

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

ODPISANO

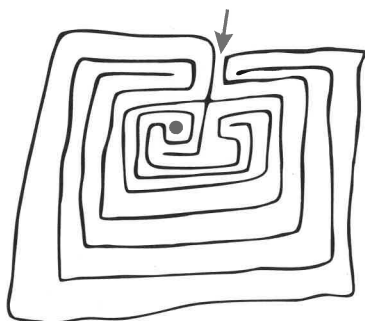
2006

Letnik 53

2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

47th INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
SLOVENIA 2006



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2006, letnik 53, številka 2, strani 33–64

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460, 2512 005 **Telefaks:** (01) 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Peter Šemrl (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Ciril Dominko, Roman Drnovšek, Damjan Kobal, Peter Legiša, Aleš Mohorič, Petar Pavešić, Nada Razpet, Pavle Saksida, Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško stavila Monika Testen.
Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1350 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 5.000 SIT, za druge družinske člane in študente pa 2.500 SIT. Naročnina za ustanove je 8.000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2006 DMFA Slovenije – 1636

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oziroma $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

ORIENTIRANI MATROIDI IN DELNE KOCKE

MATJAŽ KOVŠE

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 05B35, 05C75

V članku predstavimo povezavo med orientiranimi matroidi in delnimi kockami. Natančneje predstavimo, katere delne kocke so grafi maksimalnih lic acikloidov in orientiranih matroidov ranga kvečjemu 3.

ORIENTED MATROIDS AND PARTIAL CUBES

In this article we present a connection between oriented matroids and partial cubes. We present in detail which partial cubes are tope graphs of acycloids and oriented matroids of rank at most 3.

1. Uvod

Teorija orientiranih matroidov povezuje več različnih matematičnih področij, kot so: diskretna in računska geometrija, kombinatorika, topologija, algebraična geometrija, in druga področja, kot so: operacijske raziskave, računalniške znanosti in teoretična kemija. V tem članku pa lahko najdemo zanimivo povezavo z metrično teorijo grafov. Natančneje se v ozadju teorije orientiranih matroidov skrivajo kombinatorična abstrakcija konfiguracij točk (nad realnimi števili), razvrstitev hiperravnin (nad realnimi števili), konveksnih politopov in usmerjenih grafov. Posledica tega je, da ima teorija orientiranih matroidov več ekvivalentnih aksiomskih sistemov in veliko različnih modelov.

V članku, ki je povzetek glavnih rezultatov iz članka [6], predstavimo idejo, kako karakterizirati orientirane matroide s pomočjo teorije grafov. Za ta namen je najbolj primerna vpeljava orientiranih matroidov s pomočjo vektorskih konfiguracij in razvrstitvami hiperravnin oziroma povezavo le-teh s tako imenovanimi kovektorskimi aksiomi.

Obsežna monografija in osnovna referenca za teorijo orientiranih matroidov [2] je verjetno najprimernejši uvod v teorijo. Zanimiv vpogled in uvod ponujata tudi na svetovnem spletu dosegljivi referenci [3, 5]. Za obsežen seznam referenc s tega področja je zelo koristna referenca [16].

Na začetku članka podamo enostaven primer iz [3] in hkrati vpeljemo osnovne definicije. Za povezavo z metrično teorijo grafov je pomembna

karakterizacija orientiranih matroidov s pomočjo množice maksimalnih lic. Množica maksimalnih lic je tudi motivacija za definicijo dveh splošnejših sistemov, to je L^1 -vložljivih sistemov in acikloidov.

V nadaljevanju podamo osnovne definicije iz teorije delnih kock in pokažemo, da je graf maksimalnih lic poljubnega L^1 -vložljivega sistema delna kocka, in obratno, da vsaka delna kocka ustreza grafu maksimalnih lic nekega L^1 -vložljivega sistema. Podobno velja tudi za posebne primere L^1 -sistemov, acikloide, pri katerih obstaja enolična povezava s posebnim podrazredom delnih kock.

Sledi karakterizacija grafov maksimalnih lic orientiranih matroidov ranga kvečjemu tri. V sklepnih mislih omenimo nekaj novejših rezultatov.

2. Osnovne definicije in primeri

V realnem vektorskem prostoru $\mathbb{R}^3$ naj bodo podani vektorji

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

in naj E označuje indeksno množico vektorjev, torej $E = \{1, 2, 3, 4\}$.

Linearen podprostor, generiran s tretjim in četrtem vektorjem A_3 in A_4 , vsebuje tudi vektor A_2 , vendar ne vsebuje vektorja A_1 . Vektor A_1 je torej, drugače kot vektor A_2 , linearno neodvisen od podprostora, generiranega z vektorjema A_3 in A_4 . Podobno lahko za vsako podmnožico indeksne množice E pogledamo, kateri vektorji so v linearni ogrinjači vektorjev z indeksi te podmnožice in to podmnožico, če je potrebno, ustrezno razširimo. Tako dobimo naslednjo množico:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Za množico $\mathcal{A}$ veljajo naslednje lastnosti:

(M0) $E \in \mathcal{A}$.

(M1) Če sta $X, Y \in \mathcal{A}$, potem je tudi $X \cap Y \in \mathcal{A}$.

(M2) Za vsak $X, Y \in \mathcal{A}$, za vsak $e \in E$ in za $f \in X \setminus Y$ obstaja tak $Z \in \mathcal{A}$, da velja $e \in Z$, $f \notin Z$ in $X \cup Y \subseteq Z$.

Množica $\mathcal{A}$ določa matroid na množici E , natančneje, ustreza aksiomom o zaprtih množicah matroida na množici E . Za podrobnosti in kot zelo dober uvod v teorijo matroidov priporočamo slovenski učbenik [15]. V tem

članku nas bo zanimal samo poseben podrazred matroidov, to je tistih, ki se nekako dajo tudi smiselno orientirati.

Za poljubno množico $X \in \mathcal{A}$, različno od množice E , velja, da je podprostor, ki ga generirajo vektorji A_e , kjer je $e \in E$, vsebovan v nekem dvodimenzionalnem podprostoru H_X prostora $\mathbb{R}^3$. Ravnino H_X lahko izberemo tako, da velja $A_e \in H_X$ natanko tedaj, ko je $e \in X$. V splošnem lahko H_X izberemo na več načinov, kar bo zelo pomembno v nadaljevanju. Ravnino H_X lahko opišemo z normalnim vektorjem $x \in \mathbb{R}^3$. Torej velja, da je $e \in X$ natanko tedaj, ko sta x in A_e ortogonalna.

Za vsak $x \in \mathbb{R}^3$ in za vsak indeks $e \in E$ pogledjmo skalarni produkt $A_e^T x$. Definirajmo po komponentah *vektor predznakov* $\text{sign}(x)$ za točko x kot:

$$\text{sign}(x)_e = \begin{cases} + & \text{za } A_e^T x > 0, \\ 0 & \text{za } A_e^T x = 0, \\ - & \text{za } A_e^T x < 0. \end{cases}$$

Tako velja na primer $\text{sign}((-1, 0, 1)) = ++0+$. Prav tako je tudi $\text{sign}((-\alpha, 0, \alpha)) = ++0+$, kjer je $\alpha > 0$. Vektorji predznakov, ki imajo tretjo koordinato enako 0, druge koordinate pa različne od 0, ustrezajo množici $\{3\} \in \mathcal{A}$. Ravnino $H_{\{3\}}$ lahko izberemo na 2 različna načina. Skupaj imamo torej 4 različne možnosti pri izbiri normalnih vektorjev, saj je nasprotni vektor normalnega vektorja tudi normalni vektor. Za množico $\{3\} \in \mathcal{A}$ tako dobimo naslednje vektorje predznakov: $++0+$, $-+0+$, $--0-$, $+-0-$ (zadnja vektorja predznakov dobimo tako, da prvima vektorjema predznakov spremenimo kordinate, ki so enake, $+$ v $-$ in obratno). Na podoben način so določeni vektorji predznakov, ki ustrezajo množicama $\{2\}$ in $\{4\}$. Za množico $\{1\}$ dobimo 6 različnih vektorjev predznakov. Ravnine $H_{\{1,2\}}$, $H_{\{1,3\}}$, $H_{\{1,4\}}$ in $H_{\{2,3,4\}}$ so enolično določene in zato v teh primerih vedno dobimo natanko 2 različna vektorja predznakov. Vektorji A_1 , A_2 , A_3 in A_4 razpenjajo celoten vektorski prostor $\mathbb{R}^3$, edini vektor, ki je ortogonalen na vse vektorje iz $\mathbb{R}^3$, je vektor $(0, 0, 0)$, zato množici $E \in \mathcal{A}$ ustreza vektor predznakov 0000 . Preostane še množica $\emptyset \in \mathcal{A}$ oziroma tisti vektorji iz $\mathbb{R}^3$, ki niso ortogonalni z nobenim izmed vektorjev A_1 , A_2 , A_3 in A_4 . V tem primeru dobimo še dodatnih 12 predznačenih vektorjev. V našem primeru tako dobimo skupaj 39 različnih vektorjev predznakov iz tabele 1.

Množico vseh vektorjev predznakov označimo s $\mathcal{F}(\mathcal{A})$. S terminologijo, ki jo bomo vpeljali kasneje, je urejeni par $M = (E, \mathcal{F}(\mathcal{A}))$ primer za orientirani matroid.

+++-	0+-+	0-+-	0 0 -+
--+-	0 --+	0 ++-	0 0 +-
-+-+	0 ++++	0 ----	0 + 0 +
+ -+-	+ 0 -+	- 0 +-	0 - 0 -
+ --+	- 0 -+	+ 0 +-	0 ++ 0
-++-	++ 0 +	-- 0 -	0 -- 0
---+	-+ 0 +	-+ 0 +	+ 0 0 0
++++-	+++ 0	--- 0	- 0 0 0
+++++	-++ 0	+-- 0	0 0 0 0

-+++			
+---			

Tabela 1. Vsi vektorji predznakov našega primera

Do množice $\mathcal{F}(A)$ pa lahko, razen z zgornjim razmislekom, pridemo še kako drugače. *Centralna razvrstitev ravnin* je družina ravnin, ki vsebujejo koordinatno izhodišče. Za poljubno ravnino H_e naj velja, da je vektor A_e normalen vektor za vsak $e \in E$. Ravnino H_e orientiramo tako, da vektor A_e kaže v pozitivni smeri. Za vsako točko iz $x \in \mathbb{R}^3$ lahko tako definiramo kovektor $X \in \{+, -, 0\}^E$ glede na relativno pozicijo točke x in ravnin H_e , $e \in E$ (standardna oznaka $\{+, -, 0\}^E$ označuje množico vseh preslikav iz E v $\{+, -, 0\}$, ki si jo, zaradi končnosti množice E , najlažje predstavljamo kot množico urejenih n -teric, sestavljenih iz $+, -, 0$). Natančneje, kovektor X definiramo po koordinatah na naslednji način:

$$X_e = \begin{cases} +, & \text{če sta } x \text{ in } A_e \text{ na isti strani } H_e, \\ 0, & x \text{ je vsebovan v } H_e, \\ -, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ni težko razmisliti, da je $X_e = \text{sign}(x)_e$ in zato množica vseh tako definiranih kovektorjev sovpada z množico vseh vektorjev predznakov $\mathcal{F}(A)$.

Poglejmo si nekaj lastnosti množice $\mathcal{F}(A) = \mathcal{F}$. Točki $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ pripada kovektor 0, natančneje v našem primeru kovektor 0000.

Za poljubno točko $x \in \mathbb{R}^3$, ki ji pripada kovektor X , velja, da točki $-x$ pripada kovektor $-X$, definiran na naslednji način $(-X)_e = -X_e$ za vse $e \in E$. Kovektor $-X$ imenujemo *nasprotni kovektor* kovektorja X . Ugotovili smo torej, da je za vsak $X \in \mathcal{F}$ tudi $-X \in \mathcal{F}$.

Za poljubno majhen ε naj bo $z \in \mathbb{R}^3$ linearna kombinacija vektorjev

$x, y \in \mathbb{R}^3$ naslednje oblike: $z = x + \varepsilon y$. Za ustrezno pripadajoče kovektorje $X = \text{sign}(x)$, $Y = \text{sign}(y)$ in $Z = \text{sign}(z)$ ter za vsak $e \in E$ velja:

$$Z_e = \text{sign}(z)_e = \text{sign}(x + \varepsilon y)_e = \begin{cases} \text{sign}(x)_e = X_e & \text{za } X_e \neq 0, \\ \text{sign}(y)_e = Y_e & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zato je smiselno definirati naslednjo binarno operacijo

$$X \circ Y = \begin{cases} X_e & \text{za } X_e \neq 0, \\ Y_e & \text{sicer.} \end{cases}$$

Imenujemo jo *popravek* kovektorja X v smeri Y in označimo z $X \circ Y$. Po zgornjem razmisleku torej velja, da je za vsak $X, Y \in \mathcal{F}$ tudi $X \circ Y \in \mathcal{F}$.

