

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2006

Letnik 53

1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasiló Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2006, letnik 53, številka 1, strani 1–32

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460, 2512 005 **Telefaks:** (01) 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Peter Šemrl (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Ciril Dominko, Roman Drnovšek, Damjan Kobal, Peter Legiša, Aleš Mohorič, Petar Pavešić, Nada Razpet, Pavle Saksida, Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško stavila Monika Testen.

Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1350 izvodov.

Člani društva prejéjajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 5.000 SIT, za druge družinske člane in študente pa 2.500 SIT. Naročnina za ustanove je 8.000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2006 DMFA Slovenije – 1630

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\LaTeX}$ oziroma $\text{\LTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

APROKSIMACIJA KROŽNIH LOKOV S PARAMETRIČNIMI POLINOMSKIMI KRIVULJAMI

GAŠPER JAKLIČ, JERNEJ KOZAK, MARJETA KRAJNC
in EMIL ŽAGAR

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 41A05, 41A10, 41A25, 65D05, 65D17

V članku obravnavamo problem aproksimacije krožnih lokov s parametričnimi polinomskimi krivuljami. Dokažemo, da lahko v primeru, ko je ločna dolžina krožnega loka enaka h , konstruiramo parametrično polinomsko krivuljo stopnje $n \in \mathbb{N}$, ki interpolira dani krožni lok v določeni točki in ima radialno razdaljo omejeno s h^{2n} . Gre za posplošitev rezultata Lycheja in Mørkena za lihe n .

APPROXIMATION OF CIRCULAR ARCS BY PARAMETRIC POLYNOMIAL CURVES

The approximation of circular arcs by parametric polynomial curves is studied. If the angular length of the circular arc is h , a parametric polynomial curve of arbitrary degree $n \in \mathbb{N}$, which interpolates given arc at a particular point, can be constructed with radial distance bounded by h^{2n} . It is a generalization of the result obtained by Lyche and Mørken for odd n .

1. Uvod

Aproksimacija krožnih lokov ima pomembno vlogo v računalniško podprtem geometrijskem oblikovanju (Computer Aided Geometric Design – CAGD), načrtovanju (Computer Aided Design – CAD) in proizvodnji (Computer Aided Manufacturing – CAM). Čeprav lahko krožni lok zapišemo z racionalno kvadratično Bézierovo krivuljo (v splošnem z racionalno parametrično krivuljo nizke stopnje [1]), marsikateri CAD/CAM sistemi zahtevajo polinomsko predstavitev krožnih lokov, saj se nekaterih pomembnih algoritmov ne da neposredno uporabiti na racionalnih krivuljah. Krožnih lokov ni mogoče predstaviti s polinomi, zato je treba uporabiti interpolacijo ali aproksimacijo.

Problem aproksimacije krožnih lokov s polinomskimi parametričnimi krivuljami sta med drugimi študirala tudi Lyche in Mørken [3]. Našla sta lepo eksplisitno reprezentacijo s parametričnimi polinomskimi krivuljami lihih stopenj ter postavila domnevo, da je reprezentacija s krivuljami sodih stopenj težak problem. Njuna metoda uporablja Taylorjevo aproksimacijo in daje parametrične polinome lihih stopenj n z visokim redom aproksimacije $2n$.

V tem članku bomo podali rešitev problema za vse $n \in \mathbb{N}$. Najprej predstavimo aproksimacijski problem. Naj bo

$$\mathbf{f}(\varphi) := \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha < 2\pi, \quad (1)$$

parametrizacija krožnega loka z ločno dolžino α . Dovolj je obravnavati krožne loke enotske krožnice, saj lahko poljuben krožni lok enake dolžine dobimo z afino transformacijo. Poiskati želimo parametrično polinomsko krivuljo

$$\mathbf{p}_n := \mathbf{p} := \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

z nekonstantnima skalarnima polinomoma $x_n, y_n \in \mathbb{R}[t]$ stopnje $\leq n$,

$$x_n(t) := \sum_{j=0}^n a_j t^j, \quad y_n(t) := \sum_{j=0}^n b_j t^j, \quad (3)$$

ki doseže „najboljšo aproksimacijo“ krožnega loka (1). Pri tem predpišemo le eno interpolacijsko točko $\mathbf{f}(0) := (x_n(0), y_n(0))^T := (0, 1)^T$, zato je v (3) $a_0 = 0$ in $b_0 = 1$.

V CAGD nas zanimajo predvsem geometrijske lastnosti objektov. Ker je izbrana parametrizacija samo reprezentacija objekta v želeni obliki, bomo napako aproksimacije obravnavali kot razdaljo med množicama točk na danih krivuljah (krožnem loku in parametričnem polinomu). Naravna izbira je „*radialna razdalja*“ (slika 1),

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{p}) := \max_{t \in I} \left\{ \left| \sqrt{x_n^2(t) + y_n^2(t)} - 1 \right| \right\}, \quad (4)$$

kjer je I interval, ki ga opazujemo. Če je $\mathbf{p}$ dobra aproksimacija za $\mathbf{f}$ na intervalu I , je napaka (4) majhna in $\sqrt{x_n^2(t) + y_n^2(t)} \approx 1$. Tedaj velja

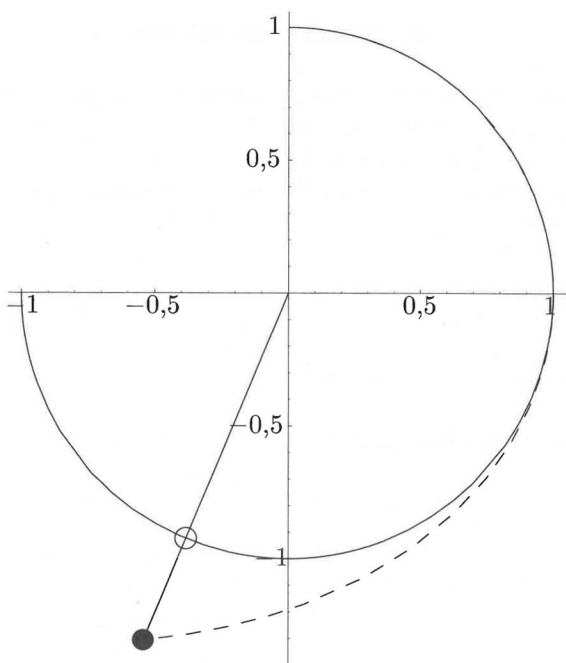
$$\left| \sqrt{x_n^2(t) + y_n^2(t)} - 1 \right| = \frac{|x_n^2(t) + y_n^2(t) - 1|}{\sqrt{x_n^2(t) + y_n^2(t)} + 1} \approx \frac{1}{2} |x_n^2(t) + y_n^2(t) - 1|,$$

