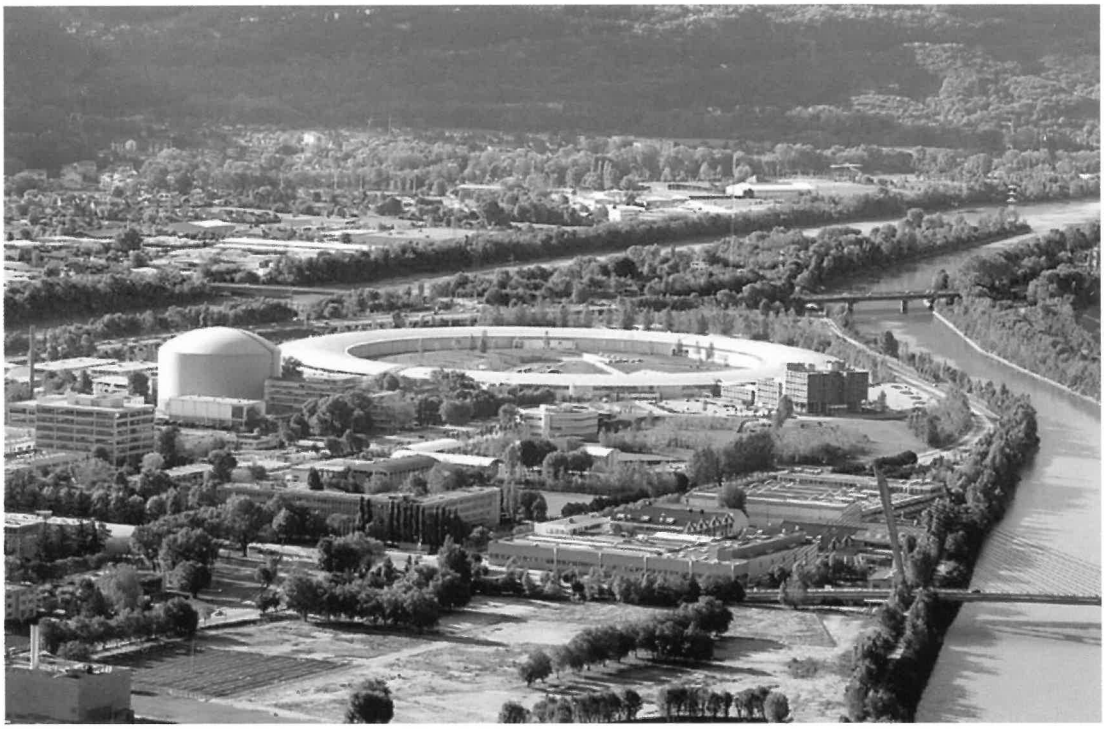
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

ODPISANO

2007
Letnik 54
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2007, letnik 54, številka 3, strani 73–112

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Peter Šemrl (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Damjan Kobal, Peter Legiša, Aleš Mohorič, Petar Pavešić, Nada Razpet, Sašo Strle, Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1300 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21,00 EUR (5.032,44 SIT), za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR (2.516,22 SIT). Naročnina za ustanove je 33,38 EUR (7.999,18 SIT), za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 4,18 EUR (1.001,70 SIT), stare številke 2,17 EUR (520,02 SIT).

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2007 DMFA Slovenije – 1680

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

ZAPOREDJA BREZ PONAVLJANJ

BOŠTJAN BREŠAR

Fakulteta za elektrotehniko, računalnistvo in informatiko
Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2000): 68R15, 05C15, 03E05

Letos mineva sto let od objave Thuejevega članka, v katerem je ta norveški matematik konstruiral zaporedje brez ponavljanj nad tremi simboli. Ta rezultat bomo predstavili in spotoma opisali zanimivo binarno Thue-Morsejevo zaporedje. Dotaknili se bomo tudi podobnih problemov na grafih in na realni osi.

NONREPETITIVE SEQUENCES

This year is the hundredth anniversary of publication of Thue's paper in which this Norwegian mathematician constructed a nonrepetitive sequence over three symbols. We shall present this result, and along the way describe an interesting binary Thue-Morse sequence. Similar problems on graphs and on the real line shall also be briefly mentioned.

Uvod

V članku obravnavamo (končna in neskončna) zaporedja simbolov. Brez škode za splošnost lahko simbole izbiramo med naravnimi števili, zapis zaporedja pa poenostavimo tako, da med dvema zaporednima členoma ne pišemo vejice niti presledka (ker bomo rabili le enomestna števila, ne bo zmede). V tem duhu bomo končnemu zaporedju rekli tudi *beseda*. Tako bomo npr. zaporedje/besedo, ki predstavlja prvih 15 decimalnih mest števila e, zapisali takole

$$271828182845904$$

in zaporedje, ki predstavlja prvih sedem decimalnih mest števila π, bo

$$3141592\,.$$

Podzaporedje zaporednih členov danega zaporedja imenujemo *blok* (izkaže se, da je ugodno dopuščati, da je blok lahko tudi prazen). Opazimo, da se v prvem zaporedju 27**1828182**845904 beseda $B = 1828$ ponovi in zaporedje lahko zapišemo v obliki $ABBC$, kjer so A, B in C bloki dane besede. Če zaporedje lahko zapišemo v obliki $ABBC$, kjer je B neprazen blok, A in C pa sta (lahko tudi prazna) bloka, ga imenujemo *zaporedje s ponavljanjem*, sicer pa *zaporedje brez ponavljanj*. Primer slednjega je očitno 3141592. Če zaporedje ima ponavljanje, sta v njem dva identična bloka, ki

nastopata drug za drugim, pravimo tudi, da tvorita *kvadrat*. Zaporedje brez ponavljanj lahko torej opišemo tudi kot *zaporedje brez kvadratov*. Trivialen primer kvadrata je, ko v bloku, ki se ponovi, nastopa en sam simbol, torej ko sta v zaporedju dva zaporedna enaka simbola.

Če začnemo razmišljati o neskončnih zaporedjih, bomo takoj našli veliko zaporedij s ponavljanjem. Kot poseben primer omenimo zaporedje, ki predstavlja decimalni zapis poljubnega racionalnega števila z neskončno decimalnimi mesti. Le-to bo vselej imelo ponavljanje, ustrezni blok pa se tam celo neskončnokrat ponovi. Na prvi pogled je težje najti zaporedje brez ponavljanj, a je tudi to trivialno, če imamo na razpolago neomejeno število simbolov (vzemimo npr. kar zaporedje, ki ga sestavljajo naravna števila v običajnem vrstnem redu). Zastavlja pa se naravno vprašanje: *Ali lahko s končno mnogo simboli sestavimo (neskončno) zaporedje brez ponavljanj?*

Če je odgovor na to vprašanje pritrdilen, se zastavlja tudi drugo: *s koliko simboli lahko to naredimo?* Očitno z dvema simboloma ne bo šlo, saj besede 121 ne moremo več nadaljevati, ne da bi ustvarili kvadrat. Toda presenetljiva Thuejeva konstrukcija nam pokaže, da že s tremi simboli lahko sestavimo besede brez ponavljanj poljubne dolžine. Preden predstavimo konstrukcijo tega t. i. *Thuejevega zaporedja*, si oglejmo neko drugo zaporedje, ki ima tudi zanimive lastnosti.

Thue-Morsejevo zaporedje

Binarno zaporedje M (*Thue-Morsejevo zaporedje*) konstruiramo prek rekurzivno podanega zaporedja binarnih besed (M_k) takole: Naj bo

$$M_1 = 0 \qquad \text{in}$$
$$M_{k+1} = M_k M_k' \quad (k > 1),$$

kjer je M_k' *negacija* besede M_k, to je beseda, ki jo iz M_k dobimo tako, da zamenjamo vse njene simbole (torej ničle spremenimo v enice in obratno). Tako dobimo $M_2 = 01$, $M_3 = 0110$, $M_4 = 01101001$ in tako naprej. Očitno nam to poraja tudi (neskončno) binarno zaporedje $M = m_1 m_2 m_3 \ldots$, ki ga formalno definiramo tako, da postavimo $m_1 m_2 \ldots m_{2^{k-1}} = M_k$ za vsak $k \geq 1$ (definicija je dobra, saj se začetek besede M_{k+1} ujema z M_k za vse $k \in \mathbb{N}$).

Thue-Morsejevo zaporedje ima nekaj lepih lastnosti. Označimo z L_k (oziroma S_k) podzaporedje tistih členov besede M_k, ki nastopajo na lihih (sodih) mestih. Torej za $M_4 = 0\mathbf{1}1\mathbf{0}1\mathbf{0}0\mathbf{1}$, je $L_4 = 0110$ in $S_4 = 1001$, kar je enako M_3 oziroma M_3'. Velja tudi splošno: za vsak $k \in \mathbb{N}$ je

$$L_{k+1} = M_k\,,$$
$$S_{k+1} = M_k'\,.$$

Preverimo prvo enakost z indukcijo po k. Očitno je $L_2 = 0 = M_1$ (podobno velja za sodo zaporedje: $S_2 = 1 = M_1'$). Denimo, da trditev velja za neki $k \geq 2$ in si oglejmo besedo M_{k+1}. Upoštevajmo, da je $M_{k+1} = M_k M_k'$ in da za M_k trditev velja. Lihi členi besede M_k tvorijo ravno prvo polovico besede L_{k+1}, zato se prva polovica besede L_{k+1} ujema z M_{k-1}. Ker pa je po definiciji druga polovica besede M_{k+1} ravno negacija prve polovice, je druga polovica besede L_{k+1} negacija svoje prve polovice, torej je $L_{k+1} = M_{k-1}M_{k-1}'$, kar pa je enako M_k. Na podoben način lahko preverimo, da je $S_{k+1} = M_k'$.

Vse besede M_k ($k > 2$) se začenjajo z 01, njihove druge polovice pa z 10. To dejstvo nas napeljuje na splošnejšo trditev o simbolu, ki leži za členom na lihem mestu. Namreč, če se v zaporedju M_k na lihem mestu pojavi ničla (recimo ji „liha ničla“), ji nujno sledi enica, če se na lihem mestu pojavi enica („liha enica“), pa ji sledi ničla. Res, lihi členi predstavljajo zaporedje M_{k-1}, sodi pa zaporedje M_{k-1}'. Tako lihemu členu, ki v $L_k = M_{k-1}$ zavzema j-to mesto, sledi člen, ki v $S_k = M_{k-1}'$ zavzema j-to mesto in je zato res njegova negacija.

Še ena zanimiva lastnost zaporedja M je, da ne vsebuje *kubov*, to je blokov oblike BBB, kjer je B poljubna neprazna beseda. (Tako smo se nekako že približali želenemu cilju dobiti zaporedje brez kvadratov.) Dokažemo lahko še nekoliko močnejšo trditev, ki jo bomo potrebovali tudi kasneje.

Trditev. *Zaporedje M ne vsebuje blokov oblike $xBxBx$, kjer je B poljubna (lahko tudi prazna) beseda, x pa poljuben simbol.*

Dokaz. Očitno zadošča, če trditev dokažemo za poljubno končno besedo M_k, kjer je $k \in \mathbb{N}$. Dokaz bo spet potekal z indukcijo in baza indukcije je očitno pravilna. Denimo, da trditev velja za besedo M_k in predpostavimo, da se v besedi M_{k+1} pojavi blok A oblike $0B0B0$, kjer je B beseda. (Ta predpostavka nas bo vodila v protislovje; podoben premislek za blok $1B1B1$ pa prepuščamo bralcu.) Ker M_k nima takih blokov (in jih zato tudi negacija M_k' nima), je edina možnost, da se prva ničla v bloku A pojavi v prvi polovici besede M_{k+1}, zadnja ničla pa v drugi polovici. Od tod vidimo, da beseda B ne more biti prazna, saj se M_k' vedno začenja z enico. Sedaj ločimo dva primera glede na parnost dolžine besede B.

1. Naj bo B lihe dolžine. Potem so vse tri ničle na mestih, ki imajo isto parnost, torej sodijo v besedo L_{k+1} ali S_{k+1}. Denimo, da sodijo v L_{k+1} (če sodijo v S_{k+1}, je razmislek podoben). Potem je blok A_L v L_{k+1}, ki ga porodi A na lihih mestih besede M_{k+1}, oblike $0B_L0B_L0$, kar je protislovje, saj v $M_k = L_{k+1}$ po indukcijski predpostavki ni takih blokov.

2. Naj bo B sode dolžine. Tedaj sta ničli na robovih besede A na mestih z isto parnostjo (denimo liho), srednja ničla pa je na mestu z nasprotno

parnostjo (torej sodo). Označimo $A = 0x_1x_2\ldots x_{2n}0y_1y_2\ldots y_{2n}0$ in vemo, da je $x_i = y_i$ za vse $i \in \{1,\ldots,2n\}$. Ker je prva ničla na lihem mestu („liha ničla"), ji sledi enica, torej je $x_1 = 1$ in tako je tudi $y_1 = 1$. Ker pa je y_1 na lihem mestu („liha enica"), mu sledi ničla, torej je $y_2 = 0 = x_2$. Ko to igro nadaljujemo, pridemo na koncu do x_{2n}, ki je tako nujno „liha ničla". Slediti bi mu morala enica, a je tam ničla, torej smo v protislovju. Na podoben način pridemo v protislovje, če predpostavimo, da sta ničli na robovih sodi. S tem je dokaz končan. ■

Za lepe konstrukcije pogosto velja, da jih srečamo v različnih kontekstih. Gornjo trditev je kot prvi dokazal norveški matematik Axel Thue, rezultat je objavil leta 1906 v manj znani norveški reviji [6]. Kakih 15 let za njim je trditev neodvisno dokazal tudi Marston Morse in jo uporabil v povezavi s problemom iz področja diferencialne geometrije. Že dobrih 50 let pred Thuejevim rezultatom pa je zaporedje M posredno opisal Prouhet, ko se je ukvarjal z določenim problemom iz teorije števil, povezanim z razbitji na vsoto potenc. Na Thue-Morsejevo zaporedje je naletel tudi znameniti nizozemski šahovski velemojster Max Euwe. S pomočjo tega zaporedja je pokazal, da je šahovska igra, ki se nikoli ne konča, mogoča (po pravilih se šahovska igra namreč konča z remijem, če se ista pozicija na šahovski deski ponovi tretjič in je pri tem zaporedje potez med drugo in tretjo pojavitvijo te pozicije enako kot med prvo in drugo). Najbrž pa je največji pečat pustilo prav Thuejevo delo, saj velja za začetek pomembne veje kombinatorike t. i. *kombinatorike na besedah* [5]. Več o različnih vidikih uporabe Thue-Morsejevega zaporedja si lahko preberemo npr. v [1].

Thuejevo zaporedje

Označimo z $X = \{1,4,6,7,\ldots\}$ množico mest v Thue-Morsejevem zaporedju M, na katerih so ničle. Naj bodo $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ elementi množice X urejeni v naraščajočem vrstem redu. Zaporedje $T = t_1t_2t_3\ldots$, definirano s

$$t_n = x_{n+1} - x_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

imenujemo *Thuejevo zaporedje*. Torej

$$T = 321312321231\ldots$$

in očitno je $t_n \in \{1,2,3\}$ za vsako naravno število n. Definicijo lahko predstavimo tudi takole: Thuejevo zaporedje po vrsti šteje število enic, ki se pojavijo med dvema zaporednima ničlama v Thue-Morsejevem zaporedju in vsakič prišteje še 1. Poglejmo na primer začetek zaporedja

$$M = \mathbf{0110100110010110100101100}\ldots$$

in po vrsti zapisujmo, koliko enic leži med zaporednima ničlama:

$$210201210120\ldots$$

Dobili smo zaporedje T, premaknjeno za 1, oziroma Thuejevo zaporedje, zapisano s simboli $0, 1$ in 2.

