

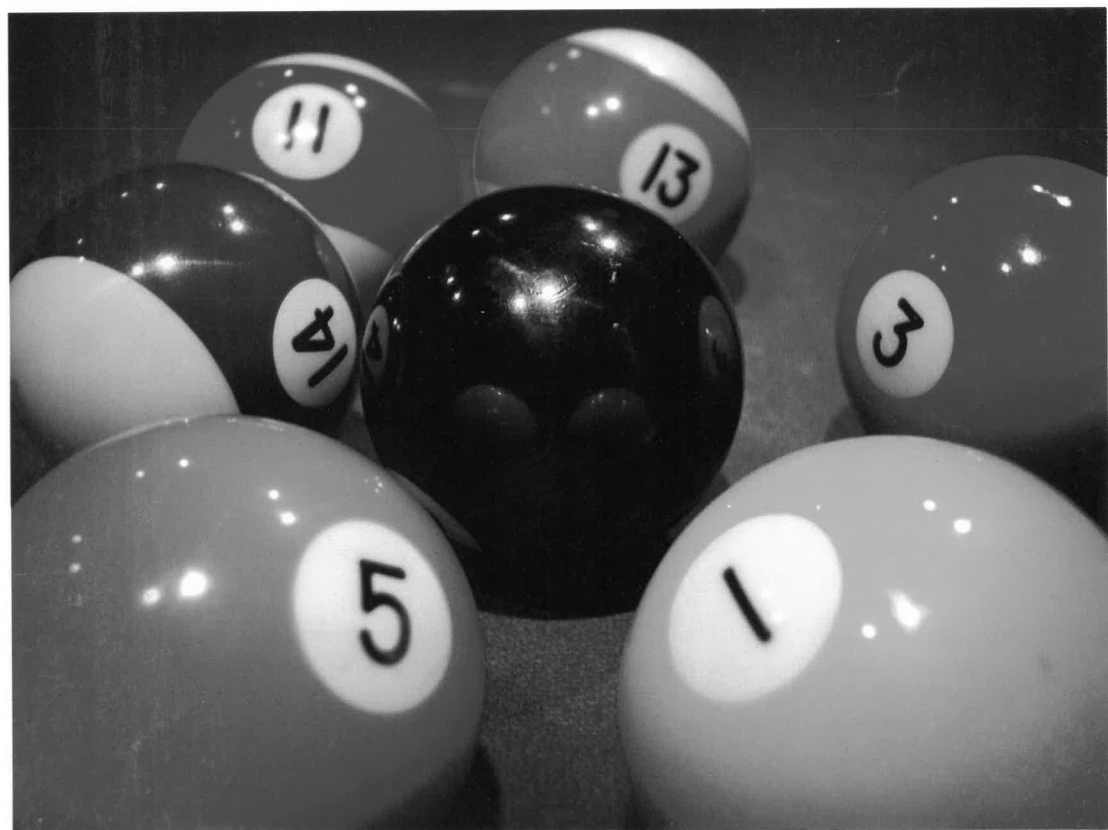
ODPISANO

2007

Letnik 54

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2007, letnik 54, številka 4, strani 113–144

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Sašo Strle (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Damjan Kobal, Peter Legiša, Aleš Mohorič, Petar Pavešić, Nada Razpet, Peter Šemrl, Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.

Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1300 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21,00 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 33,38 EUR, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 4,18 EUR, stare številke 2,17 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2007 DMFA Slovenije – 1681

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželeno velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

BILJARDI

MITJA LAKNER

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Univerza v Ljubljani

in

PETER PETEK

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko

Math. Subj. Class. (2000): 37D50

Biljardi so enostavni dinamični sistemi, kjer lahko opazujemo prehod od popolnoma urejenega, integrabilnega, do popolnoma neurejenega, kaotičnega, ergodičnega sistema. Začnemo z eliptičnim biljardom, ki ga s povečevanjem motnje spreminjamo, sledimo razpadu invariantnih krožnic v skladu z izrekom K. A. M.

BILLIARDS

Billiards are simple dynamical systems, where we can observe the transition from the totally ordered, integrable, system to a completely disordered, chaotic, ergodic system. Starting with the elliptic billiard a perturbation is increasing and we follow the decay of invariant circles according to the K. A. M. theorem.

1. Geometrija in pravila igre

Biljard je igra na pravokotni mizi, kjer se igralci trudijo z natančno odmerjenimi udarci spraviti raznobarvne kroglice v luknje na robu. Obravnavali bomo Birkhoffov [1] biljard, ki se igra na ravnini $\mathbb{R}^2$, kjer leži enostavna gladka sklenjena krivulja $\mathcal{K}$, ki ograjuje območje $\mathcal{D}$. Običajno zahtevamo še konveksnost območja. Sem in tja rahlo popustimo in dovolimo tudi nekonveksna območja, včasih tudi končno mnogo vogalov, kjer se krivulja zlomi. Vendar bomo v tem članku ostali pri strogih zahtevah, torej bo območje $\mathcal{D}$ konveksno in krivulja $\mathcal{K}$ gladka.

Vsa igra pravzaprav poteka znotraj območja, kjer se nahaja en sam samcat delec, ki mu zaradi enostavnosti dodelimo maso $m = 1$ in enotsko hitrost $\vec{v}$; $|\vec{v}| = 1$. Ko delec zadene rob območja, krivuljo $\mathcal{K}$, se elastično odbije po odbojnem zakonu: **Odbojni kot je enak vpadnemu.**

Gladkost krivulje v vsaki točki zagotavlja, da vedno imamo tangento in zgornji predpis lahko deluje. Elastičnost odboja pomeni, da ne gre nič energije v izgubo, da je torej še naprej $|\vec{v}| = 1$, čeprav se smer hitrosti spremeni.

Dogajanje je na videz preprosto: delec se odbije prvič, pa drugič, stotič. Ne zanima nas toliko čas, ki ga delec porabi za gibanje, kot njegov tir. Ker pa je tir med dvema odbojema daljica, tetiva, so edini podatki, ki bodo vredni pozornosti, vsakokratni odbojni kot α_n in točka odboja T_n na krivulji $\mathcal{K}$. Konveksnost je med zahtevami le zato, da je lažje nedvoumno izračunati naslednjo točko odboja. S točko T_n in kotom α_n je namreč premica nosilka natanko določena in konveksnost zagotavlja le še en presek s krivuljo, naslednjo točko T_{n+1} .

Dogovorimo se za oznake. Najprej postavimo izhodišče koordinatnega sistema znotraj območja $\mathcal{D}$ in zapišemo enačbo krivulje v polarni obliki

$$r = r(\varphi),$$

kjer merimo kot φ v pozitivnem smislu od pozitivnega poltraka osi x .

Dolžina celotne krivulje je potem

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi,$$

ustrezni delež te dolžine, relativni lok

$$s(\varphi) = \frac{1}{L} \int_0^\varphi \sqrt{r^2 + r'^2} d\psi,$$

parametrizira krivuljo $\mathcal{K}$ na naraven način in $s \in [0, 1]$, pri čemer $s = 0$ in $s = 1$ pomenita isto točko, presek krivulje s pozitivnim poltrakom osi x .

Točka dotika T razdeli tangento na pozitivno poltangentto v smeri naraščajočega φ in negativno poltangentto. Odbojni kot bomo merili od pozitivne poltangente do tira odboja, $\alpha \in (0, \pi)$, vendar bomo v nadaljnjem delali s spremenljivko $\cos \alpha = p \in (-1, 1)$.

Začetna točka T_0 na krivulji določi $s = s_0$, poznamo še $p = p_0 = \cos \alpha_0$. Naslednji korak je izračun novega presečišča v dani smeri (slika 1) in določitev novega odbojnega kota

$$(s_1, p_1) = F(s_0, p_0),$$

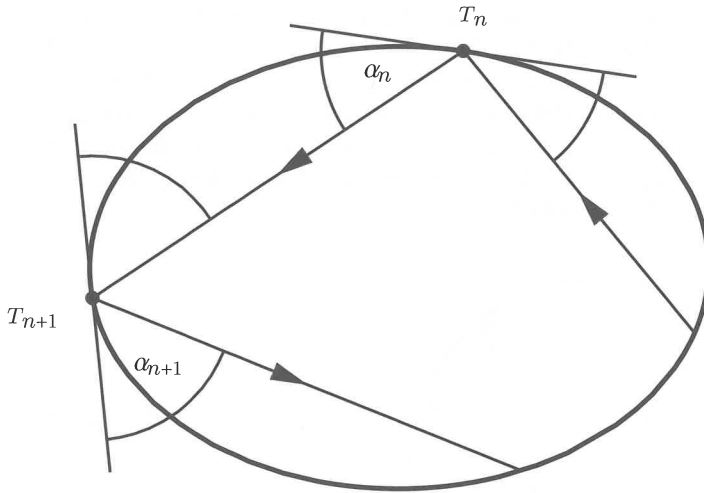
kar seveda največkrat opravi računalnik, analitičen izračun je že pri najenostavnejših krivuljah preprosto neizvedljiv. Preslikavi F pravimo *Poincaréjeva preslikava*, njeno definicijsko območje in hkrati zaloga vrednosti je pravokotnik

$$\mathcal{P} = [0, 1] \times (-1, 1),$$

ki ga zaradi ekvivalence $(0, p) \sim (1, p)$ pravzaprav zvijemo v plašč valja, *Poincaréjev valj* mu rečemo, in preslikava F preslikuje valj nase.

V tako postavljeni igri se skriva kar precej zanimivih in težkih matematičnih problemov. Zgodbo pripovedujemo brez dokazov [3], okrasimo jo s slikami, napravljenimi s programom [4].

Biljardi



Slika 1. Tir delca v biljardu je sestavljen iz zaporednih tetiv. Delec se v točki T_n odbije pod kotom α_n v točko T_{n+1} , v kateri je kot odboja α_{n+1} .

2. Krožnica, elipsa in stadion

2.1 Krožnica

Očitno lahko brez škode za splošnost privzamemo enotski polmer in središče v izhodišču, skratka polarno enačbo $r = 1$. Vpadni kot α je na krožnici enak polovici kota β , pod katerim vidimo iz izhodišča eno daljico tira: $\beta = 2\alpha$.

Vrtilna količina delca glede na izbrano izhodišče je vektorski produkt krajevnega vektorja delca z njegovo gibalno količino

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{G} = \vec{r} \times (m\vec{v}).$$

Ker ima naš delec maso $m = 1$, velikost hitrosti $|\vec{v}| = 1$, je $|\vec{\Gamma}|$ enak ploščini paralelograma in zato enak razdalji premice nosilke tira od izhodišča. Smer $\vec{\Gamma}$ je pravokotna na ravnino biljarda, zato bomo obravnavali vrtilno količino kot predznačeno število p . V tem primeru imamo $p = \cos \alpha$.

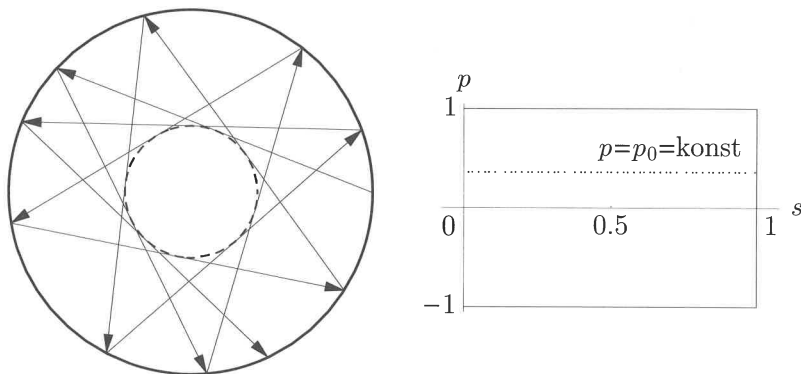
Če je $\beta = \frac{2\pi}{n}$, torej $\alpha = \frac{\pi}{n}$, tir opiše obod konveksnega n -kotnika in v tem primeru imamo na Poincaréjevem valju cikla periode n , kakršenkoli je že $s = s_0 \in [0, \frac{1}{n})$:

$$(s, \cos \alpha), (s + \frac{1}{n}, \cos \alpha), \dots, (s + \frac{n-1}{n}, \cos \alpha).$$

Tudi če je α v racionalnem razmerju z iztegnjenim kotom $\alpha = \frac{k\pi}{n}$, $k > 1$, je tir sklenjen, zvezdast. Iracionalno razmerje $\frac{\alpha}{\pi}$ pomeni nesklenjen tir. Izkaže

se, da v tem primeru tir gosto zapolni kolobar med krožnicama $r_{not} = |p|$ in $r_{zun} = 1$. Tir pride poljubno blizu vsake točke tega kolobarja. Prav tako je na Poincaréjevem valju gosto zapolnjena črta $p = p_0 = \text{konst.}$

Tak način odboja delca opisujemo z imenom „šepet na galeriji“, ker je pojav znan tudi pri prenosu zvoka v gledališču. Galerija je tu omenjeni kolobar. Notranja krožnica je *kavstika*, ogrinjača daljic tira. Vsi odseki tira se dotikajo kavstike (slika 2).