in s stališča uporabe je dovolj obravnavati „napako“

$$e(t) := |x_n^2(t) + y_n^2(t) - 1|. \quad (5)$$

Če bi obstajala polinomsko parametrizacija krožnega loka, bi bila napaka e identično enaka 0. To ne more biti res, saj v primeru, ko je vsaj eden od polinomov x_n ali y_n stopnje n , iz (3) dobimo

$$x_n^2(t) + y_n^2(t) = (a_n^2 + b_n^2) t^{2n} + \dots \neq 1. \quad (6)$$



Slika 1. Radialna razdalja med krožnim lokom (krepko) in aproksimacijsko parametrično krivuljo (črtkano)

Iz enačbe (5) sledi, da bo napaka e majhna (vsaj za majhne t), če v (6) ne bo členov nizkih stopenj. Napaka e bo zato najmanjša, ko bo

$$x_n^2(t) + y_n^2(t) = 1 + \text{konst} \cdot t^{2n}. \quad (7)$$

Ustrezna reparametrizacija

$$t \rightarrow \frac{t}{\sqrt[2n]{a_n^2 + b_n^2}}$$

transformira (7) v

$$x_n^2(t) + y_n^2(t) = 1 + t^{2n}. \quad (8)$$

S primerjanjem koeficientov pri ustreznih potencah dobimo $2n$ nelinearnih enačb za $2n$ neznanih koeficientov $(a_j)_{j=1}^n$ in $(b_j)_{j=1}^n$.

V razdelku 2 bo obravnavan sistem nelinearnih enačb in izpeljana splošna rešitev. V razdelku 3 bo potrjen optimalni asimptotični red aproksimacije, v zadnjem razdelku pa nekaj opomb glede optimalne aproksimacije krožnih lokov.

2. Rešitev problema

Čeprav lahko za izbrani n dobimo numerične rešitve sistema nelinearnih enačb, podanih z (8), je precej težje poiskati rešitev v zaključeni obliki. V [3] sta avtorja predstavila lep pristop k iskanju rešitve. Uporabila sta posebno racionalno parametrizacijo enotske krožnice, iz katere sta dobila koeficiente polinomov x_n in y_n . Če je

$$x_0(t) := \frac{2t}{1+t^2}, \quad y_0(t) := \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad t \in (-\infty, \infty), \quad (9)$$

izbrana parametrizacija, potem so funkcije

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_0(t) - (-1)^{(n-1)/2} t^n y_0(t), \\ y_n(t) &= y_0(t) + (-1)^{(n-1)/2} t^n x_0(t), \end{aligned}$$

polinomi stopnje $\leq n$, za katere velja (8). Na žalost v primeru, ko je n sod, njuni koeficienti niso več realna števila. Kljub temu lahko idejo uporabimo tudi za sode n , vendar moramo izbrati malo drugačno racionalno parametrizacijo. Naj bo

$$n := 2^k(2r-1), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad r \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

in redefinirajmo x_0, y_0 kot

$$x_0(t) := \frac{2\sqrt{1-c^2}t(1-ct)}{1-2ct+t^2}, \quad y_0(t) := \frac{1-2ct+(2c^2-1)t^2}{1-2ct+t^2}, \quad (11)$$

kjer je $c \in [0, 1)$. Enostavno se da preveriti, da je $x_0^2(t) + y_0^2(t) = 1$. Opazimo, da je (9) poseben primer (11) pri $c = 0$. Naslednji izrek nam da eno od rešitev nelinearnega sistema (8) za vsak n v zaključeni obliki.

Izrek 1. *Naj n, k in r zadoščajo (10) in naj bodo konstante c_k ter s_k podane s $c_k := \cos \psi_k$ in $s_k := \sin \psi_k$, kjer je $\psi_k := \pi/2^{k+1}$. Predpostavimo, da sta x_0 in y_0 definirana z (11) in $c := c_k$. Potem so funkcije x_n in y_n , definirane kot*

$$\begin{pmatrix} x_n(t) \\ y_n(t) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & (-1)^r t^n \\ (-1)^{r+1} t^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix}, \quad (12)$$

polinomi stopenj $\leq n$, ki zadoščajo (8). Njihovi koeficienti so

$$a_j = 2s_k \cos((j-1)\psi_k) = 2s_k T_{j-1}(c_k), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (13)$$

$$a_n = 2s_k \cos((n-1)\psi_k) + (-1)^r = 2s_k T_{n-1}(c_k) + (-1)^r, \quad (14)$$

in

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 0, \quad (15)$$

$$b_j = -2s_k \sin((j-1)\psi_k) = -2s_k^2 U_{j-2}(c_k), \quad j = 2, 3, \dots, n, \quad (16)$$

kjer so T_j in U_j polinomi Čebiševa prve in druge vrste.