Kadar $x, y \in \mathbb{R}^3$ ležita na različnih straneh ravnine H_e , pravimo, da ju ravnina H_e loči. V tem primeru tudi za e rečemo, da loči ustrezna kovektorja X in Y . Z $D(X, Y)$ označimo množico vseh $e \in E$, ki ločijo X in Y , in to množico imenujemo *ločnica kovektorjev* X in Y . Velja torej $D(X, Y) = \{e \in E; X_e = -Y_e \neq 0\}$.

Popravek kovektorja X v smeri Y je asociativna in, kot kaže naslednji primer, nekomutativna operacija. Naj bosta $X = (+ - 0 0 +)$ in $Y = (0 - + 0 -)$, potem je $X \circ Y = (+ - + 0 +)$ in $Y \circ X = (+ - + 0 -)$. Hitro lahko razmislimo, da je $X \circ Y = Y \circ X$ natanko tedaj, ko je $D(X, Y) = \emptyset$.

Za $e \in D(X, Y) \neq \emptyset$ si pogledjmo presečišče ravnine H_e z daljico, ki povezuje točki x in y . Za ustrezni kovektor $Z = \text{sign}(z) \in \mathcal{F}$ velja, da je $Z_e = 0$, saj z pripada ravnini H_e . Za ravnine, ki ne ločijo točk x in y , velja, da tudi ne ločijo x in z ter y in z . Torej je $Z_f = (X \circ Y)_f$ za vse f , ki ne ločijo kovektorjev X in Y .

Strnimo lastnosti, katerim zadoščajo elementi množice $\mathcal{F}$:

(F0) $0 \in \mathcal{F}$.

(F1) Če je $X \in \mathcal{F}$, potem je tudi $-X \in \mathcal{F}$.

(F2) Če sta $X, Y \in \mathcal{F}$, potem je tudi $X \circ Y \in \mathcal{F}$.

(F3) Če sta $X, Y \in \mathcal{F}$ in $e \in D(X, Y)$, potem obstaja $Z \in \mathcal{F}$, tako da velja $Z_e = 0$ in $Z_f = (X \circ Y)_f$ za vse $f \in E \setminus D(X, Y)$.

Orientirani matroid M je urejeni par $(E, \mathcal{F})$ končne množice E in množice $\mathcal{F} \subseteq \{+, -, 0\}^E$ kovektorjev, za katero so izpolnjeni (kovektorski) aksiomi (F0) do (F3). Kot že omenjeno, obstaja več ekvivalentnih definicij orientiranega matroida. Za nas bodo najbolj zanimive pravkar omenjene lastnosti.

Množico, ki zadošča zgornjim lastnostim, pa lahko poiščemo tudi na veliko bolj enostaven način, kot smo to počeli zgoraj. Naj bodo $a_1, a_2, \dots, a_k$ vektorji iz realnega vektorskega prostora $\mathbb{R}^n$. Z V označimo njihovo linearno ogrinjačo. Če od vektorjev iz V pri vsaki koordinati ohranimo samo predznak, potem množica $\mathcal{P} \subseteq \{+, -, 0\}^n$ vseh takih predznačenih vektorjev zadošča lastnostim (F0) do (F3). Za poljuben vektor $v \in V$ označimo s $p(v)$ predznačen vektor, ki ga dobimo na pravkar opisani način. Na primer $p((1, 0, -2, 1, 0)) = +0 - +0$. Potem velja, da je $p(0) = 0 \in \mathcal{P}$, saj je $0 \in V$. Prav tako velja, da za vsak $p(v) \in \mathcal{P}$ sledi, da je $-p(v) = p(-v) \in \mathcal{P}$, saj za vsak $v \in V$ velja $-v \in V$. Za $v, u \in V$ lahko poiščemo tak $m \in \mathbb{N}$, da bo veljalo $|v_i| > \frac{1}{m}|u_i|$ za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, kjer je $v_i \neq 0$. Iz $v - \frac{1}{m}u \in V$ zato sledi $p(v) \circ p(u) = p(v - \frac{1}{m}u) \in \mathcal{P}$. Če sta $p(v), p(u) \in \mathcal{P}$ in $e \in D(p(v), p(u))$, potem za $w = v + \alpha u$, kjer je $\alpha = \frac{u_e}{v_e}$, velja $p(w)_e = 0$ in $p(w)_f = (p(v) \circ p(u))_f$ za vse $f \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus D(p(v), p(u))$. Kot že omenjeno pa obstaja še veliko drugih primerov, kjer lahko srečamo orientirane matroide [2].

Orientirani matroidi, ki se jih da *realizirati* na zgoraj prikazan način s pomočjo centralne razvrstitve ravnin, se imenujejo *realizabilni* (ali tudi *lineararni*) orientirani matroidi. Kot bomo videli v nadaljevanju, obstajajo tudi nerealizabilni orientirani matroidi. Odločitveni problem, ali je orientirani matroid realizabilen, je NP-težek [14].

Presek enotske dvodimenzionalne sfere S^2 , $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$, s centralno razvrstitvijo ravnin $\{H_e; e \in E\}$ iz zgornjega primera imenujemo *razvrstitev sfer* in jo označimo kot $\mathcal{S} = \{S_e; e \in E\}$, kjer je $S_e = S^2 \cap H_e$. S_e imenujemo *velika krožnica*. Sfero S_e orientiramo v skladu z orientacijo ravnine H_e .

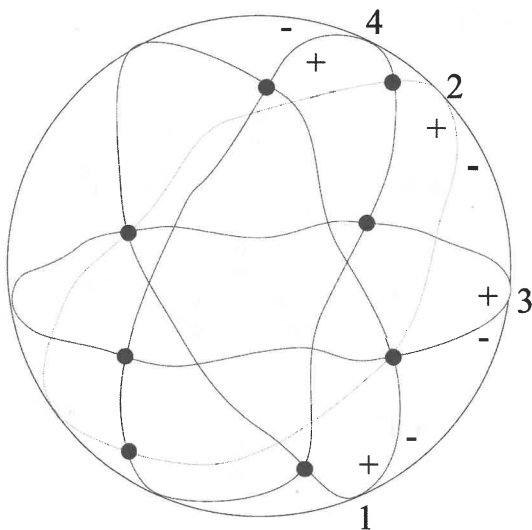
Podobno, kot smo storili zgoraj, lahko tudi za vsako točko na sferi definiramo kovektor. Naj $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ označuje množico vseh tako dobljenih kovektorjev. Hitro se lahko prepričamo, da velja naslednja enakost $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{F}(A) \setminus \{0\}$. Tako dobimo geometrijski model, ki ponazarja naš zgornji primer. Vendar lahko na tak način dosežemo še več. Množica $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ se ne spremeni, če katero izmed sfer iz $\mathcal{S}$ „čisto malo zvijemo“. Bolj formalno lahko to opišemo takole:

Jordanova krivulja imenujemo vsako krivuljo J^0 , ki je slika enotske krožnice za neki homeomorfizem iz S^2 v S^2 . Povezani območji $S^2 \setminus J^0$ imenujemo *strani* J^0 in ju označimo z J^+ in J^- .

Par $(E, \mathcal{J})$ je *razvrstitev* Jordanovih krivulj za strani na S^2 , če je E končna množica in $\mathcal{J} = \{J_e^i; e \in E, i \in \{+, -, 0\}\}$ množica podmnožic S^2 , ki zadoščajo naslednjim lastnostim:

- (i) za vsak $e \in E$ je J_e^0 Jordanova krivulja na S^2 s stranema J_e^- in J_e^+ ;
- (ii) za poljubna dva različna e in $f \in E$ je $|J_e^0 \cap J_f^0| = 2$ in $J_e^i \cap J_f^j \neq \emptyset$ za vse $i, j \in \{+, -\}$;
- (iii) za poljubno podmnožico $S \subseteq E$, kjer velja $|S| \geq 3$ je $|\bigcap \{J_e^0; e \in S\}| = 0$ ali 2;
- (iv) če je $S \subseteq E$ in $\bigcap \{J_e^0; e \in S\} = \{x, y\}$ za različni točki x, y , potem za $k \in E \setminus S$ velja bodisi $\{x, y\} \subseteq J_k^0$, bodisi J_k^+ vsebuje samo enega izmed elementov $\{x, y\}$.

Če je $(E, \mathcal{J})$ neka razvrstitev Jordanovih krivulj na S^2 , potem je za poljubno $S \subseteq E$ tudi $(E \setminus S, \{J_e^i; e \in E \setminus S, i \in \{+, -, 0\}\})$ razvrstitev Jordanovih krivulj. Naj bo $\sigma: S^2 \rightarrow \{+, -, 0\}^E$ preslikava definirana na naslednji način: $\sigma(x) := i$ natanko tedaj, ko je $x \in J_e^i$.



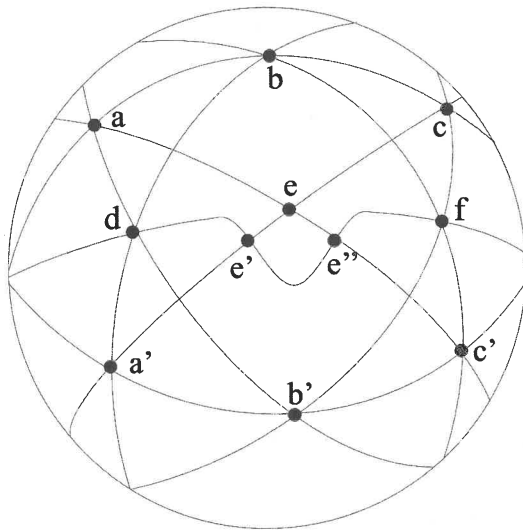
Slika 1. Razvrstitev Jordanovih krivulj, ki določa množico kovektorjev orientiranega matroida M ; črne pike označujejo presečišča Jordanovih krivulj.

Naslednji izrek je posebna oblika¹ topološkega reprezentacijskega izreka [2] za orientirane matroide ranga kvečjemu 3.

¹V višjih dimenzijah vlogo ravnin nadomestijo hiperravnine, medtem ko vlogo Jordanovih krivulj nadomestijo krotke podsfere ustreznih dimenzij.

Izrek 1. Naj bo $(E, \mathcal{J})$ razvrstitev Jordanovih krivulj na S^2 . Potem je $\sigma(S^2) \cap \{+, -, 0\}^E$ množica kovektorjev in $\sigma(S^2) \cap \{+, -\}^E$ množica maksimalnih lic nekega orientiranega matroida ranga kvečjemu 3. Velja tudi nasprotno: vsak orientiran matroid ranga kvečjemu 3 lahko dobimo na tak način.

Na sliki 2 je prikazan primer najmanjšega nerealizabilnega orientiranega matroida [5]. Točke a, b in c ležijo na skupni veliki krožnici. Prav tako tudi točke a', b' in c' ležijo na skupni veliki krožnici. Zato po Pappusovem izreku tudi točke d, e in f ležijo na skupni veliki krožnici. Vse Jordanove krivulje iz spodnjega primera, z izjemo ene, so velike krožnice. Edino, kar še manjka do realizabilnosti, je, da „zravnamo“ Jordanovo krivuljo, ki poteka skozi točke d, e', e'' in f . S tem sicer res dobimo realizabilen orientiran matroid, ki pa se razlikuje od prvotnega primera, saj ima 12 kovektorjev manj. Več podrobnosti o konstrukciji nelinearnih orientiranih matroidov lahko najdemo v [2, 5].



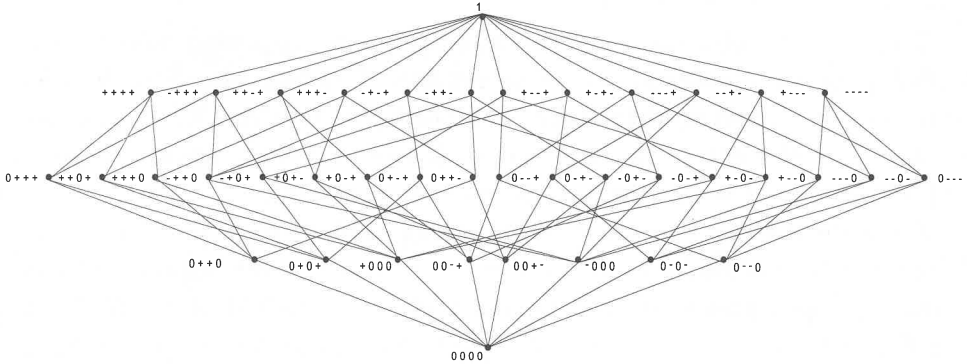
Slika 2. Najmanjši nerealizabilen matroid; vseh 9 Jordanovih krivulj se seka na enak način tudi na nasprotni strani sfere.