Slika 2. Šepet na galeriji, kot ga vidimo v koordinatni ravnini in na Poincaréjevem valju.

V primeru krožnice opozorimo še na neko „posebnost“, ki se sicer zdi sama po sebi umevna. Namreč dejstvo, da je neka funkcija spremenljivk $I(s, p)$ vzdolž celega tira konstantna. Tokrat je to seveda $I(s, p) = p = \cos \alpha$. Fizikalni pomen te količine je vrtilna količina delca glede na središče krožnice.

Ker taka invarianta obstaja, pravimo, da je biljard integrabilen. Le pri redkih oblikah mejne krivulje srečamo to lepo lastnost, pravzaprav za zdaj teorija pozna le še elipso, čeprav ni izključeno, da obstaja še kakšna oblika integrabilnega biljarda. Integrabilnost je res izjema.

2.2 Elipsa

Kot smo že zgoraj omenili, je tudi elipsa integrabilen biljard. Naj bo elipsa zapisana v standardni kartezični obliki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

kjer sta a, b polosi, $a > b$, goriščna razdalja $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ in numerična ekscentričnost $\epsilon = e/a$.

Pokazali bomo, da je produkt vrtilnih količin gibajočega se delca glede na obe gorišči konstanten, torej invarianta tira. Vrtilna količina delca glede

Biljardi

na točko je le pozitivno ali negativno predznačena razdalja premice nosilke tira od dane točke. Produkt je pozitiven, če sta gorišči na isti strani premice, negativen, če seka premica zveznico gorišč.

Označimo produkt razdalj $I = d_1 d_2$. Gorišči imata koordinate $G_1(-e, 0)$, $G_2(e, 0)$. Elipso parametriziramo:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

in odvod – smerni koeficient tangente – je enak

$$y' = -\frac{b \cos t}{a \sin t}.$$

Naj pomeni $\tau = \tan \alpha$, potem dobimo smerni koeficient vpadnega in odbitega tira po formulah:

$$k_{vp} = \frac{y' - \tau}{1 + y'\tau}, \quad k_{odb} = \frac{y' + \tau}{1 - y'\tau}.$$

Formuli za vpadni in odbiti tir se razlikujeta samo v znaku pred τ . Trditev bomo dokazali tako, da pokažemo, da je produkt $d_1 d_2$ neodvisen od izbire znaka, torej sode funkcija τ .

Oddaljenost (pozitivno ali negativno) točke (ξ, η) od premice $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ dobimo po formuli $d = (\alpha \xi + \beta \eta + \gamma) / \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Premica gre skozi točko $T_0(x_0, y_0) = T_0(a \cos t, b \sin t)$ s smernim koeficientom k , njena enačba se glasi $y = kx + n$, $n = y_0 - kx_0$. Produkt izrazimo:

$$d_1 d_2 = \frac{n^2 - k^2 e^2}{1 + k^2} = \frac{n^2 + e^2}{1 + k^2} - e^2$$

in nadalje vstavimo

$$n = y_0 - kx_0 = b \sin t + \frac{\frac{b \cos t}{a \sin t}}{1 - \frac{b \cos t}{a \sin t} \tau} a \cos t,$$

$$n = \frac{ab + e^2 \tau \sin t \cos t}{a \sin t - b \tau \cos t}.$$

Kvadriramo in izračunamo

$$n^2 + e^2 = \frac{a^2 b^2 + e^4 \tau^2 \sin^2 t \cos^2 t + e^2 a^2 \sin^2 t + e^2 b^2 \tau^2 \cos^2 t}{(a \sin t - b \tau \cos t)^2}$$

in še

$$1 + k^2 = \frac{(1 + \tau^2)(b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)}{(a \sin t - b \tau \cos t)^2}.$$

Števec izraza $n^2 + e^2$ razcepimo in dobimo

$$\frac{n^2 + e^2}{1 + k^2} = \frac{(e^2 \tau^2 \cos^2 t + a^2)(e^2 \sin^2 t + b^2)}{(1 + \tau^2)(b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t)}.$$

Ker je $e^2 = a^2 - b^2$, je drugi faktor v števcu ravno enak drugemu faktorju v imenovalcu, zato

$$\frac{n^2 + e^2}{1 + k^2} = \frac{e^2 \tau^2 \cos^2 t + a^2}{1 + \tau^2},$$

in ko odštejemo e^2 , dobimo

$$I(\tau) = d_1 d_2 = \frac{e^2 \tau^2 \cos^2 t + a^2 - e^2 - e^2 \tau^2}{1 + \tau^2} = \frac{b^2 - e^2 \tau^2 \sin^2 t}{1 + \tau^2}$$

in res τ nastopa samo v kvadratu, $I(-\tau) = I(\tau)$.

Opogumljeni z gornjim rezultatom se lotimo še kavstike. Pokazali bomo, da je kavstika bodisi istogoriščna elipsa bodisi hiperbola, odvisno od znaka invariante I .

Zgoraj smo pokazali, da ima invarianto I premica nosilka tira $y = kx + n$, če velja

$$\frac{n^2 + e^2}{1 + k^2} - e^2 = I.$$

Očitno je $I > -e^2$, razen za tir vzdolž ordinatne osi, kjer je $I = -e^2$. Označimo $A^2 = I + e^2 \geq 0$. S to oznako potem izrazimo iz zgornjega pogoja

$$n = \pm \sqrt{I + A^2 k^2}$$

in lahko zapišemo enoparametrični družini premic z dano invarianto

$$y = kx \pm \sqrt{I + A^2 k^2}$$

oziroma

$$(y - kx)^2 = I + A^2 k^2.$$

Pri danem tiru zadoščajo vse premice nosilke zgornji enačbi.

Po znanem postopku za izračun ogrinjače dobimo z odvajanjem po parametru k :

$$2(y - kx)(-x) = 2A^2 k,$$

od koder

$$k = \frac{xy}{x^2 - A^2}.$$

Ko to vstavimo v enačbo družine, se enačba ogrinjače glasi:

$$\left(\frac{-yA^2}{x^2 - A^2}\right)^2 = I + \frac{A^2x^2y^2}{(x^2 - A^2)^2}.$$

Uredimo člene z y^2 , en faktor $x^2 - A^2$ se pokrajša, odpravimo ulomke in dobimo

$$A^2y^2 = I(A^2 - x^2),$$

spet uredimo

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{I} = 1.$$

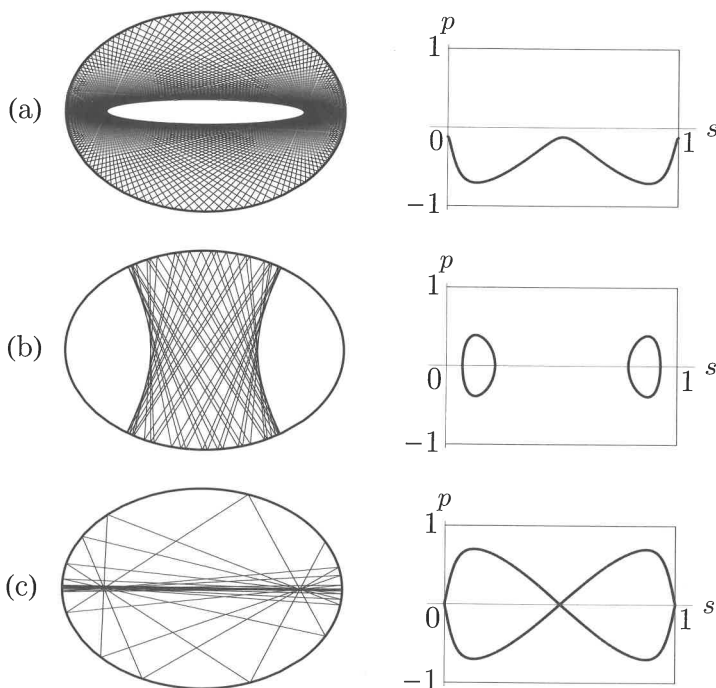
To že pove, da imamo opravka s stožnico, elipso pri $I > 0$, hiperbolo pri $I < 0$. V prvem primeru pišemo $I = B^2$, kavstika je elipsa s polosema $A = \sqrt{I + e^2}$ in $B = \sqrt{I}$, $A^2 - B^2 = e^2$, torej ima isti gorišči kot prvotna elipsa. Ker so njene tangente tetive prvotne elipse, seveda leži znotraj nje. Pri hiperboli pa pišemo $I = -B^2$ in hiperbola s polosema $A = \sqrt{I + e^2}$ in $B = \sqrt{-I}$ ima spet $A^2 + B^2 = e^2$, torej isti gorišči.

Seveda $I = 0$ predstavlja izrojeni primer, tiri sestavljajo dve družini šopov premic v goriščih in tudi kavstika se izrodi: namesto elipse dobimo kar daljico med obema goriščema, namesto hiperbole poltraka od gorišč v neskončnost.

To med drugim pomeni, da pri igranju eliptičnega biljarda nastopi eden od naslednjih primerov:

1. *šepet na galeriji*: Obe gorišči sta ves čas na isti strani premice nosilke tirov. Šepet se lahko širi v smeri urnega kazalca ali obratno. Vsi odseki se dotikajo neke istogoriščne elipse – kavstike. Na Poincaréjevem valju vse točke ležijo na neki krivulji $I(S, p) = d_1d_2 = konst.$ V tem primeru dobimo nekakšno sinusoido, na zgornji strani valja za šepet v pozitivni smeri in na spodnji strani za šepet v negativni smeri (slika 3a).
2. *poskakujoča žoga*: Vsi odseki tirov prečkajo zveznico gorišč in se dotikajo istogoriščne hiperbole, kavstike, ki ima dve veji. Krivulja na Poincaréjevem valju je sedaj sestavljena iz dveh sklenjenih krivulj, tudi „očesi“ ali „otočka“ imenovani (slika 3b).
3. *separatrisini tiri*: Vsak odsek gre čez eno ali drugo gorišče, krivulja na Poincaréjevem valju je osmica (slika 3c).

V separatrisnem primeru imamo poseben tir, tekanje delca po veliki osi elipse. Delec se periodično odbija med levim in desnim temenom elipse, ti dve stanji sta na Poincaréjevem valju predstavljeni z dvema točkama: $(0, 0)$ in $(\frac{1}{2}, 0)$. Podobno dobimo v drugem primeru žogo, ki poskakuje po mali osi elipse, na Poincaréjevem valju dobimo točki $(\frac{1}{4}, 0)$, $(\frac{3}{4}, 0)$. Izkáže se, da je tir delca lahko tudi mnogokotnik. Zato postavimo definicije:



Slika 3. Trije načini igranja biljarda na elipsi: (a) šepet na galeriji, (b) poskakujoča žoga, (c) mejni primer med obema, separatrisa.

Definicija. n -ti iterat F^n preslikave F je kompozitum $F \circ F \circ \dots \circ F$, kjer se preslikava F pojavi n -krat.

Definicija. Točka P je *periodična točka reda n* , če velja $F^n(P) = P$ in $F^k(P) \neq P$ za $0 < k < n$.

Definicija. Periodična točka P reda n je *stabilna*, če znotraj vsake okolice $\mathcal{U} \ni P$ obstaja okolica $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, tako da je za vsak $k > 0$: $F^{kn}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$.

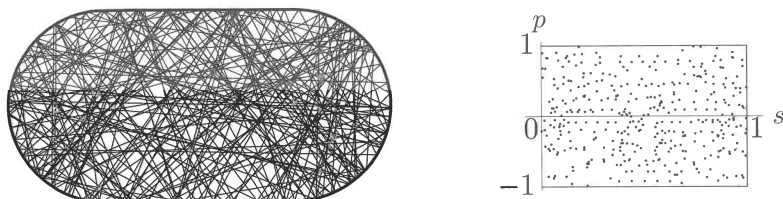
Definicija. Periodična točka P reda n je *privlačna*, če obstaja okolica $\mathcal{U} \ni P$, tako da za vsako točko $Q \in \mathcal{U}$ velja $\lim_{k \rightarrow \infty} F^{kn}(Q) = P$.

Seveda je vsaka privlačna točka stabilna, obratno pa ne. In ravno Po-incaréjeva preslikava F , ki ohranja ploščino, ima lahko stabilne periodične točke, ne pa privlačnih.

Pokazati se da, da je cikel odboja po veliki osi nestabilen in cikel odboja po mali osi stabilen. Eliptični biljard nima drugih stabilnih ciklov.

2.3 Stadion Bunimovicha

Stadion, kot si ga je zamislil Bunimovich, je sestavljen iz pravokotnika stranic a , b in dveh polkrogov premera b , ki sta nalepljena vzdolž obeh stranic dolžine b . Robna krivulja $\mathcal{K}$ je tako sestavljena iz dveh polkrožnic polmera $\frac{b}{2}$ in dveh nasprotnih stranic pravokotnika dolžine a . Razmerje $\frac{a}{b}$ je še poljuben parameter. Pomembna lastnost biljarda na stadionu je *ergodičnost* pri vsakem razmerju $\frac{a}{b}$. Kaj to pomeni?