Trdimo, da je T zaporedje brez ponavljanj. Pa recimo, da imamo v zaporedju T kvadrat, to je za neki naravni števili k in n je

$$t_{k+i} = t_{k+n+i}$$

za $i = 0, \ldots, n-1$. Če upoštevamo definicijo zaporedja T, dobimo

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= x_{k+n+1} - x_{k+n}\,, \\ x_{k+2} - x_{k+1} &= x_{k+n+2} - x_{k+n+1}\,, \\ &\vdots \\ x_{k+n} - x_{k+n-1} &= x_{k+2n} - x_{k+2n-1}\,. \end{aligned}$$

Od tod vidimo, da elementi množice X med x_k in x_{k+n} naraščajo z enakimi koraki kot med x_{k+n} in x_{k+2n}. Bolj natančno povedano, zaporedje $x_{k+n}, x_{k+n+1}, \ldots, x_{k+2n}$ lahko dobimo iz zaporedja $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+n}$ z aditivno translacijo za $t_k + t_{k+1} + \cdots + t_{k+n-1}$. Spomnimo se, da element x_k pomeni, da je na x_k-tem mestu v Thue-Morsejevem zaporedju ničla, prav tako je ničla na x_{k+n}-tem in x_{k+2n}-tem mestu. Razporeditev ničel med mestoma x_k in x_{k+n} je enaka razporeditvi ničel med mestoma x_{k+n} in x_{k+2n}. Torej imamo v Thue-Morsejevem zaporedju blok oblike $0B0B0$, kjer je B binarna beseda, ki ima ničle na mestih $x_{k+1} - x_k, x_{k+2} - x_k, \ldots, x_{k+n} - x_k$. To pa je v protislovju s trditvijo, ki smo jo pokazali za Thue-Morsejeva zaporedja. Velja torej naslednji Thuejev izrek:

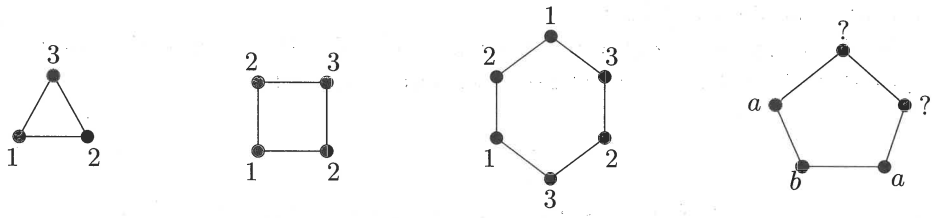
Izrek. *Zaporedje T je neskončno zaporedje brez ponavljanj nad tremi simboli.*

Zaporedja brez ponavljanj na ciklu

Sedaj se omejimo na končna zaporedja. Očitno trije simboli zadoščajo za zapis poljubne končne besede brez kvadratov dolžine vsaj 4, medtem ko za krajše besede shajamo že z manjšim številom simbolov. Zamislimo si sedaj, da besede zapisujemo v krogu (ciklu, verigi, ...), pri čemer začetek besede ni določen. Ali drugače povedano: s simboli opremimo oglišča mnogokotnika in nato preberemo besede (na primer v smeri urinega kazalca), ki jih dobimo

z različnimi izbirami začetnega oglišča. *Ali tudi na ciklu zadoščajo trije simboli, da bodo (vse) besede na njem brez ponavljanj?*

V 3-, 4- in 6-kotniku trije simboli res zadoščajo (primer dobrega označevanja je na sliki 1). Kaj pa v 5-kotniku?



Slika 1. Barvanje mnogokotnikov brez ponavljanj

Če želimo 5-kotnik označiti (ali pobarvati, kot tudi rečemo) s tremi simboli, tako da ne bo besed s ponavljanjem, hitro vidimo, da se na treh zaporednih mestih pojavi beseda *aba* (kjer sta a in b neka simbola). Na preostali dve mesti sedaj ne smemo dati niti a (ker dobimo kvadrat *aa*) niti b (ker dobimo kvadrat *abab* ali kvadrat *baba*). Torej moramo na preostali mesti dati nov simbol, toda ne isti na obe mesti, saj sicer dobimo kvadrat *cc*. Število simbolov, ki jih potrebujemo za barvanje brez ponavljanj na 5-kotniku, je torej (najmanj) 4, kar je več, kot jih potrebujemo za neskončno zaporedje. Pred kratkim je James Currie karakteriziral mnogokotnike, na katerih potrebujemo 4 simbole [3]. Izkaže se, da jih je zelo malo (in sicer so to mnogokotniki s 5, 7, 9, 10, 14 in 17 oglišči), na vseh drugih pa trije simboli zadoščajo za označevanje brez kvadratov.

Cikel je preprost primer *grafa* (struktura, ki je določena z množico vozlišč in množico povezav med pari vozlišč) in vprašanje, koliko simbolov potrebujemo za označevanje vozlišč grafa, tako da se v njem ne bodo pojavile besede s ponavljanjem, lahko zastavimo za poljubne grafe. O problemih t. i. Thuejevega barvanja grafov si lahko kaj več preberemo na primer v [2].

Barvanje brez ponavljanj na realni osi

Za konec zastavimo podoben problem na realni osi. Označujemo (oziroma barvamo) realna števila, *kvadrat* pa naj v tem primeru pomeni, da sta intervala $[x, y]$ in $[y, z]$, $x < y$, enako dolga in da je število $x+t$ iste barve kot število $y+t$ za vse $t \in [0, y-x]$. *Koliko barv potrebujemo za barvanje realne osi, da na njej ne bo kvadratov?* Vprašanje je na prvi pogled videti težko in morda se sprašujemo, ali števno mnogo barv sploh zadošča. Odgovor je preprost, saj se izkaže, da zadoščata že dve barvi!

Predstavili bomo Rotejevo konstrukcijo, v kateri uporabimo *Lindemann-Weierstrassov izrek*, ki pravi, da iz enakosti

$$x_1 e^{q_1} + x_2 e^{q_2} + \cdots + x_n e^{q_n} = 0,$$

kjer so $x_1, \ldots, x_n$ racionalna števila, $q_1, \ldots, q_n$ pa paroma različna racionalna števila, sledi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ (paroma različne racionalne potence števila e so linearno neodvisne nad poljem racionalnih števil). Konstrukcijo bomo predstavili samo za pozitivni del realne osi, in sicer naj bo barvanje $f\colon (0, \infty) \to \{0, 1\}$ definirano takole: $f(x) = 0$, če je $\ln x$ racionalno število, sicer pa naj bo $f(x) = 1$. Pokažimo, da je barvanje f brez kvadratov.

Vzemimo poljubni različni pozitivni števili x in y. Naj bo $x < y$ in $a = y - x$. Opazujmo intervala $[x, y]$ ter $[y, y + a]$. Če je $f(x) \neq f(y)$, potem $[x, y]$ in $[y, y + a]$ očitno ne tvorita kvadrata, torej vzemimo, da je $f(x) = f(y)$. Zaradi gostosti racionalnih števil obstaja tako število t_1, kjer je $0 < t_1 < a$, da velja $x + t_1 = e^{q_1}$ in je q_1 racionalno število. Torej je po definiciji $f(x + t_1) = 0$. Če je tudi $f(y + t_1) = 0$, potem obstaja tako racionalno število q_2, da velja $y + t_1 = e^{q_2}$ in pri tem je očitno $q_2 \neq q_1$ (saj je eksponentna funkcija injektivna). V tem primeru naredimo še en premik: obstaja tako število t_2, kjer je $0 < t_1 < t_2 < a$, da je $x + t_2 = e^{q_3}$, kjer je q_3 racionalno število (različno od q_1 in q_2). Če je tudi tokrat $y + t_2 = e^{q_4}$ in je q_4 racionalno število, potem velja

$$e^{q_2} - e^{q_1} = e^{q_4} - e^{q_3},$$

kjer so q_1, q_2, q_3, q_4 paroma različna racionalna števila. To pa je v nasprotju z Lindemann-Weierstrassovim izrekom. Torej intervala $[x, y]$ in $[y, y + a]$ ne tvorita kvadrata in s tem je dokaz končan. Kot smo omenili, dve barvi zadoščata tudi za barvanje brez kvadratov cele realne osi (to barvanje dobimo npr. tako, da funkcijo f razširimo do sode funkcije, definirane za vsa realna števila).

Podobni problemi so bili zastavljeni še v nekaterih drugih matematičnih strukturah, ponekod v povezavi z znanimi odprtimi problemi (glejte npr. [4] in literaturo v tem članku). Poskusimo še malo splošneje. Če je dana neka množica in če nekako določimo tiste pare podmnožic enake moči, ki „se držijo skupaj“, in izberemo bijekcije med njimi, smo dobili problem Thuejevega tipa: določi najmanjše število barv, s katerimi pobarvaš elemente množice, tako da za nobeni „sosednji podmnožici“ bijekcija med njima ne ohranja barv.

LITERATURA

[1] J.-P. Allouche in J. Shallit, *The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence*, v: *Sequences and their applications* (Singapore, 1998), Springer Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Springer, London, 1999, str. 1–16.

[2] N. Alon, J. Grytczuk, M. Hałuszczak in O. Riordan, *Non-repetitive colorings of graphs*, Random Struct. Alg. **21** (2002), str. 336–346.

[3] J. D. Currie, *There are ternary circular square-free words of length n for $n \geq 18$*, Electron. J. Combin. **9** (2002) #N10.

[4] J. Grytczuk in W. Sliwa, *Non-repetitive colorings of infinite sets*, Discrete Math. **265** (2003), str. 365–373.

[5] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Addison-Wesley, Reading MA, 1983.

[6] A. Thue, *Über unendliche Zeichenreichen*, Norske Vid. Selsk. Skr., I Mat. Nat. Kl. **7** (1906), Christiania, str. 1–22.

VESTI

SEJEM ZNANSTVENEGA ZALOŽNIŠTVA

V Trstu je med 17. in 20. majem potekal prvi mednarodni sejem znanstvenega založništva FEST. V štirih dneh ga je obiskalo okrog 30 000 obiskovalcev, ki so se lahko udeležili prek 110 dogodkov na 22 različnih lokacijah v mestu. Delavnice, koncerti in ulični dogodki so pritegnili mlajše generacije udeležencev, medtem ko so se predavanj, predstavitev in okroglih miz udeležili predvsem študentje in starejši udeleženci. Osrednji hali sejma sta bili ob morju: ena namenjena predstavitvi otroške in mladinske poljudnoznanstvene literature ter učil, druga pa popularizaciji znanosti za študente in odrasle. Za šolarje in večje skupine je bilo organizirano strokovno vodstvo, ogled zanimivih video posnetkov in udeležba v didaktičnih delavnicah.

Na ogled in na prodaj je bilo veliko poljudne ter znanstvene literature v različnih jezikih (večinoma v italijanščini, pa tudi v slovenščini, hrvaščini, angleščini in nemščini). Med znanstvenimi publikacijami različnih drugih področij smo lahko našli tudi novejšo matematično, fizikalno, astronomsko, meteorološko in računalniško literaturo. Z nekaj svojimi zadnjimi izdajami je na sejmu sodelovalo tudi DMFA–založništvo.

Organizatorji iz dežele Furlanije-Julijske krajine obljubljajo, da bo sejem znanosti postal tradicionalen, in se že pripravljajo na naslednjo izvedbo aprila 2008. Kratek izlet v bližnji Trst in obisk sejma bo zagotovo zanimiv tudi za naše študente, profesorje in dijake.

Vladimir Bensa

MATEMATIČNE NOVICE

Peter Petek in Jože Vrabec zaslužna profesorja

Ob dnevu Univerze v Ljubljani (v začetku decembra 2006) sta Jože Vrabec (FMF) in Peter Petek (PEF) prejela naziv zaslužnega profesorja [1].

Najboljši raziskovalni programi v letu 2005

Na naslovu [2] si lahko ogledate izbor 17 najboljših raziskovalnih programov v letu 2005. Na področju naravoslovnih ved so to priznanje dobile štiri programske skupine, med njimi dve matematični:

- skupina **Marka Petkovška** (Izbrane teme teoretičnega računalništva in kombinatorične optimizacije), ki združuje 22 raziskovalcev,
- in skupina **Dušana Repovša** (Topologija in geometrija), ki ima 16 raziskovalcev.

Na področju družboslovnih ved pa se je v to prestižno druščino uvrstila skupina **Anuške Ferligoj** (Družboslovna metodologija, statistika in informatika), ki šteje 11 raziskovalcev.

Najbolj iskani članki

Med 25 najbolj iskanimi članki [3] v reviji Topology and its Applications v obdobju od aprila do avgusta 2006 je tudi članek [4] **Dušana Repovša** in U. H. Karimova.

Priročnik

Peter Šemrl je za Handbook of Linear Algebra [5] prispeval poglavje z naslovom *Linear Preserver Problems.*

LITERATURA

[1] Univerza v Ljubljani, *Prejemniki priznanj Univerze v Ljubljani v letu 2006*, http://www.uni-lj.si/univerza/Publikacije/Objave/Objave5-2006.pdf.

[2] Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije, *Najboljši raziskovalni programi 2005*, http://www.arrs.gov.si/sl/progproj/rprog/najboljsi.asp.

[3] *ScienceDirect TOP25 Hottest Articles*, 16. januar 2007, http://top25.sciencedirect.com/?journal_id=01668641.

[4] U. H. Karimov in D. Repovš, *On the topological Helly theorem*, Topology and its Appl. **153**(10), 2006, str. 1614–1621.

[5] L. Hogben (ur.), *Handbook of Linear Algebra*, Discrete Mathematics and Its Applications Vol. 39, Chapman & Hall / CRC, Boca Raton - London - New York, 2007.

Peter Legiša

NOV PREIZKUS ENAČBE $E = mc^2$

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 03.30.+p

Mednarodni raziskovalni skupini je Einsteinovo zvezo med maso in energijo uspelo potrditi z relativno natančnostjo $4 \cdot 10^{-7}$. Pri tem je uporabila več novih zanimivih merilnih načinov.

A NEW TEST OF THE EQUATION $E = mc^2$

An international research group has succeeded in testing Einstein's mass-energy relation to a level of $4 \cdot 10^{-7}$. Thereby some interesting novel methods were used.

Odmevi na Svetovno leto fizike 2005 nas bodo spremljali še nekaj časa. Ob stoletnici so zelo natančno preizkusili znamenito enačbo $E = mc^2$, ki jo je Albert Einstein izpeljal v posebni teoriji relativnosti [1]. Poleg članov massachusetskega tehnološkega inštituta MIT, Državnega inštituta za standarde in tehnologijo v Gaithersburgu v zvezni državi Maryland in Inštituta Laue-Langevin v Grenoblu sta v raziskovalni skupini sodelovala še člana floridske univerze v Tallahasseju in kemijskega oddelka univerze v Oxfordu. Nikogar ni presenetilo, da enačba tako natančno velja, saj posebna teorija relativnosti sodi med sprejete teorije in so na njej zgrajene kvantne teorije polja. Novi merilni načini in obsežno mednarodno sodelovanje pa so tako značilni za raziskovanje v današnji fiziki, da je vredno preizkusu enačbe posvetiti nekaj pozornosti.

