi gole definicije pa sploh ni vidna nobena povezava z odvodom. Šele ko iz vrednosti integralov pri različnih integracijskih intervalih ustvarimo novo funkcijo, lahko dokažemo osnovni izrek analize o zvezi med odvodom in integralom. Definicija funkcije s pomočjo integrala, ki mu spreminjamo meje, je, vsaj po mojih izkušnjah, ena tistih, ki jih študenti najtežje dojemajo. Nimam prav dobre razlage, zakaj je tako. Kaže, da gre za pomemben miselni preskok, za katerega si je pri predavanjih vredno vzeti dovolj časa.
- Določanje vezanih ekstremov je značilen primer naloge, ki jo študenti rutinsko rešujejo, kadar je dovolj eksplicitno formulirana, medtem ko pri problemsko zastavljeni nalogi prepogosto spregledajo, da sploh gre za primer vezanega ekstrema. Doseči moramo, da študenti razumejo, kaj se zgodi, ko funkcijo zožimo na manjše definicijsko območje, in kaj točno nam o funkciji pove odvod. Pri vezanih ekstremih nepravilno razumevanje tega dvojega pelje v napake.
- Razvoj funkcije v vrsto (Taylorjevo, Fourierovo) je naslednji primer operacije, definirane na funkciji kot celoti. Pri Fourierovih vrstah ostane razvoj enak, tudi če osnovno funkcijo spremenimo v nekaterih točkah. Po mojih izkušnjah je to dejstvo za študente zelo presenetljivo. Pri funkcijskih vrstah se pojavi tudi pojem enakomerne konvergence, kjer je spet treba razumeti funkcijo kot celoto.
- Numerične metode prav tako pogosto slonijo na obravnavanju funkcije kot celote. Na primer, pri numeričnem integriranju obravnavamo tabelo funkcijskih vrednosti kot „senco“ neznane funkcije, ki jo skušamo dovolj natančno uganiti in jo nato integrirati. Škoda je, če ta korak ostane zamegljen, kot je to primer pri standardnih izpeljavah trapezne ali Simpsonove formule. Podobno velja tudi za numerično odvajanje in za metode za izravnavanje numeričnih podatkov (npr. regresijo).
- Področje, kjer moramo že od začetka funkcijo obravnavati kot celoto, so funkcijske enačbe, predvsem v zvezi z izrekoma o inverzni in implicitni funkciji ter z diferencialnimi enačbami. Tudi tu se pokaže razlika med razumevanjem in računsko spretnostjo. Če lahko iz enačbe $f(x, y) = 0$ spremenljivko y izrazimo s pomočjo x , dobimo formulo, s katero lahko naprej računamo. Bistveno težje je, če se spremenljivke y ne da izraziti eksplicitno. Tedaj kakršnakoli nadaljnja obravnava (odvod, razvoj v vrsto, ...) zahteva razumevanje funkcije kot predpisa in je zato za večino študentov trd oreh.

- Diferencialne enačbe so nujno znanje za vse naravoslovce in inženirje in zato še pomembnejši primer. Ključnega pomena je razumevanje, da je rešitev diferencialne enačbe funkcija kot celota. Pogosto kot hitri test, ali je študent to dojel, vprašam, ali je funkcija $y = \sin x$ rešitev enačbe $y'' - y = 0$ (oz. kak drug podoben primer). Pogosto dobim odgovor, „Da, za $x = 0$ “ (ali za $x = k\pi$, ker je $(\sin x)'' - \sin x = -2\sin x$ enako 0 za $x = k\pi$). Čeprav se morda sliši strogo, menim, da je tak odgovor zadosten razlog za ponavljanje izpita.
- Tudi pri verjetnosti pride do izraza dojemanje funkcije kot celote. Študentom največ težav povzroča prehod z obravnavanja verjetnosti posameznih dogodkov k porazdelitvam. Za lažje razumevanje je koristno porazdelitve vpeljati kot še en primer združitve posameznih vrednosti (tj. posameznih verjetnosti) v funkcijo (porazdelitev oz. njeno gostoto). Podobno študenti lažje razumejo zakone velikih števil kot centralni limitni izrek: prvi govorijo o limiti funkcijskih vrednosti, drugi pa o limiti porazdelitvenih funkcij.
- Ne pozabimo na koncu, da tudi marsikatera uporaba funkcij temelji na razumevanju funkcije kot celote. Geometrični objekt (krivuljo, ploskev, ...) pogosto kar enačimo s funkcijo, geometrične operacije pa prevedemo na operacije na pripadajoči funkciji kot celoti. V naravoslovju fizikalnim, kemijskim in drugim zakonom ustrezajo funkcije, razumevanje zakona pa je razumevanje funkcije kot celote, ne kot skupka funkcijskih vrednosti.

Z naštevanjem bi lahko nadaljeval, a verjamem, da je zdaj že jasno, zakaj menim, da je treba študente čim prej naučiti dojemanja funkcije kot celote in ustreznega operiranja s funkcijami in funkcijskimi operacijami.

4. Cilj, ki ga zasledujemo, je precej zmuzljive narave: vsebine se ne da neposredno predavati, hkrati pa je težko oceniti, v kolikšni meri je dosežen. V prejšnjem razdelku sem navedel, kdaj bi bilo koristno med predavanji poudariti dojemanje funkcije kot celote, kdaj bi morali študente eksplicitno opozoriti, da gre za pomemben korak v razmišljanju, in jim pustiti dovolj časa, da njegovo vsebino vsaj do neke mere dojamejo. Jasno pa je, da sama razlaga ex cathedra ni dovolj. Potrebne so tudi praktične vaje, ki naj študentom pomagajo pri tem miselnem preskoku. Zato predlagam, da občasno, poleg običajnega nabora zgledov in nalog, ponudimo študentom katero izmed naslednjih vaj.

- Iz danega grafa prebrati lastnosti funkcije in oceniti, kateremu razredu verjetno pripada z grafom podana funkcija.
- Narisati graf, ki predstavlja neko dogajanje, ali iz nabora podobnih grafov izbrati tistega, ki predstavlja dano dogajanje. Naloge naj ne zahtevajo računanja, ampak le kvalitativni premislek, za katerega morebitne

privzetke študent opredeli po lastni oceni (npr. kako narašča gladina tekočine, ki jo točimo v posodo določene oblike, kako narašča temperatura segrevane posode ali kako se spreminja hitrost dirkalnika na stezi dane oblike).