Slika 4. Stadion: Poincaréjev valj je z verjetnostjo 1 gosto pokrit.

Za poljubno izbrano začetno stanje (s, p) točke Poincaréjeve preslikave (s_n, p_n) gosto prekrivajo Poincaréjev valj z verjetnostjo 1. To seveda pomeni, da ni nobene netrivialne invariante $I(s, p)$, ki bi se ohranila vzdolž celotnega tira, biljard ni integrabilen.

Tako kot integrabilni biljardi so tudi ergodični pravzaprav redki. Večina jih je "nekje vmes". Kaj to natančneje pomeni, si ogledamo v naslednjem poglavju.

3. Izrek K. A. M. in izrek Poincaré-Birkhoff

Pod kratico K. A. M. se skrivajo imena treh matematikov, Kolmogorova, Arnolda in Moserja, ki so prispevali vsak svoj delež v formulaciji in dokazu izreka.

V vsej splošnosti se izrek nanaša na konservativne hamiltonske sisteme z N prostostnimi stopnjami. Navedli bomo le zelo skromno varianto za poseben primer, ki izhaja iz sistema z dvema prostostnima stopnjama.

Definicija. Naj bo $F: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ gladka preslikava, ki ohranja krožnice in se v polarnih koordinatah glasi $F(r, \varphi) = (R, \Phi)$:

$$R = r,$$

$$\Phi = \varphi + 2\pi\alpha(r); \quad 0 \leq \alpha < 1.$$

Preslikavo F imenujemo *strižni zasuk*, $\alpha(r)$ pa *rotacijsko število*.

Očitno strižni zasuk ohranja vsako od koncentričnih krožnic $r = \text{konst.}$, le zasuka jo za kot $2\pi\alpha(r)$. Zato ohranja tudi ploščino. Če je rotacijsko število na nekem radiju r racionalno, $\alpha(r) = \frac{p}{q}$, so vse točke tega radija periodične s periodo q , torej negibne za F^q . Vse krožnice pa so invariantne (invariantni torusi v jeziku splošnih hamiltonskih sistemov). Vprašamo se, kaj se zgodi, če preslikavo F malce spremenimo, dodamo gladko perturbacijo

$$F \mapsto F_\varepsilon; \quad |F - F_\varepsilon| < \varepsilon \ll 1,$$

pri tem pa pazimo, da tudi nova preslikava ohranja ploščino.

Izrek K. A. M. pravi, da nekatere invariantne krožnice „preživijo“ perturbacijo, ne pa vse. Preživetje je odvisno od narave rotacijskega števila na tej krožnici.

Iz teorije verižnih ulomkov je znano, da ima vsako iracionalno število α racionalno aproksimacijo reda 2, tj. obstaja neskončno ulomkov $\frac{p}{q}$ z lastnostjo $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.

Racionalnih aproksimacij reda $5/2$ pa nimajo vsa iracionalna števila. Natančneje:

Izrek (K. A. M.). *Obstaja taka pozitivna funkcija $K(\varepsilon)$ z $\lim_{\varepsilon \searrow 0} K(\varepsilon) = 0$, da velja: če je za neka α in $\varepsilon > 0$ za vsak okrajšani ulomek $\frac{p}{q}$*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{K(\varepsilon)}{q^{\frac{5}{2}}},$$

potem krožnica z rotacijskim številom α preživi perturbacijo, t. j. se zvezno transformira v enostavno sklenjeno F_ε -invariantno krivuljo C_ε .

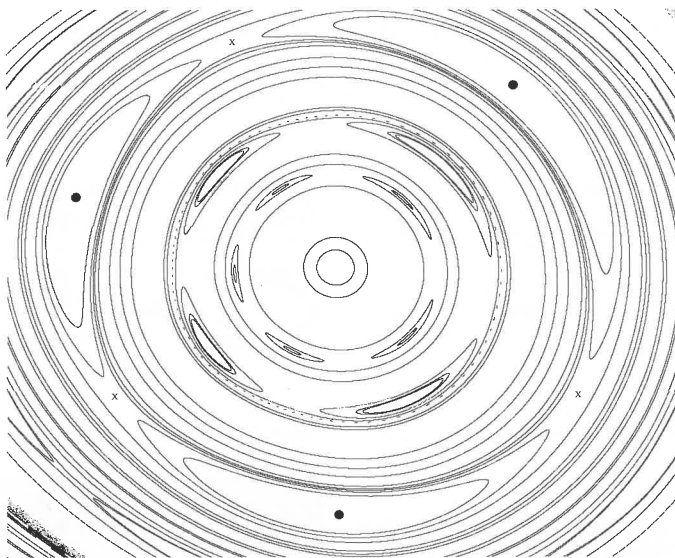
Izrek je sicer videti zelo zapleten, v resnici pa izključuje vse racionalne α skupaj z neko okolico. Pri majhnih perturbacijah preživi večina invariantnih krožnic.

Pri povečevanju ε bo seveda takih α , katerih krožnice „preživijo“, vedno manj. Izkaže se, da najdlje živi krožnica z rotacijskim številom zlatega reza $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Izrek govori o invariantnih krožnicah. Največkrat je situacija le topološko ekvivalentna, opravlka imamo z invariantnimi sklenjenimi krivuljami, ki pa so topološko seveda krožnice.

Krožnice z racionalnim $\alpha = \frac{p}{q}$ razpadejo, hkrati pa še pas sosednjih krožnic. Kaj nastane iz njih, pove izrek Poincaréja in Birkhoffa.

Izrek (Poincaré-Birkhoff). *Če pri perturbaciji razpade krožnica z racionalnim rotacijskim številom $\alpha = \frac{p}{q}$, nastane v kolobarju med preživelimi krožnicami kq ($k \in \mathbb{N}$) stabilnih in kq nestabilnih periodičnih točk reda q , ki si izmenoma sledijo vzdolž kolobarja (slika 5).*



Slika 5. Poincaré-Birkhoff: po razpadu krožnic nastanejo cikli periodičnih točk različnih redov. Na sliki smo s pikami označili stabilen cikel periode 3 in z x nestabilen cikel iste periode.

4. Mešani primeri – sobivanje kaosa in reda

Ogledali si bomo na nekaj slikah, kako nastaja kaos, kako prehajamo od integrabilnega primera proti ergodičnemu.

Začnemo z eliptičnim biljardom, zapis je v polarnih koordinatah, eno gorišče v izhodišču:

$$r = \frac{1}{1 + 0,3 \cos \varphi}.$$

Numerična ekscentričnost torej znaša 0,3, polosi pa $a = \frac{100}{91}$ in $b = \frac{10}{\sqrt{91}}$. Dodamo motnjo $\varepsilon \sin \varphi$ kar v polarni zapis robne krivulje biljarda

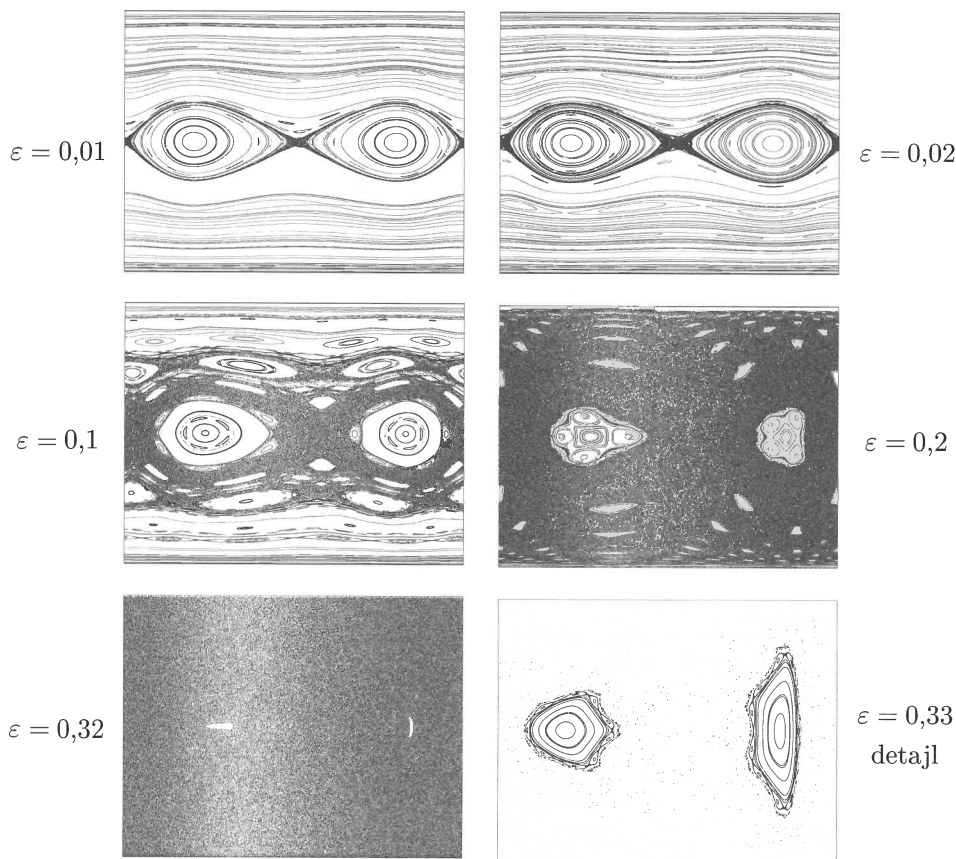
$$r_\varepsilon = \frac{1}{1 + 0,3 \cos \varphi} + \varepsilon \sin \varphi.$$

S tem smo spremenili Poincaréjevo preslikavo F , ki pripada eliptičnemu biljardu, v novo preslikavo F_ε .

Že pri majhni motnji $\varepsilon = 0,02$, ko s prostim očesom skoraj ne zapazimo, da območje ni več eliptično, delec v biljardu to začuti in na sliki 6 Poincaréjevega valja vidimo „kaotično območje“ med obema očesoma. Celo pri $\varepsilon = 0,01$ že zaznamo kaotično območje, ki je nastalo z razpadom separatriše.

Ko skočimo na $\varepsilon = 0,1$, je kaotično območje že zavzelo precejšen del Poincaréjevega valja, razločimo tudi otočke okrog periodičnih točk najrazličnejših redov.

Pri $\varepsilon = 0,2$ je kaos že skoraj povsod, le okrog oči vidimo zdaj periodične točke reda 8. Vrednost $\varepsilon = 0,32$ da že skoraj sam kaos, le zelo podroben pogled odkrije, da sta očesi še preživeli. Detajl pri $\varepsilon = 0,33$ pokaže razpad tega očesa.



Slika 6. Sobivanje kaosa in reda na Poincaréjevem valju

In vse naprej je kaos ...

LITERATURA

- [1] G. D. Birkhoff, *Nouvelles recherches sur les systemmes dynamiques*, Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei **1** (1935) 85.
- [2] R. Brilej, *Izrek K. A. M.*, magistrsko delo, Ljubljana 1994.
- [3] H. J. Korsch in H. J. Jodl, *Chaos*, A Program Collection for the PC, Springer Verlag 1994.
- [4] *Mathematica*, verzija 5. 2, Wolfram Research, Inc., Champaign 2005.
- [5] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim 1984.

O FRESNELOVEM ETRU

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.65.+p

Fresnel je predlagal model etra, da bi pojasnil merjenja, s katerimi je Arago poskusil zaznati gibanje Zemlje v etru. V tem modelu je nato izpeljal znane enačbe za odboj in lom polarizirane svetlobe. Kako je mogel nepopoln mehanični model pripeljati do enačb, ki obveljajo v Maxwellovi elektrodinamiki? Kaže, da je pomembna sestavina uspešnega nepopolnega modela z izidi merjenj skladna kvantitativna napoved, v kateri nekatere količine dobijo drugačen pomen.

ON FRESNEL'S ETHER

Fresnel proposed an ether model to explain measurements with which Arago tried to detect the motion of the Earth with respect to the ether. Within this model he then derived the well known equations for reflection and refraction of polarized light. How could an incomplete mechanical model lead to equations which remain valid in Maxwell's electrodynamics? Apparently, an important ingredient of a successful incomplete model is a quantitative prediction, in agreement with experimental results, in which some quantities are reinterpreted.

Uvod

Eter so od 17. do 20. stoletja široko uporabljali, čeprav „ni dosegel operacijskega pomena“ [1]. Iz razgibane zgodovine etra omenimo samo najpomembnejše korake, čeprav utegne to zbuditi preveč poenostavljen vtis o razvoju [2]. Antični pojem je obnovil René Descartes leta 1638 v vrtničnem modelu sveta, v katerem je svetlobo imel za nekakšen tlačni val v prozorni vrsti etra. Pravi lomni zakon je izpeljal po oporečni poti. Privzel je, da se pri lomu komponenta hitrosti v mejni ravnini ne spremeni, pravokotna komponenta hitrosti pa se pri prehodu iz praznega prostora v prozorno snov poveča. Pierre Fermat se je o tem zapletel v spor z Descartesovimi privrženci. Leta 1662 je postavil načelo, da svetloba med točkama na obeh straneh meje izbere pot, za katero potrebuje najkrajši čas. Hitrost svetlobe v praznem prostoru je večja kot v prozorni snovi, saj se svetloba pri prehodu iz prvega v drugo lomi proti vpadni pravokotnici. Do takega sklepa je pripeljalo tudi Huygensovo načelo. Večkrat beremo, da je Christiaan Huygens leta 1678 (objavljeno 1690) zasnoval prvo dosledno valovno sliko svetlobe. Vendar je mislil bolj na potovanje motenj kot na periodično valovanje. Poskusi Evangelista Torricellija so že leta 1643 pokazali, da svetloba, drugače od zvoka, potuje tudi po praznem prostoru. To je spodbujalo misel, da eter kot nekakšna zelo rahla snov z nemerljivo majhno gostoto izpolnjuje prazni prostor.