Osnovna zamisel je bila preprosta. Pri sevalnem zajetju jedro pogoltne nevtron. Nastane jedro izotopa z masnim številom, večjim za 1 v vzbujenem stanju in z izsevanjem fotonov γ preide v osnovno stanje:

$$^{A}\mathrm{X} + {}^{1}\mathrm{n} \rightarrow {}^{A+1}\mathrm{X} + \gamma\,.$$

Pri tem se ohrani polna energija, v kateri je treba upoštevati energijo mase:

$$[M(A) + M(n)]c^2 = M(A+1)c^2 + h\nu_{A+1}\,.$$

$M(A)$ je masa atoma z masnim številom A in $h\nu_{A+1}$ energija vseh fotonov, ki jih jedro izseva pri prehodu iz vzbujenega stanja v osnovno. Pri zajetju nevtrona na vodiku nastane jedro devterija in velja:

$$[M(H) + M(n)]c^2 = M(D)c^2 + h\nu_D\,.$$

Drugo enačbo odštejemo od prve in izraz uredimo:

$$[M(A) - M(A+1) + M(D) - M(H)]c^2 = h(\nu_{A+1} - \nu_D)\,.$$

Kilomolsko Planckovo konstanto $N_A h = 3{,}990312716(27) \cdot 10^{-7}$ Js/kmol po merjenjih konstante fine strukture poznamo na $5 \cdot 10^{-8}$ natačno. Pri tem je N_A Avogadrovo število in je v oklepaju naveden povprečni efektivni odmik na zadnjih dveh mestih. Ker bi radi mase atomov merili v atomskih masnih enotah $1\,\mathrm{u} = 1\,\mathrm{kg}/(N_A\,\mathrm{kmol})$, pomnožimo zvezo na levi in desni strani s $\mathrm{kmol} \cdot \mathrm{u}/\mathrm{kg}$:

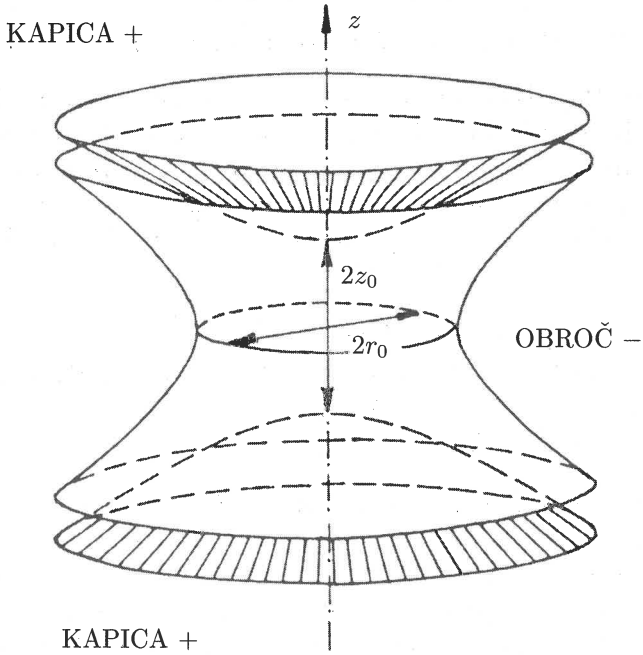
$$\begin{aligned}
&[\tilde{M}(A) - \tilde{M}(A+1) + \tilde{M}(D) - \tilde{M}(H)]c^2 = \\
&= [\tilde{M}(A) + \tilde{M}(H) - \tilde{M}(A+1) + \tilde{M}(D) - 2\tilde{M}(H)]c^2 = \\
&= (N_A h)(\nu_{A+1} - \nu_D)\,\frac{\mathrm{kmol} \cdot \mathrm{u}}{\mathrm{kg}}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Enote v enačbi so ubrane, če merimo maso $\tilde{M}(A)$ v atomskih enotah u.

Pri preizkusu so natančno izmerili maso atomov in neodvisno od nje frekvenco izsevanih fotonov. Oba merilna načina so že dolgo razvijali. Lastnosti delcev so pred časom premerili s Penningovo pastjo, v kateri je bilo mogoče posamične delce zadrževati po tedne in mesece [2]. Gibanje ionov v Penningovi pasti posebno skrbno raziskujejo na MIT [3]. Prosti ion z enim pozitivnim osnovnim nabojem in maso m kroži v prečnem homogenem magnetnem polju z gostoto B s *ciklotronsko frekvenco* $\nu_{c0} = e_0 B/(2\pi m)$. V Penningovi pasti uporabijo še elektrodi v obliki hiperboloidnega obroča in hiperboloidnih kapic s simetrijsko osjo v smeri magnetnega polja (slika 1). Pri tem je past ohlajena na temperaturo 4 K. Magnetno polje z gostoto 8,53 T ustvari superprevodna tuljava, medtem ko je kvadrupolno električno polje šibko in meri napetost med elektrodama $U_0 = 15$ V.

Gibanje vezanega iona v pasti je bolj zapleteno kot gibanje prostega iona. Sestavljeno je iz gibanj treh vrst. V smeri simetrijske osi ion sinusno niha s frekvenco $\nu_z = (e_0 U/m r_0^2)^{1/2}/(2\pi)$, če je $2r_0$ najmanjši premer hiperboloidnega obroča. Ta frekvenca meri okoli 200 kHz. Poleg tega ion kroži s spremenjeno ciklotronsko frekvenco ν_{cp} okoli 5 MHz po manjši krožnici, katere središče kroži po večji krožnici v isti ravnini z *magnetronsko frekvenco* ν_m okoli 5 kHz (slika 2). Tipično ion v 0,2 μs opiše manjšo ciklotronsko krožnico, v 5 μs enkrat zaniha v smeri simetrijske osi in v 200 μs opiše večjo magnetronsko krožnico. V približku, v katerem smemo vzeti, da je magnetronska frekvenca znatno manjša od ciklotronske, velja $\nu_m = \nu_z^2/(2\nu_{cp})$ in $\nu_{cp} = \nu_{c0} - \nu_m$.

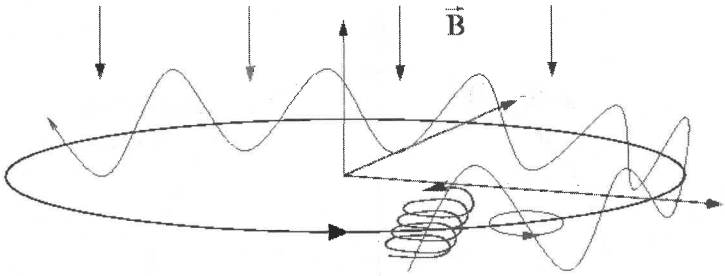
Dokler so merili z enim ionom in primerjali njegovo maso z maso drugega iona pri poznejšem merjenju, so jih motili naključne spremembe magnetnega



Slika 1. Elektrode v Penningovi pasti

polja in odmiki električnega polja od sinusnega poteka. Veliko natančneje je bilo mogoče meriti, ko so v past ujeli dva iona z enakim masnim številom. Njuni masi se relativno razlikujeta samo približno za 10^{-3}. Z molekulami, ki vsebujejo atom navadnega ali težkega vodika, pa je mogoče doseči vsa zanimiva masna števila. V opisanem poskusu so za $^{A+1}$X uporabili izotopa silicija ^{29}Si in žvepla ^{33}S, izotopa ^{A}X pa sta bila ^{28}Si in ^{32}S. Ion ^{29}Si^{+} in molekulski ion ^{28}SiH^{+} v prvem delu poskusa in ion ^{33}S^{+} in molekulski ion ^{32}SH^{+} v drugem delu so spravili na isto magnetronsko tirnico, da sta krožila drug nasproti drugega v razdalji, manjši od milimetra (slika 3). Oba iona sta bila izpostavljena enakim naključnim spremembam magnetnega in električnega polja in je bilo merjenje veliko natančnejše.

Najprej so naredili ione prve vrste, obdržali samo enega od njih na magnetronski krožnici z majhnim polmerom in ga spravili na krožnico s polmerom okoli 1 mm. Nato so ustvarili en sam ion druge vrste v bližini središča pasti. Ion je z električno silo deloval na prvi ion. Gibanje ionov, ki delujeta drug na drugega, so opisali z razdaljo od središča pasti do skupnega težišča ionov in z razdaljo od enega iona do drugega. Razdaljo težišča od

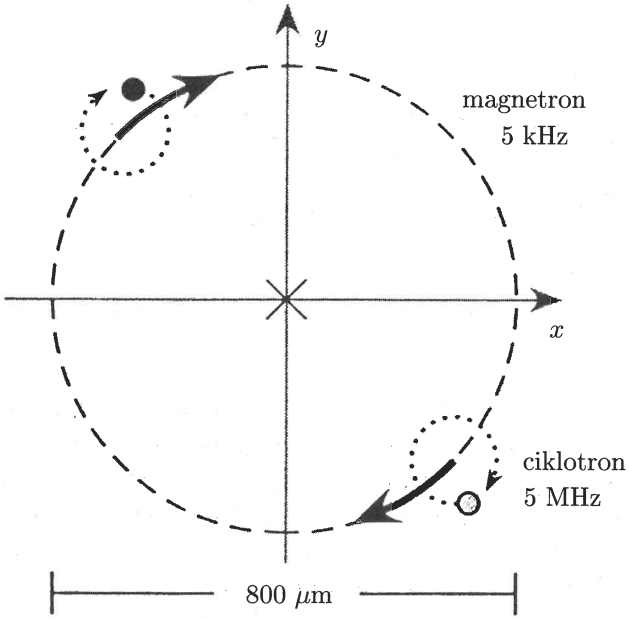


Slika 2. Tri vrste gibanja naelektrenega delca v Penningovi pasti

središča pasti so zmanjšali skoraj na 0, razdaljo iona od iona pa povečali na okoli 0,8 mm. Ob tem so frekvenco utripanja, s katero se je malenkostno spreminjala razdalja med ionoma, zmanjšali na 0,054 Hz. Nazadnje sta se iona v smeri osi gibala neodvisno drug od drugega in je to veljalo tudi za njuni ciklotronski kroženji, njuni magnetronski gibanji pa sta bili povezani. Na vse značilne količine gibanja ionov so vplivali z napetostjo med elektrodama in njenim časovnim potekom. Na drugi strani so natančno merili napetost med hiperboloidnima kapicama in s tem zasledovali gibanje ionov.

Da bi razliko mas lahko izmerili z relativno natančnostjo 10^{-12}, so ciklotronsko frekvenco ν_{cp1} ali ν_{cp2} morali izmeriti z relativno natančnostjo 10^{-8} in frekvenco nihanja v smeri simetrijske osi ν_{z1} ali ν_{z2} z relativno natančnostjo 10^{-5}. Pri tem indeks 1 zadeva enega od ionov in indeks 2 drugega. Tega ni bilo pretežko doseči. Izmerili so razmerje mas ionov $M\left({}^{29}\mathrm{Si}^+\right)/M\left({}^{28}\mathrm{SiH}^+\right) = 0{,}9997151241812(65)$ in $M\left({}^{33}\mathrm{S}^+\right)/M\left({}^{32}\mathrm{SH}^+\right) = 0{,}9997441643450(89)$. To je bilo sedemstokrat oziroma stokrat natančneje od prejšnjih merjenj. Posebej so se prepričali, da se rezultati niso znatno spremenili, če se je razdalja med ionoma spremenila od 0,4 do 1,0 mm. V razmerjih so upoštevali popravke z velikostno stopnjo 10^{-11} zaradi dipolnega momenta molekul, zaradi manjkajočega elektrona in razlike vezavnih energij elektrona in kemijskih vezavnih energij. Tako so dobili za razlike mas nevtralnih atomov $M\left({}^{28}\mathrm{Si}\right) + M(\mathrm{H}) - M\left({}^{29}\mathrm{Si}\right) = 0{,}00825690198(24)$ u in $M\left({}^{32}\mathrm{S}\right) + M(\mathrm{H}) - M\left({}^{33}\mathrm{S}\right) = 0{,}00843729682(30)$ u. Za vodik so že prej poznali razliko mas: $M(\mathrm{D}) - 2M(\mathrm{H}) = -0{,}00154828629(40)$. Tako so za poskus s silicijem in za poskus z žveplom dobili levo stran enačbe (1) z relativno natančnostjo $7 \cdot 10^{-8}$.

Zanimiv je popravek zaradi dipolnega momenta. Težišče negativnega naboja v molekuli kroži po krožnici z malo večjim polmerom, težišče pozitivnega naboja pa po krožnici z malo manjšim. Zaradi tega se ciklotronska frekvenca spremeni relativno za $-\alpha B^2/m$ s polarizirnostjo molekule α. Spre-



Slika 3. Sklopljeni magnetronski gibanji dveh naelektrenih delcev, ki se malo razlikujeta po masi, v Penningovi pasti.

memba ima velikostno stopnjo 10^{-9}, tako da je po tej poti mogoče meriti polarizirnost molekul.

Za merjenje sevanja so z Braggovo spektrometrijo poskrbeli na inštitutu v Grenoblu v sodelovanju z inštitutom v Gaithersburgu. Postopno so izdelali spektrometer GAMS4 z dvema ravnima kristaloma skoraj brez napak iz silicija ali germanija. Z njim je bilo mogoče natančno izmeriti valovno dolžino sevanja γ za fotone z energijo do 6 MeV. Spektrometer so preselili čez Atlantik in nazaj. Zdaj deluje na inštitutu Laue-Langevin ob jedrskem reaktorju z velikim nevtronskim fluksom [4].

V rovu blizu reaktorske sredice so obsevali z nevtroni snov, katere jedra so zajela nevtrone in pri prehodu v osnovno stanje sevala. Sevanje je po rovu zadelo prvi in nato drugi kristal spektrometra. Nekaj kristalov so premerili v drugih metroloških laboratorijih po svetu in ugotovili njihov mrežni razmik a v metrih. (Nekatere od teh kristalov so izrezali iz istega velikega kristala prečiščenega silicija ali germanija.) Braggova enačba valovno dolžino $\lambda = c/\nu = 2a \sin \frac{1}{2}\vartheta$ poveže s sipalnim kotom ϑ. Težava je bila v tem, da sipalni kot pri fotonu z energijo 5 MeV meri manj kot desetino stopinje. Natančnost preizkusa je tako omejil najmanjši kot, pri katerem je bilo mogoče meriti z relativno natančnostjo 10^{-7}.

Merilna naprava GAMS4 je zelo izpopolnjena. Merilni prostor ima stene iz betonskih blokov z akustično izolacijo. Zaradi toplotne zaščite se temperatura na dan ne spremeni za več kot stotino stopinje. Posebna talna plošča varuje naprave pred tresljaji. Kristala sta nameščena v litoželeznem ohišju, natančno postavljena in med seboj povezana, tako da ostaneta vzporedna. Zelo natančno ju je mogoče vrteti. Zasuk vsake od osi merijo z Michelsonovim interferometrom s pravokotno polariziranima delnima curkoma na 10^{-7} natančno.