- Narisati graf funkcije po nareku, komu drugemu narekovati obliko grafa. Smisel vaje je, da študenti ugotovijo, katere globalne lastnosti morajo upoštevati, da dosežejo zadovoljiv rezultat in da si pri tem lahko učinkovito pomagajo, če obliko posameznih odsekov grafa primerjajo z grafi standardnih osnovnih funkcij.
- Za funkcijo, podano z grafom, narisati graf odvoda in primitivne funkcije.
- Komponirati funkcije, ki niso podane z eksplicitno formulo (npr. funkcije, podane odsekoma, z limito, kot integral s parametrom, ...).
- Obravnavati implicitno podane funkcije: poiskati ničle, računati vrednosti kompozitumov v posameznih točkah, odvajati, oceniti vrednosti s pomočjo diferencialov, razviti v Taylorjevo vrsto, numerično integrirati. Pomembno je navaditi študente, da so implicitno podane funkcije enakovredne tistim, ki so podane eksplicitno, ker to ni samoumevno. To težavo pogosto opažam pri diferencialnih enačbah, ko recept pripelje do rešitve v implicitni obliki in pogosto ni jasno, ali je to že konec reševanja. Povrhu so implicitne funkcije zelo primerne, za ponazoritev moči računskih metod saj (drugače od eksplicitnih funkcij) lahko pogosto izračunamo reči, ki jih običajni računalniški paketi ne zmorejo.
- Naloge o ekstremnih vrednostih, ki so sicer direktno rešljive in študentom znane še iz gimnazije (npr. ekstremi ploščin, volumnov in podobno), rešiti s pomočjo Lagrangeevega multiplikatorja. Ugotovil sem, da je to prav presenetljivo učinkovit način, da študenti razumejo, kaj so vezani ekstremi, in se jih naučijo prepoznavati.
- Skicirati rešitev diferencialne enačbe na podlagi polja smeri, uganiti kateremu razredu funkcij pripada rešitev (ob tem je skoraj nujno narisati polje smeri s pomočjo računalnika).

Čeprav nekatere od naštetih nalog vadijo pomembne spretnosti, jih v praksi redko zastavljamo. Včasih se jim izognemo, ker so računsko prezahtevne, drugič pa morda zaradi nelagodja, da je naloga le približno formulirana ali da ni dobro definirano, kaj je prava rešitev. Omenjene ovire niso nepremagljive: pri računanju si v največji možni meri pomagajmo z računalnikom in upoštevajmo, da bodo naši študenti svoje matematično znanje pogosto uporabljali za reševanje le približno definiranih problemov z več možnimi rešitvami. Predvsem pa ne pozabimo, da primarni namen tovrstnih nalog ni v tem, da se jih študenti naučijo rutinsko reševati, ampak da jim pomagajo na poti k globljemu razumevanju pojma funkcije.

NOVE KNJIGE

Michael Hanlon: ZNANOST V ŠTOPARSKEM VODNIKU PO GALAKSIJI, prevedel Alojz Kodre, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 2006, 207 strani.

Michael Hanlon je bil urednik za znanost pri različnih časopisih, nazadnje pri Daily Mailu; pogosto je nastopal v debatah o znanosti na BBC. Objavil je poljudno-znanstveni knjigi *The Worlds of Galileo* in *The Real Mars*.

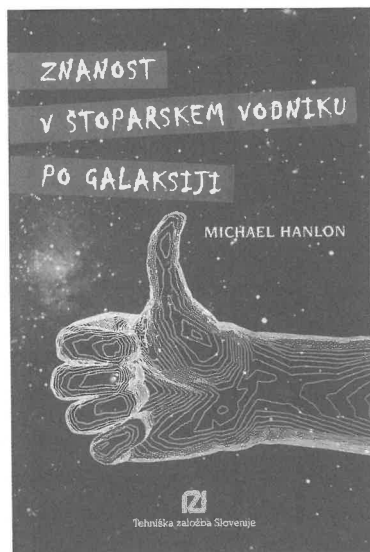
V novi knjigi je Hanlon zbral vrsto znanstvenih vprašanj, s katerimi se je poigral Douglas Adams v *Štoparskem vodniku*: tuje življenje v Vesolju, obstoj Boga, računalniki in roboti, začetek in konec Vesolja, časovno potovanje, teleportacija, etika hrane itd., in jih osvetlil z znanstvenega stališča. Vsako poglavje se začne z daljšim citatom iz *Štoparskega vodnika*, potem pa zremo za resne razmisleke, ki so povezani s tem. Avtor pri razlagah ne potrebuje enačb, rad pa se poigra s številkami, da da bralcu občutek za red velikosti.

Hanlonov slog je podobno sproščen kot Adamsov, nikoli suh ali pust, gosto začinjen z anekdotičnim gradivom. Tudi sicer je namigov na *Štoparski vodnik* in druge znane znanstveno-fantastične knjige ali televizijske nanizanke vse polno. Gotovo je navezava knjige na *Štoparski vodnik* predvsem tržna poteza, čeravno dobijo z njo poglavja izredno prijazne iztočnice. Avtor je v svoji poljudno-znanstveni publicistični dejavnosti in v stikih z vodilnimi raziskovalci verjetno zbral dovolj gradiva za knjigo, s to navezavo pa je računal na večjo odmevnost in prodajno uspešnost.

Hanlon je v svojem pisanju izredno široko razgledan, aktualen in predvsem do kraja neoporečen. Občudoval sem njegovo sposobnost, da najtežje pojme moderne kozmologije predstavi s pomembnimi dosežki ključnih avtorjev, da to pove po domače, vendar nikoli ne prikroji zgodbe na račun znanstvene točnosti. Ne spomnim se poljudno-znanstvene knjige, ki bi jo bral s tolikšno lahkoto, celo napetostjo, pa da se mi niti enkrat ne bi zataknilo zaradi avtorjeve netočne ali nekorektne izjave.

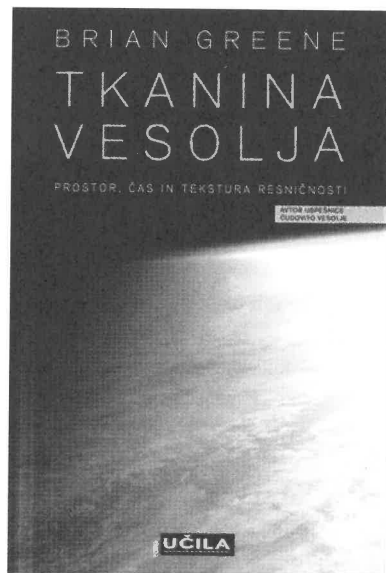
Knjiga ima tudi del znanstvenega aparata, namreč stvarno kazalo in, namesto bibliografije, Priporočena branja. To je seznam poglobitvenih knjig, iz katerih je avtor črpal, s kratkimi oznakami, kaj naj bralec od njih pričakuje.