Isaac Newton v *Optiki* leta 1704 ni zastopal izrazitega mnenja o naravi svetlobe in je dopuščal, da sodelujejo eter in „etrske pare“ po zgledu vodnih par v zraku. Njegovi privrženci pa so stavili na njegovo delčno sliko in za nekaj časa zavrli razvoj valovne slike. Zaupanje v valovno sliko je po letu 1800 obnovil Thomas Young, ki je spočetka mislil, da svetloba potuje po etru, kot zvok potuje po zraku.

Hitrost svetlobe v gibajočem se etru

Leta 1810 je François Arago meril odklon svetlobe zvezd v razmiku pol leta pri prehodu skozi optično prizmo. V delčni sliki svetlobe je upošteval možnost, da se hitrost svetlobe spreminja, in pričakoval, da je odklon odvisen od hitrosti svetlobe glede na prizmo. Toda izmerjeni odklon je bil v okviru dosežene natančnosti za vse zvezde enak [3].

Augustin Fresnel je izid v objavljenem pismu Aragoju pojasnil v valovni sliki svetlobe [4]. Obravnavajmo posebej hitrost svetlobe v gibajočem se sredstvu in odklon, čeprav je to Fresnel naredil v enem koraku. Po Fresnelu je gostota etra v sredstvu z lomnim količnikom n enaka $\rho = \rho_0 n^2$, če je ρ_0 gostota etra v praznem prostoru. Eter v praznem prostoru miruje, presežni eter v sredstvu z gostoto $\rho - \rho_0$ pa se giblje s hitrostjo v sredstva glede na mirujoči eter. „Težišče etra“ se giblje s hitrostjo $[(\rho - \rho_0) \cdot v + \rho_0 \cdot 0]/(\rho - \rho_0 + \rho_0) = (1 - 1/n^2)v$, ki jo prištejemo hitrosti svetlobe v mirujočem sredstvu c/n :

$$c' = c/n + (1 - 1/n^2)v. \quad (1)$$

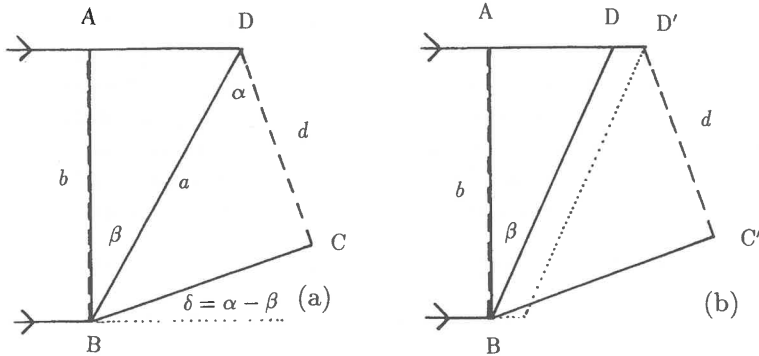
Izračunajmo odklon svetlobe δ na prizmi s trikotno osnovno ploskvijo ABD, lomečim kotom β in lomnim količnikom n , ki miruje v etru. Curek svetlobe pada pravokotno na stransko ploskev (slika 1a). Valovna črta $\overline{AB}$ je pravokotna na žarke. V času t prepotuje v novo lego $\overline{DC}$. Pri tem je $\overline{AD} = b \tan \beta = ct/n$ in $\overline{BC} = ct$. Velja $ct = a \sin \alpha$ in $ct/n = a \sin \beta$, kar da lomni zakon v obliki $\sin \alpha / \sin \beta = n$, tako da sledi za drugo valovno črto $d = \overline{DC} = b \cos \alpha / \cos \beta$.

V drugem koraku naj se prizma giblje s hitrostjo v glede na eter v smeri vpadnega curka (slika 1b). V času t valovanje s hitrostjo c' (1) najprej doseže točko D v razdalji $b \tan \beta$ in nato točko D', v katero se v tem času premakne točka prizme D. Iz zveze $b \tan \beta + vt = c't$ sledi:

$$t = \frac{b \tan \beta}{c/n - v/n^2} = \frac{nb \tan \beta}{c} \left(1 + \frac{v}{nc}\right), \quad (2)$$

če upoštevamo le člene, linearne v v/c . Izračunajmo $\overline{AB}^2 + \overline{AD'}^2 - \overline{BC'}^2$ v prvem redu v/c :

$$b^2 + b^2 \tan^2 \beta \cdot (1 + 2vn/c) - n^2 b^2 \tan^2 \beta \cdot (1 + 2v/nc) = b^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta} = d^2. \quad (3)$$



Slika 1. Lom svetlobe na prizmi, ki miruje v etru (a), in na prizmi, ki se s hitrostjo v giblje v etru v smeri vpadne svetlobe (b). Pri tem je $\overline{AD} = b \tan \beta = ct/n = a \sin \beta$, $\overline{BC} = ct = a \sin \alpha$, $\overline{CD} = a \cos \alpha = b \cos \alpha / \cos \beta = d$ in $\overline{DD'} = vt$, $\overline{BC'} = ct$, $\overline{AD'} = c't$. $\overline{DD'}$ ni narisano v merilu, ker naj bi veljalo $v/c \ll 1$ v linearnem približku v/c . V relativističnem primeru ni omejitvev.

Zveza $\overline{AB}^2 + \overline{AD'}^2 = \overline{BC'}^2 + \overline{D'C'}^2$ v tem redu pokaže, da $\overline{D'C'}$ ostane pravokotna na žarek $\overline{BC'}$ in je torej valovna črta. Gibanje prizme glede na eter ne spremeni odklona δ .

Odboj in lom po Fresnelu

Leta 1817 je Young Aragoju predlagal, da bi bilo mogoče polarizacijo, ki jo je leta 1808 odkril Etienne Malus, pojasniti, če bi longitudinalnemu valovanju dodali transversalno sestavino. Dvojni lom je že leta 1669 pri islandskem dvolomcu opazoval Rasmus Bartholinus. Malus je skozi kristal islandskega dvolomca opazoval sliko zahajajočega Sonca v svetlobi, ki se je odbijala na šipah sosednje stavbe. Vendar je Young izrazil pomislek, da „njena [transverzalne primesi] nepredstavljiva majhnost vzbuja dvom o možnosti, da bi povzročila kake opazne pojave ...“ Leta 1823 je sklenil: „... da svetlobni eter, ki prežema ves prostor in predre v skoraj vse snovi, morda ni samo visoko prožen, ampak popolnoma trden!!!“ [5] Kaže, da so Younga te nenavadne lastnosti etra odbile tako močno, da je opustil raziskovanje svetlobe [5].

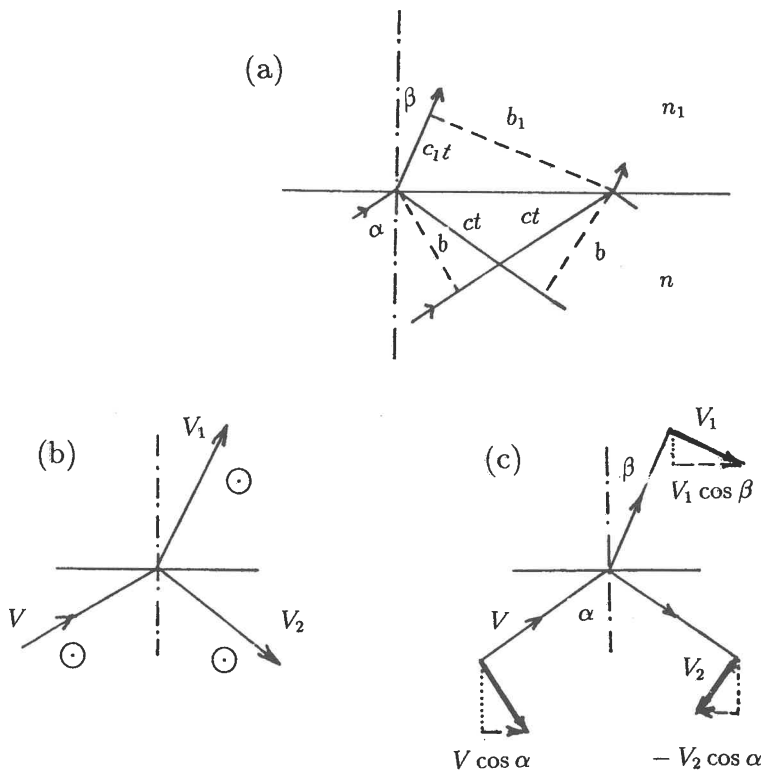
Fresnel pa ni imel pomislekov in je pojasnil polarizacijo s transversalnim valovanjem, ne glede na to, da pri gibanju skozi trdni eter ni bilo opaziti nobenega upora [6]. Nadaljeval je delo v tej smeri in leta 1823 izpeljal enačbe za odboj in lom polarizirane svetlobe [7]. Najprej je upošteval, da se energija ohrani. V valovanju je z današnjimi besedami gostota kinetične energije enaka gostoti prožnostne energije. Povprečna gostota skupne energije je enaka največji gostoti kinetične energije, ki jo dobimo, ko gostoto etra po-

množimo s polovičnim kvadratom amplitude hitrosti. Obravnavajmo prehod valovanja iz območja z lomnim količnikom n čez mejo na območje s količnikom n_1 . V vpadnem, lomljenem in odbitem valovanju amplitudo hitrosti po vrsti zaznamujemo z V , V_1 in V_2 . Povprečno energijo v valovanju dobimo, ko največjo gostoto kinetične energije pomnožimo s prostornino prizme s trikotniško osnovno ploskvijo (slika 2a). Energija med začetno valovno črto v vpadnem valovanju in mejo območij je enaka vsoti energij v lomljenem in odbitem valovanju med to mejo in valovnima črtama po času t :

$$\frac{1}{2}\rho_0 n^2 V^2 \cdot \frac{1}{2}b(c/n)t = \frac{1}{2}\rho_0 n_1^2 V_1^2 \cdot \frac{1}{2}b_1(c/n_1)t + \frac{1}{2}\rho_0 n^2 V_2^2 \cdot \frac{1}{2}b(c/n)t. \quad (4)$$

Z lomnim zakonom v obliki $\sin \alpha / \sin \beta = n_1 / n$ in zvezo $b_1 / b = \cos \beta / \cos \alpha$ sledi enačba:

$$V^2 = V_1^2 \sin \alpha \cos \beta / \sin \beta \cos \alpha + V_2^2. \quad (5)$$



Slika 2. Vpadni, lomljeni in odbiti curek pri prehodu čez mejo med dvema območjema (a) in robni pogoj, če je hitrost (jakost električnega polja, TE) pravokotna na vpadno ravnino (b) in če leži v vpadni ravnini (TM) (c).

Drugo enačbo je Fresnelu dal robni pogoj za tangentne komponente amplitude hitrosti. V valovanju s hitrostjo, pravokotno na vpadno ravnino

iz zahteve, da so tangentne komponente hitrosti na meji zvezne, izhaja (slika 2b):

$$V + V_2 = V_1. \quad (6)$$

Z enačbo (5) da to:

$$V_1/V = 2 \sin \beta \cos \alpha / \sin (\alpha + \beta), \quad V_2/V = -\sin (\alpha - \beta) / \sin (\alpha + \beta). \quad (7)$$

Za valovanje z amplitudami v vpadni ravnini je robni pogoj za tangentne komponente (slika 2c):

$$(V - V_2) \cos \alpha = V_1 \cos \beta. \quad (8)$$

Z enačbo (5) da to:

$$V_1/V = 2 \sin \beta \cos \alpha / (\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta),$$

$$V_2/V = (\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta) / (\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta). \quad (9)$$

Fresnelove enačbe (7) in (9) so izkustveni zakoni, ki bi po vsebini in pomenu zaslužili to ime.

Razprava

Enačbe je v elektrodinamiki prvi izpeljal leta 1870 Hermann von Helmholtz. Uporabil je robni pogoj, da so zvezne tangentne komponente jakosti električnega polja $\vec{E}$ in pravokotne komponente gostote električnega polja $\epsilon \epsilon_0 \vec{E}$ ter tangentne in pravokotne komponente gostote (in jakosti) magnetnega polja. Popolne enačbe sodobni učbeniki elektrodinamike izpeljejo z robnim pogojem, po katerem so zvezne tangentne komponente jakosti električnega in magnetnega polja ter pravokotne komponente gostote električnega in magnetnega polja [8].