Z opisano napravo so kolikor mogoče natančno izmerili energijo fotonov γ približno 3,5 MeV in 4,9 MeV, ki ju odda jedro ^{29}Si pri prehodu v osnovno stanje, 0,8 MeV, 2,4 MeV in 5,4 MeV, ki jih odda jedro ^{33}S, in 2,2 MeV fotona, ki ga odda jedro D. Frekvence fotonov, ki so jih pri prehodu v osnovno stanje oddala jedra ene vrste, je mogoče sešteti. Tako so dobili v zvezah $\nu_{\mathrm{Si}} = c/\lambda_{\mathrm{Si}}$, $\nu_{\mathrm{S}} = c/\lambda_{\mathrm{S}}$ in $\nu_{\mathrm{D}} = c/\lambda_{\mathrm{D}}$ po vrsti za efektivne valovne dolžine $\lambda_{\mathrm{Si}} = 0{,}146318275(86) \cdot 10^{-12}$ m, $\lambda_{\mathrm{S}} = 0{,}143472991(54) \cdot 10^{-12}$ m in $\lambda_{\mathrm{D}} = 0{,}557341007(98) \cdot 10^{-12}$ m. Prvi in drugi podatek sta 25-krat in 40-krat natančnejša od prejšnjih.

Za razliko merskih števil leve in desne strani enačbe (1) so dobili pri merjenju s silicijem $-9,7(8,0)\cdot 10^{-7}$ in pri merjenju z žveplom $2,1(5,2)\cdot 10^{-7}$ ter skupaj $-1,4(4,4) \cdot 10^{-7}$. Po tem lahko rečemo, da so merjenja podprla zvezo med energijo in maso z relativno natančnostjo $4 \cdot 10^{-7}$. To je 44-krat natančneje od zadnjega takega merjenja, na podlagi energije fotonov γ pri anihilaciji elektrona s pozitronom v mirovanju [5].

Merjenje mase je precej natančnejše od merjenja valovne dolžine sevanja γ, ki ga omejuje merjenje majhnih kotov. Relativna natančnost 10^{-12} pri merjenju mase bo omogočila pomembna osnovna raziskovanja v fiziki in astrofiziki. Obetajo, da bo mogoče izmeriti maso ionizacijske energije atomov in kemijske vezavne energije molekul.

LITERATURA

[1] S. Rainville, J. K. Thompson, E. G. Myers, J. M. Brown, M. S. Dewey, E. G. Kessler, jr., R. D. Deslattes, H. G. Börner, M. Jentschel, P. Mutti in D. E. Pritchard, *A direct test of $E = mc^2$*, Nature **438** (2005) 1096.

[2] J. Strnad, *Enoelektronski oscilator*, Obzornik mat. fiz. **22** (1975), str. 24.

[3] S. Rainville, J. K. Thompson in D. E. Pritchard, *An ion balance for ultra-high-precision atomic mass measurements*, Science **303** (2004) 334.

[4] E. G. Kessler, jr., M. S. Dewey, R. D. Deslattes, A. Henins, H. G. Börner, M. Jentschel in H. Lehmann, *The GAMS4 crystal facility*, Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. A **457** (2001) 187.

[5] G. L. Greene, M. S. Dewey, E. G. Kessler, jr. in E. Fishbach, *Test of special relativity by a determination of the Lorentz limiting velocity: Does $E = mc^2$?*, Phys. Rev. D **44** (1991) R2215.

SKLENJENE VERIGE DOTIKAJOČIH SE KROŽNIC V KONČNIH GEOMETRIJAH*

(Učiteljeva raziskovalna naloga)

HERBERT ZEITLER

Matematični inštitut Bayreuth
Nemčija

Math. Subj. Class. (2000): 05B25, 51E23

Podana je posplošitev znanega Apolonijevega problema (o krožnici, ki se dotika treh drugih) v končnih geometrijah. Pri tem v primeru polja praštevilske karakteristike $p = 4a - 1$ dobimo zaporedja $2a - 1$ parov krožnic, od katerih se vsaka dotika ustrezne krožnice prejšnjega para. Lastnosti dobljenih zaporedij sledijo iz preprostih izračunov v končnih poljih.

CLOSED KISSING-CYCLE-CHAINS IN FINITE GEOMETRIES

We give a generalization of a well-known Appolonius problem (about the circle touching three given ones) in finite geometries. In the case of the field of a prime characteristics $p = 4a - 1$ we obtain sequences of $2a - 1$ pairs of circles, each of which touches the corresponding circle of the previous pair. The properties of such sequences are obtained by simple calculations in finite fields.

Predgovor: Naš pogled na poučevanje matematike

Gotovo mora vsak učitelj predvsem posredovati svoje znanje učencem, a poleg tega naj bi opravljal tudi majhne raziskave. Odkrivanje novih, presenetljivih dejstev je vredno več kot preučevanje debelih, spoštovanja vrednih knjig. Podoben pristop je hkrati spodbuden za vsakdanje delo v učilnici, ki tako postaja pestrejše. Navsezadnje lahko na ta način navdušimo učence za samostojno delo in širjenje lastnega obzorja.

V članku podajamo primer tovrstnega dela. Na začetku v obliki kratkega povzetka navedemo nekaj dobro znanih matematičnih dejstev (brez podrobnih dokazov). V drugem delu pa pokažemo, kako v matematiki postopoma, korak za korakom, nastajajo nove, vse bolj splošne trditve. To je vznemirljiva pot, ob kateri na nas preži kopica zanimivih odkritij.

*Članek je nastal na podlagi zapiskov avtorjevega predavanja, opravljenega v okviru strokovnega izpopolnjevanja profesorjev matematike na nemških gimnazijah.

1. Osnovni pojmi. Nekaj algebre

1.1 Razširitev realnih števil do množice kompleksnih števil

Polje je algebrska struktura z dvema operacijama, seštevanjem in množenjem. Obe operaciji morata zadoščati določenim pogojem (komutativnost, asociativnost, distributivnost, ...). Najbolj znan primer polja so realna števila z običajnim seštevanjem in množenjem.

Enačba $x^2 + 1 = 0$ v množici $\mathbb{R}$ nima rešitev. Zato dodajmo realnim številom nov ("pridružen") element i, za katerega velja $i^2 + 1 = 0$. Množico vseh dobljenih števil oblike $x_1 + ix_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, označimo s $\mathbb{C}$ in imenujemo kompleksna števila. Z njimi bomo računali kot običajno računamo z algebrskimi izrazi, na primer: $(3 + i)(1 + 2i) = 3 + 6i + i + 2i^2 = 1 + 7i$.

Izkaže se, da je množica $\mathbb{C}$ s takim seštevanjem in množenjem spet polje. Govorimo o kvadratični razširitvi polja $\mathbb{R}$.

1.2 Posplošitev: razširitev poljubnega polja F do nekega polja E

Izhajajmo sedaj iz poljubnega polja F in označimo s F^* množico vseh njegovih obrnljivih elementov $F \setminus \{0\}$. Naj bo $x^2 + b = 0$, $b \in F^*$, enačba, ki v polju F nima rešitev, torej $b \notin (F^*)^2$. Dodajmo polju F simbol ε, za katerega naj velja $\varepsilon^2 + b = 0$, in označimo z E množico vseh izrazov oblike $x_1 + \varepsilon x_2$, $x_1, x_2 \in F$. Vpeljimo na tej množici običajni računski operaciji. Tako bo, na primer

$$(3+\varepsilon)+(1+2\varepsilon) = 4+3\varepsilon \quad \text{in} \quad (3+\varepsilon)\cdot(1+2\varepsilon) = 3+6\varepsilon+\varepsilon+2\varepsilon^2 = 3-2b+7\varepsilon\,.$$

E z omenjenima operacijama seštevanja in množenja je polje, ki predstavlja tako imenovano kvadratično razširitev polja F.

1.3 Končna ali Galoisova polja

Definicija. Polje z natanko q elementi običajno označimo z $\mathrm{GF}(q)$ in mu pravimo Galoisovo polje, po francoskem matematiku Evaristu Galoisu (1811–1832). Taka polja obstajajo tedaj in le tedaj, ko je q potenca nekega praštevila p: $q = p^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dogovorimo se, da v tem članku ne bomo obravnavali primerov s sodim q, ker bi sicer naleteli na določene težave.

Izkaže se, da za vsako končno polje F v množici F^* obstaja natanko $\frac{1}{2}(q-1)$ kvadratov in prav toliko elementov, ki niso (popolni) kvadrati. Pri medsebojnem množenju elementov v F^* opazimo analogijo z dobro znanim

„pravilom znakov". Na primer, produkt poljubnih dveh nekvadratov nam da kvadrat. V zvezi s kvadrati in nekvadrati omenimo še zelo pomemben izrek iz teorije števil:

Naj bo GF(q) končno polje in 1 njegova enota. Element -1 ni kvadrat natanko tedaj, ko je $q = p^{2n-1}$ za neko praštevilo p oblike $4a - 1$, $a \in \mathbb{N}$, in poljubno naravno število n. V primeru, da je $-1 \in (F^*)^2$, pa mora biti $q = (4a-1)^{2n}$, kjer je $4a - 1$ praštevilo, ali $q = (4a+1)^n$, kjer je $4a + 1$ praštevilo (a in n sta naravni števili).

Pojasnimo končno aritmetiko na najpreprostejšem primeru, ko je $q = p$ praštevilo. Najprej poiščemo običajno vsoto oziroma produkt dveh števil, potem pa rezultat delimo s p. Dobljeni ostanek nam predstavlja iskano vsoto oziroma produkt elementov polja GF(p).

Primer. Naj bo $p = q = 3$, elementi polja označeni z 0, 1, 2, operaciji v GF(3) pa s $\oplus$ in $\odot$.

$$\begin{array}{rrcl} 2+1=3 & 3=1\cdot 3+0 & \Rightarrow & 2\oplus 1=0 \\ 2\cdot 2=4 & 4=1\cdot 3+1 & \Rightarrow & 2\odot 2=1 \end{array}$$

Zapišimo dobljene rezultate v obliki tabel:

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\odot$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Pogled na diagonalo v drugi tabeli nam pove, da je enota 1 popoln kvadrat, element 2 ($= -1$) pa ne. V nadaljevanju bomo zaradi enostavnejših zapisov tudi za označevanje operacij v končnih poljih uporabljali običajna simbola $+$ in $\cdot$. V Galoisovem polju $F = \mathrm{GF}(p^n)$ za vsak element x velja $\underbrace{x + x + \cdots + x}_{p\text{-krat}} = p \cdot x = 0$. Praštevilo p pri tem imenujemo karakteristika danega polja (oznaka: Char F).

Za konec tega kratkega algebrskega sprehoda omenimo kvadratične razširitve končnih polj. Kot smo pravkar ugotovili, v primeru polja $F = \mathrm{GF}(3)$ enačba $x^2 + 1 = 0$ oziroma $x^2 = -1 = 2$ nima rešitve, saj 2 v našem polju ni kvadrat nobenega elementa. Dodajmo torej polju F element (abstraktni simbol) ε, za katerega naj velja $\varepsilon^2 + 1 = 0$. Dobili bomo kvadratično razširitev prvotnega polja, ki bo vsebovala 9 elementov:

$$E = \mathrm{GF}(3^2) = \{0, 1, 2, \varepsilon, \varepsilon+1, \varepsilon+2, 2\varepsilon, 2\varepsilon+1, 2\varepsilon+2\}.$$

V bolj splošnem primeru, ko je $F = \mathrm{GF}(q) = \mathrm{GF}(p^n)$ za neko potenco poljubnega praštevila p, ravnamo enako. Izhajamo iz enačbe $x^2 + b = 0$, ki v F nima rešitev, in dodamo polju F simbol ε z lastnostjo $\varepsilon^2 + b = 0$. Tako pridemo do razširjenega polja $E = \mathrm{GF}(q^2)$.

Bralcem predlagam, da ob seznanjanju s tem tekstom tudi aktivno delajo, saj matematika nikakor ne sodi med bralne športe! Vzemite polje $F = \mathrm{GF}(5)$ in poiščite enačbe oblike $x^2 + b = 0$, $b \in F$, ki v tem polju nimajo rešitev. Koliko takih enačb obstaja? Kateri elementi danega polja so kvadrati? Ali je med njimi tudi -1? Koliko rešitev ima v tem polju enačba $x^2 + 3x + 2 = 0$?

2. Nekaj geometrije

2.1 Geometrija nad poljem realnih števil

Iz srednješolskih časov se še vsi spomnimo dobre stare analitične geometrije. Množico točk v ravnini predstavljajo vsi urejeni pari (x_1, x_2) realnih števil. Sedaj jim bomo dodali še posebno, neskončno točko ∞.

Premico naj tvorijo vse tiste točke (x_1, x_2), koordinate katerih zadoščajo določeni linearni enačbi $n_1x_1 + n_2x_2 + d = 0$, in še točka ∞. Pri tem predpostavljamo, da realni števili n_1, n_2 nista hkrati enaki 0: $n_1^2 + n_2^2 \neq 0$. Množenje s poljubnim neničelnim skalarjem vodi do nove enačbe iste premice (govorimo o ekvivalentnih enačbah).

Množico $\{(x_1, x_2) \mid (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2 > 0,\ m_1, m_2 \in \mathbb{R}\}$ imenujemo krožnica s polmerom $r \in \mathbb{R}^+$. Premice in krožnice bomo z eno besedo imenovali cikli.

2.2 Geometrija para $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

Še bolj zanimivo geometrijo dobimo z uporabo kompleksnih števil [1]. Vzemimo za množico točk $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Premico sestavljajo vsa tista kompleksna števila Z, ki zadoščajo enačbi oblike $Z\overline{N} + \overline{Z}N + d = 0$, in še točka ∞. Pri tem je N poljubno neničelno kompleksno število, d pa neko realno število. Podobno kot v prejšnjem razdelku enačba premice ni enolično določena; isto premico spet predstavlja neskončno ekvivalentnih enačb.

Kot običajno smo v zadnji enačbi z $\overline{Z} = z_1 - iz_2$ označili konjugirano vrednost kompleksnega števila $Z = z_1 + iz_2$. Podobno je $\overline{N} = \overline{n_1 + in_2} = n_1 - in_2$, pri čemer imamo za realni števili n_1, n_2 še dodaten pogoj $n_1^2 + n_2^2 \neq$

0. S poenostavitvijo zapisa

$$(z_1 + iz_2)(n_1 - in_2) + (z_1 - iz_2)(n_1 + in_2) + d = 0$$

dobimo za vsako premico spet znano enačbo (z realnimi koeficienti): $n_1 z_1 + n_2 z_2 + \frac{d}{2} = 0$.

Prehajamo k definiciji krožnic; podali jih bomo z enačbami oblike $(Z - M)(\overline{Z} - \overline{M}) = r^2$, kjer je M poljubno kompleksno število, r pa pozitivno realno število. Vstavimo $Z = z_1 + iz_2$, $M = m_1 + im_2$ in po poenostavitvi dobimo običajno enačbo $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2$.

Tako kot v primeru realne ravnine, vse dobljene premice in krožnice enotno poimenujemo cikli. Dobljeni $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$-model zagotavlja obilo privlačnega računanja [2]. Znova lahko definiramo kopico pojmov: pravokotnost, simetrija na cikel, preslikave, ki ohranjajo množico ciklov, ...

Tovrstno delo uresničuje sanje slehernega poklicnega matematika o elegantnosti in lepoti. Dijaki sicer utegnejo biti ob ponavljanju klasične geometrije z uporabo kompleksnih števil nekoliko manj srečni; mnogi od njih še nimajo razvitega občutka za lepoto abstraktnih izračunov.