Dokaz. Dokaz je razširjen dokaz iz [2]. Iz enačbe (12) sledi

$$x_n(t) = \frac{2\sqrt{1-c_k^2}t(1-c_k t) + (-1)^r t^n (1-2c_k t + (2c_k^2-1)t^2)}{1-2c_k t + t^2},$$

$$y_n(t) = \frac{(-1)^{r+1} t^n \left(2\sqrt{1-c_k^2}t(1-c_k t)\right) + 1-2c_k t + (2c_k^2-1)t^2}{1-2c_k t + t^2}.$$

Za potrditev, da je funkcija x_n res polinom oblike (3), je dovolj, da preverimo zvezo

$$\begin{aligned} (1-2c_k t + t^2) \sum_{j=0}^n a_j t^j &= a_1 t + (a_2 - 2c_k a_1) t^2 + \sum_{j=3}^n (a_j - 2c_k a_{j-1} + a_{j-2}) t^j + \\ &\quad + (-2c_k a_n + a_{n-1}) t^{n+1} + a_n t^{n+2} = \\ &= 2\sqrt{1-c_k^2}t(1-c_k t) + (-1)^r t^n (1-2c_k t + (2c_k^2-1)t^2). \end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov dobimo linearno rekurzivno enačbo

$$a_1 = 2s_k, \quad a_2 = c_k a_1, \quad a_j - 2c_k a_{j-1} + a_{j-2} = 0, \quad j = 3, 4, \dots, n-1, \quad (17)$$

z dodatnimi pogoji

$$\begin{aligned} a_n - 2c_k a_{n-1} + a_{n-2} &= (-1)^r, \\ 2c_k a_n - a_{n-1} &= (-1)^r 2c_k, \\ a_n &= (-1)^r (2c_k^2 - 1). \end{aligned} \quad (18)$$

Podobno velja za y_n :

$$\begin{aligned} (1-2c_k t + t^2) \sum_{j=0}^n b_j t^j &= b_0 + (b_1 - 2c_k b_0) t + \sum_{j=2}^n (b_j - 2c_k b_{j-1} + b_{j-2}) t^j + \\ &\quad + (-2c_k b_n + b_{n-1}) t^{n+1} + b_n t^{n+2} = \\ &= (-1)^{r+1} t^n \left(2\sqrt{1-c_k^2}t(1-c_k t)\right) + 1-2c_k t + (2c_k^2-1)t^2. \end{aligned}$$

Tu so pogoji za b_j enaki

$$b_1 = 0, \quad b_2 = -2s_k^2, \quad b_j - 2c_k b_{j-1} + b_{j-2} = 0, \quad j = 3, 4, \dots, n \quad (19)$$

in

$$\begin{aligned} -2c_k b_n + b_{n-1} &= (-1)^{r+1} 2s_k, \\ b_n &= (-1)^r 2s_k c_k. \end{aligned} \quad (20)$$

Splošna rešitev rekurzije (17) je oblike

$$a_j = A e^{i\psi_k j} + B e^{-i\psi_k j},$$

kjer je $i^2 = -1$. Iz začetnih pogojev

$$\begin{aligned} a_1 &= 2s_k = A e^{i\psi_k} + B e^{-i\psi_k}, \\ a_2 &= 2c_k s_k = A e^{2i\psi_k} + B e^{-2i\psi_k}, \end{aligned}$$

in relacije $e^{i\psi_k} = c_k + i s_k$, izračunamo $A = s_k e^{-i\psi_k}$ in $B = s_k e^{i\psi_k}$, od koder dobimo

$$a_j = 2s_k \cos((j-1)\psi_k) = 2s_k T_{j-1}(c_k), \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Iz dodatnih pogojev (18) izpeljemo

$$a_n = 2\sqrt{1 - c_k^2} \cos((n-1)\psi_k) + (-1)^r = 2s_k T_{n-1}(c_k) + (-1)^r.$$

Ker je rekurzivna enačba (19) enaka kot v (17), je njena rešitev oblike

$$b_j = C e^{i\psi_k j} + D e^{-i\psi_k j}.$$

Iz začetnih pogojev

$$\begin{aligned} b_1 &= 0 = C e^{i\psi_k} + D e^{-i\psi_k}, \\ b_2 &= -2s_k^2 = C e^{2i\psi_k} + D e^{-2i\psi_k}, \end{aligned}$$

dobimo $C = i s_k e^{-i\psi_k}$, $D = -i s_k e^{i\psi_k}$, zato je

$$b_j = i s_k \left(e^{i\psi_k(j-1)} - e^{-i\psi_k(j-1)} \right) = -2s_k \sin((j-1)\psi_k) = -2s_k^2 U_{j-2}(c_k),$$

za $j = 1, 2, \dots, n$. Dodatni pogoji (20) so izpolnjeni in dokaz je končan. ■

3. Red aproksimacije

V parametričnem primeru študij reda aproksimacije ni enostaven. Glavna težava je, kako meriti razdaljo med parametričnimi objekti. Ker objekte običajno obravnavamo kot množice točk, lahko za merjenje razdalje uporabimo znano Hausdorffovo razdaljo d_H . Ker je le-ta v praksi težko izračunljiva, sta Lyche in Mørken v [3] kot njeno zgornjo mejo predlagala tako imenovano *parametrično razdaljo* d_P .

Definicija 1. Naj bosta $\mathbf{f}_1$ in $\mathbf{f}_2$ parametrični krivulji, definirani na intervalih I_1 ter I_2 . *Parametrična razdalja* med $\mathbf{f}_1$ in $\mathbf{f}_2$ je definirana kot

$$d_P(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = \inf_{\phi} \max_{t \in I_2} \|\mathbf{f}_1(\phi(t)) - \mathbf{f}_2(t)\|,$$

kjer je $\phi: I_2 \rightarrow I_1$ regularna reparametrizacija, torej $\phi' \neq 0$ na I_2 .

Parametrično razdaljo bomo uporabili v dokazu naslednje leme:

Lema 1. *Naj bo krožni lok $\mathbf{f}$ definiran z (1) in njegova parametrična aproksimacija $\mathbf{p}$ z (2). Naj bodo koeficienti x_n in y_n podani s (13)–(16). Če je $\mathbf{p}: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^2$, kjer je h dovolj majhen, potem je*

$$d_H(\mathbf{f}, \mathbf{p}) \leq d_P(\mathbf{f}, \mathbf{p}) \leq d(\mathbf{f}, \mathbf{p}) \leq h^{2n},$$

pri čemer je d definiran s (4).