Razvrstitev sfer na naraven način inducira celični kompleks na enotski sferi S^2 , kar je motivacija za vpeljavo delne urejenosti na množici kovektorjev orientiranega matroida. Naj bosta $X, Y \in \mathcal{F}$. Pravimo, da je X lice v Y , če iz $X_e \neq 0$ sledi $X_e = Y_e$. Pišemo $X \preceq Y$.

V primeru na sliki 1 je del Jordanove krivulje J_4^0 , ki leži med presečišči te krivulje z Jordanovima krivuljama J_2^0 in J_3^0 , lice v celici, ki ustreza preseku $J_1^+ \cap J_2^+ \cap J_3^- \cap J_4^+$, torej preseku pozitivno orientiranih strani Jordanovih krivulj J_1^0 , J_2^0 in J_4^0 ter negativno orientirane strani Jordanove krivulje J_3^0 . Za ustrezna kovektorja to pomeni, da je $++-0 \preceq ++-+$.

Za orientirana matroida $(E, \mathcal{F})$ in $(E', \mathcal{F}')$ pravimo, da sta *izomorfna*, če sta izomorfni delno urejeni množici $\mathcal{F}$ in $\mathcal{F}'$.

Velika mreža lic je mreža, ki jo dobimo tako, da zgoraj definirani delni urejenosti dodamo dodaten element 1 in ga razglasimo za maksimalni element. Za vsak kovektor X orientiranega matroida $(E, \mathcal{F})$ definiramo njegov *rang* kot višino X v veliki mreži lic $\widehat{\mathcal{F}}$. Rang orientiranega matroida je največji izmed rangov vseh kovektorjev.



Slika 3. Velika mreža lic $\widehat{\mathcal{F}}$

Posebej zanimivi, kot kaže naslednji izrek, so kovektorji, ki so maksimalni glede na delno urejenost iz zgornje definicije. Imenujemo jih *maksimalna lica* orientiranega matroida. Množico vseh maksimalnih lic orientiranega matroida označimo s $\mathcal{T}$.

Izrek 2. [2, 3] *Množica maksimalnih lic orientiranega matroida $M = (E, \mathcal{F})$ določa množico kovektorjev na naslednji način*

$$\mathcal{F} = \{X \in \{+, -, 0\}^E; X \circ T \in \mathcal{T} \text{ za vsak } T \in \mathcal{T}\}.$$

Za drugačno karakterizacijo orientiranih matroidov potrebujemo še nekaj dodatnih pojmov. Naj bo $A = (E, \mathcal{F})$ urejen par končne množice E in $\mathcal{F} \subseteq \{+, -, 0\}^E$. Element $e \in E$ je *zanka* v A , če je $X_e = 0$ za vse $X \in \mathcal{F}$. Množico vseh zank označimo z E_0 . Z E_1 označimo množico $E_1 = \{e \in E;$

$X_e = Y_e \neq 0$ za vsak $X, Y \in \mathcal{F}$. Različna elementa $e, f \in E \setminus (E_0 \cup E_1)$ sta *vzporedna*, če bodisi velja $X_e = X_f$ za vse $X \in \mathcal{F}$, bodisi je $X_e = -X_f$ za vse $X \in \mathcal{F}$. A je *enostaven*, če nima zank in vzporednih elementov. Za $e \in E$ označimo z $\bar{e}X$ kovektor, ki ga dobimo tako, da X -u zamenjamo X_e z $-X_e$.

L^1 -vložljiv sistem (L^1 -sistem) je par $A = (E, \mathcal{T})$, kjer je E končna množica in $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \{+, -, 0\}^E$, ki zadošča naslednjemu aksiomu:

(A1) Če sta $X, Y \in \mathcal{T}$ in $X \neq Y$, potem obstaja tak $f \in D(X, Y)$, da velja $\bar{f}X \in \mathcal{T}$ (lastnost reorientacije).

Acikloid je par $A = (E, \mathcal{T})$, kjer je E končna množica in $\mathcal{T} \subseteq \{+, -, 0\}^E$ neprazna množica, ki zadošča lastnosti reorientacije (A1) in lastnosti:

(A2) Iz $X \in \mathcal{T}$ sledi $-X \in \mathcal{T}$.

Za L^1 -sistem velja, da je enostaven, lahko pa ima neprazno množico E_1 . V obeh primerih imenujemo elemente množice $\mathcal{T}$ maksimalna lica. V splošnem se pod pojmom acikloida lahko obravnavajo tudi takšni, ki imajo zanke in vzporedne elemente. Nas bodo zanimali samo taki brez zank in vzporednih elementov, ki se imenujejo tudi enostavni acikloidi.

Poenostavitev $\text{sim}(A)$ od A je par, ki ga dobimo iz $A = (E, \mathcal{T})$ tako, da izvzamemo vse zanke in identificiramo poljuben razred vzporednih elementov z nekim predstavnikom tega razreda. Za acikloid $A = (E, \mathcal{T})$ in $e \in E$ naj bo $\mathcal{T}/e = \{X; \bar{e}X \in \mathcal{T}\}$. Pravimo, da je $A/e = (E \setminus e, \mathcal{T}/e)$ *elementarna kontrakcija* A -ja z e -jem. Podobno lahko s pomočjo indukcije definiramo kontrakcijo A/S za poljubno urejeno podmnožico $S \subseteq E$. Množica $\{e \in E; X_e \neq 0\}$ se imenuje *nosilec kovektorja* X .

Karakterizacija orientiranih matroidov s pomočjo maksimalnih lic je naslednji izrek:

Izrek 3. [9] Naj bo $M = (E, \mathcal{F})$ orientiran matroid in $\mathcal{T}$ množica njegovih maksimalnih lic. Tedaj velja:

- (i) vsi elementi množice $\mathcal{T}$ imajo enak nosilec,
- (ii) poenostavitev $\text{sim}(E, \mathcal{T})$ je acikloid,
- (iii) poenostavitev poljubne kontrakcije $(E, \mathcal{T})$ zadošča lastnosti (A1).

Shematično si lahko razmerje med L^1 -sistemi, acikloidi in množicami maksimalnih lic orientiranih matroidov ponazorimo tako, kot prikazuje slika 4.

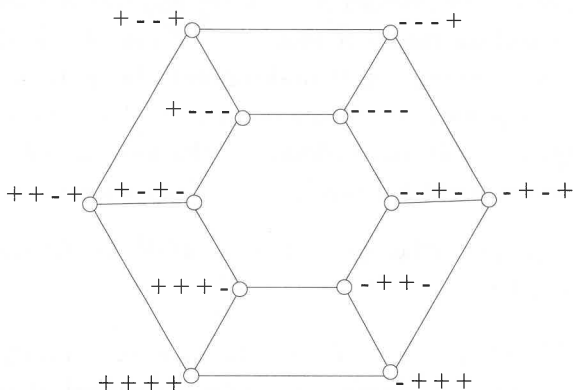
Za poljuben sistem $A = (E, \mathcal{T})$, kjer je $\mathcal{T} \subseteq \{+, -, 0\}^E$ in imajo vsi elementi iz $\mathcal{T}$ enak nosilec, definiramo naslednji graf. Graf maksimalnih



Slika 4. L^1 -sistemi, acikloidi in množice maksimalnih lic orientiranih matroidov

lic G_A strukture $A = (E, \mathcal{T})$ je graf, katerega množica točk je $V(G_A) = \mathcal{T}$, dve različni točki $X, Y \in V(G_A)$ pa sta sosedni natanko tedaj, ko ne obstaja tak $Z \in \mathcal{T} \setminus \{X, Y\}$, da velja $D(X, Z) \subseteq D(X, Y)$.

Če je A orientiran matroid ranga r , lahko sosednost točk v grafu maksimalnih lic razumemo tudi takole: dve maksimalni lici X in Y sta sosedni, če obstaja lice ranga $r - 1$, ki je lice v X in lice v Y . Kadar pa A nima vzporednih elementov, velja, da sta $X, Y \in V(G_A)$ sosedni natanko tedaj, ko je $|D(X, Y)| = 1$.



Slika 5. Graf maksimalnih lic orientiranega matroida M je graf 6-prizma $K_2 \square C_6$.

3. Delne kocke, L^1 -sistemi in acikloidi

Delne kocke predstavljajo zanimivo podpodročje metrične teorije grafov. Uporabo delnih kock pa lahko zasledimo tudi na področjih, kot so matematična kemija, računska biologija, teorija medijev in psihologija. Več o delnih kockah lahko najdemo v [10, 11, 13].

Za poljubni $u, v \in V(G)$ označimo z $d_G(u, v)$ dolžino najkrajše poti v grafu G med u in v . Za podgraf H grafa G pravimo, da je *izometrični podgraf*, če je $d_H(u, v) = d_G(u, v)$ za vse $u, v \in V(H)$.

Graf n -kocka Q_n ima za množico točk množico $\{+, -\}^n$, dve točki sta sosedni natanko tedaj, ko se razlikujeta v natanko eni komponenti. Izometrične podgrafe n -kock imenujemo *delne kocke*. Drevesa in cikli s sodim številom točk so enostavni primeri delnih kock. Mednje sodi tudi zelo proučevani razred medianskih grafov. *Isometrična dimenzija* $\text{idim}(G)$ delne kocke G je najmanjši d , za katerega velja, da je G izometričen podgraf Q_d .

Za graf G in podmnožico $X \subseteq V$ naj $\langle X \rangle$ označuje podgraf, induciran z X . Naj bo G povezan dvodelni graf. Za poljubno povezavo ab v grafu G označimo z:

$$\begin{aligned} W_{ab} &= \{w \in V(G); d_G(a, w) < d_G(b, w)\}, \\ U_{ab} &= \{w \in W_{ab}; w \text{ ima soseda v } W_{ba}\}, \\ F_{ab} &= \{e \in E(G); e \text{ je povezava med } W_{ab} \text{ in } W_{ba}\}. \end{aligned}$$

Naj bo G delna kocka, vložena v Q_n . Če sta $X, Y \in V(G)$ dve različni točki, potem na neki najkrajši poti med X in Y obstaja točka Z , ki se od X razlikuje v natanko eni koordinati in se v tej koordinati ujema z Y . Zato lahko za E , ki je končna množica moči n , rečemo, da predstavlja $A_G = (E, V(G))$ L^1 -sistem, katerega graf maksimalnih lic je ravno G . Obratno lahko razmislimo, da je glede na definicijo grafa maksimalnih lic L^1 -sistema razdalja med poljubnima dvema točkama enaka moči množice koordinat, v katerih se ti dve maksimalni lici razlikujeta. Velja torej naslednji izrek:

Izrek 4. *Graf G je izomorfen grafu maksimalnih lic L^1 -sistema natanko tedaj, ko je G delna kocka.*

Preučevanje L^1 -sistemov je torej ekvivalentno preučevanju delnih kock. V nadaljevanju nas bodo zanimali samo posebni razredi delnih kock, zato potrebujemo še nekaj dodatnih pojmov. Povezan graf G je *uravnotežen*, če za poljubno točko $v \in V(G)$ obstaja enolično določena točka v' , da velja $d_G(v, v') = \text{diam}(G)$. Za uravnoteženi graf G pravimo, da je *harmoničen*, če

velja $u'v' \in E(G)$ natanko tedaj, ko je $uv \in E(G)$, in da je *simetričen*, če za vse $u, v \in V(G)$ velja $d_G(u, v) + d_G(u, v') = \text{diam}(G)$. Graf G , ki vsebuje vsaj eno povezavo, je *antipodalen*, če za poljubno točko $v \in V(G)$ obstaja enolično določena točka $\bar{v} \in V(G)$ tako, da velja $d_G(v, u) \leq d_G(v, \bar{v})$ za vsak u , ki je sosednjen točki $\bar{v}$. Točko $\bar{v}$ imenujemo *antipodalna točka* točke v . Po dogovoru tudi graf z eno samo točko K_1 imenujemo antipodalen.