2.3 Geometrija, povezana s poljubno kvadratično razširitvijo nekega polja

Izhajajmo iz para polj $F \subset E$, zgrajenega v razdelku 1.2, in ga uporabimo za posplošitev pravkar omenjene $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$-geometrije [3]. Vse poteka v tolikšni meri podobno kot v že obravnavanem posebnem primeru, da pravzaprav predstavlja le njegovo ponovitev.

Množica točk: $\mathcal{T} = E \cup \{\infty\}$.

Premice: $p = \{X \in E \mid X\overline{N} + \overline{X}N + d = 0\} \cup \{\infty\}$, kjer je $N \in E^*$, $d \in F$ (množenje enačbe s poljubnim elementom $a \in F^*$ nam da ekvivalentno enačbo, ki predstavlja isto premico). Tokrat je po definiciji $\overline{X} = \overline{x_1 + \varepsilon x_2} = x_1 - \varepsilon x_2$. Če poleg tega zapišemo N kot $n_1 + \varepsilon n_2$, dobimo za končne točke poljubne premice enačbo $x_1 n_1 + b x_2 n_2 + \frac{1}{2} d = 0$.

Krožnica: $k = \{X \in E \mid (X - M)(\overline{X} - \overline{M}) = |R|^2\}$, kjer je $M \in E$, $|R|^2 = R\overline{R} = r_1^2 + b r_2^2 \in E^*$. Ko vstavimo $X = x_1 + \varepsilon x_2$, $M = m_1 + \varepsilon m_2$, pridemo do enačbe $(x_1 - m_1)^2 + b(x_2 - m_2)^2 = |R|^2$.

Vse premice in krožnice spet združimo v skupno množico elementov, katerim bomo rekli cikli.

2.4 Končne geometrije

Končni cilj našega geometrijskega uvoda je poseben primer pravkar navedene konstrukcije, ki jo dobimo z izbiro para polj $F = \mathrm{GF}(q)$ in $E = \mathrm{GF}(q^2)$ (glej 1.3). Pri tem nas definicije iz prejšnjega razdelka (za vsak q, ki je potenca nekega lihega praštevila) vodijo do nove, izjemno presenetljive geometrije [4]. V njej odkrijemo veliko čudnih, naravnost norih lastnosti. Krožnici z enačbama $(x_1-m_1)^2+b(x_2-m_2)^2 = |R|^2$ in $(x_1-n_1)^2+b(x_2-n_2)^2 = |S|^2$ naj bosta (tako kot v evklidski geometriji) ortogonalni natanko tedaj, ko je kvadrat razdalje med njunima središčema enak vsoti kvadratov njunih polmerov: $(M-N)(\overline{M}-\overline{N}) = |R|^2+|S|^2$. Toda sedaj obstajajo tudi pari pravokotnih koncentričnih krožnic! Še en izrek v zvezi s tem pravi, da imata poljubni dve ortogonalni krožnici natanko dve skupni točki ali pa nobene (se ne sekata). Poleg tega lahko sedaj preštejemo vse elemente naše „ravnine“ in izkaže se, da imamo natanko q^2+1 točk, $q(q+1)$ premic in $q^2(q-1)$ krožnic (torej $q(q^2+1)$ ciklov).

Ponovno ste vabljeni, da se ukvarjate z matematiko, za katero boste potrebovali le papir in svinčnik. V primeru $F = \mathrm{GF}(3)$ in $E = \mathrm{GF}(9)$ naštejte vse točke, premice in krožnice (za cikle zapišite enačbe). Preverite, katere točke vsebuje posamezen cikel.

2.5 Ali so končne geometrije popolnoma abstraktna matematična zamisel?

Lahko bi si kdo mislil, da je omenjena končna geometrija le neke vrste miselna igrica, brez sleherne povezave z realnim svetom, ki nas obdaja. Ljudje s podobnimi pogledi si predstavljajo matematike kot visoke svečenike, ki ljubosumno čuvajo svoje zaklade, namenjene izključno izbrancem.

V resnici velja prav nasprotno: končna geometrija nikakor ni nekoristna igra! Uporablja se na najrazličnejših področjih, kot so fizika elementarnih delcev, geometrijska struktura vesolja, statistika in še posebej v teoriji kodiranja informacij. Tako matematiki zapuščamo naše slonokoščene stolpe, da bi posredovali svoje nauke vsem ljudem.

3. Drobna odkritja, ki jih lahko prispevajo srednješolski profesorji

Naslednji rezultati ne predstavljajo matematične revolucije. Njihova znanstvena vrednost je zanemarljiva, vendar dokazujejo, da lahko tudi profesor, ki vsak dan del časa preživi v učilnici, uspešno raziskuje (svoje mnenje

glede tega smo pojasnili v predgovoru). Lahko govorimo tudi o „drobni matematični umetnosti“.

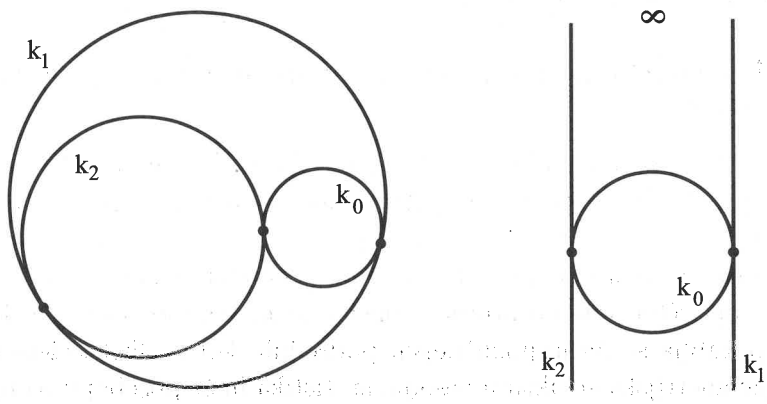
Odslej bomo delali v geometriji para polj $F = \mathrm{GF}(q)$, $E = \mathrm{GF}(q^2)$, kjer je $q = p^n \neq 2^n$, ki smo jo definirali v razdelku 2.4.

3.1 Dotikajoče se trojice ciklov

Začnimo s krožnicami k_0, k_1, k_2, ki se paroma dotikajo v treh različnih točkah. Skozi poljubno dotikališče torej potekata natanko dve dani krožnici (slika 1, levo). S primerno preslikavo, ki ohranja množico vseh ciklov, lahko najprej premaknemo eno od treh dotikališč v točko ∞ (slika 1, desno). Nato pa (ne da bi izgubili na splošnosti) še izberemo koordinatni sistem, v katerem bodo naši trije cikli imeli posebno lepe enačbe:

$$\begin{aligned} k_1\colon\ & X + \overline{X} = 2 \iff x_1 = 1 \\ k_2\colon\ & X + \overline{X} = -2 \iff x_1 = -1 \\ k_0\colon\ & X\overline{X} = 1 \iff x_1^2 + bx_2^2 = 1 \end{aligned}$$

Dotikališča ciklov pri tem predstavljata točki s koordinatama $(1, 0)$ in $(-1, 0)$ ter točka ∞.



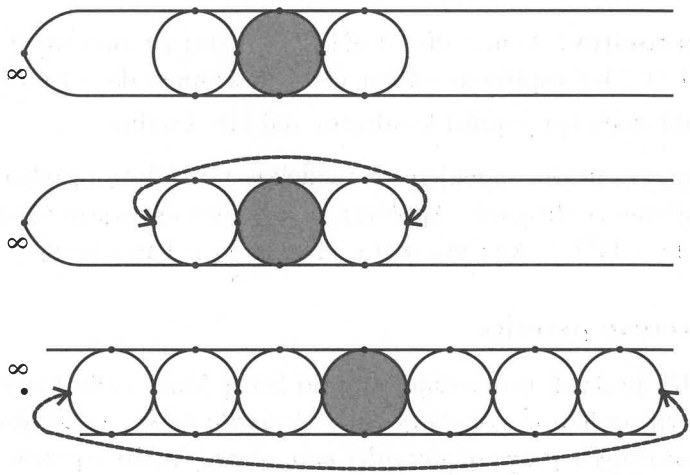
Slika 1. Transformacija poljubne trojice dotikajočih se ciklov v „standardno“ lego

3.2 Apolonijevi cikli

Zanimali nas bodo taki cikli C_1, ki se dotikajo tako ciklov k_1, k_2, kot tudi k_0. V vsakem dotikališču se lahko srečata le dva cikla. To je poseben primer znanega Apolonijevega problema (po Apoloniju iz Perga, ki je živel okrog leta 200 pr. n. št.) iz evklidske geometrije [5].

Izrek 1. *Za poljubno medsebojno dotikajočo se trojico ciklov obstajata natanko dva Apolonijeva cikla C_1, C_1' tedaj in le tedaj, ko je $q = (4a-1)^{2n-1}$, kjer sta $a, n \in \mathbb{N}$, $4a-1$ pa je praštevilo.*

Problem spominja na tri teniške žoge v plastični cevi: v žlebu, ki ga določata cikla (premici) k_1, k_2, se nahajajo cikli (krožnice) k_0, C_1 in C_1' (glej zgornji del slike 2).



Slika 2. Različne verige, sestavljene iz dotikajočih se ciklov

Dokaz. Izhajamo iz enačb ciklov k_1, k_2, k_0, kot smo jih zapisali v razdelku 3.1. Potem iskana cikla ne moreta biti premici, saj bi v nasprotnem primeru dobili tri premice, ki se dotikajo v isti točki (∞). Novi cikel mora torej imeti enačbo oblike $(x_1 - m_1)^2 + b(x_2 - m_2)^2 = |R|^2$. Upoštevajmo, da se dotika premic k_1 in k_2:

$$(x_1, x_2) \in k_1 \cap C_1 \Leftrightarrow (1 - m_1)^2 + b(x_2 - m_2)^2 = |R|^2,$$

$$(x_1, x_2) \in k_2 \cap C_1 \Leftrightarrow (1 + m_1)^2 + b(x_2 - m_2)^2 = |R|^2.$$

Z odštevanjem obeh enačb dobimo, da je $m_1 = 0$, ko to vstavimo v prvo enačbo, pa sledi $(x_2 - m_2)^2 = \frac{|R|^2 - 1}{b}$. Ker vemo, da imamo eno samo rešitev (dotikališče), mora biti $|R|^2 = 1$, enačba iskane krožnice C_1 pa je oblike $x_1^2 + b(x_2 - m_2)^2 = 1$.

Nazadnje upoštevajmo, da se C_1 in k_0 dotikata (imata eno samo skupno točko). Z odštevanjem obeh enačb dobimo pogoj $x_2 = \frac{1}{2}m_2 \neq 0$, vstavljanje tega rezultata v enačbo krožnice C_1 pa nas vodi do enakosti $x_1^2 = \frac{4 - bm_2^2}{4}$. ∎

Prva ugotovitev. V nadaljevanju bomo s $|P|$ označevali moč poljubne množice P.

$$|C_1 \cap k_0| = 1 \Leftrightarrow x_1^2 = \frac{4 - bm_2^2}{4} = 0 \Leftrightarrow m_2 = \pm\sqrt{\frac{4}{b}},$$

torej bosta enačbi morebitnih Apolonijevih krožnic imeli obliko $x_1^2 + bx_2^2 \pm 4\sqrt{b}x_2 + 3 = 0$.

Druga ugotovitev. Vemo, da $-b \notin (F^*)^2$, sedaj pa smo prišli do pogoja $b = \frac{4}{m_2^2} \in (F^*)^2$. Ko zapišemo $-b$ kot $(-1) \cdot b$, vidimo, da $-1 \notin (F^*)^2$, saj bi nam produkt dveh (popolnih) kvadratov dal nov kvadrat.

Glede na rezultate, omenjene v razdelku 1.3, lahko pravkar dokazano trditev zapišemo še drugače. Apolonijeve krožnice obstajajo natanko tedaj, ko je $q = (4a-1)^{2n-1}$, kjer sta $a, n \in \mathbb{N}$ in je $4a - 1$ praštevilo.

3.3 Coxeterove peterice

Leta 1971 je „kralj geometrije“ Harold Scott Macdonald Coxeter (1907–2003) zastavil naslednje vprašanje [6]: *Ali imata lahko Apolonijevi krožnici C_1, C_1' iz prejšnjega primera natanko eno skupno točko* (srednji primer na sliki 2)? Zamisel je zvenela nerealno, saj se v evklidski geometriji to ne more zgoditi. Zato je toliko bolj presenetljiva sledeča ugotovitev.

Izrek 2. *Coxeterove peterice ciklov obstajajo natanko tedaj, ko je $q = 3^{2n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.*

V tem primeru torej dobimo 5 medsebojno dotikajočih se ciklov, ki tvorijo nekakšen grozd.

Dokaz. Uporabimo enačbi Apolonijevih krožnic $x_1^2 + bx_2^2 \pm 4\sqrt{b}x_2 + 3 = 0$. Ko ju odštejemo, dobimo $x_2 = 0$ in dalje: $x_1^2 = -3$. Ena sama rešitev te enačbe (dotikališče) obstaja natanko tedaj, ko je $3 \equiv 0 \pmod{p}$. Če ta pogoj združimo s kriterijem iz izreka 1, dobimo, da je $4a - 1 = 3$ in q oblike 3^{2n-1}, $n \in \mathbb{N}$. Omenimo še, da je sam Coxeter opazil le primer $q = 3$. ■

3.4 Steinerjeve verige

Začnemo z Apolonijevima cikloma C_1, C_1', dobljenima na podlagi danih treh ciklov k_0, k_1, k_2, in dodajamo nove pare $(C_2, C_2'), (C_3, C_3'), \ldots$ Vsak cikel iz poljubnega naslednjega para naj se dotika tako ciklov (premic) k_1, k_2, kot

tudi ustreznega cikla iz prejšnjega para. Cikla iz istega para naj se za zdaj ne dotikata, torej (po pravkar dokazanem izreku) $q \neq 3^{2n-1}$. Tako dobimo celo „klobaso“ krožnic (spodnji del slike 2). Govorimo o (odprti) Steinerjevi verigi, po nadvse aktivnem švicarskem matematiku Jacobu Steinerju (1796–1863), geometru z dušo in telesom.

Izrek 3. *Steinerjeve verige v geometriji para polj ($GF(q)$, $GF(q^2)$) lahko zgradimo le, če je q oblike $(4a-1)^{2n-1}$, kjer je $4a-1$ praštevilo, $a, n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Z uporabo matematične indukcije preverimo, da ima poljuben par ciklov (C_t, C'_t) enačbi: $x_1^2 + bx_2^2 \pm 4t\sqrt{b}x_2 + 4t^2 = 1$. Vemo, da v primeru $t = 1$ trditev velja, saj je to natanko Apolonijeva konfiguracija iz razdelka 3.2.