Dokaz. Po [3] je d_P metrika na množici parametričnih krivulj na intervalu $[0, h]$. Za poljubno regularno reparametrizacijo ϕ krivulje $\mathbf{f}$ na $[0, h]$ očitno velja

$$d_P(\mathbf{f}, \mathbf{p}) \leq \max_{t \in [0, h]} \|\mathbf{f}(\phi(t)) - \mathbf{p}(t)\|_2.$$

Dovolj je torej poiskati regularno reparametrizacijo ϕ , za katero je

$$\max_{t \in [0, h]} \|\mathbf{f}(\phi(t)) - \mathbf{p}(t)\|_2 \leq h^{2n}.$$

Naj bo $\phi: [0, h] \rightarrow I$ definirana kot

$$\phi(t) := \arctan \frac{x_n(t)}{y_n(t)}. \quad (21)$$

Ker je $x_n(0) = 0$, $y_n(0) = 1$ in po (13) $x'_n(0) = 2s_k$, velja

$$\phi'(0) = \frac{x'_n(0)y_n(0) - x_n(0)y'_n(0)}{x_n^2(0) + y_n^2(0)} = 2s_k > 0,$$

zato obstaja tak $h_0 > 0$, da je ϕ regularna reparametrizacija na $[0, h]$ za vse h , $0 < h < h_0$. Točka $(\mathbf{f} \circ \phi)(t)$ leži na krožnem loku, definiranem s $\mathbf{f}$, in hkrati na žarku iz izhodišča do $\mathbf{p}(t)$, zato velja

$$\|(\mathbf{f} \circ \phi)(t) - \mathbf{p}(t)\|_2 = \left| \sqrt{x_n^2(t) + y_n^2(t)} - 1 \right| \leq |x_n^2(t) + y_n^2(t) - 1| = t^{2n},$$

kjer zadnja enakost sledi iz (8). Torej je

$$\max_{t \in [0, h]} \|(\mathbf{f} \circ \phi)(t) - \mathbf{p}(t)\|_2 \leq h^{2n}$$

in dokaz leme je končan. ■

Zanimivo vprašanje je, kakšna je ločna dolžina krožnega loka, ki ga lahko aproksimiramo z opisano metodo. Najprej je potrebno zagotoviti regularnost ϕ , zato mora biti h dovolj majhen. Teda j lahko ločno dolžino reparametriziranega krožnega loka $\mathbf{f} \circ \phi$ izpeljemo vsaj asimptotično.

Lema 2. Če je ϕ regularna reparametrizacija na $[0, h]$, definirana z (21), potem je dolžina krožnega loka $\mathbf{f} \circ \phi: [0, h] \rightarrow \mathbb{R}^2$ enaka $2s_k h + \mathcal{O}(h^2)$.

Dokaz. Regularnost funkcije ϕ , enačbe (8) in (13)–(16) ter dejstvo, da je $(1 + t^{2n})^{-1} = 1 + \mathcal{O}(t^{2n})$, poenostavijo ločno dolžino v

$$\begin{aligned} s &= \int_0^h \|(\mathbf{f} \circ \phi)'(t)\|_2 dt = \\ &= \int_0^h \frac{|x'_n(t)y_n(t) - x_n(t)y'_n(t)|}{x_n^2(t) + y_n^2(t)} dt = \int_0^h \frac{x'_n(t)y_n(t) - x_n(t)y'_n(t)}{1 + t^{2n}} dt = \\ &= \int_0^h (x'_n(t)y_n(t) - x_n(t)y'_n(t)) (1 + \mathcal{O}(t^{2n})) dt = 2s_k h + \mathcal{O}(h^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. Sklep

Ker vemo, da je najboljša lokalna aproksimacija v izbrani točki v funkcijskem primeru Taylorjev razvoj, se postavi naravno vprašanje, kako dobro aproksimacijo dobimo, če sta x_n in y_n Taylorjeva polinoma za sinus in kosinus pri $t = 0$. Odgovor zapišimo v naslednjo lemo:

Lema 3. Naj bosta x_n in y_n Taylorjeva polinoma stopnje n za sinus oziroma kosinus. Potem je

$$x_n^2(t) + y_n^2(t) = 1 + \frac{1}{w_n} t^m + \mathcal{O}(t^{m+1}),$$

kjer je

$$m := \begin{cases} n+1, & n \text{ je lih,} \\ n+2, & n \text{ je sod,} \end{cases}$$

in

$$w_n := \begin{cases} \frac{m}{2} n!, & \text{če } n \bmod 4 = 1, 2, \\ -\frac{m}{2} n!, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Dokaz. Naj bosta

$$R_s(t) = \sin t - x_n(t),$$

$$R_c(t) = \cos t - y_n(t),$$

napaki v Taylorjevih razvojih. Ker je

$$x_n^2(t) + y_n^2(t) = 1 - 2(R_s(t) \sin t + R_c(t) \cos t) + R_s^2(t) + R_c^2(t) \quad (22)$$

in sta R_s , R_c oblike $\mathcal{O}(t^{n+1})$, je dovolj, da obravnavamo samo $S(t) := -2(R_s(t) \sin t + R_c(t) \cos t)$.

Najprej predpostavimo, da je n lih, torej $n = 2\ell - 1$. Tedaj sta razvoja R_s in R_c oblike

$$R_s(t) = \frac{(-1)^\ell}{(n+2)!} t^{n+2} + \mathcal{O}(t^{n+4}), \quad R_c(t) = \frac{(-1)^\ell}{(n+1)!} t^{n+1} + \mathcal{O}(t^{n+3}),$$

zato je

$$S(t) = -2 \frac{(-1)^\ell}{(n+1)!} t^{n+1} + \mathcal{O}(t^{n+3}).$$

Po (22) je $m = n + 1$ in

$$w_n = \frac{(-1)^{\ell+1} (n+1)!}{2}.$$

Če je n sod, $n = 2\ell$, je

$$R_s(t) = \frac{(-1)^\ell}{(n+1)!} t^{n+1} + \mathcal{O}(t^{n+3}), \quad R_c(t) = \frac{(-1)^{\ell+1}}{(n+2)!} t^{n+2} + \mathcal{O}(t^{n+4}),$$

zato

$$S(t) = -2 \left(\frac{(-1)^\ell}{(n+1)!} t^{n+2} + \frac{(-1)^{\ell+1}}{(n+2)!} t^{n+2} \right) + \mathcal{O}(t^{n+4}).$$

Iz (22) sledi $m = n + 2$ in

$$w_n = \frac{(-1)^{\ell+1} (n+2)n!}{2}.$$

Zadnja lema potrjuje domnevo, da Taylorjevi polinomi niso optimalna izbira, če kot merilo napake aproksimacije uporabimo radialno razdaljo.