Alojz Kodre



Brian Greene: TKANINA VESOLJA: PROSTOR, ČAS IN TEKSTURA RESNIČNOSTI, prevedla Urška Pajer, Učila International, Tržič 2005, 576 strani.

Triinštiridesetletni Brian Greene, profesor na univerzi Columbia v New Yorku, je strokovnjak za teorijo superstrun in uspešen popularizator fizike. Leta 1999 je izdal knjigo *Čudovito vesolje: Superstrune, skrite dimenzije in iskanje končne teorije vsega*. Knjiga je postala uspešnica in po njej so naredili odmevno televizijsko miniserijo. Založba Učila je leta 2003 objavila prevod knjige. Prevod druge Greenove knjige, o katerem poročamo, je pri Učilih izšel v istem letu kot original. Tudi ta knjiga je požela veliko hvale. Po piščevem zagotovu je manj zahtevna od prejšnje. Medtem ko se je prva vrtela predvsem okoli superstrun, je druga zasnovana precej širše in zajame osnovna vprašanja današnje fizike in astrofizike.



V knjigi je šestnajst poglavij razvrščenih na pet delov. O vsebini se je najbolje poučiti s pregledom delov. Prvi del *Arena resničnosti* obravnava prostor in čas in njuno klasično, relativistično, kvantno in kozmološko pojmovanje ter možnosti za poenotenje. Začetka vesolja ne moremo zajeti s teorijo, ker je kvantna teorija gravitacije še v povojih. V Einsteinovi splošni teoriji relativnosti gravitacijo, ki je ni mogoče razložiti od pospeševanja, opišemo z ukrivljenostjo štirirazsežnega prostora. Na drugi strani sta za kvantno mehaniko značilni verjetnost in Heisenbergova neenačba in – od namišljenega poskusa Einsteina, Podolskega in Rosna – prepletena stanja. Drugi del *Čas in izkustvo* razpravlja o teku časa ter o entropiji in njeni vlogi v zvezi z gravitacijo. Sledi še pogled na čas v kvantni mehaniki. Tretji del *Prostor-čas in kozmologija* se loti simetrije in njene vloge v raziskovanju vesolja. Dotakne se Higgsovega polja, ki delcem da maso in za katerega se zdi, da ima podobno vlogo kot nekdanj eter. Vpelje kozmološko konstanto in opiše inflacijo, to je hitro napihovanje vesolja, ter jo poveže s kvantno mehaniko. Četrty del *Izvor in poenotenje* zavije proti teoriji strun in opiše, kaj utegne ta teorija prinesiti kozmologiji. Obravnava domnevo, da je vesolje mogoče opisati z brano, ploskvijo v enajstrazsežnem prostoru, in teorijo M, ki zajame

razne različice teorije superstrun. Peti del *Resničnost in domišljija* vsebuje nadaljnja pogumna ugibanja o povezavi dodatnih razsežnosti in Higgsovega polja s simetrijo in teorijo superstrun. Razpreda zamisli o potovanju po prostoru in času, o prepletenih stanjih in teleportaciji, hipotetičnem transportu delcev na veliko razdaljo s prenosom informacij o njih. Razpravlja tudi o potovanjih v preteklost in prihodnost skozi črvine. Povzame vprašanje, ali sta prostor in čas temeljna pojma, in se konča z vprašanji o vesolju, na katera še nimamo odgovora. *Slovar* na kratko pojasni glavne strokovne pojme, *Opombe* pa vsebujejo dodatne podatke in nekatera zahtevnejša dopolnila.

V knjigi je Greene predstavil pogled fizika, ki se ukvarja s teorijo superstrun, na naravo. Pri tem ni zahteval kakega posebnega znanja in si je pogosto pomagal s prisposodobami iz vsakdanjega življenja. Vendar besedilo od običajnega bralca zahteva nekaj navora. Zaradi velikega števila novih pojmov in zamisli mora biti pripravljen dele prebrati večkrat. Zaradi obsežnega besedila je najbolje, če se ga loti po delih. Napor pa bo vsakomur, ki ga zanima sodobni pogled na največje in najmanjše v naravi in povezava obojega, dobro poplačan.

Nazadnje ne moremo mimo slabosti Greenove knjige in drugih knjig, ki so jih za širok krog bralcev napisali raziskovalci. (Pri astrofizikih je še izrazitejša kot pri fizikih, ki se kot Greene ukvarjajo z delci.) Greene je sicer večkrat opozoril na razhajanje med fiziki in nekajkrat navedel različne poglede. Vseeno bralec pogosto težko razloči njegov osebni pogled od preizkušenih sprejetih ugotovitev. O superstrunah govori, kot da bi šlo za preizkušeno in sprejeto teorijo, medtem ko jo številni fiziki s poudarkom odklanjajo. Očitajo ji – tudi v knjigah za širok krog bralcev, da ni prispevala niti ene same napovedi, ki bi jo bilo mogoče preizkusiti pri opazovanjih ali merjenjih.

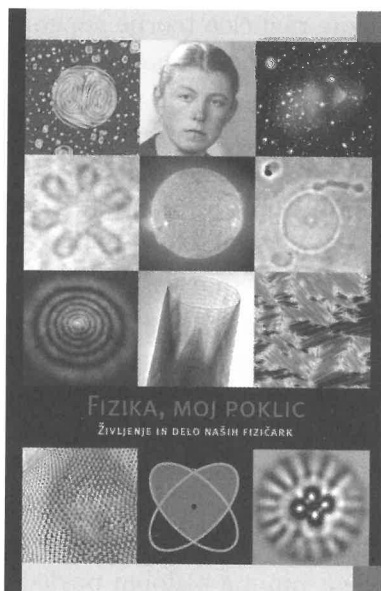
Ne glede na to navedimo mnenje Freemana Dysona: „Greenovo knjigo priporočam vsakomur, ki ni fizik, a želi dobiti pregled nad današnjo teoretično fiziko, napisan v vsakomur razumljivem pogovornem jeziku.“

Janez Strnad

FIZIKA, MOJ POKLIC: ŽIVLJENJE IN DELO NAŠIH FIZIČARK, Društvo jedrskih strokovnjakov Slovenije, Ljubljana 2007, 240 strani.