Predpostavimo, da je naša domneva pravilna za neki $t \in \mathbb{N}$ in da se ustrezni krožnici C_t, C'_t pri tem ne dotikata. Najprej si poglejmo le enega od obeh ciklov, na primer tistega s središčem $M_t = (0, \frac{2t}{\sqrt{b}})$, in skušajmo ugotoviti, kaj velja za ustrezen cikel iz naslednjega para (C_{t+1}, C'_{t+1}). V drugem delu dokaza izreka 1 smo videli, da mora ta cikel imeti enačbo oblike $x_1^2 + b(x_2 - m_2)^2 = 1$. Pri tem $m_2 \neq \frac{2t}{\sqrt{b}}$, saj bi sicer cikla C_t, C_{t+1} sovpadala. Ko iščemo skupno točko teh dveh ciklov, z odštevanjem njunih enačb $x_1^2 + bx_2^2 - 4t\sqrt{b}x_2 + 4t^2 = 1$ in $x_1^2 + bx_2^2 - 2bx_2m_2 + bm_2^2 = 1$ dobimo, da je $x_2 = \frac{4t^2 - bm_2^2}{-2bm_2 + 4t\sqrt{b}} = \frac{(2t - m_2\sqrt{b})(2t + m_2\sqrt{b})}{2\sqrt{b}(2t - m_2\sqrt{b})}$.

Ker vemo, da $m_2 \neq \frac{2t}{\sqrt{b}}$, je $2t - m_2\sqrt{b} \neq 0$ in po krajšanju s tem izrazom sledi zahteva $x_2 = \frac{2t + m_2\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}$. Z vstavljanjem te vrednosti v enačbo cikla C_{t+1} pa nazadnje dobimo še pogoj $x_1^2 = -\frac{1}{4}(4t^2 - 4tm_2\sqrt{b} + bm_2^2 - 4)$. ∎

Posledica 1. *Cikla C_t in C_{t+1} bosta imela natanko eno skupno točko, ko bo $4t^2 - 4tm_2\sqrt{b} + bm_2^2 - 4 = 0$ oziroma $m_2 = \frac{2}{\sqrt{b}}(t \pm 1)$. Zaradi zahteve $C_{t+1} \neq C_{t-1}$ rešitev, ki vsebuje razliko, odpade. Če pa vstavimo v enačbo cikla C_{t+1} preostalo vrednost $m_2 = \frac{2}{\sqrt{b}}(t+1)$, dobimo nazadnje enačbo tega cikla, ki sklene naš dokaz z indukcijo: $x_1^2 + bx_2^2 - 4\sqrt{b}(t+1)x_2 + 4(t+1)^2 = 1$. Na enak način obravnavamo tudi simetričen primer drugega cikla iz para (C_t, C'_t).*

Posledica 2. *Iz pogoja $m_2 = \frac{2}{\sqrt{b}}(t+1)$ sledi, da je $b = \frac{4(t+1)^2}{m_2^2} \in (F^*)^2$ in tako ponovno $-1 \notin (F^*)^2$. Torej mora biti q oblike $p^{2n-1} = (4a-1)^{2n-1}$, kot smo ugotovili že v razdelku 3.2.*

3.5 Sklenjene Steinerjeve verige

Podobno prehodu od Apolonijeve k Coxeterovi konfiguraciji (glej 3.3), poskušajmo sedaj ugotoviti, kdaj se v Steinerjevi verigi dotakneta dve krožnici iz istega para C_t in C'_t. V tem primeru govorimo o sklenjeni Steinerjevi verigi, nekateri matematiki pa ga v šali opisujejo tudi kot „trčenje v klobasi“ [7].

Izrek 4. *Sklenjene Steinerjeve verige obstajajo natanko tedaj, ko je* $q = (4a-1)^{2n-1}$, *kjer je* $4a-1$ *praštevilo,* $a, n \in \mathbb{N}$. *V tem primeru veriga vsebuje* $4a+1$ *ciklov. Za* $a = 1$ *dobimo že znano Coxeterovo peterico.*

Dokaz. Predpostavimo, da imata za neki $t \geq 1$ cikla C_t in C'_t prvič natanko eno skupno točko. Z odštevanjem njunih enačb dobimo, da je $x_2 = 0$ in dalje $x_1^2 = 1 - 4t^2$. Krožnici bosta torej imeli eno samo skupno točko natanko tedaj, ko bo $4t^2 - 1 = (2t-1)(2t+1) = 0$. Poglejmo si tabelo:

t	$2t-1$	$2t+1$
1	1	**3**
2	3	5
3	5	**7**
4	7	9
5	9	**11**
6	11	13
7	*13*	*15*
8	15	17
9	17	**19**
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\boxed{t=1}$ Iz enakosti $(2t-1)(2t+1) = 1 \cdot 3 = 0$ sledi, da mora biti Char $F = 3$ in $q = 3^{2n-1}$; to je dejansko Coxeterova konfiguracija.

$\boxed{t=2s}$ Imamo $(4s-1)(4s+1) = 0$. Leva stran enakosti mora tako biti deljiva s karakteristiko p, ki zaradi trditve izreka 3 ni oblike $4s+1$. Torej je $p \leq 4s-1$, kar vodi do primera z manjšim t, ki pa smo ga pojasnili že v enem od prejšnjih korakov.

Tudi kadar je število t liho, a $2t+1$ ni praštevilo, zaidemo v težave. Tako na primer za $t = 7$ dobimo pogoj $2t+1 = 15 = 3 \cdot 5 = 0$, ki mu ne moremo več zadostiti, saj smo polja s karakteristiko 3 ali 5 že izločili pri obravnavi prejšnjih primerov (za manjše t). Torej lahko v nadaljevanju predpostavimo:

$\boxed{2t+1 \text{ je praštevilo, } t \text{ pa liho naravno število}}$ Zahteva $2t+1 = 0$ bo izpolnjena v primeru polja F s karakteristiko $2t+1$ oziroma tedaj, ko je $q = (2t+1)^{2n-1}$. Po primerjavi z zapisom q v formulaciji tega izreka ugotovimo, da iz $2t+1 = 4a-1$ sledi $t = 2a-1$. Ob upoštevanju začetnih treh ciklov k_1, k_2, k_0 dobimo skupno število ciklov v poljubni sklenjeni Steinerjevi verigi: $2t+3 = 4a+1$. S tem je naš izrek v celoti dokazan. ∎

Ugotovili smo, da se vsaka Steinerjeva veriga nekoč sklene, zato odprte Steinerjeve verige ne obstajajo. Primeri dobljenih verig različnih dolžin so shematično prikazani na sliki 2.

3.6 Posledica. Značilna lastnost praštevil

Izhajajoč iz izreka 3 lahko popolnoma geometrijsko, izključno na podlagi dolžine dobljenih Steinerjevih verig, opišemo vsako praštevilo oblike $4a - 1$, $a \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Zadošča, da dobljene rezultate oblikujemo v tabelo:

a	1	2	3	*4*	5	6	*7*	8	...
praštevilo $p = \mathrm{Char}\ F = 4a - 1$	3	7	11	*(15)*	19	23	*(27)*	31	...
število ciklov v verigi $(4a + 1)$	5	9	13	–	21	25	–	33	...

■

3.7 Računajte samostojno

Podana je končna geometrija para polj $F = \mathrm{GF}(q)$, $E = \mathrm{GF}(q^2)$, kot smo jo definirali v razdelku 2.4 (q je v naslednjih primerih konstanta, poljubna potenca nekega lihega praštevila).

(a) Zanima nas skupno število N_q vseh sklenjenih Steinerjevih verig v tej geometriji. Pokažite, da je

$$N_q = \begin{cases} \frac{q^2(q^4-1)}{60}, & \text{če je Char } F = 3 \\ \frac{q^2(q^4-1)}{2p}, & \text{kadar je Char } F = p > 3 \end{cases}$$

(b) Raziščite medsebojno lego dveh ciklov C_t, C_t' iz istega para v Steinerjevi verigi: lahko se dotikata (imata natanko eno skupno točko), sekata (v dveh točkah) ali pa sta si tuja (nimata skupnih točk). Izpeljite pogoje za vsakega od teh odnosov in ugotovite, kako pogosto lahko v posamezni verigi nastopi. Steinerjeva veriga na sliki 2 ne bo v skladu z dobljenimi rezultati. Kaj je na sliki narobe?

(c) Za konec omenimo še nerešen problem. Ali je mogoče popolnoma geometrijsko opisati tudi vsa praštevila oblike $4a + 1$, $a \in \mathbb{N}$?

Zaključek

Če v tem članku česa niste razumeli, vam nikakor ni treba biti slabe volje. Za to obstaja vrsta utemeljenih razlogov. Razvoj geometrije je potekal postopoma, od dokaj realnih predmetov do popolnoma abstraktnih

teorij. Nekaj podobnega lahko opazimo v likovni umetnosti. Se vam zdijo razumljive vse slike Kandinskega? Enako sprejemljivo je, da nam ob prvem stiku ni popolnoma jasno vse, kar se dogaja v svetu abstraktne geometrije.

Sklenimo s sočutnimi Einsteinovimi besedami: „Ne obremenjujte se zaradi težav, ki jih imate z matematiko; lahko vam zagotovim, da imam sam še večje."

LITERATURA

[1] I. M. Yaglom, *Complex Numbers in Geometry*, New York, 1968.

[2] H. Schwerdtfeger, *Geometry of Complex Numbers*, Toronto, 1962.

[3] F. Karteszi, *Introduction to Finite Geometry*, Budimpešta, 1976.

[4] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Berlin, 1968.

[5] B. Segre, *Lectures on Modern Geometry*, Rim, 1961.

[6] H. S. M. Coxeter, *The Finite Inversive Plane with 4 Points in Each Circle*, Studies in Pure Math. (1971), str. 39–51.

[7] H. Zeitler, *Geometrische Charakterisierung endlicher (K, L)-Ebenen ungerader Ordnung*, J. of Geom. **19** (1982), str. 43–49.

O avtorju

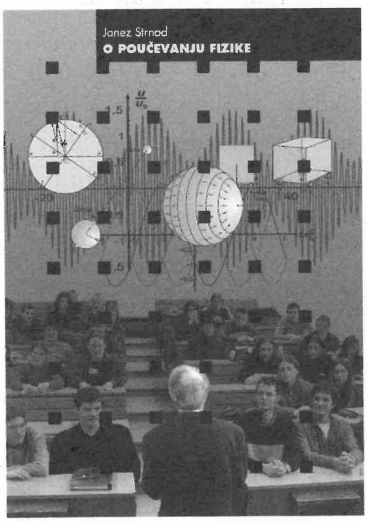
Herbert Zeitler (1923) je diplomiral na münchenski univerzi Ludwig-Maximilian pri Lindemannovem učencu prof. Oskarju Perronu, doktorsko disertacijo z naslovom *On (K, L)-planes* pa je zagovarjal na univerzi v Kasslu. V letih 1950–1977, ko je na Bavarskem služboval kot profesor matematike in ravnatelj gimnazij v Weidenu in Tirschenreuthu, je aktivno raziskoval predvsem na področju končnih geometrij, hkrati pa so ga zanimali problemi poučevanja matematike in popularizacije matematičnih znanj. Zadnjih trinajst let pred upokojitvijo je prof. Zeitler predaval na univerzi v Bayreuthu. Doslej je objavil 9 monografij in okrog 180 znanstvenih člankov. Ob njegovi 80-letnici mu je Univerza Janus Pannonius v Pecsi (Madžarska) za dosežke na področju geometrije podelila naziv častnega doktorja znanosti.

Bralci Obzornika smo se z delom prof. Herberta Zeitlerja srečali leta 1993, ko je v dveh delih izšel prevod njegovega članka *Aksiomi geometrije v šoli in znanosti*, v katerem je predstavil sodobne pristope k geometrijski tematiki. V pričujočem članku je nanizanih nekaj rezultatov o krožnicah v končni geometriji, predvsem pa je zanimiv zato, ker nazorno kaže, kako tanka je pogosto v matematiki meja med dobro znanim in še popolnoma neraziskanim.

prevedel Dušan Pagon

NOVE KNJIGE

Janez Strnad: O POUČEVANJU FIZIKE, Knjižnica Sigma 81, DMFA–založništvo, Ljubljana 2006, 320 strani.



Knjiga Janeza Strnada *O poučevanju fizike* je izšla v zbirki Knjižnica Sigma v značilnem formatu majhne knjižice z mehkimi platnicami. Pod skromno zunanjostjo pa se skriva bogata vsebina. Čeprav je knjiga v prvi vrsti namenjena aktivnim in bodočim učiteljem fizike v srednjih šolah, sega tako po filozofski kot po fizikalni plati prek tega okvira in jo zato priporočam v branje tudi vsem, ki poučujejo osnovno fiziko na univerzah, vključno z asistenti, ki vodijo vaje.

Knjiga obsega 320 strani in je razdeljena na dva dela. V prvem delu avtor povzema spoznanja, izkušnje, splošno uveljavljene in osebne poglede na poučevanje fizike. V tem delu opredeli in opiše tako rekoč vse pomembnejše pojme, sprejete poglede, izraze, dileme in odprta vprašanja, ki opredeljujejo področje poučevanja fizike, in s katerimi naj bi bil učitelj fizike seznanjen. Dotakne se številnih ključnih vprašanj: učitelj kot človek, odnos učitelj-učenec, pogled na poučevanje kot znanost, poučevalsko raziskovanje, učitelj kot znanstvenik, poučevalski modeli, o spremembah v poučevanju ... če naštejem le pomembnejše. Skozi celotno poglavje se vrstijo številni primeri iz zgodovine in citati iz svetovne literature. Citati so skrbno izbrani, tako da z različnih strani osvetlijo obravnavana vprašanja in bralcu predstavijo objektivnejšo sliko o teh zahtevnih problemih, ki pogosto nimajo enoličnih rešitev. Prvi del knjige sklene ločeno poglavje, v katerem je avtor zbral kakih sto petdeset vprašanj, ki so sistematično urejena po poglavjih fizike. Vprašanja so zasnovana tako, da spodbujajo razmišljanje in pokrivajo širok razpon zahtevnosti. Vprašanja bodo lahko učitelji koristno uporabili pri pouku, zahtevnejša pa bodo najprej spodbudila bralca, da bo sam poiskal odgovore in tako osvežil svoje znanje fizike.

V drugem delu so predstavljena poglavja osnovne fizike s poudarkom na didaktiki fizike ter na povezovanju učnih vsebin z vsakdanjim življenjem, z aktualnimi družbenimi vprašanji in s pomembnejšimi tehnološkimi dosežki. Tako kot v prvem delu avtor spretno prepleta obravnavane vsebine s

številnimi primeri iz zgodovine fizike, kar popestri branje, učiteljem pa nudi gradivo, s katerim bodo lahko predstavili fiziko v širšem zgodovinskem in družbenem kontekstu. Bralci, ki bi želeli izvedeti več o temah, o katerih piše knjiga, bodo veseli navedb številnih člankov, ki jih je avtor vrsto let objavljal v Preseku in Obzorniku za matematiko in fiziko.

Dober del drugega dela knjige avtor nameni vsebinam t. i. moderne fizike, pri čemer pa se ne omeji le na poglavja, ki so del gimnazijskega učnega načrta, pač pa poseže do zgradbe snovi in standardnega modela vesolja. Pri tem gre posebej pohvaliti izbran jezik in način opisa teh abstraktnih in zato težje razumljivih vsebin, ki jih je uspelo avtorju predstaviti na pripovedni način, tako rekoč brez matematičnega formalizma. Avtor sklene knjigo s kratkim poglavjem, v katerem zbere nasvete in poglede o tem, kako naj se učimo fiziko.

Kot avtor sam prizna v uvodu, delo ne namenja posebne pozornosti poskusom pri poučevanju fizike. Na nekaterih mestih utegnejo bralci tudi pogrešati slike, ki bi pomagale pri razumevanju zgoščenega besedila. Toda ob pogledu na širino, ki jo pokriva knjiga, in na omejitve, ki jih predstavlja format knjižice, postane jasno, da je knjiga vsebinsko in oblikovno kar se da najbolje izpolnila svoje poslanstvo.