Konstrukcija, ki je predstavljena v izreku 1, ima zelo majhno lokalno napako aproksimacije, vendar pa interpolira le eno točko na krožnem loku. Bolj splošen rezultat o Lagrangeovi interpolaciji $2n$ točk na krivuljah, podobnih krožnicam, s parametričnimi polinomskimi krivuljami stopnje n in enako napako aproksimacije $2n$, je predstavljen v [2].

LITERATURA

- [1] Gerald Farin, *Curves and surfaces for computer-aided geometric design*, Computer Science and Scientific Computing, Academic Press Inc., San Diego, četrta izdaja, 1997.
- [2] Gašper Jaklič, Jernej Kozak, Marjeta Krajnc in Emil Žagar, *On geometric interpolation of circle-like curves*, poslano v objavo.
- [3] Tom Lyche in Knut Mørken, *A metric for parametric approximation*, v *Curves and surfaces in geometric design (Chamonix-Mont-Blanc, 1993)*, str. 311–318, A K Peters, Wellesley, 1994.

VESTI

MATEMATIČNE NOVICE

Elektronski imenik matematikov in profesionalno oblikovana domača stran

Zadnji tiskani svetovni imenik matematikov raziskovalcev je izšel leta 2002. Vanj so bili (lahko) vključeni vsi matematiki, ki so v zadnjih petih letih pred izidom imeli vsaj dva članka, recenzirana v eni od dveh vodilnih referativnih revij (*Mathematical Reviews* ali *Zentralblatt MATH*). Novega tiskanega imenika ne bo več, ker je z njim preveč stroškov. (Leta 2002 je bilo v imenik vključenih približno 57 000 matematikov.)

Mednarodna matematična zveza (IMU) zato v [1] poziva matematike, da se (brez posebnih pogojev) na [2] vključite v **elektronski imenik matematikov (EWDm)** [3]. Nujni podatki so le ime in elektronski naslov. Ta bo objavljen v grafični obliki, ki otežuje avtomatično zbiranje naslovov, tako da zaradi tega verjetno ne boste dobivali dodatne nezaželenih pošt. Manjše težave boste imeli tisti, ki imate v imenu č, saj nabor znakov tega ne podpira. Od naših raziskovalcev sta, ko to pišem, v imeniku Bojan Mohar in Dušan Repovš, oba s povezavo na lepo oblikovani domači strani.

Tudi sicer IMU poziva vse matematike, da postavijo svojo **domačo stran**, če se le da na naslednji način. Na naslovu [4] dobite formular, v katerega

morate le vpisati ustrezne podatke, predvsem naslove URL drugih strani in datotek. Tako dobite (v angleščini) zelo pregledno in privlačno oblikovano stran, ne da bi za to plačevali oblikovalca. Rezultat uporabe tega formularja si lahko ogledate na [5].

Orkan Katrina in matematiki v New Orleansu

Pred tremi desetletji sem bil podiplomski študent na univerzi Tulane v New Orleansu. Univerzitetne stavbe so nedaleč od reke Misisipi, zagrajene s širokimi, a ne posebno visokimi nasipi. Do reke sem lahko prišel skozi velik mestni park z mogočnimi drevesi, s katerih so visele cele zaveske rastline *Tillandsia usneoides*, ki ji pravijo tudi *Spanish moss*. Doživel sem celo prihod orkana, ki pa takrat na srečo ni šel naravnost čez mesto.

Že takrat so se vsi zavedali možnosti katastrofe, ki se je konec poletja 2005 uresničila. Matematični oddelek na univerzi Tulane je moral za en semester prenehati z delom. Druge ameriške univerze so prevzele podiplomske študente, večkrat brez plačila šolnine. Profesorji so se prav tako razkropili po vsej državi. Povsod so jim kolegi velikodušno odstopili pisarne in pomagali pri začasni nastanitvi. Ocenjujejo, da je škode na Tulanu za 100 milijonov dolarjev. Čeprav je osnovni kapital te zasebne univerze z močnim raziskovalnim programom okrog 800 milijonov dolarjev, je to hud udarec. Kot je videti, pa se bo v letu 2006 velika večina študentov vrnila. Sosednja Loyola University, ki jo vodijo jezuiti (in je bolj znana po svoji pravni šoli kot matematiki), je bila zgrajena na višjem zemljišču in ni bila poplavljen. Vendar je veter naredil za 5 milijonov dolarjev škode in nekatere programe so začasno preselili v Houston. Dve tradicionalno črnski zasebni univerzi v New Orleansu sta bili mnogo huje prizadeti (poplavljen knjižnica, pogorelo študentsko naselje, za stotine milijonov dolarjev škode). V poletnem semestru bo nekaj njunih programov potekalo na Tulanu in Loyoli.

LITERATURA

- [1] *Personal Homepages and the World Directory of Mathematicians*, <http://www.mathunion.org/MPH-EWDM/>.
- [2] *Electronic World Directory of Mathematicians (EWDM), Join the EWDM*, <http://www.mathunion.org/ewdm/join.php>.
- [3] *Electronic World Directory of Mathematicians (EWDM)*, <http://www.mathunion.org/ewdm/>.
- [4] *World Directory of Mathematicians, Professional Homepage Maker Version 0.1*, <http://www.mathunion.org/MPHMaker/>.
- [5] *Professional Homepage Martin Grötschel*, <http://www.zib.de/groetschel/>.

Peter Legiša

PREPROST MODEL ZA RAZCEP VALOVNE FUNKCIJE DELCA V DVOJNI POTENCIALNI JAMI

TOMAŽ KRANJC

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

in

JOŽEF PETERNELJ

Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo
Univerza v Ljubljani

PACS: 66.35.+a

V prispevku je podana rešitev Schrödingerjeve enačbe za delec v enodimenzionalni neskončni potencialni jami, ki jo predelimo s potencialno pregrado v obliki odbojne funkcije delta. Če je pregrada natanko na sredini potencialne jame, je osnovno stanje simetrično delokalizirano. Ko pa gre jakost pregrade proti neskončnosti, povzroči vsak poljubno majhen premik pregrade s sredine jame popolno lokalizacijo delca v osnovnem stanju.