Vsak graf, ki je je simetrično-uravnotežen, je tudi harmoničen [7]. Prav tako velja, da je graf simetrično-uravnotežen natanko tedaj, ko je antipodalen [1]. Kadar je graf simetrično-uravnotežen, točka v' sovпада s točko $\bar{v}$. V nadaljevanju bomo zato uporabljali oznako $\bar{v}$ in poimenovanje *antipodalna točka* točke v .

Izrek 5. *Graf G je izomorfen grafu maksimalnih lic acikloida natanko tedaj, ko je G harmonično-uravnotežena delna kocka.*

Dokaz. Naj bo G_A graf maksimalnih lic acikloida $A = (E, \mathcal{T})$. Po izreku 4 je G_A delna kocka. Pokažimo, da je G_A antipodalen graf. Za poljubni točki $X, Y \in V(G_A)$ velja $d_G(X, Y) = |D(X, Y)| \leq |E| = \text{diam}(G_A) = d_{G_A}(X, -X)$. Zato je G_A uravnotežen graf, pri čemer velja, da je antipodalna točka točke X ravno $-X$. Torej $\bar{X} = -X$. Velja pa še, da je $d_{G_A}(X, Y) + d_{G_A}(X, -Y) = |D(X, Y)| + |D(X, -Y)| = |E| = \text{diam}(G_A)$. Oziroma G je simetričen graf. Torej je G_A tudi harmoničen [7] in antipodalen graf [1].

Obratno naj bo G harmonično-uravnotežena delna kocka. Pokažimo, da je tedaj za vsak $ab \in E(G)$, $u \in W_{ab}$ natanko tedaj, ko je $\bar{u} \in W_{ba}$. Za a je tudi $\bar{a} \in W_{ba}$. Naj bo torej $u \neq a$ in naj bo $u \in U_{ab}$. Potem je $W_{ab} = W_{uv}$, kjer je $v \in U_{ba}$, ki je sosedna z u . Torej je $\bar{u} \in W_{ba}$.

Naj bo sedaj $u \in W_{ab} \setminus U_{ab}$. S pomočjo indukcije glede na razdaljo točke u od množice U_{ab} (torej $d_G(u, U_{ab}) = \min\{d_G(u, x); x \in U_{ab}\}$) pokažimo, da velja trditev za vse točke grafa. Za bazo indukcije, ko je torej $d_G(u, U_{ab}) = 0$, smo to pokazali že zgoraj. Naj bo $d_G(u, U_{ab}) = k$. Za vsaj eno sosedo točke u , ki jo označimo z v , velja, da je $d_G(v, U_{ab}) = k - 1$. Po induksijski predpostavki je $\bar{v} \in W_{ba}$. Graf G je harmoničen, torej je $\bar{u}$ sosedna z $\bar{v}$. Iz tega pa sledi, da je $\bar{u} \in W_{ba}$. Točka $\bar{u}$ ne more pripadati W_{ab} , ker bi zaradi sosednosti z $\bar{v}$ potemtakem pripadala U_{ab} . Za take točke pa smo zgoraj pokazali, da je njihova antipodalna točka element W_{ba} . Torej bi moralo veljati $u \in W_{ba}$, kar pa je v nasprotju s predpostavko.

Naj bo f izometrična vložitev delne kocke G v hiperkocko $Q_{|E|}$, kjer je $|E| = \text{idim}(G)$. Hiperkocke so po točkah tranzitivni grafi oziroma točke

n -kocke so enakovredne, zato lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $f(u) = \{-\}^E$ za neki $u \in G$. Zgoraj smo pokazali, da za poljubno $ab \in E(G)$ množica W_{ab} vsebuje natanko eno izmed točk u in $\bar{u}$, zato je $f(\bar{u}) = \{+\}^E$. Torej je $\text{diam}(G) = |E|$.

Naj bo $X \in \mathcal{T}$ in naj bo $x = f^{-1}(X)$. G je delna kocka z $\text{diam}(G) = |E| = \text{idim}(G)$, torej je $f(\bar{x}) = -X$ in zato $-X \in \mathcal{T}$.

Če označimo s $\mathcal{T} = f(V(G))$ in $A_G = (E, \mathcal{T})$, lahko rečemo, da A_G zadošča lastnosti (A2). Od zgoraj že vemo, da je tudi L^1 -sistem. Torej je A_G acikloid. ■

4. Orientirani matroidi ranga kvečjemu 3

V veliko pomoč pri dokazu naslednjega izreka je izrek 1.

Izrek 6. [6] *Graf G je izomorfen grafu maksimalnih lic orientiranega matroida ranga kvečjemu 3 natanko tedaj, ko je G harmonično-uravnotežena ravninska delna kocka.*

Dokaz. Presečišča Jordanovih krivulj orientiranega matroida ranga kvečjemu 3 določajo točke ravninskega grafa, ki ima za povezave odseke posameznih Jordanovih krivulj med dvema presečiščema. Njegov dualni graf je graf maksimalnih lic istega orientiranega matroida, ki ga določa ta razporeditev Jordanovih krivulj, kar sledi iz definicije grafa maksimalnih lic. Zato po izreku 5 in izreku 1 za graf, izomorfen grafu maksimalnih lic orientiranega matroida ranga kvečjemu 3, veljajo lastnosti, navedene v izreku.

Obratno: naj bo G harmonično-uravnotežena ravninska delna kocka. G je po izreku 5 izomorfen grafu maksimalnih lic G_A acikloida $A = (E, \mathcal{T})$. Označimo z G^p ravninsko sliko grafa G na S^2 . Naj bo C cikel okoli ene izmed končnih lic S^2 , ki jih določa slika G^p . C je torej izometrični cikel delne kocke G . Za vsako povezavo $ab \in E(G)$ zato velja, da je $|C \cap F_{ab}|$ enaka bodisi 0 bodisi 2 [10, 13].

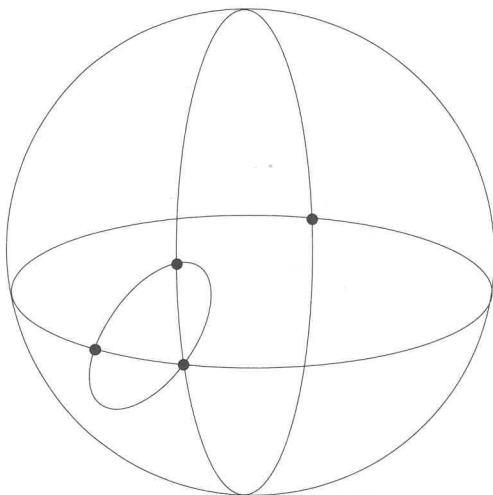
Naj bo $\overline{G}$ dualen graf grafa G^p na S^2 . Za vsako povezavo $ab \in E(G)$ povezave grafa $\overline{G}$, ki sekajo povezave F_{ab} , tvorijo cikel. Tak cikel je enolično določen, kar sledi iz zgornjega razmisleka, da je $|C \cap F_{ab}|$ enaka bodisi 0 bodisi 2. Tako dobljene cikle identificiramo z Jordanovimi krivuljami na S^2 in označimo z $\mathcal{J}$ množico vseh tako dobljenih Jordanovih krivulj in njihovih strani.

Če uporabimo E , lahko zapišemo $\mathcal{J} = \{J_e^i; e \in E, i \in \{+, -, 0\}\}$, kjer je za vsak $e \in E$, J_e^0 Jordanova krivulja s stranema J_e^- in J_e^+ . Naj bosta J_e^0 ,

$J_f^0 \in \mathcal{J}$ dve različni Jordanovi krivulji, ki ustrezata F_{ab} in F_{cd} , v ustreznem vrstnem redu. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da velja $W_{ab} \subseteq J_e^-$ in $W_{cd} \subseteq J_f^-$. Zato je $W_{ba} \subseteq J_e^+$ in $W_{dc} \subseteq J_f^+$. Po dogovoru zgoraj tudi izključimo vzporedne elemente, torej velja tudi: $W_{ab} \cap W_{cd} \neq \emptyset$, $W_{ab} \cap W_{dc} \neq \emptyset$, $W_{ba} \cap W_{cd} \neq \emptyset$ in $W_{ba} \cap W_{dc} \neq \emptyset$. Zato torej $J_e^+ \cap J_f^+ \neq \emptyset$, $J_e^+ \cap J_f^- \neq \emptyset$, $J_e^- \cap J_f^+ \neq \emptyset$ in $J_e^- \cap J_f^- \neq \emptyset$.

Ker sta obe W_{ab} in W_{cd} konveksni (Djokovičeva karakterizacija delnih kock [10]), je konveksen tudi njun presek. Iz tega pa sledi, da je $J_e^- \cap J_f^-$ povezana. Podobno razmislimo, da so tudi $J_e^+ \cap J_f^+$, $J_e^+ \cap J_f^-$ in $J_e^- \cap J_f^+$ povezane. Zato je $|J_e^0 \cap J_f^0| = 2$. Torej par $(E, \mathcal{J})$ zadošča pogoju (ii).

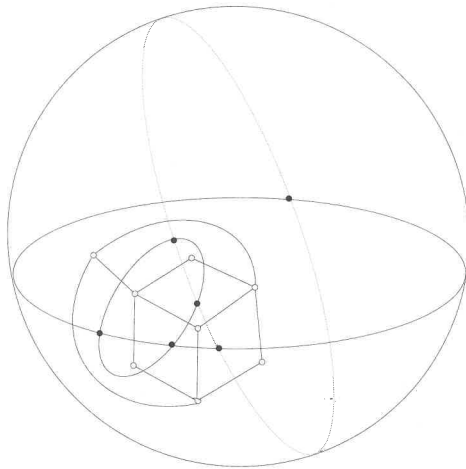
Predpostavimo, da par $(E, \mathcal{J})$ ne zadošča (iii) in izberimo tak $(E, \mathcal{J})$, da je $|E|$ minimalna glede na to lastnost. Izbira je zagotovljena zaradi naslednjega dejstva: če pogledamo $E \setminus E'$, je to enako kot kontrakcija vseh povezav $XY \in E(G_A)$, ki obrnejo predznak na nekem elementu od E' [8]. Zato obstaja $S \subseteq E$, $z |S| \geq 3$, za katero velja $k \equiv |\bigcap \{J_e^0; e \in S\}| \notin \{0, 2\}$. Po (ii) je $k = 1$. Torej obstajajo $a, b, c \in S$, tako da velja $|J_a^0 \cap J_b^0 \cap J_c^0| = 1$. Zaradi minimalnosti $|E|$ sledi $E = \{a, b, c\}$. Slika 6 prikazuje realizacijo $(E, \mathcal{J})$. Tako pridemo do protislovja, saj je $|\mathcal{T}|$ vedno sodo število.



Slika 6. Protiprimer

Predpostavimo, da par $(E, \mathcal{J})$ ne zadošča zahtevi (iv) in izberimo tak $(E, \mathcal{J})$, da je $|E|$ minimalna glede na to lastnost. Potem obstaja tak $S \subseteq E$, da je $\bigcap \{J_e^0; e \in S\} = \{x, y\}$ za neki različni točki x in y , tako da za

poljuben $k \in E \setminus S$ velja $\{x, y\} \not\subseteq J_k^0$ in $|J_k^+ \cap \{x, y\}| = 0$ ali 2. Zaradi že dokazane lastnosti (ii) in ob pravkar navedenih predpostavkah velja $x, y \notin J_k^0$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da za neki $k \in E \setminus S$ velja $\{x, y\} \subseteq J_k^+$. Najmanjša taka razvrstitev je na sliki 7, kjer je $|E| = 3$. Graf G maksimalnih lic, ki ga določa ta razvrstitev, vsebuje kot podgraf polni dvodelni graf $K_{2,3}$. Vendar $K_{2,3}$ ni delna kocka. Recimo nasprotno, da obstaja izometrična vložitev grafa $K_{2,3}$ v neko hiperkocko. Podobno kot v dokazu izreka 5 lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da ima ena izmed točk grafa $K_{2,3}$, ki je stopnje 3, vse koordinate enake $-$. Potem imajo vse tri njene sosede natanko eno koordinato enako $+$, recimo $+- - - -$, $-+- - -$, $--+ - -$. Sedaj pa preostale točke ne moremo več vložiti v hiperkocko, saj bi morala imeti zaradi oddaljenosti od točke $--- - -$, dve koordinati $+$ vse druge pa $-$. Kakorkoli izberemo koordinate te točke, se spremeni razdalja do vsaj ene izmed njenih sosed. S tem pa pridemo v protislovje s predpostavko, da je $K_{2,3}$ delna kocka. Zato tudi graf G ne more biti delna kocka in predpostavka, da par $(E, \mathcal{J})$ ne zadošča zahtevi (iv), ne velja.