Fresnelovega etrskega modela nismo opisali v vseh podrobnostih. Ne glede na to si postavimo vprašanje, kako je nepopoln mehanični model mogel pripeljati do veljavnih elektrodinamičnih enačb. Model ni imel samo težave, da pri gibanju po trdnem etru ni upora, ampak je vseboval tudi nedoslednost, da je zaradi odvisnosti lomnega količnika od valovne dolžine vsaka spektralna sestavina zahtevala svoj eter.

Poglejmo na Fresnelovo izpeljavo z današnjega vidika. Njegove enačbe (7) in (9) veljajo kot zelo dober približek za prozorne snovi, ki so diamagnetne ali paramagnetne in imajo permeabilnost μ zelo blizu 1. Odbojni in lomni zakon smo privzeli, tako da sta preostali le dve neznani količini V_1 and V_2 . V tem primeru zadostujeta dva pogoja (5) in (6) ali (8).

Hitrost transverzalnega valovanja v homogeni prožni snovi je:

$$c = (G/\rho)^{1/2} \quad (10)$$

s strižnim modulom G in gostoto ρ . Če strižni modul ustreza $1/\mu\mu_0$ z $\mu = 1$, zares lahko vzamemo, da je za vse prozorne snovi enak. Za gostoto snovi vzamemo, da ustreza $\varepsilon\varepsilon_0$, tako da lahko postavimo $\rho = \varepsilon\rho_0 = n^2\rho_0$. Poudarimo, da Fresnelova izpeljava pripelje do cilja le za primer, da na obeh straneh meje postavimo $\mu = 1$. Z njo ne bi mogli pojasniti enačbe za hitrost svetlobe v snovi:

$$c_s = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (11)$$

Ta misel pripelje do zanimivega razmišljanja o splošnem primeru [10].

Pri prehodu od Fresnelovega modela do elektrodinamike moramo razločiti vsaj dva koraka. Prvi korak je vodil od Fresnelovega mehaničnega modela do Maxwellovega mehaničnega modela v *Fizikalnih silnicah* v letih 1861 in 1862. Z enačbo (10) je tedaj prvič jasno uvidel elektromagnetno naravo svetlobe [9]. V naslednjem koraku je Maxwell „nekoliko okorni“ mehanični model nadomestil z električnim in magnetnim poljem. Tako je „[...] pojem etra [...] Maxwellu, na primer, pomagal oblikovati uspešno teorijo elektromagnetnega polja in valovanja.“ [1]

Za opisani del Fresnelove izpeljave so bistvene kvantitativne napovedi (1), (7) in (9). V elektrodinamiki amplitudam hitrosti V , V_1 in V_2 damo nov pomen, jih *reinterpretiramo*, kot amplitude ustreznih jakosti električnega polja E , E_1 in E_2 . Taka reinterpretacija je neizogibna, saj bi se sicer nova napoved sploh ne razlikovala od stare. Pomeni pa tudi znaten korak naprej v razvoju fizike. Naključje bi utegnilo biti pri tem manj pomembno, kakor se zdi na prvi pogled. Obveljale so lahko le trditve, ki so se skladale s tedanjimi opazovanji. Samo v takih je bilo pozneje mogoče količine uspešno reinterpretirati. Dele modela so kmalu podprli z merjenji, na primer Hyppolite Fizeau leta 1851 zvezo (1) z interferometrom s tokom vode.

Ali je bil s stališča elektrodinamike Fresnelov model zgrešen? Mogoč odgovor se utegne skrivati v spoznanju, da je bil to po tedanjih kriterijih uporaben opis pojavov v naravi, kar nekateri imenujejo „pojasnjevalna približna resnica“, explanatory approximate truth [11]. Ko je mehanični model nadomestila elektrodinamika, so se kriteriji spremenili. Po Einsteinovo „teorija naredi tem globlji vtis, čim bolj so njene predpostavke preproste, čim več različnih stvari zajame in čim večje je območje njene uporabnosti“.¹ [12] Fresnelov mehanični model je pri začetku niza, Maxwellova elektrodinamika pa na koncu.

Posebna teorija relativnosti je odpravila eter, a splošna teorija relativnosti ga je ponovno uvedla s tem, ko je praznemu prostoru dala dinamični

¹Beseda model ima veliko pomenov, od katerih samo eden ali dva zadevata fiziko. *Unabridged Dictionary* založbe Random House iz leta 1993 med 25 pomeni navaja: „poe-nostavljen prikaz sistema ali pojava, na primer v naravoslovju ali ekonomiji z domnevami, potrebnimi, da opiše sistem ali pojasni pojav, pogosto matematično“. Kot pojmov domneva, predpostavka, načelo, izrek, zakon tudi pojma model ne uporabljamo dosledno, ampak se pogosto ravnamo po tradiciji.

pomen. Ali ni Higgsov lažni vakuum v elektrošibki teoriji ali temna energija v standardnem modelu vesolja – včasih jo imenujejo kvintesenca – eter v sodobni preobleki?

Relativistični dostavek

Zapisane enačbe omogočijo zanimiv izlet v posebno teorijo relativnosti, ki, kot kaže, v literaturi ni znan. Izvajanje ponovimo z relativistično hitrostjo $v_x = (v'_x + v)/(1 + v'_x v/c^2)$. Vanjo vstavimo $v'_x = c/n$ in dobimo za hitrost svetlobe v gibajočem se sredstvu:

$$c_r = (c/n + v)/(1 + v/(nc)). \quad (12)$$

Hitrost c_r se v prvem redu v/c ujema s c' (1). V opazovalnem sistemu, v katerem se prizma giblje s hitrostjo v , pride do izraza relativistično skrčenje roba v smeri gibanja: $l' = l(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ z $l = \overline{AD}$. Tako je:

$$\tan \beta' = l'/b = (l/b)(1 - v^2/c^2)^{1/2} = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \tan \beta. \quad (13)$$

S tem na prejšnji način, v katerem (12) uporabimo namesto (1), brez kakršnega koli približka dobimo:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD'}^2 - \overline{BC'}^2 = b^2[1 - (n^2 - 1) \tan^2 \beta' / (1 - v^2/c^2)] = b^2 \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \beta}. \quad (14)$$

Postopek lahko obrnemo in z zahtevo, da se odklon zaradi gibanja ne spremeni, previdno izpeljemo (12). Iz tega izhaja misel na možnost, da bi relativistično transformacijo hitrosti svetlobe v gibajočem se sredstvu lahko spoznali po letu 1892, ko je George Francis Fitzgerald predlagal, da se skrčijo dolžine. Ali ne bi moglo to že tedaj omajati zaupanja v nerelativistično seštevanje hitrosti in spremeniti tok razvoja?

LITERATURA

- [1] G. Holton in S. Brush, *Concepts and Theories in Physical Science*, Addison-Wesley, Reading, Mass. 1973, str. 188.
- [2] J. Strnad, *Eter*, Obzornik mat. fiz. **30** (1983), str. 97.
- [3] R. Ferraro, D. M. Sforza, *Arago (1810): the first experimental result against the ether*, Eur. J. Phys. **26** (2005), str. 195.
- [4] A. J. Fresnel, *Lettre de M Fresnel à M Arago, sur l'influence du mouvement terrestre dans quelques phénomènes d'optique*, Ann. chim. phys. **9** (1818), str. 57.
- [5] E. W. Morse, *Thomas Young v Dictionary of Scientific Biography*, C. C. Gillispie (ur.) Vol. XIV, C. Scribner's Sons, New York 1976, str. 562.
- [6] E. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity*, Vol. I. Nelson & Sons, London 1951, str. 115.

- [7] A. J. Fresnel, *Memoire sur la loi des modifications que la reflexion imprime a la lumiere polarizée* v *Oeuvres Complètes d'Augustin Fresnel*, H. de Senarmont, E. Verdet in L. Fresnel (ur.), Vol. 1, Imprimerie Impériale, Paris 1966, str. 767.
- [8] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, J Wiley & Sons, New York 1999, str. 302.
- [9] J. C. Maxwell, *Über physikalische Kraftlinien*, L. Boltzmann (ur.), W. Engelmann, Leipzig 1898, str. 66 (Boltzmann je prevedel pet Maxwellovih člankov in jih opremljene z obsežnimi pripombami izdal v knjižici).
- [10] P. Gosar, *O Brewstrovem zakonu*, *Obzornik mat. fiz.* **34** (1987), str. 125.
- [11] J. Saatsi, *Reconsidering the Fresnel-Maxwell case study*, *Studies in the History and Philosophy of Science* **36** (2005), str. 509.
- [12] A. Einstein, *Autobiographical Notes* v *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, P. A. Schilpp (ur.), Tudor, New York 1949, str. 33.

NOVE KNJIGE

Vasja Kožuh: **SREDNJEŠOLSKI PLONK – FIZIKA**, Rokus, Ljubljana 2005–2006, 6 strani.

Pri založbi Rokus je pred kratkim izšla zgibanka *Srednješolski PLONK Fizika*. Zgibanko je pripravil kolega Vasja Kožuh, ki ima že kar nekaj pedagoških in založniških izkušenj. Zgibanka je namenjena srednješolskim dijakom in vsebuje sistematično obdelano preglednico fizikalnih formul, zakonov in razlag z grafičnimi ponazoritvami. Med branjem Plonka postane jasno, da je fiziko izredno težko razložiti na kratko in Plonk ne more biti nadomestilo za učbenik. To tako poudarjam, ker si živo predstavljam skušnjava mladih, da ubirajo bližnjice.

Vsekakor pa je zgibanka temeljito in pregledno pripravljena in iz svojega formata iztisne največ. Plonk ima pred običajnimi zbirkami formul prednost zato, ker so formule in količine, ki v njih nastopajo, primerno razložene in, kadar mogoče, opremljene s skicami. To močno izboljša razumevanje in uporabnost. V primerjavi s podobnimi zbirkami formul je izbrani format preglednejši, solidna plastificirana vezava pa mu zagotavlja dolgo življenjsko dobo in bo koristna referenca tudi kakšnemu starejšemu kolegu. Uporabnost pravega „plonka“ mu preprečuje edino velikost formata A4. Tako in tako je že splošno znana skrivnost, da je plonk uporaben šele potem, ko ga znamo



že na pamet, in moj nasvet bodočim uporabnikom je, naj za vajo v njem poiščejo kako napako ter se pri tem podrobno seznani z vsebino.

Aleš Mohorič

VESTI

STROKOVNO SREČANJE IN 59. OBČNI ZBOR DMFA SLOVENIJE

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi k sodelovanju na strokovnem srečanju in 59. občnem zboru, ki bosta 9. in 10. novembra 2007 v Termah Olimia v Podčetrtku. Vodilni temi bosta *Fizikalne igranje in preprosti poskusi* ter *Motivacija pri pouku matematike*. Vse, ki želijo predstaviti zanimivosti s teh področij, nove metode dela in novosti pri pouku matematike, fizike in astronomije (pripomočke, nove vsebine, zanimive eksperimente in posebne prilagoditve), prosimo, da nam to čim prej sporočijo (podrobna navodila za prispevke so objavljena v 2. številki letošnjega *Obzornika za matematiko in fiziko*).

Ob letošnjem občnem zboru bomo pripravili tudi *12. slovensko srečanje o uporabi fizike* in *1. slovensko srečanje matematikov raziskovalcev*. Podrobnejši program srečanj bomo objavili na spletni strani društva. Posebej bi radi opozorili na **predstavitev novih možnosti za študij fizike in matematike** po prenovljenih oziroma novih programih na slovenskih fakultetah. Sodelovali bodo predstavniki fakultet, na katerih izobražujejo fizike in matematike.

Na strokovno srečanje se je treba prijaviti do 15. oktobra 2007 oziroma do zapolnitve mest (največ 150 udeležencev), in sicer izključno prek informacijskega strežnika (vodena bo evidenca prijav in upoštevana omejitev števila udeležencev). Vljudno prosimo, da se prijavite po predhodnem soglasju vodstva šole. Račun za plačilo kotizacije (65 EUR za udeleženca, člani DMFA imajo 50 % popusta) bomo poslali takoj po končanem roku za prijavo.

Hotelske storitve si morajo udeleženci seminarja rezervirati sami najkasneje do 15. oktobra 2007 (**rezervacije@terme-olimia.com**). Pri prijavi navedite termin (datum prihoda in odhoda) in želeno storitev (polpenzion, polni penzion) ter zapišite, da se prijavljate v okviru DMFA Slovenije, saj imajo udeleženci strokovnega srečanja poseben popust. Za udeležence so v hotelu pripravili posebne ugodnosti za družine in tiste, ki bodo prenočili tudi v nedeljo. Vsi obroki so samopostrežni, udeleženci pa imajo na voljo brezplačno parkiranje v garažni hiši pod hotelom. Podrobnejše informacije lahko dobite na spletni strani DMFA (<http://www.dmfa.si/>).

Nada Razpet

UČENJE SKOZI PROBLEME

ANDREJA DROBNIČ VIDIC

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 97D40, 97D50, 97C30

Opišemo reševanje problemov pri problemsko naravnem učenju s poudarkom na inženirski statistiki. Osredotočimo se na vrste interdisciplinarnih problemov, ki so v statistiki drugačne narave kot večina problemov v matematiki.