A SIMPLE MODEL FOR SPLITTING THE WAVE FUNCTION OF A PARTICLE IN THE BOX

We solve the Schroedinger equation for a repulsive delta function potential representing a potential barrier located inside an infinite square well potential. If the barrier is exactly in the middle of the infinite square well, the ground state is symmetrically delocalized. However, when the strength of the delta potential becomes infinite, any small displacement of the barrier away from the center of the square well causes complete localization of the ground state.

1. Uvod

Hardy [1, str. 422] je v ponazoritev Einsteinovega prepričanja, da kvantnomehanska valovna funkcija ne vsebuje vse informacije o stanju sistema, predstavil sledeči miselni poskus. Delec ujamemo v zaprto škatlo – v neskončno globoko potencialno jamo, ki jo razdelimo na dve polovici. Obe polovici škatle nato ločimo, tako da dobimo dve neodvisni škatli, tj. neskončni potencialni jami v veliki razdalji. Zastavi se vprašanje: Je delec vedno v eni od obeh škatel, ali pa morda sploh ni mogoče reči, v kateri od njiju je, dokler škatel, na primer, ne odpremo.

Pozneje je Gea-Banacloche [2] v analizi eksperimentalne realizacije poskusa, ki ga je predlagal Hardy, ponovno odkril določene nestabilnosti dvonivojskega tunelskega sistema. Dobro je znano [3], da dve najnižji lastni

stanji enodimenzionalne simetrične dvojne potencialne jame opisujeta simetrična in antisimetrična valovna funkcija, ki sta popolnoma delokalizirani; s tem hočemo reči, da je verjetnost, da najdemo delec v eni ali v drugi jami, enaka. Razlika v energiji za ti dve lastni stanji je posledica tuneliranja in eksponentno pojema v limiti visokih pregrad. Nadalje se da pokazati [4], da sta v limiti zelo majhnega razcepa energij ti stanji zelo nestabilni: vsaka nesimetričnost potenciala povzroči lokalizacijo delca v eni ali v drugi jami. V tem kontekstu je Gea-Banacloche predstavil nekaj zanimivih, čeprav ne nepričakovanih rezultatov, ki zadevajo obnašanje delca v dvojni potencialni jami, ko vanjo vstavimo pregrado.

Gea-Banacloche je vzel pregrado kot simetričen potencialni hrib, ki počasi raste v sredini jame. Če je (časovna) rast potencialnega hriba dovolj počasna, lahko rešitev problema najdemo tako, da rešimo časovno neodvisno Schrödingerjevo enačbo. V t. i. adiabatem približku razumemo čas v izrazu za potencial $V(x, t)$, ki predstavlja pregrado, kot parameter. Gea-Banacloche je uporabil potencial v obliki neskončne potencialne jame, ki se razteza od $-a/2$ do $a/2$, na sredini katere je pregrada

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & -\epsilon < x < \epsilon + \delta, \\ 0, & \text{drugje,} \end{cases}$$

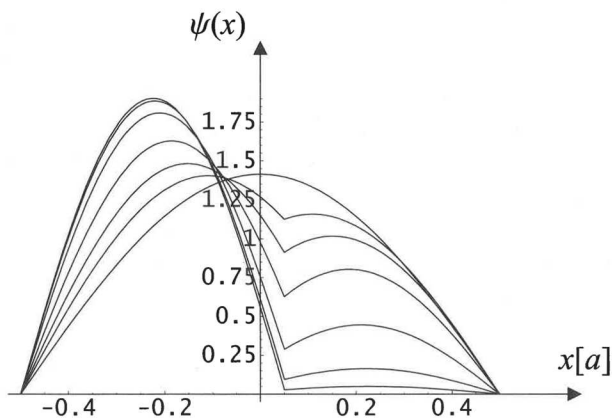
pri čemer je $\delta \ll \epsilon$.

Iz njega izhaja relativno komplicirana transcendentna enačba (9) v [2], ki določa lastne vrednosti energije. Ker je realistično pričakovati, da δ v praksi nikoli ne bo natančno enak nič, je dvojna potencialna jama, ki jo obravnavamo, dejansko nesimetrična. Zato v limiti $V_0 \rightarrow \infty$, ki je pomembna za Hardyjev miselni poskus, sklepi v [4] omogočajo, da vnaprej predvidimo rezultat, ki ga je našel Gea-Banacloche, da je namreč delec lokaliziran samo v eni polovici potencialne jame. Če je tako, poznejša delitev jame ne predstavlja več nobene interpretacijske težave, povezane s pomenom, ki ga v kvantni mehaniki pripišemo valovni funkciji (glej [1, Sec. 4] in [5]).

V tem prispevku želimo podrobno pokazati, kar smo zelo na kratko povzeli v [6], da je namreč v bistvu enake rezultate, kakor so predstavljeni v [2], mogoče dobiti z modeliranjem potencialne pregrade v obliki odbojne funkcije delta. Ta model omogoča, da zlahka dobimo energijske lastne vrednosti in lastne funkcije.

2. Neskončna pravokotna potencialna jama s pregrado v obliki odbojne funkcije delta

Sledimo [2] in obravnavajmo neskončno potencialno jamo, ki se razteza od $x = -a/2$ do $x = a/2$, s potencialom $V(x) = V_0 a \delta(x - \Delta)$, ki predstavlja pregrado, postavljeno pri $x = \Delta$ (spremenili smo oznake, da se izognemo



Slika 1. Valovna funkcija osnovnega stanja, ko je potencialna pregrada pri $x = \Delta = 0,05a$ in za vrednosti $V_0/4E_0 = 0, 1, 2, 4, 10, 30$ in 100 . Vrednosti koordinate x so izražene v enotah a , enote na navpični osi pa so določene z normalizacijo valovnih funkcij.

zmešnjavi s simbolom za funkcijo δ). Ustrezna časovno neodvisna Schrödingerjeva enačba je