Slika 7. Protiprimer

Torej je $(E, \mathcal{J})$ razvrstitev Jordanovih krivulj na S^2 . Po izreku 1 množica $\sigma(S^2) \cap \{-, +\}^E$ tvori množico maksimalnih lic nekega orientiranega matroida ranga kvečjemu 3. Ta matroid je ravno A . Torej je G graf maksimalnih lic orientiranega matroida ranga kvečjemu 3. ■

5. Sklepne opombe

Teorija orientiranih matroidov ponuja še veliko zanimivih problemov. Delno smo pokazali rešitev opisa orientiranih matroidov v jeziku teorije grafov. Zanimivo bi bilo poznati tudi podobno karakterizacijo grafov maksimalnih lic orientiranih matroidov ranga več kot tri. Zanimiv je tudi problem generiranja neizomorfnih orientiranih matroidov, ki je delno rešen s pomočjo teorije grafov v [3, 4].

Prav tako obstaja nekaj karakterizacij posebnih podrazredov matroidov v jeziku teorije grafov. Vendar ni poznana nobena karakterizacija, ki bi zajela celoten razred matroidov.

V [6] je postavljeno vprašanje, ki utegne biti zanimivo tudi zgolj z vidika teorije grafov: ali je vsaka uravnotežena delna kocka tudi harmonično-uravnotežena? V [12] je pokazano, da je odgovor pritrdilen, če je izometrična dimenzija delne kocke enaka njenemu diametru. Prav tako je pogoj o harmoničnosti uravnoteženih delnih kock izpolnjen pri izometrični dimenziji kvečjemu 6.

LITERATURA

- [1] A. Berman in M. Kotzig, *Cross-cloning and antipodal graphs*, Discrete Math. **69** (1988), str. 107–114.
- [2] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White in G. Ziegler, *Oriented Matroids*, Druga izdaja, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [3] L. Finschi, *A Graph Theoretical Approach for Reconstruction and Generation of Oriented Matroids*, Dissertation, Swiss Federal Institute of Technology Zürich, 2001, http://www.ifo.math.ethz.ch/publications/diss_finschi/.
- [4] L. Finschi in K. Fukuda, *Generation of oriented matroids – a graph theoretical approach*, Discrete Comput. Geom. **27** (2002), str. 117–136.
- [5] K. Fukuda, *Lecture Notes on Oriented Matroids and Geometric Computation*, ETH Zürich, 2000/2004, ftp://ftp.ifo.math.ethz.ch/pub/fukuda/sources/eth_omgc040616.pdf.
- [6] K. Fukuda in K. Handa, *Antipodal graphs and oriented matroids*, Discrete Math. **111** (1993), str. 245–256.
- [7] F. Göbel in H. J. Veldman, *Even graphs*, J. Graph Theory **10** (1986), str. 225–239.
- [8] K. Handa, *The faces and coboundaries of an acycloid*, v: Topology and Computer Science, Kinokuniya, 1987, str. 535–545.
- [9] K. Handa, *A characterization of oriented matroids in terms of topes*, European J. Combinatorics **11** (1990), str. 41–45.
- [10] W. Imrich in S. Klavžar, *Product Graphs: Structure and Recognition*, Wiley, New York, 2000.
- [11] S. Klavžar, *Zeckendorfov izrek in Fibonaccijeve kocke*, Obzornik mat. fiz. **50** (2003), str. 175–183.

- [12] S. Klavžar in M. Kovše, *On even partial cubes*, poslano v objavo.
- [13] S. Klavžar in H. M. Mulder, *Partial cubes and crossing graphs*, SIAM J. Discrete Math. **15** (2002), str. 235–251.
- [14] N. E. Mněv, *The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties*, v: Topology and geometry–Rohlin Seminar, Springer, Berlin, vol. 1346 of Lecture Notes in Math., (1988), str. 527–543.
- [15] B. Mohar, *Teorija matroidov*, Podiplomski seminar iz matematike **24**, DMFA, Ljubljana, 1996.
- [16] G. M. Ziegler, *Oriented Matroids Today*, Electron. J. Combin. **3** (1996) DS#4, <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds4.pdf>.
- [17] L. Finschi, *Homepage of Oriented Matroids*, <http://www.om.math.ethz.ch/>.

VESTI

IZOBRAŽEVALNI SEMINAR MATEMATIČNE IGRE

Natanko 250 let po rojstvu W. A. Mozarta smo učitelje matematike iz osnovnih in srednjih šol povabili na izobraževalni seminar *Matematične igre*. Rekordnih 87 udeležencev (61 iz osnovnih šol in 26 iz srednjih šol) se je v prostorih Fakultete za matematiko in fiziko dva dni učilo umetnosti učenja s pomočjo igre.

Matjaž Željko je predstavil elegantne poti reševanja tekmovalnih nalog s pomočjo barvanja, **Gregor Dolinar** je pokazal, kako lahko vsako računsko nalogo predstavimo kot zanimiv, življenjski problem, **Zlatan Magajna** je govoril o vlogi iger pri osnovnošolskem pouku matematike, **Helena Skaza Birk**, **Tatjana Tomaš** in **Lucijana Kračun Berc** smo srednješolsko učno snov utrjevale s pomočjo dobro znanih družabnih iger, **Vladimir Batagelj** je opisal igro Sudoku, **Boštjan Kuzman** je prikazal uporabo virtualne učilnice, **Marjan Jerman** in **Janko Marovt** sta nas zasula z mnogimi primeri iger, primernih za popestritev pouka, **Nada Razpet** je navdušila s široko paleto iger in igrač, ki zaposlijo sive celic malih in velikih učenjakov, **Martin Juvan** pa nam je za konec predstavil Nim in sorodne igre ter zmagovalne strategije.

Udeleženci smo se med predavanji aktivno igrali, domov pa odnesli veliko veliko idej. Srčno upam, da se bomo tudi v razredu z našimi dijaki in učenci tako pridno igrali, kajti ta neprisiljena oblika učenja nam prinese dosti več kot le znanje, ki je opredeljeno z učnim načrtom. To smo slušatelji seminarja z aktivnim druženjem in medsebojno izmenjavo izkušenj dobro pokazali.

Lucijana Kračun Berc

PLANCKOV ZAČETEK KVANTNE FIZIKE¹

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.65.+g

Max Planck je leta 1900 odkril zakon za sevanje črnega telesa in vpeljal energijske elemente, da ga je pojasnil. Ko poskusimo slediti Planckovim korakom, se zavemo, kako težavno jih je prav razumeti.

PLANCK'S BEGINNING OF QUANTUM THEORY

In 1900, Max Planck discovered the black-body radiation law and introduced energy elements to interpret it. When trying to follow Planck's steps we become aware how difficult it is to get a proper understanding of them.

Sevanje črnega telesa

Planck² je z vpeljavo „energijskih elementov“ – *kvantov* – leta 1900 začel kvantno obdobje. Ob podrobnejšem pogledu se pokaže, da Planck in njegovi sodobniki začetka niso doživeli tako, kot si pogosto predstavljamo dandanes. Začelo se je s *sevanjem črnega telesa*.

O sevanju je že leta 1860 razpravljajl Gustav Kirchhoff. Zamislil si je črno telo, ki vse vpadlo sevanje absorbira in pri dani temperaturi od vseh teles najmočnejše seva. Nakazal je tudi, kako bi lahko uresničili tako sevanje. V evakuirani votlini naj bodo telesa, ki sevajo in sevanje absorbirajo. Po dovolj dolgem času imajo stene votline in vsa telesa enako temperaturo. Čim večja je odbojnost teles, tem dalj časa je treba počakati, če le telesa niso idealna zrcala. Sevanje črnega telesa je odvisno samo od temperature, nič od sestave teles. Ne da bi se opiral na Kirchhoffove ugotovitve, je Jožef Stefan leta 1879 po tujih merjenjih odkril zakon o sevanju, s katerim je zajel sevanje pri vseh frekvencah. Pokazalo se je, da zakon velja za sevanje črnega telesa, ko ga je leta 1884 Ludwig Boltzmann izpeljal za reverzibilno delujoč toplotni stroj s svetlobo kot delovno snovjo.

¹Po predavanju na Stalnem strokovnem spopolnjevanju učiteljev fizike jeseni 2005.

²Max Planck (Kiel 1858, Göttingen 1947) je leta 1889 postal profesor v Berlinu – eden od prvih profesorjev teoretične fizike sploh. Leta 1918 je dobil Nobelovo nagrado za fiziko.

Sevanje črnega telesa ima zvezni spekter, ki ga podamo s porazdelitvijo časovnega povprečja gostote energije v sevanju w po frekvenci ν , s *spektralno gostoto*:

$$\frac{dw}{d\nu} = u(\nu, T).$$

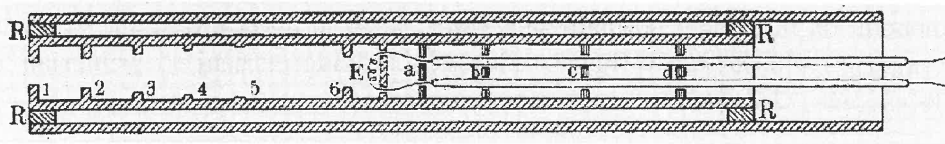
To je pritegnilo Planckovo pozornost: „Ta tako imenovana normalna porazdelitev energije je nekaj absolutnega in ker se mi je iskanje absolutnega vselej zdelo najlepša raziskovalna naloga, sem se je vneto lotil.“ [1] Stoječe valovanje v votlini je opisal z množico oscilatorjev. Pri tem je, kot kaže, mislil na drobne Hertzeve oscilatorje, ne da bi podrobneje opredelil njihovo naravo. Tu moramo pritrditi Whitakerju, „da je po pisnih virih skrajno težavno sklepati na to, kaj so v določenem času zares mislili, in [...] po mnogih letih navidezne zgodovine ali mita celo vpleteni v dogodke začetne verjetni tej zgodovini ali mitu [...]?“ [2]

Planck je vsakemu od oscilatorjev priredil valovanje z lastno frekvenco ν in vključil v razpravo množico oscilatorjev z vsemi mogočimi lastnimi frekvencami. S tem korakom je poenostavil razpravo, saj je bilo oscilatorje lažje obvladati kot sevanje. Pričakovanje, da izmenjavanje energije med oscilatorji pripelje do spektralne gostote črnega telesa, pa se ni uresničilo. Oscilator lahko namreč sprejme ali odda energijo le pri lastni frekvenci.

Planck se je na začetku poklicne poti ukvarjal v termodinamiki z entropijskim zakonom. Trdil je, da za ireverzibilno spremembo ni značilno to, da ne more potekati v obrnjeni smeri, ampak to, da po njej ne moremo vzpostaviti razmer, kakršne so bile pred njo. Sevanju črnega telesa se je poskusil približati s termodinamične strani. Prej se je pritoževal, da se drugi fiziki ne zanimajo za njegovo raziskovanje entropije. Zdaj mu je to prišlo prav, ker se mu ni bilo treba bati, da bi ga kdo prehitel. Fiziki, ki so tudi raziskovali sevanje črnega telesa, niso izhajali iz entropijskega zakona.

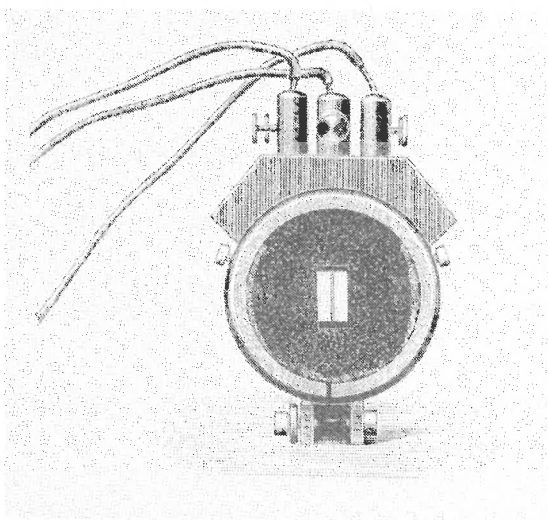
Modeli črnega telesa

Čeprav je Kirchhoff obravnaval sevanje v votlini, so dolgo časa opazovali le sevanje počrnjenih kovinskih plošč. Šele po letu 1895 so na Fizikalno-tehniški državni ustanovi v Berlinu izdelali prve modele črnega telesa po Kirchhoffovi zamisli [3]. V enem od njih so po dolgem prežagano porcelansko cev znotraj namazali s sajami ali oksidom kake kovine in zaprli s ploščama na krajiščih. Cev so obdali z vodnikom iz platinske pločevine z debelino 0,01 mm v obliki plašča valja z dolžino 40 cm in s premerom 4 cm. Vodnik



Slika 1. Shematični presek skozi enega od modelov črnega telesa, ki so jih uporabljali na Fizikalno-tehniški državni ustanovi v Berlinu. Prek obročev R so speljali tok na platinski vodnik, E je votlina, v katero sega uporovni termometer za merjenje temperature. Zaslone 1 do 6 preprečujejo zraku dostop v votlino. Platinski vodnik objema porcelansko cev, to pa obdaja še ena cev za izolacijo.

so za izolacijo obdali z drugo porcelansko cevjo. Prek obročev na krajiščih so vodniku dovajali električni tok in ga tako segreli (slika 1). Pri merjenju z drugim modelom so si pomagali s kopelmi z določeno temperaturo. Merili so pri temperaturah do $1500\text{ }^{\circ}\text{C}$. Sevanje, ki je izhajalo iz votline skozi drobno odprtino, so razstavili na spekter in ga podrobno premerili.