Neformalna zveza slovenskih fizičark, v njej je združenih več kot sto žensk, ki v Sloveniji delajo v tem poklicu, je pripravila monografijo z naslovom *Fizika, moj poklic*. Knjiga želi predstaviti ta lepi, a tudi zahtevni poklic

predvsem srednješolkam, ki se šele odločajo za poklicno usmeritev, pa tudi odraslim, ki jih ta znanstvena veda zanima tako iz naravoslovne zvedavosti kot iz osebne radovednosti. Govori tudi o tem, kakšne so pravzaprav ženske, ki tako trmasto vztrajajo in celo povečujejo ta praviloma zelo moški poklic. Knjiga, ki ruši mnoge stereotipe in nezavedne šovinistične principe, obsega osebne izpovedi 79 fizičark. V nekaterih stvareh so si zelo podobne, hkrati pa izjemne in raznolike. Vse so večinoma zelo uspešne in tudi praviloma premalo opažene v stroki in družbi nasploh. Ohranjati zgodovinski spomin je drugi namen te knjige, saj bodo le tako fizičarke lažje razumele druga drugo, njihovi moški kolegi pa bodo videli, da skupaj z njimi dopolnjujejo zakladnico znanja v fiziki, prenašajo znanje na nove generacije in uporabljajo znanja fizike na vseh ravneh družbe.



Svetovna organizacija fizikov IUPAP (International Union of Pure and Applied Physics) je ugotovila, da se je položaj žensk v zadnjih 25 letih od vseh naravoslovnih ved poslabšal edino v fiziki. Čedalje manj je diplomantk fizike in čedalje manj fizičark zaseda pomembne položaje v stroki. Zato so organizirali dve svetovni konferenci fizičark (Pariz 2002 in Rio de Janeiro 2005), na katerih so sprejeli usmeritve, ki bi ustavile in obrnile trend zmanjševanja ženske populacije v tej vedi. Takoj po prvi konferenci je v Sloveniji nastala Neformalna zveza slovenskih fizičark, v kateri so profesorice, diplomantke in študentke fizike. Med seboj si pomagajo z informacijami in se vključujejo v aktivnosti evropske in svetovne zveze fizičark. Po drugi konferenci so pripravile potujočo razstavo, ki še vedno potuje po srednjih šolah (gostovanje lahko naročite na naslov: Maja.Remskar@ijs.si), v zadnjem letu pa gradivo za pričujočo monografijo. Prostovoljne prispevke za knjigo in denar od prodaje so namenile skladu za štipendiranje študentk fizike. Vse delo uredniškega odbora in članic zveze je prostovoljno. Knjiga in potujoča razstava sta najpomembnejši akciji promocije znanosti, ki jo izvaja Neformalna zveza slovenskih fizičark.

Prispevke za knjigo so zbrale in uredile članice 13-članskega uredniškega odbora. Monografija je razdeljena na 11 poglavij, ki obravnavajo: astro-

nomijo, fiziko osnovnih delcev in polj, fiziko snovi, biofiziko in medicinsko fiziko, teorijo, poučevanje fizike, med poučevanjem in teorijo, fiziko v industriji, meteorologijo, radioaktivnost v službi človeka ter fiziko v javni službi. Zbrani so tudi podatki o vseh diplomantkah fizike na slovenskih univerzah.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 16 EUR.

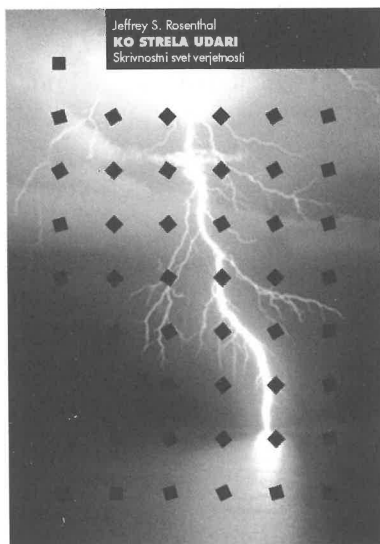
Maja Remškar in Marta Klanjšek Gunde

Jeffrey S. Rosenthal: KO STRELA UDARI: SKRIVNOSTNI SVET VERJETNOSTI, prevedel Matjaž Omladič, Knjižnica Sigma 82, DMFA–založništvo, Ljubljana 2006, 264 strani.

Nedavno je v *Knjižnici Sigma*, eni naših zbirk z najdaljšo tradicijo, izšla knjižica, ki želi približati širšemu krogu občinstva področje verjetnosti. To je področje uporabne matematike, ki v zadnjem času pridobiva na pomenu tako zaradi uporab v statistiki kot zaradi vse hitrejšega razvoja igralniške, zavarovalniške in finančne matematike.

Gre za knjižico uveljavljenega matematika tega področja, ki deluje kot profesor na ugledni Univerzi v Torontu v Kanadi. Profesor Jeffrey Rosenthal se je odločil, da se bo spustil z akademskih višav in razgrnil v prijazni in dostopni besedi pred širši krog bralcev celo paleto uporab svojega področja raziskovanja, vse od zelo preprostih iz vsakdanjega življenja, pa do najzahtevnejših, ki posegajo v bistvena vprašanja razvoja sveta in človeka v njem. Koga ne bi pritegnil duhovito podani premislek, kako izračunati verjetnost, da se bo avtobus pojavil na naši postaji pravočasno, da ne bi zamudili službe ali šole, in v kakšnih primerih se bomo odločili, da gremo raje peš. Kdo ne bi z zanimanjem tehtal, pod avtorjevo izkušeno taktirko, verjetnosti dogodkov, da bomo na izletu v Disneyland po naključju srečali znanca, da smo nekoč srečali natanko tisto dekle, s katero smo se kasneje poročili, da ima igralnica izgube, da bomo žrtev terorističnega napada, in konec koncev, da bo ravno v nas udarila strela.