Gorazd Planinšič

VESTI

Seznam diplomantov visokošolskega strokovnega in univerzitetnega študija matematike in fizike v letu 2005*

Pedagoška fakulteta Koper Univerze na Primorskem

Univerzitetni študij
Matematika in računalništvo

1. Simon Dražič	Kubični simetrični grafi
2. Zdravko Mutić	Rang matrike do obisti

Pedagoška fakulteta Univerze v Mariboru

Univerzitetni študij
Matematika

137. Tadeja Pucko	Klasični izreki analize v $\mathbb{R}^n$
138. Peter Pešec	Problem k-centra in k-mediane na drevesih in kaktusih
139. Jože Salcman	Grafi s predpisanimi vpetimi drevesi
140. Jelka Tasič	Algebrajska Riccatijeva enačba

*Seznam diplomantov iz leta 2004 je bil objavljen v Obzorniku za matematiko in fiziko **53** (2006) 5.

141. Brigita Mastnak	Hilbertov izrek o ničlah
142. Lidija Cigula	Nekaj numerično manj zahtevnih metod reševanja Pellove enačbe
143. Nina Lobe	Mreže
144. Milan Šilak	Da Vincijeva šifra
145. Urška Degiampietro	Metrične lastnosti direktnega produkta grafov
146. Igor Koser	Stabilnost matrik
147. Tjaša Rajšp	Bitangentni in pritisnjeni krogi krivulj
148. Matej Zajec	Ideali in Liejevi ideali algebre $B(H)$
149. Jožica Bezovnik	Idempotenti v nekomutativnih kolobarjih
150. Ksenija Gajšek	Uvod v subharmonične funkcije

Matematika in računalništvo

1. Tanja Jarc	Kodiranje 1-faktorjev benzenoidnih grafov

Fizika

27. Daniel Bernad	Fizikalna simulacija plovnosti
28. Roman Bobnarič	Generiranje površja z metodo aktivnega sprehajalca
29. Felicita Hromc	Atmosferski pojavi vrtinčenja zraka in demonstracijski poskus
30. Uroš Tkalec	Študij ikozaedričnih kvazikristalov Al-Pd-Mn z jedrsko magnetno resonance
31. Marko Jagodič	Matematično modeliranje vezave kalcija in miozin kinaze na kalmodulin
32. Klemen Zidanšek	Vpliv asimetrije med segrevanjem in ohlajanjem na sevalno ravnovesje v gozdu

Fizika in kemija

1. Romana Černec	Proučitev toplotnih in sinereznih efektov pri mokrem postopku fazne inverzije

Matematika in fizika

142. Stanislav Pavlič	Vrteča krila
143. Janja Rotovnik	Višinski trikotnik in njegova prostorska posplošitev
144. Dejan Gaberšček	Preštevni polinomi v kemiji
145. Veronika Povše	Popolna števila
146. Peter Fakin	Fizika alpskega smučanja
147. Helena Šegula	Toplotni tok pri pouku naravoslovja in v vsakdanjem življenju
148. Andrej Varšič	Nekateri omrežni algoritmi

Računalništvo z matematiko

12. Jurij Marhold	Algoritmi za ugotavljanje ujemanja nizov
13. Florjan Vidic	Uporaba programskega paketa Macromedia Flash za izdelavo izobraževalne programske opreme
14. Islam Mušić	Generiranje heksagonalnih grafov
15. Jan Domiter	Algoritmi urejanja

Matematika in proizvodno tehnična vzgoja

58. Zvonka Cencelj	Dnevi dejavnosti in njihovo vključevanje v pouk
59. Helena Gradič	Catalanova in Lucasova števila ter električna vezja
60. Edvard Vrabič	Načrtovanje in izvedba tehniškega dneva s poudarkom na konstrukcijski nalogi

Proizvodno tehnična vzgoja in fizika

37. Drago Slukan	Preizkušanje in analiza didaktičnih strategij učnega dela pri tehniki in tehnologiji na primeru merilne naprave
38. Marko Šteger	Analiza porabe električne energije na OŠ Dobrna
39. Nikola Novak	Fazna ločitev / Gorivne celice

Matematika in pedagogika

8. Tina Presker	Trije rekurzivni problemi
9. Urška Zgojznik	Preštevanja v grafih
10. Lucija Štavdeker	Jordanska odvajanja na kolobarjih
11. Katja Krivec	Cardanovi polinomi

Biologija in matematika

17. Iris Breznik	Oblika Sophie Germain Fermatovega izreka
18. Polona Škruba	O porazdelitvi linearnih rekurzivnih zaporedij
19. Matjaž Frešer	Nihajoča asimetrija listov navadne mirte (Myrtus communis L.) v povezavi s povišano koncentracijo CO_2

Kemija in matematika

16. Lidija Prah	Število 1-faktorjev v benzenoidnih sistemih
17. Janja Korošec	Clarove strukture
18. Klavdija Jug	Sinteza in določanje benzopiran-2-iminov in kumarinov
19. Aljoša Hodnik	Centralizatorji na prakolobarjih in polprakolobarjih

Geografija in matematika

4. Tanja Donko	Frobeniusov problem o prikazovanju števil v obliki linearnih kombinacij
5. Boštjan Kolbl	Razvoj turistične dejavnosti v Upravni enoti Ljutomer ter njeni učinki
6. Urška Krašovec	Projektivnosti na stožnicah

Matematika in glasbena pedagogika

1. Kristina Sanatova	Binarne operacije, ki temeljijo na sekantni metodi

Filozofija in fizika

3. Mišel Vugrinec	Znanstveni realizem in NOA

Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani

Univerzitetni študij
Matematika in fizika

232. Petra Brence	Nastanek vetrov
233. Urška Brožič	Kvaternioni v geometriji in topologiji
234. Mirjana Uršič	Ordinalna in kardinalna števila
235. Polonca Gradišar	Težnost in brezteżno stanje
236. Barbara Knez	Moč človeka
237. Darja Krek	Ekstremi
238. Andreja Maljevac	Vetrna elektrarna
239. Darjan Mihelec	Kromatični polinom grafa
240. Tadeja Mlakar	Kombinacije in Stirlingova števila
241. Sabina Murnik	Preverjanje in ocenjevanje opravilnega znanja matematike
242. Marko Ovnič	Osnovne neenakosti v matematiki
243. Mojca Carmen Rubeša Fernandez	Nekaj primerov uporabe diferencialnih enačb
244. Urška Vidmar	Oko človeka in živali
245. Martina Vončina	Energijska bilanca pri toplogrednem pojavu
246. Mateja Vrtar Regovec	Razumevanje ekvivalentnosti ulomkov
247. Irena Zeme	Zvok in glasba

Matematika in računalništvo

27. Mojca Babič	Uporaba programskega orodja Macromedia Flash MX v izobraževanju
28. Urška Čarni	M. C. Escher in tapetne grupe
29. Alenka Gros	Enostaven uporabniški vmesnik šolskega računalnika
30. Vesna Ipavec	Spletni virtualni učbenik: predstavitev osnovnošolske matematike na spletu
31. Andrej Jelen	Snarki
32. Miha Jelenc	Testno okolje za programski jezik MMC
33. Jana Klopčič	Geometrijske naloge na matematičnih tekmovanjih v osnovni šoli
34. David Košenina	Interaktivno orodje za učenje 3D grafike
35. Vesna Kramberger	Pitagorejske trojice
36. Mojca Leskovec	Filotaksa
37. Tomaž Mavri	Število π v matematiki
38. Katarina Pavlakovič	Programski jezik ActionScript kot pripomoček za snovanje učnih gradiv
39. Sabina Smolar	Numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb
40. Barbara Strnad	Izbirni predmet logika v sedmem razredu devetletne osnovne šole
41. Tea Sušnik	Uporaba informacijsko komunikacijske tehnologije pri poučevanju matematike na predmetni stopnji osnovne šole
42. Neža Štrukelj	Interaktivni spletni učbenik za obdelavo slik
43. Petra Tonejc	Računalništvo – izbirni predmet v devetletni osnovni šoli
44. Gabriela Weiss	Brahistohrona

Matematika in tehnika

139. Petra Bastjančič	Projektno učno delo: „od ideje do izdelka“. Lastnoročno izdelana darila
140. Petra Dermota	Projektno učno delo ob tehniških dnevih v devetletni osnovni šoli: „od ideje do izdelka“. Izdelki iz odpadne plastike
141. Katja Hrvatin	Hamiltonske poti in cikli v Cayleyjevih grafih
142. Klemen Kovačič	Projektni tehniški dnevi v devetletki: „od ideje do izdelka“. Miselne igre
143. Matjaž Lavrih	Možnosti tekstovnega programiranja zbirke Lego MindStorms
144. Gregor Turk	Projektni tehniški dnevi v devetletki. Restavriranje, vzdrževanje in izdelava glasbil
145. Barbara Vozel	Možnost ekskurzij na osrednji in zahodni Dolenjski v obliki projektnega dela
146. Barbara Žankar	Projektno učno delo ob tehniških dnevih v osnovni šoli: „od ideje do izdelka“. Igre in igrače iz umetnih mas

Fizika in tehnika

43. Greta Jadrič	Fotografski aparat in fotografija
44. Oskar Krevh	Poskusi s torzijskimi valovi
45. Valentina Krulc	Učinek tople grede
46. Jure Kumer	Projektno učno delo. Možnost uporabe multimedije pri projektnem učnem delu pri pouku tehnike in tehnologije v 6., 7. in 8. razredu devetletke
47. Andrej Novljan	Papirnata letala
48. David Rihtaršič	Primeri uporabe mikrokrmilnikov v programskem okolju BASCOM
49. David Srdič	Vpliv spreminjanja temperature hladilnega zraka na učinkovitost hladilnih stolpov na naravni vlek
50. Katja Ščap	Perpetuum mobile
51. Igor Vuk	Model mobilnega robota pri pouku tehniških vsebin

Kemija in fizika

36. Janez Lupše	Asociacija ionov v vodnih raztopinah 2,2-elektrolitov: $CaSO_4$, $MnSO_4$ in $FeSO_4$

Izredni študij

24. Mojca Pajnič Kirn	Desetiški zapisi racionalnih števil
25. Franc Renko	Obdelava podatkov v devetem razredu osnovne šole
26. Simona Trček	Merske enote v osnovni šoli nekoč in danes
27. Sonja Veber	Iz zgodovine pouka fizike na Slovenskem

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

Visokošolski strokovni študij
Praktična matematika

38. Katja Gostiša	Stirlingova in Lahova števila
39. Vivjana Brečevič	Perron-Frobeniusova teorija

40. Robert Bagola	GPS – sistem globalnega poziciranja
41. Jana Kosec	PDF
42. Andrej Šifrer	Spletna aplikacija za vodenje evidence nestabilnosti tal
43. Petra Tome	Uravnotežena drevesa
44. Erika Čuk	Klasični kriptografski sistemi
45. Nina Karba	Generator prometa telekomunikacijskih naprav
46. Marjeta Lisec	Statistična analiza plač v Republiki Sloveniji
47. Anita Kostanjevec	Halleyjeva metoda
48. Petra Kerčmar	Ljapunova enačba v teoriji stabilnosti in vztrajnosti matrik
49. Anja Rožič	Diskretni dinamični sistemi
50. Valerija Celec	Lastnosti binomskih in trinomskih koeficientov
51. Branka Strauss	Uporaba Cabri Geometry 2 Plus
52. Miha Pogačar	Obdelava slik v ACDSee 7.0
53. Romana Valner	Delitev brez zavisti

Fizikalna merilna tehnika

30. Uroš Dragar	Merjenje koncentracije črnega ogljika (CO) na nekaterih prometnicah na območju Ljubljane
31. Borut Pinter	Umerjanje merilnih mikrofonov
32. Maja Glavič	Merjenje pretoka tekočin v različnih geometrijah z magnetno resonanco
33. Marko Belšak	Študij prevajanja akcijskega potenciala preko vozelne strukture pri Chari corallini
34. Matevž Bevec	Meritve povratnega sipanja fotonov v snovi in primerjava z računi Monte Carlo
35. Suzana Kocjančič	Opazovanje površin kvazikristalov z mikroskopom na atomsko silo
36. Primož Vavpetič	Študij korozijskih procesov v betonskem jeklu z elektrokemijsko impedančno spektroskopijo
37. Blaž Japelj	Energijska bilanca vrtenja avtomobilskega vztrajnika
38. Igor Kržič	Umeritev rentgenskega sevanja za uporabo v dozimetriji
39. Ana Oberčkal	Merjenje navora na čep gonilne lopate modelne cevne turbine
40. Gašper Pajor	Krmiljenje vakuumskega sistema predpospeševalnika avstralskega sinhrotrona

Univerzitetni študij
Matematika – pedagoška smer

586. Katja Sobočan	Sylvester-Gallaijeve konfiguracije
587. Manca Čadež	Caseyev izrek
588. Martin Kostanjevec	Risanje vozlov in spletov v trirazsežnem prostoru
589. Martina Glasenčnik	Diferenčne enačbe in njihova uporaba
590. Brigita Juvan	Konstrukcije v Poincaréjevem disku
591. Tanja Komlanc	Hiperbolična ravnina
592. Katarina Žerovnik	Origami
593. Tanja Garvajs	Neskončnost – med intuitivnim in abstraktnim
594. Irena Senčnik	Zgodovina trikotnika
595. Franc Petelinc	Reševanje enačb v celih številih

596. Ksenija Krapš	Hellyjev izrek
597. Klementina Brodej	Sistemi linearnih diferenčnih enačb

Matematika – uporabna smer

643. Tanja Papler	Stabilno računanje lastnih vektorjev simetrične tridiagonalne matrike v $\mathcal{O}(n^2)$
644. Nataša Šajn	Konvergenca matričnih družin
645. Katarina Perčar	Operatorsko monotone in operatorsko konveksne funkcije
646. Simon Repek	Markovske verige v življenjskih zavarovanjih
647. Andreja Kmet	Modeliranje kreditnih tveganj
648. Martina Šoštarič	Erdős-Szekeresov problem
649. Vid Vidic	Projekcija točk na premice z majhno gostoto
650. Renata Blatnik	Konstrukcija in uporaba valčkov Daubechiesove
651. Dario Rejc	Konvolucijske kode
652. Vito Vitrih	Polinomska interpolacija v več spremenljivkah
653. Tina Toni	Matematično ozadje nekaterih modelov populacijske dinamike
654. Barbara Zupančič	Kompozitni materiali in teorija homogenizacije
655. Jure Željko	QR algoritem za simetrične semiseparabilne matrike
656. Andrej Mužina	Genetski algoritmi in knjižnica GAlib
657. Maruša Stanek	Normalne baze nizke kompleksnosti
658. Lan Umek	Polinomske rezultante
659. Matjaž Urlep	Razdaljno-regularni grafi in posplošeni četverokotniki
660. Jan Zupanc	Portfeljska analiza
661. Gordana Kuharić	Hereditarni razredi operatorjev in matrik
662. Peter Ogrinc	Iskanje dreves z lidarjem