PROBLEM-BASED LEARNING

Problem-based learning is based on solving interdisciplinary real-life problems which determine the learning content. This learning approach is very suitable for basic engineering statistics course. In this article, our attention is focused on types of interdisciplinary problems that are in statistics course different as in most mathematical courses.

1. Uvod

Razvoj kritičnega razmišljanja in reševanje problemov sta pomembni učni komponenti na vseh strokovnih področjih, posebej pomembni pa sta pri matematiki, kjer skušamo sposobnost in zmožnost reševanja problemov skrbno razvijati. Sposobnost reševanja problemov je v veliki meri odvisna od posameznikove genske zasnove (IQ), na katero v šoli lahko le deloma vplivamo, veliko pa lahko storimo za razvoj zmožnosti reševanja problemov (učenje poti reševanja problemov, algoritmov za njihovo reševanje, ...). Zmožnost kakovostnega in ustvarjalnega reševanja problemov lahko pri učencih aktivno razvijamo, ko jim postavimo zanimiv realen oziroma življenjski problem, s katerim se učenci spopadejo, še preden jim podoben problem rešimo sami. Tak problem učence motivira, da s pomočjo poprejšnjega znanja pridobijo novo znanje, ki je potrebno za rešitev problema. Seveda je pomembno, kateri ciljni skupini je problem namenjen.

Matura s (pretirano) temeljito pripravo na določene tipe nalog ne razvija dovolj kritičnega razmišljanja in reševanja problemov [1]. Prav reševanje problemov in uporaba znanja sta se pri znanju matematike srednješolcev pred vstopom na univerzo v mednarodni raziskavi TIMSS (Third international mathematics and science study) 1995 izkazala za najšibkejši komponenti [2]. To pa pomeni, da je treba ta primanjkljaj v čim večji meri odpraviti. Toliko bolj, ker z naraščanjem znanja in informacij na vseh strokovnih in znanstvenih področjih učenci za samostojno delo in izobraževanje v poklicu nujno potrebujejo zmožnost in sposobnost samostojnega učenja, kritičnega razmišljanja in reševanja realnih problemov.

Ena od učnih inovacij, kjer učenci v veliki meri lahko razvijajo zmožnost in sposobnost reševanja realnih, praktičnih problemov in uporabe znanja, je problemsko naravnano učenje (ang. problem-based learning – PBL). Ta način organizacije pouka, ki so ga v največji meri razvili in uporabili do sedaj pri študiju medicine, zahteva korenito spremembo v organizaciji pouka, tako v razporeditvi snovi, v nalogah izvajalcev pouka, v nalogah in zahtevah učencev, kot tudi v ocenjevanju [3]. Za izvedbo je treba zadostiti več pogojem. Bistvenega pomena je, da pri takem načinu pouka realen problem pri učencih sproži in vodi učenje določene snovi.¹

Seveda moramo kritično presoditi, na katerih strokovnih in znanstvenih področjih je za razvoj kritičnega razmišljanja ta učna inovacija primernejša od drugih oblik učenja. Pri določenih matematičnih vsebinah, ki zahtevajo dobro strukturiranost, je bolje snov kar podati na tradicionalen način [4]. A tudi pri temeljnih znanstvenih disciplinah, ki jih potrebujejo na primer bodoči inženirji in praktiki, so vsaj v določeni meri realni problemi, ki sprožijo učenje snovi, dobrodošli, saj znanstveno disciplino povežejo s stroko.

Namen tega prispevka je prikazati vrste problemov pri problemsko naravnem učenju, s katerimi pri učencih razvijamo zmožnost reševanja problemov in pridobivanje novega znanja v situaciji, ki je podobna tisti, s katero se bodo soočili kasneje na delovnem mestu ali v vsakdanjem življenju. Tako pridobljeno znanje je po mnenju Normana in Schmidta bolj uporabno in vseživljenjsko, kajti s konkretnimi problemi vezano znanje učenci hitreje priključijo iz globokega spomina in ga znajo bolje uporabiti kot znanje, pridobljeno posebej kot del neke znanstvene discipline [18]. Podani zgledi in eden od načinov ocenjevanja naj bi pripomogli k hitrejši sestavi interdisciplinarnih problemov tistih, ki bi tak način učenja želeli preizkusiti. Javno dostopni zgledi kvalitetnih problemov iz raznih področij bi bili zato zagotovo zelo dobrodošli.

2. Problemsko naravnano učenje razvija zmožnost reševanja problemov

Pri problemsko naravnem učenju je pouk razdeljen v zaporedne faze. Na začetku vsake faze zastavimo učencem realen problem. Rešujejo ga v majhnih skupinah v dveh ali tudi več zaporednih (blok) urah. Problem mora biti ravno prav težak in strukturiran, da učenci lahko s svojim predznanjem o njegovi rešitvi razmišljajo in razpravljajo. Mora biti zanimiv in aktualen, vzet iz vsakdanjega življenja ali poklicne prakse, da jim vzbudi zanimanje. Sestavljen mora biti tako, da ga učenci samo s pomočjo poprejšnjega znanja

¹V tujini je PBL zelo razširjen, uvedli so ga tudi na matematični fakulteti Ilinois Mathematics and Science Academy. V Sloveniji so ga uvedli na novoustanovljeni medicinski fakulteti v Mariboru, samoiniciativno pa ga uvajajo tudi nekateri učitelji tujega strokovnega jezika, učitelji na Biotehniški fakulteti, Filozofski fakulteti, na Fakulteti za gradbeništvo in geodezijo, pri pouku verjetnostnega računa in statistike na Fakulteti za kemijo in kemijsko tehnologijo in morda še kje.

ne znajo enostavno rešiti, temveč morajo osvojiti določeno snov, ki je del predmeta oziroma izbranega področja, da jim z vsemi miselnimi navori nato problem uspe rešiti.

Problemsko naravnano učenje je usmerjeno k učencem. Ti rešujejo problem v majhni skupini, so aktivni, sprašujejo, razpravljajo, iščejo, dajejo pobude, ideje in poti za rešitev problema. Učenci sami si določijo učne cilje, kaj novega morajo spoznati, da bodo problem lahko rešili. Izvajalec pouka jim pri tem pomaga, a sam ni glavni akter. Izvajalcu pouka se zmanjšuje vloga predavatelja – prenašalca znanja in povečuje vloga usmerjevalca – vodnika pri učenčevi samostojni izgradnji znanja. Učenci imajo pri tem konstruktivističnem načinu učenja možnost, da novo znanje na podlagi lastnega predznanja, razpravljanja v skupini in novih informacij, ki jih dobijo z različnimi viri, zgradijo sami. Problemsko naravnano učenje daje možnost uporabe in razvijanja zmožnosti reševanja problemov, sodelovalnega dela in komunikacije. Izvajalci pouka morajo učencem omogočiti dostop do informacijske tehnologije in drugih učnih virov, kar omogoča učenje s pomočjo novih informacij. Učenci torej pri tej obliki učenja razvijajo zmožnosti, ki so pomembne za uspešno samostojno učenje. Danes se po končanem šolanju izobraževanje ne konča, tudi na delovnem mestu in v vsakdanjem življenju je potrebno nenehno samostojno izobraževanje.

Predavanja in enkratno preverjanje znanja ob pomanjkanju časa ne omogočajo zadostnega razvoja zmožnosti za reševanje problemov. Pogosto učitelj sam reši problem, učenci pa se naučijo zbirati podobne probleme in jih reševati po vnaprej predstavljenem vzorcu. Če naletijo na nov problem, ga zato pogosto ne znajo reševati [5, str. 4–7]. Prav pri matematiki za učence nematematičnih visokošolskih študijskih programov namreč opažamo, da takoj, ko učenci naletijo na nalogo, ki ni podobna kakšni od tistih, ki so jo pri pouku že reševali, odnehajo in je sploh ne poskušajo rešiti. Pri problemsko naravnanim učenju učenci obravnavajo in rešujejo v celotni fazi en sam problem in se ob njem učijo poti reševanja problema in procesa samostojnega dela in učenja. Pogosto ga rešujejo po modelu 7 korakov [6], ki jih prikazuje tabela 1.

1. korak	Razjasnitev pojmov in konceptov, ki niso razumljivi
2. korak	Definiranje problema
3. korak	Analiza problema (deževanje idej (ang. brainstorming))
4. korak	Seznam možnih razlag
5. korak	Oblikovanje učnih ciljev in najvažnejših nalog
6. korak	Iskanje novih informacij zunaj skupine
7. korak	Poročanje, sinteza in preverjanje pravilnosti novih informacij

Tabela 1. Reševanje problema po modelu 7 korakov

Model 7 korakov učencem natančneje predstavimo, saj je dobra osnova za to, kako naj se naučijo spoprijeti z neznanim problemom. Na prvem sestanku

učenci v skupini najprej umestijo dobljen problem v strokovno področje, se seznanijo z nejasnimi pojmi ali izrazi in ugotovijo, kaj problem od njih zahteva. Povedo, kaj o tem problemu že vedo, katere informacije so znane, na podlagi poprejšnjega znanja podajo trenutne ideje za rešitev problema, ki se jim porodijo v glavi. Učenci nato ideje zapišejo, analizirajo, izločijo slabe (nemogoče) in izoblikujejo prioritarno listo možnih poti, ki bi lahko pripeljale do rešitve problema. Zatam določijo, katere informacije je treba še poiskati, da bodo problem rešili. Razdelijo si naloge za samostojno iskanje in učenje. S tem je prvi sestanek končan. Nato zunaj učnih ur samostojno iščejo dodatne informacije, razlage in podatke. Na drugem sestanku zberejo nove informacije, drug drugega poučijo o snovi in informacijah, ki so jih spoznali. Z novim znanjem nato poskusijo problem rešiti. Običajno je, da pri tem delajo napake, da zaidejo na stranpoti. Zato pogosto poskušajo znova in znova, izločajo manj pomembne stvari, iščejo nove informacije in ponavljajo posamezne korake, dokler problem ni rešen. Naslednji problem je zanje spet problem, vendar se ga že znajo lotiti.

Seveda moramo pri takem načinu pouka spremeniti tudi ocenjevanje, ki mora slediti ciljem novega načina pouka. Zmožnost reševanja kompleksnega problema ima pomembno mesto pri ocenjevanju.

3. Oblikovanje problemov pri problemsko naravnem učenju inženirske statistike

V tuji literaturi o problemsko naravnem učenju lahko precej preberemo o splošnih lastnostih kakovostnega problema, manj pa je konkretnih zgledov, kakšen problem je kakovosten, motivacijski in hkrati sproži učenje želene snovi.

Problemsko naravnano učenje smo vpeljali v učenje osnov statistike za inženirje [7], ki je oblikovana na matematičnih temeljih, vendar se uporablja predvsem za reševanje realnih življenjskih problemov določenega strokovnega področja v inženirstvu. Učenje statistike za inženirje in problemsko naravnano učenje imata mnogo skupnih komponent. Cilj učenja statistike za inženirje je zmožnost reševanja statističnih problemov v inženirstvu, problemi iz prakse pa so hkrati temelj problemsko naravnane učenju. Statistične probleme v inženirstvu navadno rešuje skupina strokovnjakov, sodelovalno delo pa je značilno tudi za omenjeno učno inovacijo. Statistični problemi v inženirstvu združujejo različna področja, od matematike, statistike do raznih inženirskih področij. Pri problemsko naravnem učenju je pouk razdeljen na sklope, ki združujejo različna področja glede na izbrane probleme. Delo z računalnikom je nepogrešljivo pri učenju statistike za inženirje, prav tako je računalnik pomemben vir novih informacij pri problemsko naravnem učenju, saj učitelj ni edini vir novega znanja in informacij.

Pri osnovah inženirske statistike večinoma obravnavamo naslednje učne vsebine: verjetnostni račun, slučajne spremenljivke, verjetnostne porazdelitve, zbiranje, obdelava in prikazovanje podatkov, vzorčenje in izračun osnov-

nih statističnih parametrov vzorca, ocenjevanje statističnih parametrov, statistične hipoteze, regresija in korelacija; seveda so vsebine lahko v drugačnem vrstnem redu [8]. Pri problemsko naravnem učenju inženirske statistike je število problemov odvisno od izvedbenih ur, ki so na razpolago, in od tega, kako podrobno obravnavamo vsebine inženirske statistike. Nekaj uvodnih ur navadno namenimo učenju metod reševanja problema (npr. po modelu 7 korakov). Tu ima izvajalec pouka še vodilno vlogo. Nato pa se znanje nadgrajuje, veliko pa o snovi učenci vedo iz vsakdanjega življenja.