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0 a \delta(x - \Delta) \psi = E \psi. \quad (1)$$

Rešitve enačbe (1), ki zadoščajo robnim pogojem $\psi(x = \pm a/2) = 0$, so znane [7, 8] in so

$$\psi(x) = \begin{cases} B \sin k(\frac{a}{2} + x), & -\frac{a}{2} \leq x \leq \Delta, \\ A \sin k(\frac{a}{2} - x), & \Delta \leq x \leq \frac{a}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

pri čemer je $k^2 = 2mE/\hbar^2$. Iz zahteve po zveznosti valovne funkcije pri $x = \Delta$ dobimo

$$A \sin k(a/2 - \Delta) = B \sin k(a/2 + \Delta). \quad (3)$$

Če integriramo Schrödingerjevo enačbo (1) na majhnem intervalu okrog koordinate $x = \Delta$ (od Δ^- , malo levo od $x = \Delta$, do Δ^+ , malo desno od $x = \Delta$) in potem vzamemo limito, ko gresta Δ^- in Δ^+ proti Δ , dobimo še eno enačbo za konstanti A in B , namreč

$$\psi'(\Delta^+) - \psi'(\Delta^-) = \left(\frac{V_0}{E_0 a} \right) \psi(\Delta), \quad (4)$$

kjer smo zaznamovali $\psi' \equiv d\psi/dx$ in $E_0 = \hbar^2/2ma^2$. Iz (2) izračunamo $\psi'(\Delta^+) = -kA \cos k(a/2 - \Delta)$, $\psi'(\Delta^-) = kB \cos k(a/2 + \Delta)$ ter s pomočjo (3) zapišemo $\psi(\Delta) = \frac{1}{2}[A \sin k(a/2 - \Delta) + B \sin k(a/2 + \Delta)]$. To vstavimo

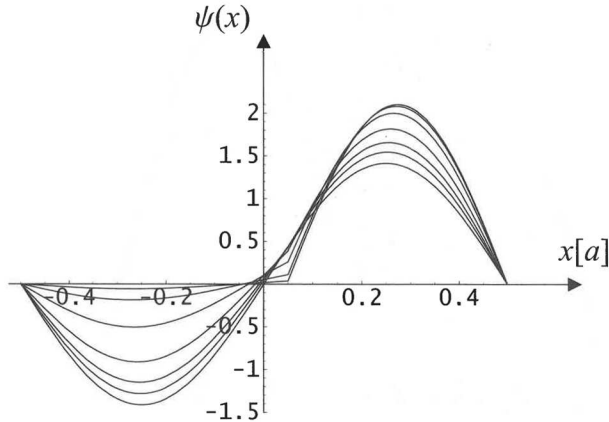
v (4), pa dobimo

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{ka}{2} \right) [A \cos k(a/2 - \Delta) + B \cos k(a/2 + \Delta)] = \\ & = \left(\frac{V_0}{4E_0} \right) [A \sin k(a/2 - \Delta) + B \sin k(a/2 + \Delta)]. \end{aligned} \quad (5)$$

Enačbi (3) in (5) sta homogeni linearni enačbi za A in B . Iz zahteve, da je determinanta koeficientov enaka nič, dobimo enačbo za k :

$$\left(\frac{ka}{2} \right) \sin ka + \left(\frac{V_0}{2E_0} \right) \sin k(a/2 + \Delta) \sin k(a/2 - \Delta) = 0. \quad (6)$$

Enačbe (2), (3), (5) in (6) popolnoma določajo lastne vrednosti in lastne funkcije (do normalizacijske konstante) Schrödingerjeve enačbe (1). Sliki 1 in 2 kažeta najnižji lastni funkciji, ki ustrezata $\Delta = 0,05a$ in različnim vrednostim razmerja $V_0/4E_0$. Naši rezultati potrjujejo ugotovitve, do katerih je prišel Gea-Banacloche in jih, poleg tega, zlahka analiziramo za različne vrednosti jakosti potenciala V_0 in/ali parametra Δ z uporabo npr. računalniškega paketa *Mathematica* ali kakega primerljivega paketa.



Slika 2. Valovna funkcija prvega vzbujenega stanja. Vrednosti parametrov so enake kakor na sliki 1.

Posebej obravnavajmo limito $\Delta = 0$. V tem primeru postane enačba (6)

$$\sin \left(\frac{ka}{2} \right) \cdot \left[\left(\frac{ka}{2} \right) \cos \left(\frac{ka}{2} \right) + \left(\frac{V_0}{4E_0} \right) \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right] = 0. \quad (7)$$

Vzemimo najprej, da je nič prvi faktor, tj. $\sin(ka/2) = 0$; tedaj je $k = n\pi/(a/2)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, in $E = \hbar^2 k^2 / 2m = 4n^2 \pi^2 E_0$. Ko postavimo $\Delta = 0$, sledi iz (5), da je $A = -B$. Ustrezne lastne funkcije so

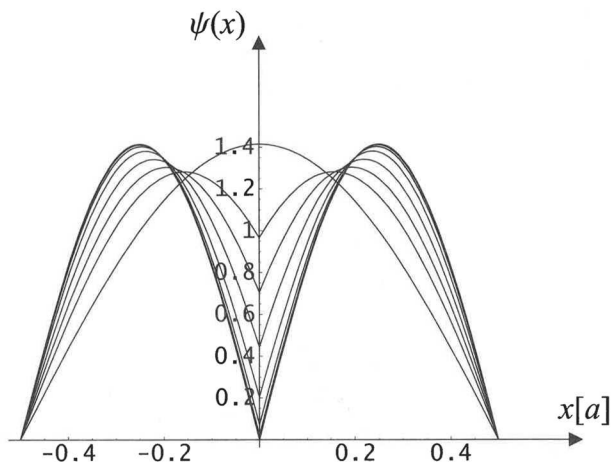
$\psi(x) = A \sin(2n\pi x/a)$; vidimo, da so lihe parnosti (tj. antisimetrične glede na transformacijo $x \leftrightarrow -x$). Dobljena lastna stanja in lastne vrednosti so enake, kakor bi jih dobili brez pregrade pri $x = 0$. Pregrada na antisimetrična stanja nima nobenega učinka. To je seveda razumljivo, saj so antisimetrične valovne funkcije ob pregradi natanko enake nič.