Prvih nekaj poglavij knjige je namenjenih predvsem igram s kartami, med katerimi so nekatere res v prvi vrsti odvisne od naključij in si lahko le



tu pa tam s kakšnim kombinatoričnim premislekom povečamo verjetnost za zmago ali pa lahko vsaj izračunamo točko, ko je treba iz igre izstopiti, ker je postalo tveganje za izgubo preveliko. Med temi igrami pa so tudi take, kot je na primer bridž, pri katerih je lahko ob primerno postavljenih pravilih delitve kart verjetnost za zmago predvsem odvisna od znanja in spretnosti udeleženih igralcev. Ob tem spoznamo, kako so igre v profesionalnih igralnicah vselej utežene v korist igralnic, tako da te na dolgi rok vselej dobivajo. V daljši duhoviti zgodbi v stilu parodije na ameriške kriminalke se teorija verjetnosti pokaže kot glavna obremenilna priča dokaza, da ima lahko igralnica izgubo le v primeru nepoštenega sodelovanja uslužbencev igralnice z igralci.

Tudi uporaba teorije verjetnosti v statistiki je predstavljena z vsakdanjimi primeri, pogosto prek zgodb iz dnevnega časopisja. Kolikšna je verjetnost dogodka, da se bodo v enem tednu zgodili trije umori, na primer. Potem vprašanje, ali se število umorov in drugih zločinov v svetu povečuje ali zmanjšuje in kako to neizpodbitno ugotoviti. Še posebej je avtor kritičen do statističnih raziskav o učinkovitosti in morebitni škodljivosti zdravil, kjer izvemo za vrsto primerov, ko so velike farmacevtske firme skrivale pred javnostjo raziskave z negativnimi izidi o svojih zdravilih in tako posredno povzročile marsikatero bolezen ali celo smrt med svojimi namerno nepoučenimi uporabniki. Zanimiva tema so tudi raziskave javnega mnenja, še posebej ob volitvah. S pozornostjo spremljamo teorije o tem, zakaj so včasih rezultati teh raziskav dvomljivi in kako je mogoče, da te raziskave pomembno vplivajo na izide volitev, saj se mnenja volivcev včasih na nenavaden način prilagajajo rezultatom anket.

In potem, ko že izvemo, kako nam naključja sladijo in grenijo življenje, se vprašamo, ali nam zmorejo v življenju tudi bistveno priskočiti na pomoč. Cela vrsta metod tako pri strokovnem kot pri globljem znanstvenem delu temelji na teoriji verjetnosti. Uporabljamo jih pri sejanju in omejevanju neželene elektronske pošte, tako imenovanega spama, potem v genetiki, v modeliranju širjenja nalezljivih bolezni. Med drugim izvemo za resne znanstvene metode, kot je metoda Monte Carlo, ki so jo prvič (neslavno) uporabili pri računanju kritične mase za atomsko bombo, ki je potem uničila Hirošimo. Izračun je bil pravilen in bomba je delovala. In končno nas avtor v skrbno pretehtanem ritmu izmenjavaj med vsakodnevnimi in večnimi temami pripelje do bistvenih vprašanj našega vesolja in do kvantne mehanike. Čeprav je Einstein trdil, da Bog ne kocka, pa je bila to ena od njegovih redkih zmot. Ne samo na področju malih delcev, tudi v vesolju, v meteorologiji,

ah in še marsikje je teorija verjetnosti ena od nezamenljivih podlag nevanje naravnih in družbenih pojavov.

iskreno upam, da bo ta knjižica pozitivno prispevala k boljšemu nju tega področja v širši slovenski javnosti ter da ji bo uspelo prite- di marsikaterega mladega bralca, ki se šele odloča za svojo poklicno ev.

žico lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 9,99 EUR.

Matjaž Omladič

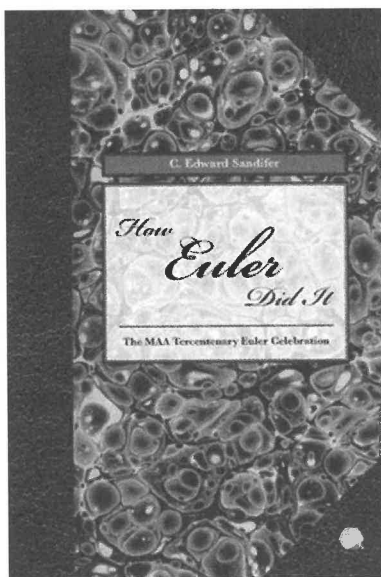
Edward Sandifer: HOW EULER DID IT, The Mathematical Education of America, Washington 2007, 256 strani.

tristoletnici rojstva Leonharda Eulerja (1707–1783) je MAA (The Mathematical Association of America) izdala knjigo [1], ki je sestavljena iz 40 člankov, dostopnih na [2]. Knjigo je napisal Edward Sandifer z Western Connecticut State University, matematik, ki (kot vsi drugi študenti na platnicah) študira Eulerja po originalnih besedilih in vsak mesec na prej omenjeni strani objavi nov, prijazno narejen članek o delu tega velikega matema-

matika. Knjiga je razdeljena po temah: Geometrija, Teorija števil, Kombinatorika in Analiza. Analiza zavzema več kot pol te knjige). V vsaki poglavski zbirki najdemo Eulerjevemu opusu najdemo esenetljive stvari. Tako je Euler zapi-

sal enačbo, ki karakterizira 3×3 ortogonalne matrike, in ga tudi rešil, kar je pri tem prišel *ad calculos vehementer intricatos*, se pravi, v silno neenostavne račune. Ob tem moramo poudariti, da je pojem matrike vpeljal James J. Sylvester leta 1850, pojem *ortogonalna matrika* je uporabil Charles Hermite leta 1854, formalno definicijo ortogonalne matrike pa je dal Ferdinand Frobenius leta 1878.

Euler je izredno rad računal. Tako zvemo, kako računamo logaritme, za rešujemo zanimive in realistične probleme s področja eksponentne rasti, prebivalstva in denarništva, npr.:



Nekdo si izposodi 400 000 florintov z obrestno mero 5 odstotkov. Če vsako leto odplača 25 000 florintov, koliko časa bo trajalo, da odplača dolg?

Euler se tudi ukvarja z vprašanjem, kako brez tabel izračunati $2^{\frac{7}{12}}$, in pokaže, da je rezultat 1,4983..., kar je zelo blizu $\frac{3}{2}$. To je seveda povezano s tonsko lestvico v glasbi. Že pitagorejci so vedeli, da razmerje $\frac{3}{2}$ dolžin strun sicer enakimi lastnostmi da za uho prijetno sozvočje, t. i. kvinto. Tudi Euler je populariziral dvanajsttotsko lestvico, v kateri je razmerje frekvenc dveh sosednjih tonov enako $2^{\frac{1}{12}}$. V taki lestvici lahko kvinto aproksimiramo, kot je vidno zgoraj, tako dobro, da uho razlike praktično ne zazna. V praksi je najlepše to lestvico uporabil in ilustriral J. S. Bach s skladbo *Dobro uglasjeni klavir* (1722).