Kakovostna sestava problemov je bistvenega pomena. Problemi, ki sprožijo učenje določene snovi, si tako časovno kot vsebinsko sledijo od lažjih k težjim in morajo ustrezati vsem splošnim karakteristikam dobrega problema [9]. Najprej so problemi bolj strukturirani, nato pa se kompleksnost stopnjuje, problemi pa so vse manj strukturirani, informacije so nepopolne. Vse več je odprtih problemov, ki zahtevajo zahtevnejše miselne aktivnosti (analiza, sinteza, planiranje, formulacija hipotez, ...). Pri uvodnih problemih uporaba računalnika ni nujno potrebna, kasneje pa morajo učenci vse več informacij in podatkov najti in jih obdelati s pomočjo uporabe računalnika. Primernost problema je odvisna od reševalca. Določen problem je lahko za študente naloga, za dijake pa nerešljiv problem [10, str. 445]. V začetku sta za rešitev potrebna dva sestanka, kot zahteva osnovni model 7 korakov, kasneje pa so problemi daljši in se rešujejo po razširjenem modelu 7 korakov, kjer so potrebni štirje sestanki ali celo več: poleg sestanka o ciljnih in o učenju, ki predstavljata klasični model 7 korakov, še sestanek o povratni informaciji in utrditvi [6, str. 4-2 do 4-4].

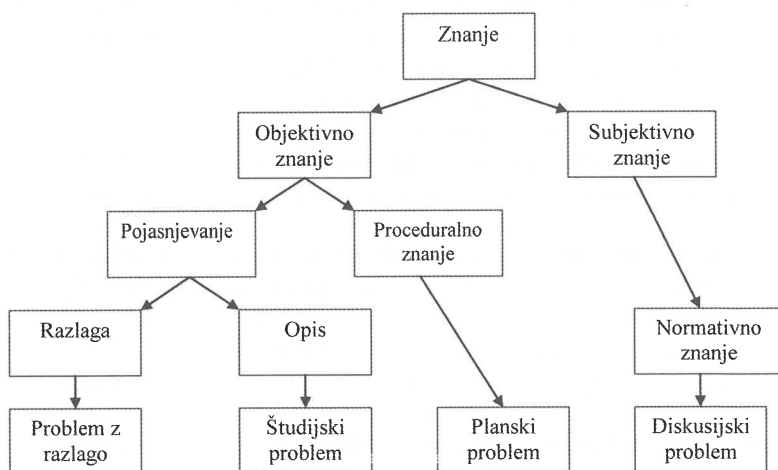
3.1 Vrste problemov

Probleme lahko razvrščamo na različne načine (po vsebini, po načinu reševanja, po zahtevnosti in podobno). V matematiki probleme lahko razvrstimo po načinu (strategiji) reševanja problema [11, 12]. Johnstone je probleme naravoslovja razdelil le v 8 skupin glede na to, ali so podatki, metode in cilji znani v celoti ali ne [13, str. 132]. Pri problemsko naravnem učenju sta Smith in Moust [14] razvrstila probleme glede na tip znanja, ki ga problem v največji meri sproži ali zahteva:

1. Problem z razlago (ang. explanation problem),
2. Študijski problem (ang. fact-finding problem / study problem)
3. Planski problem (ang. strategy problem),
4. Diskusijski problem (ang. moral dilemma resolution / discusion problem).

Te vrste problemov izvirajo iz razlike med subjektivnim in objektivnim znanjem (slika 1). Objektivno znanje je tisto znanje, ki je zapisano v knjigah, dobljeno v raznih raziskavah, dostopno javnosti, ki to znanje seveda lahko preverja, ocenjuje, izboljša in podobno. Pri objektivnem znanju ločimo pojasnjevalno znanje, kjer pojasnjujemo nek pojav, ter proceduralno znanje,

kjer podajamo postopke za spreminjanje pojava. S pojasnjevalnim znanjem opisujemo ali razlagamo pojave in svet okoli nas, medtem ko s proceduralnim znanjem spreminjamo pojave in svet okoli nas. Podobno delitev objektivnega znanja za probleme iz fizike sta opisala de Jong in Ferguson-Hesser, le da sta proceduralno znanje delila glede ne to, ali spreminjanje pojava le oblikujemo, ali to spreminjanje tudi izvajamo. Ločita torej probleme še glede na to, ali načrt, plan oziroma postopek le oblikujemo in zapišemo ali ga tudi izvedemo [10, str. 446].



Slika 1. Vrste problemov pri problemsko naravnem učenju glede na vrsto znanja (po Schmidtu in Moustu 1998)

V nasprotju z objektivnim – javnim znanjem pa je subjektivno znanje, ki ga posameznik zgradi in nosi v sebi. Zgrajeno je na podlagi javno dostopnega objektivnega znanja in posameznikovih izkušenj ter prepričanj. To znanje nam posameznik lahko razkrije ali pa tudi ne. Ravno zato je subjektivno znanje težje dostopno, težje ga ocenjujemo, a je za določen poklic prav tako pomembno.

Glede na to, katero znanje pri posameznem problemu prevladuje, katero znanje v največji meri zahtevamo oziroma pri učencih razvijamo, razvrstimo problem pri problemsko naravnem učenju v enega izmed prej naštetih vrst, ki jih prikazuje slika 1.

Na kratko bomo opisali vsako vrsto problema in podali primer za dano vrsto, kakršna nastopi pri izvajanju problemsko naravnega učenja osnov inženirske statistike.

Problem z razlago. Kadar želimo, da učenci znajo razložiti kak pojav, da razumejo določen princip ali delovanje, tedaj postavimo problem z razlago. V njem zastavimo vprašanja: „Kako deluje ...? Razloži ...!“ in podobno. Problem postavimo pri inženirski statistiki pogosto na začetku izvajanja problemsko naravnega učenja, ko morajo učenci dobiti teoretična spoznanja

o verjetnosti in verjetnostnih porazdelitvah, Učenci prek problema z razlago spoznavajo na primer določene statistične principe, teoretične modele ali slučajne spremenljivke, ki jih pogosto uporabljamo, da z njimi kasneje prikažemo praktično situacijo.

Zgled 1 (število rezervacij za sedež na letalu). Ameriško letalo, ki leti na relaciji New York–Boston, ima na voljo 120 sedežev. Navadno vsak, ki se želi peljati na omenjeni relaciji, najprej v agenciji rezervira sedež na letalu. Napravljenih je lahko največ 120 rezervacij. Ker pa je ta linija zelo obremenjena, so večinoma vsa mesta na letalu zapolnjena z rezervacijo sedeža. Seveda tisti, ki je sedež rezerviral, lahko pride na letalo ali pa ne. V povprečju 5% ljudi, ki rezervirajo sedež na letalu, v resnici ne pride na letalo zaradi tega ali onega razloga. Zato so se v agenciji, ki organizira lete na tej relaciji, odločili, da bodo sprejemali 126 rezervacij namesto 120 rezervacij za let na omenjeni relaciji. Razloži, zakaj je agencija ravnala tako!

Učenci naj bi se s problemom seznanili z binomsko porazdelitvijo. Najprej ugotovijo, kateri podatki so znani in kaj lahko izračunajo. Spoznajo, da sta pri rezervaciji vsakega sedeža le dve možnosti: da oseba po rezervaciji pride na letalo ali ne. Sedežev je 120. Da oseba pride na letalo, je 95 % verjetnost in 5 % je verjetnost, da osebe ne bo na letalo. Toda zakaj so v agenciji dodali ravno 6 rezervacij več? Izvajalec pouka učence nato lahko vpraša (če se ne vprašajo sami): Ali lahko izračunamo, kakšna je verjetnost, da ene osebe, ki je rezervirala sedež, ni na letalo? Verjetnost, da dveh oseb ni? Da treh ni ... Da šestih oseb ni? Zaradi velikih števil je zelo pomembna formula za izračunavanje teh verjetnosti (pomoč računalnika je dobrodošla). Učenci izračunajo nekaj vrednosti, potem pa si verjetno zadajo cilje: zapisati porazdelitveno shemo slučajne spremenljivke za število ljudi, ki ne pridejo na letalo, poiskati čim več lastnosti dane teoretične slučajne spremenljivke: diskretnost, matematično upanje, disperzijo, ... Naloge si lahko razdelijo. Nekaj članov lahko sestavi računalniški program za porazdelitveno shemo. Morda drugi preberejo lastnosti binomske porazdelitve v kaki literaturi in ugotovijo, da matematično upanje enostavno izračunamo kot produkt števila sedežev in verjetnosti, da potnik sedež res zavzame. Na naslednjem sestanku nato prikažejo vse izračunane, vse nove informacije in zaključijo, da je število dodanih sedežev matematično upanje za to slučajno spremenljivko in da je 6 najverjetnejše število ljudi (med 120), ki rezervirajo sedež, a ne poletijo. Ugotovijo lahko lastnosti za binomsko porazdelitev z namišljenimi 126 sedeži in s 5-odstotno verjetnostjo nenadne odpovedi leta. Lahko izračunajo verjetnost, da med 126 rezervacijami pride na letalo 121 ali več potnikov, in kritično ocenijo ravnanje agencije.

Pomembno vlogo pri reševanju problema z razlago ima izvajalec pouka (profesor ali asistent), ki ni več tisti, ki razlaga, temveč tisti, ki učence usmerja pri samostojnem razmišljanju. Pomaga jim v procesu reševanja problema, pri ugotavljanju, kaj problem od njih zahteva, česa ne vedo in kaj se je treba naučiti. Postavlja jim ustrezna vprašanja in namige. Skupin ne

sme biti preveč, da jim lahko pomaga postaviti prave učne cilje in da jih usmeri na tisto znanje, ki ga že imajo o določenem pojavu (na primer poznavanje splošnih lastnosti porazdelitvenih funkcij). V opisanem problemu jim na 2. sestanku postavlja dodatna vprašanja, da spozna, ali so s pogoji uporabe binomske spremenljivke seznanjeni, da preveri, ali znajo uporabiti binomsko slučajno spremenljivko za odgovore na druga vprašanja in ali znajo novo snov prenesti v novo situacijo.

Študijski problem. Včasih morajo učenci pridobiti in se naučiti določene informacije. V takem primeru postavimo študijski problem, v katerem spoznajo, zakaj so te informacije zanje (in stroko) tako pomembne. To naj bi jih motiviralo za učenje teh informacij. Postavitev študijskega problema pri inženirski statistiki je redka. Malo je namreč snovi, ki bi jo morali učenci le teoretično preštudirati. Lahko podamo primer, ko učenci podrobneje predelajo lastnosti normalne porazdelitve, katere formulo in graf ter lastnosti le poiščejo v literaturi in jih ni treba izpeljati. Vselej pa takemu samostojnemu študiju sledi sestanek, na katerem se učenci pogovorijo med seboj. V razgovoru spoznajo, ali so pravilno razumeli novo snov, ali jo znajo uporabiti v novih problemih in podobno.

Zgled 2 (zvonasta porazdelitev). Dober ergonomski proizvod mora biti varen, funkcionalen, učinkovit in udoben. Čas vselej zahteva tudi ergonomske spremembe. Sedeži pilotov na primer so bili oblikovani v preteklosti samo za moške. Model sedeža je bil oblikovan za moške z maso od 64 do 96 kg. Tisti, ki tehtajo manj ali več od predpisane mase, so v veliko večji nevarnosti, da se poškodujejo. Danes pa pilotirajo tudi ženske. Po podatkih Mednarodne inšpekcije za zdravje je masa žensk porazdeljena po zvonasti krivulji z matematičnim upanjem 65 kg in standardnim odklonom 13 kg. Opiši lastnosti omenjene porazdelitve. Na osnovi lastnosti izračunaj, kakšen odstotek žensk ima maso v predpisanih vrednostih med 64 in 96 kg in jim torej predpisani sedeži ergonomsko ustrezajo? Kje na primer take vrste porazdelitev še uporabljajo?

V problemu je izpostavljena normalna porazdelitev. Z uvodnim opisom problema učenje želimo seznaniti, da so predpisane (ergonomske) norme dobljene na podlagi lastnosti, ki so podobne večini ljudem določene skupine. Lastnosti, ki se nanašajo na veliko število elementov populacije (ljudi določene skupine), so porazdeljene po zvonasti krivulji, ki se imenuje Gaussova krivulja. Na prvem sestanku lahko nekaj lastnosti učenci skupaj ugotovijo, nato čim več podatkov zberejo še doma. Na ponovnem sestanku pregledajo lastnosti in se tudi seznanijo z nadaljnjo uporabo normalne porazdelitve, med drugim odgovorijo na vprašanje o odstotku žensk, ki ustrezajo predpisani masi. Navedejo še druge primere uporabe te porazdelitve.

Planski problem. Kadar ne zadostuje, da dani pojav ali princip učenci le razumejo, temveč zahtevamo, da pojav spremenijo oziroma da delovanje

izboljšajo, postavimo planski problem. Značilna zanj je akcija in v takem problemu so pogosta vprašanja: „Kako spremeniti ...? Kako izboljšati ...? Kaj je treba narediti ...?“ Učenci morajo podati plan dela, potek ali zaporedje aktivnosti, ki jih moramo izvršiti, da problem rešimo. Pogosto pa morajo učenci podani postopek tudi dejansko izvesti.