Matematika – teoretična smer

94. Damjan Vrenčur	Borsuk-Ulamov izrek v kombinatoriki in geometriji
95. Irena Majcen	Holomorfne funkcije brez kritičnih točk
96. Žiga Virk	Lečasti prostori
97. Matija Pretnar	Sintetična topologija
98. Davorin Lešnik	Monade in Beckov izrek
99. Damir Franetič	Nov dokaz Bottove periodičnosti

Matematika – smer računalništvo z matematiko

13. Martin Mikuž	Hitre metode za potenciranje

Fizika – pedagoška smer

159. Robert Hauko	Lebdenje kapljic nad vodno gladino
160. Adela Žigert	Dinamični modeli za prikaz valovanj
161. Jože Rihtaršič	Merjenje in prikaz spektrov vidne svetlobe v srednji šoli

Seznam diplomantov dodiplomskega študija matematike in fizike v letu 2005

Fizika

895. Jernej Zlatič	Susceptibilnost bakrovih dimerov
896. Luka Snoj	Vpliv polnilnega razmerja na pomnoževalni faktor reaktorja s kroglastim gorivom
897. Milan Tomazin	Analiza kritičnosti homogenih in heterogenih mešanic urana in plutonija
898. Nejc Košnik	Razpad $B^- \to \pi^-\pi^-K^-$ kot znanilec nove fizike
899. Matjaž Panjan	Mehanske lastnosti nitridnih trdih prevlek v nanometrskem področju
900. Stanislav Vrtnik	Študij dinamike superprotonskega prevodnika $K_9H_7(SO_4)_8 \cdot H_2O$ z jedrsko magnetno resonanco
901. Aleksander Drenik	Raziskave gostote nevtralnih kisikovih atomov v stranski cevi plazemskega reaktorja
902. Uroš Čavič	Merilnik majhnih sprememb prek faznega premika
903. Jaka Kovač	Detekcija napetostno-korozijskega pokanja z merjenjem elektrokemijskega šuma in akustične emisije
904. Agata Müllner Slivka	Analiza valence železa z metodo XANES
905. Ksenija Maver	Sistematične napake pri strukturni analizi snovi z rentgensko absorpcijsko metodo EXAFS
906. Hana Uršič	Optične holografske mrežice na osnovi polimerov in tekočih kristalov
907. Jasna Urbanija	Magnetno resonančno slikanje in simulacija laminarnega toka tekočin
908. Dejan Škrabelj	Enodimenzionalna spontana agregacija derivatov gvanozina
909. Matej Pregelj	Meritev energije sidranja tekočega kristala na šibko urejajoči polimerni površini
910. Iztok Pižorn	Ergodične lastnosti kvantne Isingove spinske verige v dinamičnem nihajnem načinu elektromagnetnega polja
911. Marko Viršek	Resonančna ramanska spektroskopija MoS_2 in WS_2 nanocevk ter mikrocevk
912. Matej Kanduč	Dinamični dvodelčni pojavi v nanostrukturah
913. Liza Mijović	Gibanje 44000 zvezd RAVE-ovega kataloga po Galaksiji
914. Jure Kokalj	Resonančno Ramanovo sipanje v bližini ksenonovega roba L3
915. Miha Mežnar	Fotonski kvazikristali na osnovi polimerov in tekočih kristalov
916. Tomaž Mlakar	Meritve tranzientnih tokov fotovzbujenih nosilcev naboja v plasteh organskega polprevodnika PTCDA
917. Jure Maglica	Proizvodnja in diagnostika vodikove plazme

Meteorologija

87. Gregor Vertačnik	Padavine na južni strani Alp in vremenski tipi
88. Miha Demšar	Analiza radarskih meritev v letu 2004 in njihovo izboljšanje s pluviometrskim popravkom

pripravil Janez Krušič

http://www.obzornik.si/

Seznam diplomantov podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2005†

Pedagoška fakulteta Univerze v Mariboru

Magistrski študij – matematika

23. Alojz Čotar	Nelinearni robni problemi za holomorfne funkcije
24. Aleksandra Tepeh Horvat	Posplošitve medianskih grafov
25. Simon Špacapan	Popolne kode v grafih
26. Melita Šemrl	Dimenzija grafov
27. Mateja Šilak	Barvanje grafovskih svežnjev
28. Janja Jerebic	Hamiltonove prizme in Hamiltonova dekompozicija prizem

Magistrski študij – fizika

4. Robert Repnik	Strukturni prehodi nematičnega tekočega kristala v planparalelni celici

Doktorati – matematika

12. Irena Kosi–Ulbl	Odvajanja, centralizatorji in sorodne preslikave na kolobarjih
13. Petra Šparl	Posplošena barvanja in heksagonalni grafi
14. Iztok Peterin	Nekatere faktorizacije v metrični teoriji grafov
15. Ajda Fošner	Ohranjevalci na algebrah
16. Dominik Benkovič	Preslikave na trikotnih algebrah

Doktorati – fizika

1. David Haložan	Polielektrolitske kapsule: ravnovesna porazdelitev vode in Donannovo ravnovesje ionov

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

Specialistični študij – matematično izobraževanje (po programu ni naloge)

15. Ivana Batič Majcen
16. Milan Mitrović

Magistrski študij matematike – izobraževalna smer

31. Blanka Savšek	Stabilnost aditivnih in kvadratičnih preslikav
32. Jana Gaber	Kompresija slik s fraktali
33. Anja Stražar	Sebi-adjungirane determinante upodobitve projektivnih krivulj
34. Sergej Kapus	Teorija števil v kolobarjih polinomov nad končnimi obsegi

Magistrski študij meteorologije

12. Andrej Kranjc	Sprememba podnebja, Kyotski protokol in Slovenija
13. Jasna Zaveršek Vehovar	Verjetnostna napoved temperature zraka s pomočjo izpopolnjenih regresijskih metod

†Seznam diplomantov iz leta 2004 je bil objavljen v Obzorniku za matematiko in fiziko **53** (2006) 3.

Seznam diplomantov podiplomskega študija matematike in fizike v letu 2005

Doktorati – matematika

81. Jaka Smrekar	Homotopski tip funkcijskega prostora
82. Štefko Miklavič	1-homogeni grafi brez trikotnikov
83. Primož Moravec	Razširitve grup z grupami končnega eksponenta in polgrupne posplošitve
84. Helena Šmigoc	Lastnosti spektra nenegativnih matrik
85. Iztok Kavkler	Podobnostno invariantne polgrupe operatorjev
86. Damjan Škulj	Produkti neaditivnih mer
87. Gašper Jaklič	O dimenziji prostora kubičnih C^1 zlepkov nad triangulacijami
88. Gregor Cigler	Groups of matrices with prescribed spectrum
89. Dejan Velušček	Vsote premešanih produktov n-tih potenc
90. Damjana Kokol Bukovšek	Homomorphisms of matrix semigroups
91. Karin Cvetko Vah	Skew lattices in rings

Doktorati – fizika

278. Andrej Zorko	Study of one- and two-dimensional magnetic systems with spin-singlet ground state
279. Tilen Koklič	Vpliv domenske strukture membran na interakcijo liposomov s celicami
280. Peter Jeglič	Physical properties of decagonal quasicrystals and quasicrystalline approximants
281. Anita Prapotnik	Three-body electroweak decays of heavy mesons
282. Klemen Bučar	Koincidenčna spektrometrija parov elektron-ion po elektronski vzbuditvi lupine L v argonu
283. Damijan Janc	Razširitev kvarkovih modelov na težke dimezone
284. Damjan Dvoršek	The influence of excitation conditions on the femtosecond relaxation dynamics in highly correlated systems
285. Matej Bažec	Vpliv površine na fazno separacijo v zmeseh polimerov in nematogenih kapljevin
286. Zlatko Bradač	Simulacije nematskih tekočih kristalov v kapilari z Brownovo molekularno dinamiko
287. Andrej Studen	Compton camera with position-sensitive silicon detectors
288. Ilija Bizjak	Measurement of Vub using inclusive semileptonic decays on a sample of reconstructed B mesons with the Belle detector

Doktorati – jedrska tehnika

276. Marko Giacomelli	Fragmentation of heavy ions in tissue equivalent targets : study of emission in nuclear fragmentation of lights ions at intermediate energies
277. Marko Kovač	Influence of microstructure of development of large deformations in reactor pressure vessel steel
278. Matjaž Božič	Izračun porazdelitve inducirane radioaktivnosti v betonskih delih reaktorja

pripravil Janez Krušič

SKOPIRAJ IN PRILEPI

Za izpite ali domače naloge pogosto poiščemo ustrezne probleme v literaturi. Mnoge tovrstne naloge so bile že neštetokrat prepisane in uporabljene, avtorji so večkrat neznani ali pa so avtorske pravice ugasnile.

Seveda pa razumen človek ne bo prepisal in objavil cele strani tuje zbirke nalog, saj to lahko prinese težave zaradi kršenja avtorskih pravic. Še bolj stroga pravila veljajo za druga besedila. Skušnjava, da bi tuj izdelek prodali kot svoj, pa je velika, še posebno, če je snov dostopna na medmrežju in je kopiranje otročje lahko. Zlasti mladi ljudje včasih ne razumejo, da to ni dovoljeno. V hude težave pa so zašli tudi ugledni posamezniki, ko so bolj ali manj dobesedno prepisali nekaj odstavkov in jih objavili kot svoje delo. Rezultat takega početja navadno imenujemo *plagiat*. Po Slovarju slovenskega knjižnega jezika je plagiat: *kar je prepisano, prevzeto od drugod in objavljeno, prikazano kot lastno, navadno v književnosti.* Če povzamem [1], plagiatorstvo v študijskem procesu zagrešimo zlasti če:

- Izdelek nekoga drugega predstavimo kot svoj, tudi če smo izdelek po vseh pravilih od pravega avtorja odkupili.
- Seminarsko, diplomsko nalogo ali del takega izdelka skopiramo z medmrežja in oddamo kot lastni izdelek.
- Prevedemo tujejezično vsebino in jo vključimo v naš izdelek, ne da bi navedli vir. (Za **objavo** prevoda vsake malo daljše vsebine moramo seveda dobiti dovoljenje nosilca avtorskih pravic. Tudi zato je pri objavljanju seminarskih ali dijaških raziskovalnih nalog na medmrežju potrebna dodatna previdnost.)
- Uporabljamo citate, ne da bi navedli vir.
- Dodajmo še eno opozorilo, čeprav ni povezano s plagiatorstvom v ožjem smislu. V študijskem procesu ni dovoljeno, da en in isti izdelek (ali posamezne kose tega izdelka) oddamo pri različnih seminarjih.

Razumevanje snovi seminarja ali kake druge naloge pokažemo s tem, da **tuje ugotovitve korektno predstavimo s svojimi besedami**, obenem pa **obvezno že med besedilom navedemo vir**, ki ga na koncu natančno opredelimo. Konec koncev je lahko v viru tudi napaka in se s tem deloma obvarujemo očitkov. Vsi vemo, da je na medmrežju mnogo zgrešenih

informacij. Manj znano je, da so lahko napake tudi v znanih in večkrat ponatisnjenih knjigah in celo priročnikih.

Če kak stavek ali odstavek navedemo ali prevedemo dobesedno, ga moramo **dati v navednice** ali kako drugače izpostaviti, seveda s takojšnjo navedbo vira.

Kakšen sistem citiranja uporabljamo, ni tako važno. (Našim študentom navadno svetujemo, naj uporabljajo način, kakršen je v tej reviji.) Pomembno je, da je **vir natančno določen**. Pri knjigah to pomeni navadno navedbo avtorja, naslova, založbe, kraja in leta izdaje, pa tudi zaporedne številke izdaje. Pri člankih morajo biti navedene tudi ustrezne strani v reviji. V samem besedilu moramo **obvezno navesti, na katero stran knjige ali na katere trditve v članku se sklicujemo**. Pri internetnih straneh, ki se pogosto obnavljajo, ni slabo povedati datum posnetka.

Univerze večkrat zahtevajo, da študenti oddajo zaključna dela v elektronski obliki. Nekatere ustanove določen odstotek teh del poženejo skozi specialne programe, ki iščejo podobnost z dokumenti na medmrežju. Če v iskalnik vtipkamo *plagiarism finding* ali *plagiarism finder*, hitro najdemo ponudbe za tovrstno programsko opremo.

Univerze v ZDA študente rangirajo po uspehu, in to diplomanti občutijo pri iskanju služb. Zato te šole goljufanje še posebno ostro preganjajo – s podporo večine študentov, ki si želijo pošteno tekmovanje. Na naslovu [2] in na straneh mnogih drugih univerz najdemo nasvete, kako se izognemo (tudi nehotenemu) plagiatorstvu.

Na Univerzi v Ljubljani je bilo odvzetih nekaj akademskih naslovov (magisterij, doktorat) zaradi nedovoljenega posnemanja tujih del.

Programe za iskanje plagiatov uporabljajo posamezniki, ki iščejo podobnosti s svojimi izdelki in potem posnemovalce tožijo – večkrat za visoke odškodnine. Opečemo se lahko pri kopiranju fotografij, tudi tistih z reklam, še posebno, če jih uporabimo na domači strani na medmrežju. (Avtor fotografij namreč morda ni prepustil vseh pravic reklamni agenciji.)

LITERATURA

[1] Wirtschaftsuniversität Wien: *Copy and paste – Plagiate an der Universität*, **http://www.wu-wien.ac.at/lehre/support/schreiben_zitieren/plagiate/**.

[2] SUNY at Albany, Institute for Teaching, Learning and Academic Leadership: *Can cheating and plagiarism be prevented?*, 4. 7. 2007, **http://www.albany.edu/teachingandlearning/tlr/prevention.shtml**.

Peter Legiša

CENTRALNA EKONOMSKA KNJIŽNICA
R 177/07
100003039,3
COBISS

OBZORNIK ZA MATEMATIKO I
LJUBLJANA, MAJ 2007
Letnik 54, številka 3
ISSN 0473-7466, UDK 51+52

VSEBINA

Članki — **Strani**

Zaporedja brez ponavljanj, Boštjan Brešar 73–80

Nov preizkus enačbe $E = mc^2$, Janez Strnad 82–87

Šola

Sklenjene verige dotikajočih se krožnic v končnih geometrijah, Herbert Zeitler, prevedel Dušan Pagon 88–100

Nove knjige

O poučevanju fizike, Gorazd Planinšič 101–102

Vesti

Sejem znanstvenega založništva, Vladimir Bensa 80

Matematične novice, Peter Legiša 81

Seznam diplomantov visokošolskega strokovnega in univerzitetnega študija matematike in fizike v letu 2005, pripravil Janez Krušič 102–109

Seznam diplomantov podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2005, pripravil Janez Krušič 110–111

Utrinki

Skopiraj in prilepi, Peter Legiša 112–XI

CONTENTS

Articles — **Pages**

Nonrepetitive sequences, Boštjan Brešar 73–80

A new test of the equation $E = mc^2$, Janez Strnad 82–87

School

Closed Kissing-Cycle-Chains in Finite Geometries, Herbert Zeitler, translated by Dušan Pagon 88–100

New books 101–102

News 80–111

Miscellanea 112–XI

Na naslovnici je mednarodni Inštitut Laue-Langevin v Grenoblu, kjer so izvedli del merjenja z nevtroni, pri katerem so natančno preizkusili enačbo $E = mc^2$. Poleg visoke zgradbe jedrskega reaktorja z velikim nevtronskim fluksom je dobro vidna krožna Evropska naprava za sinhrotronsko sevanje (glej članek na strani 82).