Slika 2. Lummerjev in Pringsheimov bolometer je imel platinski trak na ploščici iz skrilavca z električnima priključkoma vgrajen v okular.

Za merjenje spektra so med drugim razvili občutljiv *bolometer*, kakršne so dotlej večinoma uporabljali v astronomiji (slika 2). Bolometer je neka-kšen uporovni termometer, katerega upor se spremeni, ko nanj pade sevanje. Spremembo upora ugotovijo na primer z Wheatstonovim mostom. Z bolometrom z vlaknom iz platine, debelim $1\text{ }\mu\text{m}$, so merili gostoto energijskega toka z relativno natančnostjo 10^{-7} . Merjenja te vrste so izvajali tudi z na-

menom, da bi izdelali normalo za sevanje, ki so jo potrebovali, ker so želeli primerjati plinsko razsvetljavo z električno. Izide merjenj so primerjali z *Wienovim zakonom*.

Wienovi zakoni

Wilhelm Wien je leta 1893 najprej postavil *zakon o premiku*, po katerem je frekvenca ν_0 pri vrhu spektralne gostote sorazmerna z absolutno temperaturo:

$$\nu_0/T = \text{konst.} \quad (1)$$

Upošteval je, da se sevanju, ki se odbije v valju na odmikajočem se batu, zaradi Dopplerjevega pojava zmanjša frekvenca, in izpeljal [4] zahtevo:

$$u(\nu, T) = \nu^3 f(\nu/T). \quad (2)$$

Pri tem je $f(\nu/T)$ še neznana funkcija kvocienta ν/T . Tu obidemo Wienovo izpeljavo, le prepričamo se, da spektralna gostota (2) ustreza Wienovemu zakonu o premiku (1) in Stefanovemu zakonu:

$$d[\nu^3 f(\nu/T)]/d\nu = 3\nu^2 f(\nu/T) + \nu^3 f'(\nu/T)/T = 0,$$

$$3f(\nu_0/T) + (\nu_0/T)f'(\nu_0/T) = 0,$$

$$w = \int_0^\infty \nu^3 f(\nu/T) d\nu = T^4 \int_0^\infty (\nu/T)^3 f(\nu/T) d(\nu/T) = (4\sigma/c)T^4.$$

Nazadnje smo Stefanovo konstanto σ vpeljali z gostoto energijskega toka $j = \sigma T^4 = \frac{1}{4}cw$.

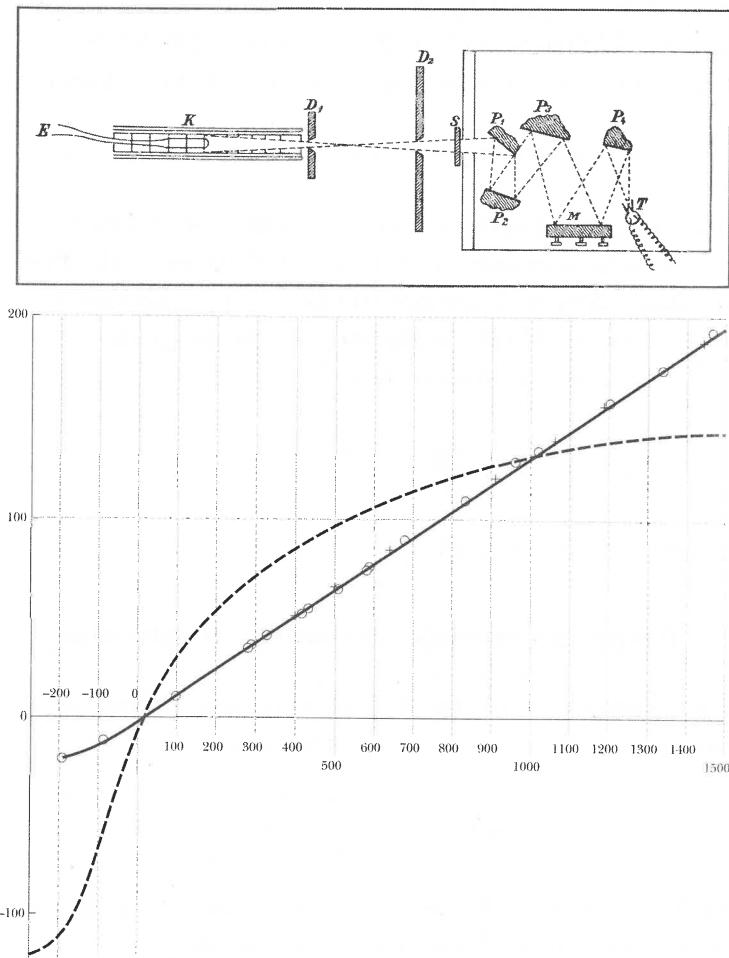
Leta 1896 je Wien za funkcijo v (2) postavil $e^{-c_2\nu/T}$ po zgledu na Maxwellovo porazdelitev molekul v plinu po hitrosti, ki vsebuje faktor $e^{-m_1 v^2/2kT}$:

$$u(\nu, T) = c_1 \nu^3 e^{-c_2\nu/T}. \quad (3)$$

Sevalni konstanti c_1 in c_2 je bilo treba izluščiti iz merjenj. Najprej je kazalo, da se *Wienov zakon* (3) dobro sklada z merjenji.

Na berlinski ustanovi sta začela meriti Otto Lummer in Wien; namesto katerega je po njegovem odhodu iz Berlina vskočil Ernst Pringsheim. Prve rezultate merjenja sta objavila v letih 1896 in 1897. V tem času je objavil podobne rezultate tudi Friedrich Paschen, ki je delal v Hannovru. Leta 1899

sta Lummer in Pringsheim merila pri valovni dolžini do $7\ \mu\text{m}$ in ugotovila odstopanja od Wienovega zakona. Naslednje leto sta svoje rezultate objavila Heinrich Rubens in Ferdinand Kurlbaum, ki sta delala na isti ustanovi v Berlinu. Pri majhni frekvenci je v nasprotju z Wienovo napovedjo spektralna gostota postala sorazmerna s temperaturo (slika 3). Na obisku je Rubens o tem obvestil Plancka.



Slika 3. Shema merjenja s „preostalimi žarki“ pri veliki valovni dolžini. Curek sevanja iz modela črnega telesa se večkrat odbije na kristalih kamene soli, tako da preostane samo sestavina z veliko valovno dolžino (zgoraj). Rubens in Kurlbaum sta pri valovni dolžini $51,2\ \mu\text{m}$ dobila *izokromato* $u(\nu = \text{konst}, T)$ kot linearno funkcijo temperature. To se je razlikovalo od napovedi Wienovega zakona, ki je nakazana črtkano (spodaj).

Gostota stanj

Že prej je Planck v okviru Maxwellove elektrodinamike ugotovil število lastnih nihanj elektromagnetnega valovanja v votlini. Opazujmo stoječe valovanje v resonatorju z obliko kocke z robom l . Stene naj bodo pravokotne na koordinatne osi in idealno prevodne, tako da so stene vozne ploskve električnega polja. Ravno valovanje potuje v smeri, ki je proti osi x naklonjena za kot α_1 , proti osi y za α_2 in proti osi z za α_3 . Iz zahtev $l = n_i \cdot \frac{1}{2} \lambda_i = n_i \cdot \frac{1}{2} \lambda / \cos \alpha_i$ z $i = 1, 2, 3$ sledi $n_i = (2l/\lambda) \cos \alpha_i$. Za smerne kosinuse velja zveza $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$, tako da preostane [5]:

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = (2l/c)^2 \nu^2.$$

To je enačba krogelnega površja v koordinatnem sistemu z osmi n_1, n_2 in n_3 . Stanju ustreza točka s celimi $n_1 > 0, n_2 \geq 0$ in $n_3 \geq 0$. Prostornina z enoto $\Delta n_1 \cdot \Delta n_2 \cdot \Delta n_3 = 1$ ustreza številu stanj, če so cela števila dovolj velika. Število stanj v oktantu tanke krogelne lupine je $dg = \frac{1}{8} \cdot 4\pi n^2 dn = \frac{1}{8} \cdot 4\pi (2l/c)^2 \nu^2 (2l/c) d\nu$ in *gostota stanj* je:

$$\frac{dg}{d\nu} = \frac{4\pi V \nu^2}{c^3}. \quad (4)$$

$V = l^3$ je prostornina resonatorja.

Povprečna energija oscilatorja in entropija

Planck je v zadnjem v vrsti petih člankov *O ireverzibilnih pojavih sevanja* leta 1899 spektralno gostoto izrazil z gostoto stanj:

$$u(\nu, T) = \frac{2 \cdot 4\pi \nu^2}{c^3} U.$$

S faktorjem 2 je upošteval dve neodvisni polarizaciji. Vpeljal je *povprečno energijo oscilatorja* U in iz Wienovega zakona izluščil:

$$U = \frac{c_1 c^3}{8\pi} \cdot \nu e^{-c_2 \nu / T}.$$

Iz te enačbe je izračunal $1/T = -(1/c_2 \nu) \ln U + \text{konst.}$ in izraz vstavil v entropijski zakon. Pri reverzibilni spremembi velja $dS = dU/T$, saj je

$dQ = dU$, ker ne dovajamo dela. Tako je dobil $dS/dU = -(1/c_2\nu) \ln U + \text{konst. in}$:³

$$\frac{d^2S}{dU^2} = -\frac{1}{c_2\nu U}.$$

Zveza se je Plancku leta 1899 zdela imenitna: „dana definicija entropije sevanja in z njo Wienov zakon za sevanje sta nujna posledica uporabe načela o naraščanju [...]“.⁴ V *Avtobiografiji* je dodal: „Ta zveza je tako presenetljivo preprosta, da sem jo nekaj časa imel za čisto splošno in se trudil, da bi jo teoretično utemeljil. Toda to mnenje se je kmalu pokazalo za nevzdržno zaradi rezultatov novih merjenj. [...]“

Rubensov podatek, da je spektralna gostota pri majhni frekvenci sorazmerna s temperaturo, je zahteval $U \propto T$ in $dS/dU \propto 1/U$ ter $d^2S/dU^2 \propto -1/U^2$. Planck je oba izraza sestavil v:

$$\frac{d^2S}{dU^2} \propto -\frac{1}{U(U + \text{konst} \cdot \nu)}.$$

Iz tega je dobil z integriranjem $dS/dU \propto \ln[(U + \text{konst} \cdot \nu)/U]$. Iz entropijskega zakona $dS/dU = 1/T$ je sledila zveza $\ln[(U + \text{konst} \cdot \nu)/U] \propto 1/T$ in iz nje:

$$U \propto \frac{\nu}{e^{c_2\nu/T} - 1} \quad \text{in} \quad u(\nu, T) = c_1 \frac{\nu^3}{e^{c_2\nu/T} - 1},$$

če se je ravnal po Wienovem zakonu.