Tipični statistični problem vsebuje raziskovalno vprašanje, ki je postavljeno v določeno strokovno področje. Raziskovalno vprašanje zahteva izvedbo določenega statističnega postopka (določitev populacije, vzorca, slučajnih spremenljivk, karakteristik, testiranje statističnih hipotez), zato lahko tak statistični problem uvrstimo med planske probleme. Učencem ga lahko zastavimo, ko že imajo nekaj osnovnega statističnega znanja in morajo to znanje uporabiti v praktični situaciji. Največ problemov pri inženirski statistiki je planskih problemov. Statistično znanje inženirjev namreč največkrat uporabimo, da neko situacijo proučimo in spremenimo. V naslednjem problemu morajo učenci izvesti celotno zaporedje postopkov, ki je značilno za izvedbo tipičnega statističnega problema.

Zgled 3 (varna vožnja s kolesom). Vožnja s kolesom, kolesom z motorjem oz. motornim kolesom je v mestnih središčih zagotovo bolj ekonomična kot vožnja z avtomobilom. Zaradi velikega števila avtomobilov prihaja tudi do velikih zastojev. Toda ali je tudi manj nevarna? Kakšna je korelacija med številom vseh smrtnih žrtev v prometu na leto in številom smrtnih žrtev pri vožnji s kolesom z motorjem ali motornim kolesom na leto v Sloveniji? Ali je delež učencev Oddelka za tehniško varnost na FKKT, ki pri vožnji s kolesom, kolesom z motorjem oz. motornim kolesom uporabljajo čelado, večji od ustreznega deleža pri preostalih učencih FKKT?

Učenci morajo pri takem kompleksnem problemu uporabiti poprejšnje znanje o obdelavi, prikazovanju podatkov, o korelaciji in o računanju osnovnih karakterističnih lastnosti spremenljivke, ki nas v problemu zanima. Poleg tega pa morajo pridobiti novo znanje o statističnih testih. Učenci najprej sami pridobijo potrebne podatke (na primer sestaviti anketo in jo razdeliti ustrezni populaciji), na osnovi tako dobljenih podatkov nato izračunajo karakteristične parametre in izvedejo primerne statistične teste. Rezultate morajo znati tudi prikazati in interpretirati.

Diskusijski problem. Ta vrsta problema zahteva subjektivno znanje. To so lastna prepričanja, ki jih vsak posameznik zgradi na podlagi javno dostopnega objektivnega znanja in lastnih izkušenj. V določenih poklicnih odločitvah oziroma pri reševanju nekaterih problemov v poklicu ima subjektivno znanje zelo pomembno vlogo.

Diskusijski problem je pri inženirski statistiki redkejši, zastavimo ga lahko ob koncu problemsko naravnanega učenja, ko postavimo pred učence kakšno dilemo s področja uporabe statistike v inženirski stroki.

Zgled 4 (jedrske elektrarne). Neka krajevna skupnost ima pogosto probleme z dobavo električne energije. Predpostavite, da ste izbrali dva ključna vzorca ljudi iz te krajevine skupnosti. Ljudje iz prvega vzorca naj odgovarjajo na naslednji vprašalnik:

- 1A. Ali ste seznanjeni z nevarnostmi jedrske elektrarne?
- 2A. Ali naraščanje števila jedrskih elektrarn pomeni nevarnost za prihodnost?
- 3A. Menite, da bi morali več storiti na področju drugih virov pridobivanja električne energije?
- 4A. Bi morali zmanjšati število jedrskih elektrarn?

Ljudje iz drugega vzorca pa naj bi izpolnili vprašalnik z naslednjimi vprašanji:

- 1B. Menite, da smo dovolj preskrbljeni z električno energijo?
- 2B. Se strinjate, da motnje v dobavi električne energije v naši krajevni skupnosti povzročajo težave?
- 3B. Ali veste, da uporabljamo zadnje zaloge premoga, plina in olja?
- 4B. Ali naj ohranimo število delujočih jedrskih elektrarn?

Ljudje v obeh vzorcih so odgovorili na vprašanja z DA ali NE. Kaj menite, kakšna sta odgovora na zadnji vprašnji pri anketirancih v obeh vzorcih in zakaj? Opišite kvaliteto vprašalnikov!

Skupina učencev je verjetno tudi sama poskusila izpolniti vprašalnika. Zagotovo ima vsak učenec svoje mnenje o številu jedrskih elektrarn na podlagi subjektivnega znanja oziroma prepričanj. Ta so nastala kot skupek objektivnega znanja, izkušenj, raznih vsakodnevnih informacij in tudi osebnosti. Vendar pa učenci ob odgovorih v obeh vprašalnikih verjetno spoznajo, da vprašanja napeljujejo reševalca na točno določen odgovor pri zadnjem vprašanju. Četudi imajo lastno prepričanje o (ne)zadostnem številu jedrskih elektrarn, verjetno pri zadnjem vprašanju 4A odgovorijo z DA in tudi na vprašanje 4B odgovorijo z DA (zmanjšati število jedrskih elektrarn in ohraniti število jedrskih elektrarn). Tak vprašalnik za statistične obdelave ni primeren, saj je sugestiven. Na kaj vse mora sestavljavec anket in vprašalnikov paziti, se lahko pogovorijo učenci v diskusiji, več informacij pa zberejo tudi doma.

4. Ocenjevanje veščin za reševanje problemov

Zmožnost reševanja problema moramo vključiti v ocenjevanje in v njem mora imeti vidno mesto. Če bi namreč učence pri problemsko naravnem učenju ocenjevali z rutinskim testom, kjer bi zahtevali golo poznavanje dejstev in principov, ne bi pa ocenili zmožnosti reševanja problemov, potem

učenci reševanju problemov ne bi posvečali dovolj pozornosti. Ocenjevalni sistem je namreč tisti, ki največkrat narekuje način učenja učencev, in ne izvajalec pouka z določeno metodo učenja [1].

Pri razvoju zmožnosti reševanja problemov je pomembna tudi zmožnost uspešnega samostojnega učenja. Sem sodi uspešno pridobivanje pravih kvalitetnih informacij, njihova predelava in posredovanje. Izvajalci pouka pogosto predpostavijo, da učenci znajo kritično izločiti dobre informacije med množico informacij, da znajo kvalitetno iskati informacije med različnimi viri (spletne strani, knjige, revije) in da znajo nove informacije in znanje vgraditi v svoj miselni sistem tako, da daje razumno logično celoto. A vendar zaradi splošnega naraščanja znanja in informacij učitelji v srednjih šolah hitijo z obravnavo snovi, za učenje procesa pridobivanja znanja pa je storjenega premalo. Tudi ocenjevalni sistem je zaradi pomanjkanja časa usmerjen v teste s kratkimi odgovori. Učenci imajo premalo možnosti komunikacije, razpravljanja in posredovanja naučenega, kjer dobijo povratno informacijo od sošolcev ali izvajalcev pouka, ali so novo znanje razumeli tako kot drugi. Prav zato je učenje procesa pridobivanja, preoblikovanja ter posredovanja informacij in znanja pomembna komponenta tudi za uspešno reševanje problemov. Tu ima pomembno mesto tudi uporaba računalnika.

Spletno iskanje je zelo pomembno za hitro pridobivanje svežih informacij, seveda pa je treba učence poučiti, da izluščijo dobre informacije med množico različnih spletnih informacij. Preoblikovanje statističnih informacij je možno predvsem z uporabo raznih programskih paketov. Pravzaprav si statistično obdelavo (korelacije, testiranje hipotez ipd.) in prikazovanje rezultatov (tabele, grafi) brez uporabe programskih orodij težko predstavljamo. Učenci pa morajo s svojim znanjem rezultate razumeti in interpretirati, vse to pa je treba vključiti v ocenjevanje.

Pri problemsko naravnem učenju sta pomembna tako ocenjevanje znanja kot proces učenja. Ocenjevanje tega načina pouka pri inženirski statistiki je usmerjeno predvsem v ocenjevanje reševanja problema in zajema: pisno preverjanje osnovnega statističnega znanja, sprotno povratno informacijo pri reševanju problemov, učenčevo mapo z vsemi izdelki, iz katerih je razviden napredek tako v samem znanju kot v procesu učenja, pisno poročilo zadnjega najboljšejšega problema ter javni nastop in zagovor [15]. Zmožnost individualnega reševanja enostavnejših problemov preverimo že s testom, napredek v zmožnosti reševanja problemov pa ugotavljamo z učenčevo mapo, kjer so zbrani tako skupinsko kot individualno rešeni problemi. V mapi sta tudi samoocena o napredku v samostojnem učenju posameznega učenca pri novem načinu pouka in ocena posameznih članov skupine pri skupinskem delu. Zmožnost reševanja kompleksnejšega problema in uporabe pridobljenega znanja pa se zrcali v pisnem poročilu reševanja najboljšejšega problema, ki ga vsak posamezni učenec tudi ustno zagovarja [16].

LITERATURA

- [1] G. Pavlič, *Statistika v prenovljeni srednji šoli*, Matematika v šoli **5** (1998) 3–4, str. 213–219.

- [2] B. Japelj, Z. Magajna, A. Drobnič Vidic, A. Žakelj, M. Čuček, B. Brečko, Z. Perat, M. Makarovič in A. Klokočovnik, *Tretja mednarodna raziskava matematike in naravoslovja IEA TIMSS in druga mednarodna raziskava o informacijski tehnologiji v izobraževanju IEA sites ter vključevanje izsledkov v slovenski izobraževalni sistem: poročilo projekta CRP 1999–2002*, Center IEA raziskave, Pedagoški inštitut, Ljubljana 2002.
- [3] D. Boud in G. I. Feletti, *The challenge of problem-based learning* (2. izdaja), Kogan Page, London 1998.
- [4] J. C. Perrenet, P. A. J. Bouhuijs in J. G. M. M. Dmits, *The suitability of problem-based learning for engineering education: theory and practice*, Teach. high. Educ. **5** (2000) 3, str. 345–358.
- [5] D. R. Woods, *Problem-based learning: how to gain the most from PBL*, McMaster University, Hamilton 1995.
- [6] T. David, L. Patel, K. Burdett in P. Rangachari, *Problem-based learning in medicine, a practical guide for students and teachers*, Royal Society of Medicine Press, London 1999.
- [7] A. Drobnič Vidic, *Problemsko zasnovan študij pri proučevanju inženirske statistike*, doktorska disertacija, Filozofska fakulteta, Ljubljana 2005.
- [8] G. W. Cobb, *Reconsidering statistics education*, *A national science foundation conference*, Journal of statistics education **1** (1993) 1, <http://www.amstat.org/publications/jse/v1n1/cobb.html>.
- [9] D. Dolmans in H. Snellen-Balendong, *Problem-based medical education: Problem construction*, Department of educational development and research, Maastricht 2000.
- [10] R. Taconis, M. G. M. Ferguson-Hessler in H. Broekkamp, *Teaching science problem solving: An overview of experimental work*, J. Res. Sci. Teach. **38** (2001) 4, str. 442–468.
- [11] A. Engel, *Problem-solving strategies*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg 1997.
- [12] G. Pólya, *Kako rešujemo matematične probleme?*, Društvo matematikov, fizikov in astronomov SRS, Ljubljana 1989.
- [13] T. Tsaparris in V. Angelopoulos, *A model of problem solving: Its operation, validity, and usefulness in the case of organic-synthesis problems*, Sci. Educ. **84** (2000) 2, str. 131–153.
- [14] H. G. Schmidt in J. H. C. Moust, *A taxonomy of problems used in problem-based curricula*, v J. Van Marrienboer in G. Koerkerke (ur.), *Instructional design for problem-based learning, Proceedings of the third workshop of the EARLI SIG instructional design*, University of Maastricht, 1998, str. 3–12.
- [15] D. Ronis, *Problem-based learning for math and science: integrating inquiry and internet*, SkyLight Training and Publishing company, Arlington Heights 2001.
- [16] A. Drobnič Vidic, *A model for teaching basic engineering statistics in Slovenia*, Metodološki zvezki: Advances in methodology and statistics **3** (2006) 1, str. 163–183, <http://mrvar.fdv.uni-lj.si/pub/mz/>.
- [17] A. Steinemann, *Implementing sustainable development through problem-based learning: pedagogy and practice*, J. Prof. Issues Eng. Educ. Pract. **129** (2003) 4, str. 216–224.
- [18] G. R. Norman in H. G. Schmidt, *The psychological basis of problem-based learning: a review of the evidence*, Acad. Med. **67** (1992) 9, str. 557–565.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO I

LJUBLJANA, JULIJ 200

Letnik 54, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52

R 177/07



COBISS

VSEBINA

Članki

Strani

Biljardi, Mitja Lakner in Peter Petek 113–124

O Fresnelovem etru, Janez Strnad 125–132

Šola

Učenje skozi probleme, Andreja Drobnič Vidic 134–XV

Nove knjige

Srednješolski plonk – Fizika, Aleš Mohorič 132–133

Vesti

Strokovno srečanje in 59. občni zbor DMFA Slovenije, Nada Razpet 133

CONTENTS

Articles

Pages

Billiards, Mitja Lakner and Peter Petek 113–124

On Fresnel's ether, Janez Strnad 125–132

School

Problem-based learning, Andreja Drobnič Vidic 134–XV

New books 132–133

News 133