V knjigi je tudi razrešena dilema, kdo je najprej dokazal, da je število e iracionalno. Euler je leta 1737 najprej iz približka na 13 mest za $\frac{e-1}{2}$ sklepal, da je verižni ulomek za to število neskončen. Nato pa je to tudi dokazal z razvojem rešitve posebne Ricattijeve diferencialne enačbe v vrsto. Deli tega dokaza so bili nekoliko razmetani, vendar je očitno popoln. Leta 1768 je Eulerjev varovanec Johann H. Lambert dokazal naslednje: Če je x neničelno racionalno število, potem sta tako e^x kot $\tan x$ iracionalna.

Naj poberem še nekaj rozin iz Sandiferjeve knjige. Euler je prvi izračunal vsoto vrste recipročnih vrednosti kvadratov naravnih števil. Ob preučevanju drugih problemov je leta 1730 to vsoto izrazil z dvakratnim integralom, izračunal dober približek zanj in ugotovil, da je zelo blizu $\frac{\pi^2}{6}$. Povsem neporečno je to dokazal mnogo kasneje. Pri tem je uporabil (glej [2] pod naslovom *Basel problem with integrals*) razvoj v binomsko vrsto, integracijo funkcijske vrste in dejstvo, da je

$$I_{2n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1},$$

kar dokažemo z integracijo per partes. Seveda se takrat niso ukvarjali z enakomerno konvergenco vrst in podobnim, a danes lahko vstavimo te podrobnosti brez večjih težav. Ta dokaz je bil objavljen leta 1743 v francoščini v *Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord*. (Revija s tem nenavadnim naslovom je rezultat bega protestantskih hugenotov iz Francije.) Navedeni dokaz je (tudi zaradi objave v literarni reviji) precej manj znan kot (ne povsem popolni) Eulerjev dokaz iz leta 1735, ki mu je prinesel svetovno slavo.

Uporabna matematika je bila Eulerju osnovno področje in verjetno marsikdo ve za njegove zasluge na področju mehanike. To mu je – kar je danes težko razumeti – prineslo težave v Angliji, kjer so Newtonovo delo imeli za non plus ultra na tem področju. V tem času je Friderik Veliki vprašal Eulerja za najboljše delo o balistiki. Euler je priporočil delo angleškega strokovnjaka Benjamina Robinsa, čeprav ga je prav ta posebno ostro napadal. Robins je med drugim jasno povedal, da Galilejeva rešitev za pot izstrelka, to je parabola, velja le za majhne hitrosti. Izumil je namreč balistično nihalo in z njim izmeril hitrosti izstrelkov. (Gotovo se spomnite streljanja v obešeno leseno klado pri poglavju o gibalni količini v Fiziki 1). Kot pravi:

Ugotovili smo namreč ... , da krogla premera tričetrt cole, izstreljena s pol svoje teže smodnika, odleti s hitrostjo blizu 1700 čevljev na sekundo. Če bi krogla letela po parabolični krivulji, bi njen horizontalni doseg pri kotu 45° znašal 17 milj. Vsi pisci praktiki pa nam zagotavljajo, da je ta doseg krajši kot pol milje.

Vendar Robins ni kaj dosti povedal o tem, kakšna je v resnici pot izstrelka. (Naj povemo, da se je še pred Galilejem s potjo izstrelkov mučil Nicolo Tartaglia. V knjigi sta reproducirani slike iz Tartaglieve knjige. Žal je kratki latinski napis na sliki: *Scientia non habet inimicum pr(a)eter Ignorantem* – Znanost nima sovražnika razen nevedneža na strani 214 prepisan s kar tremi napakami.) Na kraljevo željo je Euler leta 1745 prevedel Robinsovo knjigo, in sicer tako, da je obseg s svojimi komentarji povečal za faktor 5. Leta 1753 pa je Euler objavil 40 strani dolg članek o gibanju izstrelkov v zraku ali drugi tekočini. Upošteval je kvadratni zakon upora in, kot pravi knjiga, tudi za današnje pojme dovolj dobro opisal pot izstrelka. V poglavju o odsekoma zveznih funkcijah zvemo, da je Euler očitno dobil podatke o balističnih poskusih (ki jih je morda dal izvesti sam) in sklepal, da je od hitrosti nekako 1325 čevljev na sekundo naprej treba enačbe spremeniti. Vendar pa tega ni povezal s hitrostjo zvoka, ki znaša dobrih 1000 čevljev na sekundo in so jo takrat že poznali.

Knjiga je zanimiv pogled v delo vsestranskega genija. V zadnjem poglavju zvemo, da je bil Euler tudi zemljepisec. Svoje težave z očmi je celo pripisoval napornemu preučevanju zemljevidov. Prav Euler je svetu poročal o odkritjih Vitusa Beringa (ki je odkril preliv med Azijo in Severno Ameriko).

Na koncu povejmo še dve stvari. Prvič, to ni edina Sandiferjeva knjiga o Eulerju. *The Mathematical Association of America (MAA)* je organizacija, ki združuje učitelje in študente matematike, poklicne matematike in

matematične navdušence. Na spletni strani [3] najdemo obilo prosto dostopnih matematičnih novic in povezav. Tako zvemo, da bo v januarju 2008 premiera filma *Hard problems (Težki problemi)*, ki govori o ameriški ekipi na Matematični olimpijadi 2006 v Ljubljani. MAA je dvojček k American Mathematical Society, ki združuje predvsem raziskovalce.

LITERATURA

- [1] C. E. Sandifer, *How Euler Did It*, The Mathematical Association of America, Washington 2007.
- [2] *Ed Sandifer's How Euler Did It*, <http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html>.
- [3] *Mathematical Association of America: MAA Online*, <http://www.maa.org/>.

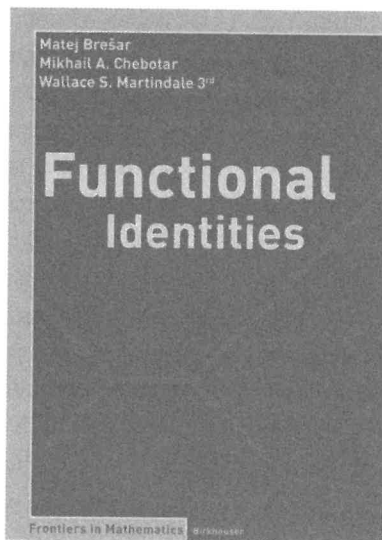
Peter Legiša

Matej Brešar, Mikhail A. Chebotar in Wallace S. Martindale 3rd: FUNCTIONAL IDENTITIES, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin 2007, 284 strani.