Tako je nastal *Planckov zakon*, ki ga je pozneje, 14. decembra 1900, zapisal v obliki:

$$U = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1} \quad \text{in} \quad u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (5)$$

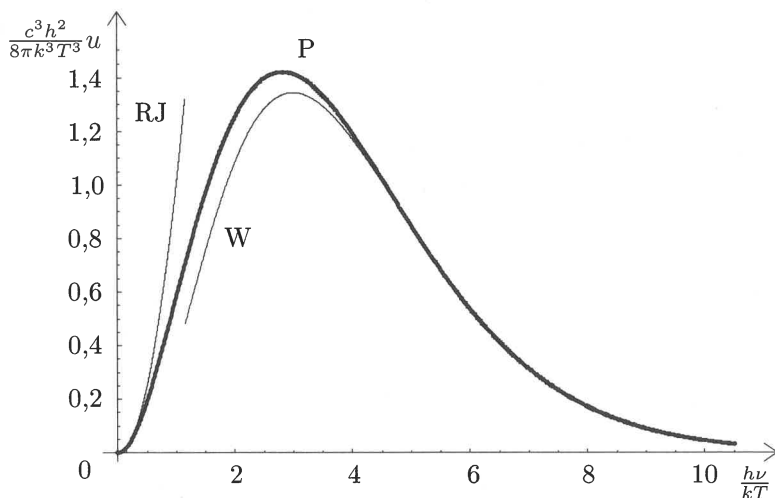
Pri tem je vpeljal *Boltzmannovo konstanto* $k = R/N_A$ s plinsko konstanto R in Avogadrovim številom N_A ter konstanto h , ki jo danes imenujemo po njem. S svojim zakonom je po merjenjih sevanja črnega telesa prek Boltzmannove konstante izračunal Avogadrovo število natančneje, kot so ga poznali dotlej.

Zakon pri veliki frekvenci preide v *Wienov približek* $u = (8\pi\nu^3 h/c^3) e^{-\frac{h\nu}{kT}}$. Pri majhni frekvenci preide v približek $u = (8\pi\nu^2/c^3) kT$, ki ne vsebuje

³Drugi odvod entropije po energiji lahko izrazimo s toplotno kapaciteto pri konstantni prostornini $C_V = (\partial U/\partial T)_V$. Iz $dS/dU = 1/T$ sledi $d^2S/dU^2 = -(1/T^2)\partial T/\partial U = -1/(T^2 C_V)$.

⁴O tem je bil tako prepričan, da je uvedel *naravne enote*, v katerih imajo c , c_1 , c_2 in G velikost 1. *Planckove enote* so torej starejše od Planckovega zakona. Danes jih sestavimo iz konstant $\hbar$, c in G . *Planckov čas* je na primer $t_P = \sqrt{\hbar G/c^5} = 5,4 \cdot 10^{-44}$ s.

Planckove konstante in ki sledi iz ekviparticijskega izreka $U = kT$. Lord Rayleigh je leta 1900, preden je Planck odkril novi zakon, izpeljal zvezo $u \propto \nu^2 T$. Po Planckovem zakonu je izračunal koeficient in ugotovil, da je osemkrat prevelik. James Jeans ga je opozoril, da števila n_1 , n_2 , n_3 ne smejo biti negativna in mora upoštevati le oktant prostornine v prostoru teh števil. Planck potemtakem ni „zlepil“ Wienovega in „Rayleigh-Jeansovega zakona“, kakor včasih trdijo [2] (slika 4). Do novega zakona se je dokopal prek entropije po Wienovem zakonu in eksperimentalnem podatku, da je spektralna gostota pri majhni frekvenci sorazmerna s temperaturo. To mu je uspelo še na večer po Rubensovem obisku. O tem je Rubensa takoj obvestil z dopisnico.



Slika 4. Planckov zakon za spektralno gostoto (P) ter Wienov (W) in Rayleigh-Jeansov (RJ) približek.

Kurlbaum je 19. oktobra 1900 poročal pruski akademiji znanosti o nedvoumnih odkloneh od Wienovega zakona. Na istem zasedanju je Planck na kratko predstavil novi zakon [6]. Naslednje jutro je Plancka obiskal Rubens in mu povedal, da je ponoči podrobno preizkusil novi zakon in da se odlično ujema z merjenji. Lummer in Pringsheim sta bila spočetka bolj zadržana, a sta kmalu sporočila, da novi zakon odlično opiše tudi njuna merjenja. Prej se jima je namreč v račune prikradla napaka. Planckov zakon je obveljal do današnjih dni.

Termodinamični korak

Z doseženim Planck ni bil zadovoljen: „Četudi privzamemo, da velja absolutno, bi enačba za sevanje imela zgolj pomen formalnega zakona, ki smo ga srečno uganili. Zato sem se od dne, ko sem jo prvič zapisal, ukvarjal z nalogo, da bi ji dal pravi fizikalni smisel, in to vprašanje me je samo napeljalo na razmišljanje o zvezi med entropijo in verjetnostjo, torej na Boltzmannov način razmišljanja.“ [1]

S povprečno energijo oscilatorja (5) izračunamo obratno vrednost temperature:

$$\frac{1}{T} = (k/h\nu) \left[\ln(U/h\nu + 1) - \ln(U/h\nu) \right]$$

in s tem entropijo, ki je funkcija ene same spremenljivke U/ν :

$$S = \int \frac{dU}{T} = k \left[(U/h\nu + 1) \ln(U/h\nu + 1) - (U/h\nu) \ln(U/h\nu) \right]. \quad (6)$$

Statistični korak

V *Autobiografiji* je Planck zapisal: „Boltzmann je dobro vedel, da se moje stališče razlikuje od njegovega. Posebej ga je motilo, da do teorije o atomih, ki je bila podlaga vsega njegovega raziskovalnega dela, nisem bil samo ravnodušen, ampak sem jo celo nekoliko odklanjal. To je izhajalo iz tega, da sem takrat načelu naraščanja entropije pripisoval enako veljavnost brez izjem kot načelu o ohranitvi energije, medtem ko je Boltzmann prvo načelo imel samo za verjetnostni zakon, ki kot tak dopušča tudi izjeme [...]. Tako je prišlo do tega, da je bil Boltzmannov ton ves čas, tudi pozneje, v objavah in v zasebnih pismih razdražen, a se je šele v zadnjih letih njegovega življenja umaknil prijaznemu odobravanju, ko sem mu poročal o atomski utemeljitvi svojega zakona o sevanju.“ [1] Planck je še zapisal, da se je šest let boril z vprašanjem o ravnovesju snovi in sevanja in da se je zavedal temeljnega pomena tega vprašanja za fiziko.

Entropije seštevamo, verjetnosti pa množimo. Iz tega izhaja sklep $S \propto \ln P$, ki ga je naredil že Boltzmann. Da bi našel „teoretično razlago za vsako ceno, pa naj bi bila še tako visoka“, je bil Planck pripravljen uporabiti Boltzmannov statistični prijem, ki mu je dotlej nasprotoval.

Razvoj enega oscilatorja v času je nadomestil s trenutno porazdelitvijo dane energije po velikem številu N neodvisnih takih oscilatorjev z enako lastno frekvenco ν . Skupna povprečna energija vseh oscilatorjev je $U_N =$

NU in skupna entropija $S_N = NS$. Energijo si je mislil sestavljeno iz P nerazločljivih energijskih elementov ε . Boltzmannovo zvezo za ta primer je zapisal z Boltzmannovo konstanto kot:

$$S_N = k \ln W_N. \quad (7)$$

W_N je število načinov, na katere P nerazločljivih elementov razvrstimo po N razločljivih oscilatorjih. Da energija ne more biti neomejeno deljiva, je sklepal in uvedel končne energijske elemente, ker bi v nasprotnem primeru število W_N naraslo čez vse meje. Pri $N = 2$ in $P = 3$, na primer, imamo štiri možnosti $(3\varepsilon|0)$, $(2\varepsilon|\varepsilon)$, $(\varepsilon|2\varepsilon)$, $(0|3\varepsilon)$. N oscilatorjev ločimo med seboj z $N - 1$ mejami, ki jih obravnavamo enako kot elemente. Vseh mogočih permutacij elementov in meja bi bilo $(P + N - 1)!$. Vendar mej in elementov ne razločujemo in se nič ne spremeni, če permutiramo meje med seboj in elemente med seboj, tako da je:

$$W_N = \frac{(P + N - 1)!}{P!(N - 1)!}.$$

Za navedeni zgled velja $W_N = (3 + 2 - 1)!/3!(2 - 1)! = 4!/3! = 4$.

Upoštevamo zvezo $U_N = NU = P\varepsilon$ in Stirlingov približek za logaritem fakultete: $\ln N! = (N + \frac{1}{2}) \ln N - N + \ln \sqrt{2\pi}$. Pri tem je N veliko število in zanemarimo 1 in $\frac{1}{2}$ v primeri z njim. Tako dobimo za entropijo:

$$\begin{aligned} S_N &= k[(P + N) \ln(P + N) - P \ln P - N \ln N] = \\ &= kN \left[\left(\frac{U}{\varepsilon} + 1 \right) \ln \left(\frac{U}{\varepsilon} + 1 \right) + \left(\frac{U}{\varepsilon} + 1 \right) \ln N - \frac{U}{\varepsilon} \ln \frac{U}{\varepsilon} - \frac{U}{\varepsilon} \ln N - N \ln N \right] \end{aligned}$$

in sledi:

$$S = S_N/N = k[(U/\varepsilon + 1) \ln(U/\varepsilon + 1) - (U/\varepsilon) \ln(U/\varepsilon)]. \quad (8)$$

Primerjava z entropijo (6) naravnost pokaže, da je energijski element sorazmeren s frekvenco:

$$\varepsilon = h\nu. \quad (9)$$

O tem je Planck poročal na omenjenem zasedanju pruske akademije znanosti 14. decembra 1900. Enota Js je značilna za akcijo ali učinek, zato je konstanto h imenoval *elementarni kvant učinka* in energijski element ε *kvant energije*. O tem, da je upošteval končni energijski element, je pisal prijatelju: „To je bil zgolj formalni privzetek in pri tem si nisem veliko mislil, ampak

samo to, da moram v vsakem primeru priti do pozitivnega rezultata, naj stane, kolikor hoče.“ [7] Na tem mestu nam drugič pride na misel Whitakerjevo mnenje o tem, da pisni viri ne povedo, kaj so si nekdanji fiziki mislili. Menda je Plancka na to pot napeljala ugotovitev, da so se v entropiji (6) pojavili izrazi vrste $x \ln x$, ki jih najdemo v Stirlingovem približku za logaritem fakultete.

Planck in Boltzmann in Einstein

Po Boltzmannovem mnenju so makroskopske zakone popolnoma določali dinamični mikroskopski zakoni. Za Plancka pa dinamični mikroskopski zakoni niso bili popolnoma določeni in jim je bilo treba dodati privzetke, da so pripeljali do makroskopskih zakonov. Zato je Planck lahko naredil odločilni korak, ne da bi mu bilo treba podvomiti o prejšnjih zakonih. Končnih energijskih elementov in od nič različne konstante h ni povezal ne z mehaničnim oscilatorjem, kar bi pomenilo prelom z Newtonovo mehaniko, niti z elektromagnetnim sevanjem, kar bi pomenilo prelom z Maxwellovo elektrodinamiko. Mislil je, da gre za posebnost sodelovanja med snovjo in sevanjem, ki je še ne razumemo [8].