Letos je pri založbi Birkhäuser Verlag v okviru zbirke *Frontiers in Mathematics* izšla znanstvena monografija *Functional Identities*. Avtorji knjige so Matej Brešar z Univerze v Mariboru, Mikhail A. Chebotar s Kent State University v ZDA in Wallace S. Martindale 3rd z University of Massachusetts v ZDA.

Profesor Matej Brešar je diplomiral leta 1987 pod mentorstvom profesorja Josa Vukmana. V okviru diplomskega dela naj bi obdelal jordanska odvajanja prakolobarjev. Vendar je daleč presešel običajne zahteve. Našel je namreč nove, bistveno krajše dokaze strukturnih izrekov za take preslikave.

V naslednjih letih je temeljito študiral teorijo kolobarjev in hkrati razvijal in nadgrajeval ideje iz diplomskega dela. Za vrhunec njegovega tedanjega dela lahko štejemo razpravo, ki jo je leta 1993 objavil v reviji *Transactions of the American Mathematical Society*. V tem članku je dokončno rešil strukturni problem za Liejeve izomorfizme na prakolobarjih in pri tem oblikoval osnovne ideje, ki so kasneje pripeljale do razvoja teorije funkcijskih identitet. Ta in številni drugi znanstveni članki so tedaj komaj 32-letnemu matematiku leta



1995 prinesli nagrado Republike Slovenije za znanstveno-raziskovalno delo (te nagrade se danes imenujejo Zoisove nagrade).

Brešarjevo delo so v tem času seveda opazili tudi v tujini, zlasti Hersteinov učenec Martindale in član znamenite moskovske algebraične šole Konstantin I. Beidar. V desetletju, ki je sledilo, so ti trije matematiki skupaj z Beidarjevim študentom Chebotarjem Brešarjeve prvotne ideje razvili do zaokrožene teorije funkcijskih identitet. Pri tem je odločilno vlogo odigral profesor Beidar, ki naj bi bil po prvotnih načrtih soavtor pričujoče knjige. Žal je v marcu leta 2004 preminil. Knjiga je posvečena njegovemu spominu.

Funkcijske identitete obravnavajo preslikave na algebrah in kolobarjih, ki zadoščajo enakostim zelo splošne oblike. Izreki potem povedo, da imajo bodisi te preslikave zelo lepo obliko, bodisi so algebre in kolobarji zelo posebnega tipa. To omogoča redukcijo številnih problemov o (jordanskih, Liejevih) homomorfizmih in odvajanjih, linearnih ohranjevalcih in sorodnih preslikavah na posebne primere dokaj preprostih algeber in kolobarjev. Zato ima ta teorija veliko uporab, med drugim tudi v matematični fiziki in funkcionalni analizi.

Vrh pa je zagotovo to področje doseglo s končno potrditvijo Hersteinovih domnev o Liejevih homomorfizmih in odvajanjih iz leta 1961. Herstein se je skupaj s svojimi študenti ukvarjal z Liejevo in jordansko strukturo asociativnih algeber in kolobarjev. Ob mnogih uspehih te raziskovalne skupine pa so ostali odprti strukturni problemi za Liejeve preslikave. Domneve o strukturi teh preslikav je Herstein predstavil na vabljenem predavanju *AMS hour talk* in jih potem objavil v reviji *Bulletin of the American Mathematical Society*. V seriji člankov, ki so se zvrstili do leta 2002, je skupina zgoraj omenjenih štirih matematikov te domneve dokončno potrdila in pri tem uporabila tako rekoč celotno tedaj že kar obsežno teorijo funkcijskih identitet. To je bil tudi trenutek, ko se je pojavila zamisel o strnitvi vseh teh rezultatov, raztresenih v mnogih znanstvenih člankih, v enotno monografijo.

Pred nami je torej knjiga, ki vsem zainteresiranim raziskovalcem omogoča na enem samem mestu poiskati vse bistvene do sedaj znane rezultate o funkcijskih identitetah. Zaradi potencialnih uporab in zlasti zaradi rešitev Hersteinovih problemov so rezultati nemalokrat tehnično precej zapleteni. Zato v prvem delu knjige avtorji s primeri in enostavnejšimi rezultati bralcu omogočijo razumeti osnovno „filozofijo“ tega področja. Drugi del knjige je posvečen teoriji funkcijskih identitet v vsej splošnosti, zadnji del pa govori o mnogih uporabah zunaj teorije kolobarjev.

Peter Šemrl

MATEMATIČNE NOVICE

Najbolj iskani članki (zadnjič)

Med 25 najbolj iskanimi članki četrtertletja [1] najdemo tudi naslednje slovenske prispevke:

V reviji *Journal of Combinatorial Theory Ser. B* (ki je najuglednejša revija za teorijo grafov) imamo kar 6 člankov slovenskih raziskovalcev. Tako sta **Štefko Miklavič** in **Primož Potočnik** objavila [2]. Ken-ichi Kawarabayashi in **Bojan Mohar** imata prispevek [3]. **Drago Bokal** ima članek [4]. Edward Dobson, **Aleksander Malnič**, **Dragan Marušič** in Lewis A. Nowitz so napisali [5]. Tomáš Kaisera, Daniel Král, **Riste Škrekovski** in Xuding Zhu so avtorji raziskave [6]. **Gašper Fijavž** pa ima daljši članek [7]. V *European Journal of Combinatorics* imata **Aleksander Malnič** in **Primož Potočnik** daljši prispevek [8]. V *Discrete Mathematics* so Khaled Salem, **Sandi Klavžar** in Ivan Gutman objavili [9]. V *Advances in Applied Mathematics* imajo **Sandi Klavžar**, **Simon Špacapan** in **Janez Žerovnik** članek [10]. V reviji *Linear Algebra and its Applications* sta T. J. Laffey in **Helena Šmigoc** objavila [11]. **Jernej Kozak** in **Marjetka Krajnc** imata v *Computer Aided Geometric Design* članek [12], ki je naveden celo na prvem mestu.

Izkazalo se je, da je tovrstnih uvrstitev precej več, kot sem mislil. Mnogih žal nismo objavili, ker o tem pač nisem dobil obvestila. Tudi gornji seznam je sestavljen le na podlagi posredovanega materiala in je vsekakor nepopoln. Poudariti moramo, da je seznam *Top 25* omejen na revije založbe Elsevier. Iz vseh teh razlogov in zaradi časovnega zamika, ki nastane pri objavi, skupaj z urednikom za matematiko misliiva, da so v **prihodnje** za te specifične novice, se pravi **uvrstitve na seznam Top 25**, pravo mesto domače strani matičnih ustanov avtorjev (ali IMFM) in ne OMF. Močno spodbujava vse pisce, ki so bili za svoj trud poplačani z uvrstitvijo na sezname najbolj iskanih člankov, da informacijo o tem objavijo na medmrežju. Kakršnakoli skromnost je povsem neumestna in celo škodljiva. Matematiki se moramo potegovati za sredstva, s katerimi bomo lahko raziskovali, kupovali literaturo in vzgajali nove kadre. Pri tem tekmujeemo z drugimi strokami, ki so pogosto zelo agresivne. Zato so tovrstni podatki pomembno pomagalo celotni naši skupnosti. Lahko povem, da so tovrstni (žal nepopolni) podatki iz OMF že bili uporabljeni pri poročilu o delu FMF.

Seveda pa so te Novice še naprej odprte za poročila o vseh drugih dosežkih naših strokovnjakov in bom hvaležen za vse podatke, ki mi jih o tem lahko posredujete.

LITERATURA

- [1] *ScienceDirect TOP25 Hottest Articles*, <http://top25.sciencedirect.com/>.
- [2] Š. Miklavič in P. Potočnik, *Distance-regular Cayley graphs on dihedral groups*, J. Comb. Th. Series B **97**(1), 2007, str. 14–33.
- [3] K. I. Kawarabayashi in B. Mohar, *A relaxed Hadwiger's Conjecture for list colorings*, J. Comb. Th. Series B **97**(4), 2007, str. 647–651.
- [4] D. Bokal, *On the crossing numbers of Cartesian products with paths*, J. Comb. Th. Series B **97**(3), 2007, str. 381–384.
- [5] E. Dobson, A. Malnič, D. Marušič in L. A. Nowitz, *Semiregular automorphisms of vertex-transitive graphs of certain valencies*, J. Comb. Th. Series B **97**(3), 2007, str. 371–380.
- [6] T. Kaisera, D. Král, R. Škrekovski, X. Zhu, *The circular chromatic index of graphs of high girth*, J. Comb. Th. Series B **97**(1), 2007, str. 1–13.
- [7] G. Fijavž, *Contractions of 6-connected toroidal graphs*, J. Comb. Th. Series B **97**(4), 2007, str. 553–570.
- [8] A. Malnič in P. Potočnik, *Invariant subspaces, duality, and covers of the Petersen graph*, European J. of Combinatorics **27**(6), 2006, str. 971–989.
- [9] K. Salem, S. Klavžar in I. Gutman, *On the role of hypercubes in the resonance graphs of benzenoid graphs*, Discrete Mathematics **306**(7), 2006, str. 699–704.
- [10] S. Klavžar, S. Špacapan in J. Žerovnik, *An almost complete description of perfect codes in direct products of cycles*, Advances in Appl. Math. **37**(1), 2006, str. 2–18.
- [11] T. J. Laffey in Helena Šmigoc, *Construction of nonnegative symmetric matrices with given spectrum*, Linear Algebra and its Appl. **421**(1), 2007, str. 97–109.
- [12] J. Kozak in M. Krajnc, *Geometric interpolation by planar cubic polynomial curves*, Computer Aided Geometric Design **24**(2), 2007, str. 67–78.

Peter Legiša

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 2006*

Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 30 novih članov:

2216. Arzenšek Dejan	2226. Cuderman Andrej	2236. Parovel Tomaž
2217. Bajc Jurij	2227. Čopar Simon	2237. Pečanac Barbara
2218. Banič Iztok	2228. Debevec Nadja	2238. Podgoršek Melita
2219. Bensa Vladimir	2229. Erznožnik Martina	2239. Podobnik Boštjan
2220. Bernard Daniel	2230. Hegler Metka	2240. Polajnar Jože
2221. Bratkovič Vladimir	2231. Jelen Aleš	2241. Raičević Zoran
2222. Brešar Boštjan	2232. Jerman Nataša	2242. Rustja Jožica
2223. Cafuta Kristijan	2233. Koglot Franica	2243. Strnad Barbara
2224. Cestnik Igor	2234. Korošec Janja	2244. Tola Špela
2225. Cimermančič Peter	2235. Kovačič Jasna	2245. Žakelj Amalija

Vladimir Bensa

*Novi člani DMFA Slovenije za leto 2005 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **53** (2006) 3, stran XI.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER**R 177/07**

Letnik 54, številka 5

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 5



100003039, 5

COBISS

VSEBINA**Članki****Strani**

Požrešno zaporedje brez ponavljanj in problem Hanojskega stolpa, Sandi Klavžar	145–150
Fizika molekularnih verig, Matjaž Ličer	151–165

Šola

Kaj naj študente naučimo o funkcijah?, Petar Pavešić	166–172
--	---------

Nove knjige

Znanost v Štoparskem vodniku po Galaksiji, Alojz Kodre	173
Tkanina vesolja: Prostor, čas in tekstura resničnosti, Janez Strnad	174–175
Fizika, moj poklic: Življenje in delo naših fizičark, Maja Remškar in Marta Klanjšek Gunde	175–177
Ko strela udari: Skrivnostni svet verjetnosti, Matjaž Omladič	177–179
How Euler Did It, Peter Legiša	179–182
Functional Identities, Peter Šemrl	182–183

Vesti

Popravek, Zvonimir Bohte	150
Dnevi fizike in verižni eksperiment 2008, Irena Drevenšek Olenik	165
Matematične novice, Peter Legiša	184–XIX
Novi člani društva v letu 2006, Vladimir Bensa	XIX

CONTENTS**Articles****Pages**

Greedy nonrepetative sequence and the tower of Hanoi problem, Sandi Klavžar	145–150
The Physics of Molecular Chains, Matjaž Ličer	151–165

School

What should we teach students about functions?, Petar Pavešić	166–172
---	---------

New books	173–183
------------------------	---------

News	150–XIX
-------------------	---------

Na naslovnici so Hanojski stolpi z rešitvijo (glej članek na strani 145).