Planckova stališča so se jasneje pokazala v razpravi z Einsteinom [9], [10]. Einstein je leta 1905 uvedel kvante v vakuumu z Wienovim približkom in je s tem nasprotoval Maxwellovi elektrodinamiki: „Zares se mi zdi, da je opazovanja ‘črnega sevanja’ [...] mogoče boljše razumeti s privzetkom, da je energija po prostoru porazdeljena nezvezno. Obravnavali bomo privzetek, da se energija v curku svetlobe, ki izhaja iz točke, ne širi zvezno na vse večji prostor, pač pa sestoji iz končnega števila energijskih kvantov, lokaliziranih v točkah prostora, ki se gibljejo, ne da bi se delili, in jih je mogoče absorbirati ali izsevati samo kot celote.“ V članku *Teorija nastanka svetlobe in absorpcije svetlobe* je Einstein leta 1906 poskusil zblížiti svoje in Planckovo stališče s predlogom, da zveza med u in U obvelja tudi za kvante. Planck mu je nasprotoval: „Ne iščem pomena [kvanta] v vakuumu, ampak na krajih, na katerih pride do absorpcije in sevanja, in privzamem, da to, kar se dogodi v vakuumu, opišejo Maxwellove enačbe.“ Einstein je ugovor ponovil na zasedanju Združenja nemških naravoslovcev in zdravnikov leta 1909 v predavanju *O razvoju naših predstav o bistvu in zgradbi sevanja*. Zopet je Planck v razpravi odvrnil: „Vsekakor mislim, da bi morali najprej vso težavo kvantne teorije prestaviti na območje sodelovanja snovi s sevalno energijo, pojave v vakuumu bi lahko za zdaj pojasnili še z Maxwellovimi enačbami.“

Plancku se Einsteinova zamisel o kvantih v vakuumu ni zdela dobra. V letih od 1911 do 1914 je poskušal pojasniti ozadje svojega zakona s klasičnimi sredstvi. Tako je privzel, da se pojavijo kvanti samo ob izsevanju in poteka absorpcija zvezno. To je pripeljalo do *ničelne energije* $\frac{1}{2}h\nu$, ki jo srečamo tudi v lastni energiji harmoničnega oscilatorja $(n + \frac{1}{2})h\nu$. Kaže, da se je Planck šele po letu 1914 zavedel vseh posledic svojega koraka. Leta 1931 je svoj korak imenoval „dejanje iz obupa“. „To, da so mi spodleteli vsi poskusi premostiti prepad, kmalu ni dopuščalo nobenega dvoma, da ima kvant učinka v atomski fiziki temeljno vlogo in da njegova vpeljava začenja novo obdobje v fizikalni znanosti. Naznanja namreč nekaj nezaslišanega, kar je poklicano, da bo korenito spremenilo naše fizikalno mišljenje. To je doslej od Leibnizeve in Newtonove utemeljitve infinitezimalnega računa slonelo na zveznosti vseh vzročnih povezav. Moji neuspešni poskusi, da bi kvant učinka kakorkoli vgradil v klasično teorijo, so trajali vrsto let in so me stali veliko truda. Številni fiziki so videli v tem nekakšno tragiko. Sam mislim drugače. Zame je bil dobiček, ki mi ga je dalo tako temeljito razčiščevanje, toliko več vreden. Tako sem natanko vedel, da ima kvant učinka v fiziki pomembnejšo vlogo, kot sem bil spočetka pripravljen privzeti. V polni meri sem razumel, da je nujno treba pri obravnavanju problemov v atomski fiziki vpeljati čisto nove načine razmišljanja in računanja.“ [1]

Na splošno fiziki kvantov niso sprejeli niti leta 1915, ko je Robert Andrews Millikan z merjenji podprl Einsteinovo enačbo za fotoefekt. Sprejeli so jih šele po letu 1923, ko je Arthur Holly Compton sipano rentgensko svetlobo z večjo valovno dolžino pojasnil s trki kvantov z elektroni. Leta 1926 so za kvant vpeljali ime foton, ki se je odlej uveljavilo. Poznejši razvoj je pokazal, da je sicer v glavnem imel prav Einstein, a tudi Planckov pomislek ni bil neupravičen. V času kvantne optike ne moremo brez pomisleka pritrditi Einsteinovi izjavi o kvantih, „lokaliziranih v točkah“.

Spomin na opisane dogodke odpre vprašanje, ali je umestno trditi, da je Planck leta 1900 ugotovil, da oscilatorji s sevanjem izmenjujejo energijo v obrokih. Ali se je kvantna fizika zares začela 19. decembra 1900? Ali se ni morda začela pozneje, ko so razčistili pojme? Prevladuje mnenje, da enačbe in količine v njih, do katerih je prišel Planck kot teoretični fizik, pomenijo več kot nejasne predstave iz njihovega ozadja. To nas sili k pritrdilnemu odgovoru na vprašanje. Navsezadnje je za kvantno fiziko značilna Planckova konstanta h , ki jo je Planck vsekakor uvedel leta 1900.

LITERATURA

- [1] M. Planck, *Wissenschaftliche Selbstbiographie; Zur Geschichte der Auffindung des physikalischen Wirkungsquantums, Physikalische Abhandlungen und Vorträge*, Band III, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1958.
- [2] M. A. B. Whitaker, *History and quasi-history in physics education*, Phys. Ed. **14** (1979), 108, 239.
- [3] D. Hoffmann, *Schwarze Körper im Labor*, Phys. Blätter **56** (2000) 43 (12).
- [4] J. Strnad, *Razvoj fizike*, DZS, Ljubljana 2003, str. 244.
- [5] J. Strnad, *Do Stefanovega zakona*, Fizika v šoli **6** (2000), str. 67.
- [6] D. ter Haar, *The Old Quantum Theory*, Pergamon, Oxford 1978.
V knjižici sta prevedeni Planckovi poročili *On an improvement of Wien's equation for the spectrum* in *On the theory of the distribution law of the normal spectrum*.
- [7] D. Giulini, N. Straumann, „... ich dachte mir nicht viel dabei ...“, Phys. Blätter **56** (2000) 37 (12).
- [8] O. Darrigol, *Continuities and discontinuities in Planck's Akt der Verzweiflung*, Ann. Phys. (Leipzig) **11–12** (2000), str. 951.
- [9] J. Strnad, *Einstein in Planckov zakon*, Obzornik mat. fiz. **26** (1979), str. 74.
- [10] A. Pais, *'Subtle is the Lord ...' The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford, Oxford University Press 1982.

VESTI

REKORDNA UDELEŽBA NA 47. MEDNARODNI MATEMATIČNI OLIMPIJADI V SLOVENIJI

Vse hitreje se bliža julij, ko bo Slovenija v organizaciji DMFA Slovenije gostila 47. mednarodno matematično olimpijado, najprestižnejše matematično tekmovanje, ki se ga

vsako leto udeleži prek 800 najboljših srednješolcev in njihovih spremljevalcev z vsega sveta. Udeležba na letošnji olimpijadi bo rekordna, saj je prihod v Slovenijo napovedalo kar 99 držav. Po številu udeležениh držav bo to drugi največji dogodek v zgodovini samostojne Slovenije. Več o olimpijadi najdete na naslovu <http://imo2006.dmfa.si/>.

**47th INTERNATIONAL
MATHEMATICAL
OLYMPIAD
SLOVENIA 2006**



Zakaj v Sloveniji in zakaj ravno letos?

Države udeleženke poravnajo le stroške potovanja do kraja olimpijade, medtem ko gostitelj olimpijade krije udeleženkam vse druge stroške. Prav zaradi tega je obveza vsake države, ki se olimpijade udeležuje, da jo tudi sama organizira. Po osamosvojitvi Slovenije, ko se je olimpijade začela udeleževati slovenska ekipa (pred tem so na olimpijadi sodelovali tisti slovenski

tekmovalci, ki so se uspeli uvrstiti v jugoslovansko ekipo), je bilo treba začeti razmišljati tudi o organizaciji olimpijade pri nas. Darju Feldi se je takrat porodila zamisel, da bi bilo primerno prav leto 2006, saj bomo letos organizirali jubilejno 50. državno tekmovanje srednješolcev v znanju matematike. V decembru leta 1996 je Programski svet za tekmovanja v znanju pri Ministrstvu za šolstvo in šport RS sprejel sklep, da začnemo pripravljati načrte za organizacijo mednarodne matematične olimpijade, dve leti kasneje pa je bil programskemu svetu predložen okvirni program olimpijade.

Matematična tekmovanja srednješolcev imajo v naši državi eno izmed najdaljših tradicij na svetu. Zasluge za to imata akademik Ivan Vidav, ki je dolga leta vodil tekmovalno komisijo pri DMFA Slovenije, in Stanko Uršič, ki je vodil sekcijo za popularizacijo znanosti.

Prvi začetki

Našo namero o organizaciji mednarodne matematične olimpijade leta 2006 smo posredovali vodstvu svetovalnega odbora matematične olimpijade, vse države udeleženke pa so bile o nameri obveščene julija 1997 v Mar del Plati v Argentini, kjer je tedaj potekala olimpijada. V mednarodni organizaciji so našo kandidaturo toplo pozdravili, zato smo projekt predstavili tudi Vladi Republike Slovenije. Ta je na svoji seji 11. julija 2002 formalno sprejela pokroviteljstvo olimpijade, slovenska kandidatura pa je bila potem tudi uradno potrjena na Mednarodni matematični olimpijadi leta 2002 v Veliki Britaniji. Takoj zatem so v okviru ožje skupine (Gregor Dolinar, Darjo Felda, Matjaž Željko) stekle prve organizacijske priprave, leta 2004 smo na upravnem odboru društva ustanovili organizacijski odbor, ki ga vodi Zvonko Trontelj, naštetim pa sta se pridružila še Andrej Bauer in Klavdija Mlinšek. Z vsakim dnem je v organizacijo vpletenih več ljudi in sodimo, da bo v času olimpijade organizatorjem pomagalo okrog 300 ljudi.

Široka podpora

Organizacija tako velikega dogodka seveda ne bi bila mogoča brez velikega razumevanja in podpore celotne matematične skupnosti, pa tudi številnih fizikov, članov našega društva. Hkrati nas zelo veseli tudi podpora najpomembnejših institucij in posameznikov. Predsednik častnega odbora Mednarodne matematične olimpijade je dr. Janez Drnovšek, predsednik Republike Slovenije, mesto v častnem odboru pa so sprejeli še g. France Cukjati, predsednik Državnega zbora Republike Slovenije, dr. Boštjan Žekš, predsednik Slovenske akademije znanosti in umetnosti, dr. Janez Potočnik, evrop-

ski komisar za znanost in raziskave v Evropski komisiji, dr. Andreja Kocijančič, rektorica Univerze v Ljubljani, dr. Ivan Rozman, rektor Univerze v Mariboru, dr. Lucija Čok, rektorica Univerze na Primorskem, ga. Danica Simšič, županja Mestne občine Ljubljana, dr. Milan Zver, minister za šolstvo in šport Republike Slovenije, dr. Jurij Zupan, minister za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo Republike Slovenije, mag. Branko Grims, predsednik Odbora za kulturo, šolstvo in šport v Državnem zboru Republike Slovenije in g. Rudolf Moge, predsednik Odbora za visoko šolstvo, znanost in tehnološki razvoj v Državnem zboru Republike Slovenije.

Financiranje

Največji del stroškov bosta krili Ministrstvo za šolstvo in šport ter Ministrstvo za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo. Vendar proračunska sredstva ne bodo dovolj. Nefinančno nam pomagajo vse tri slovenske Univerze, že nekaj časa pa intenzivno iščemo tudi potencialne sponzorje.

Potek olimpijade

Olimpijada bo potekala od 6. do 18. julija v Ljubljani in Portorožu. Tekmovalci bodo nastanjeni v Ljubljani, vodje delegacij, ki naredijo dokončen izbor tekmovalnih nalog in morajo biti zato v prvem delu ločeni od tekmovalcev, pa bodo prebivali v Portorožu. Začetno obdobje je namenjeno izboru nalog, slovesna otvoritev bo 11. julija v Unionski dvorani, tej pa bosta sledila dva tekmovalna dneva, ko bodo tekmovalci vsak dan po štiri ure in pol reševali po tri naloge. Dnevi do konca olimpijade so namenjeni vrednotenju izdelkov in skupnemu izletu vseh udeležencev, olimpijada pa se bo končala s slovesnostjo v Cankarjevem domu 17. julija.

Slovenska ekipa

Priprave naše ekipe vodi Irena Majcen, v slovensko ekipo pa so se uvrstili **Gašper Zadnik, Peter Lendero, David Gajser, Matjaž Berčič, Špela Špenko** in **Primož Koželj**. Rezervi sta **Urban Jezernik** in **Nino Bašić**.

Letos se naši tekmovalci še posebej intenzivno pripravljajo. Poleg vsa-koletnih priprav smo na Bledu organizirali skupne priprave s tradicionalno dobro ekipo Srbije in Črne gore, tik pred olimpijado pa bo naša ekipa imela še skupne priprave z ekipo Velike Britanije.

Zaželimo naši ekipi veliko uspehov!

Gregor Dolinar

OBZORNIK ZA MATEMATIKO
LJUBLJANA, MAREC
Letnik 53, številka
ISSN 0473-7466, UDK 51

R 177/06



100002471,2

ODPISANO

VSEBINA

Članki	Strani
Orientirani matroidi in delne kocke, Matjaž Kovše	33–50
Planckov začetek kvantne fizike, Janez Strnad	51–63
Vesti	
Izobraževalni seminar Matematične igre, Lucijana Kračun Berc	50
Rekordna udeležba na 47. mednarodni matematični olimpijadi v Sloveniji, Gregor Dolinar	63–VII

CONTENTS

Articles	Pages
Oriented matroids and partial cubes, Matjaž Kovše	33–50
Planck's Beginning of Quantum Theory, Janez Strnad	51–63
News	50–VII

Na naslovnici je logotip Mednarodne matematične olimpijade 2006. Klasični ali Kretski labirint, podoben tistemu, ki je upodobljen na logotipu, lahko najdemo med drugim na hrbtni strani glinene ploščice (Pylos, Grčija, 1200 pr. n. št.). Logotip je oblikoval prof. Janez Suhadolc (glej prispevek na strani 63).