Po drugi strani pa pregrada vpliva na simetrične lastne funkcije. Ustrezne lastne vrednosti dobimo iz zahteve, da je v (7) drugi faktor enak nič. To nam da

$$\tan\left(\frac{ka}{2}\right) = -\left(\frac{4E_0}{V_0}\right) \cdot \left(\frac{ka}{2}\right). \quad (8)$$

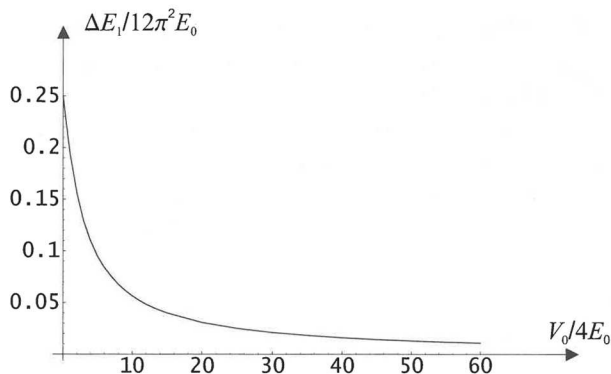
Ker je v tem primeru $\sin(ka/2) \neq 0$, sledi iz (3) $B = A$ in simetrične valovne funkcije so

$$\psi(x) = \begin{cases} A \sin k(\frac{a}{2} + x), & -\frac{a}{2} \leq x \leq 0, \\ A \sin k(\frac{a}{2} - x), & 0 \leq x \leq \frac{a}{2}. \end{cases} \quad (9)$$



Slika 3. Valovna funkcija osnovnega stanja, ko je pregrada pri $x = 0$ ($\Delta = 0$) za vrednosti $V_0/4E_0 = 0, 1, 2, 4, 10, 30, 100$ in ∞ . Enote na koordinatni osi so enake kakor na slikah 1 in 2.

Dovoljene vrednosti parametra k določa enačba (8). Na sliki 3 so prikazane ustrezne valovne funkcije za različne vrednosti kvocienta ($V_0/4E_0$). Opazimo, da v limiti $V_0 \rightarrow \infty$ simetrična in antisimetrična stanja tvorijo degenerirane pare z lastnimi energijami $E_n = 4n^2\pi^2 E_0$. V tej limiti znaša razlika med prvim vzbujenim stanjem (E_2) in osnovnim stanjem (E_1) $E_2 - E_1 = 12\pi^2 E_0$. Za končne vrednosti V_0 ($V_0 > 4\pi^2 E_0$) tuneliranje zniža energije simetričnih stanj, kar pripelje do razcepa energijskih nivojev. Slika 4 kaže razmerje med razcepom osnovnega stanja ΔE_1 in razliko energij $E_2 - E_1 = 12\pi^2 E_0$ v odvisnosti od $V_0/4E_0$.



Slika 4. Energijska razlika med antisimetričnim in simetričnim osnovnim stanjem (za $\Delta = 0$), izražena v enotah $12\pi^2 E_0$ v odvisnosti od razmerja $V_0/4E_0$.

3. Sklep

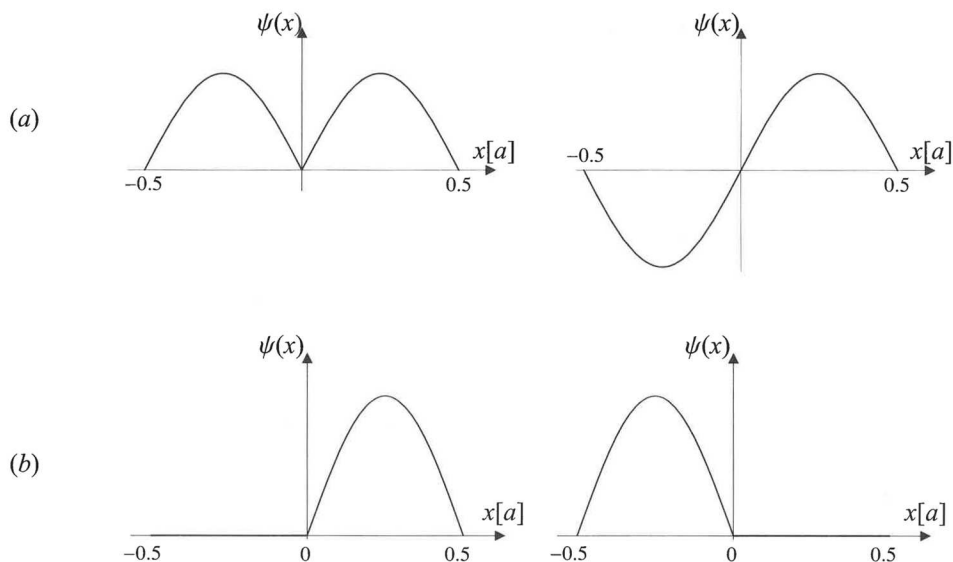
Če primerjamo lastna stanja za $\Delta = 0$ in $V_0 \rightarrow \infty$ z ustreznimi lastnimi stanji, ko je $\Delta \neq 0$, opazimo, da majhen premik pregrade v eno ali v drugo smer pomeni majhno motnjo za simetrična in antisimetrična lastna stanja. Če opazujemo na primer simetrična in antisimetrična lastna stanja (slika 5a) v limiti $V_0 \rightarrow \infty$, se morda zdi, da ni tako. Vendar ne smemo pozabiti, da sta ti dve stanji degenerirani in izbira valovnih funkcij v osnovnem stanju ni enolična. Namesto valovnih funkcij, prikazanih na sliki 5a, lahko izberemo katerokoli linearno kombinacijo teh dveh valovnih funkcij. Seveda pa izbira ni več poljubna, če zahtevamo, da je sprememba valovne funkcije zaradi majhne motnje (majhnega premika pregrade) majhna. Pravilne funkcije so v tem primeru v ničtem približku vsota in razlika simetričnih in antisimetričnih valovnih funkcij, ki jih kaže slika 5b.

To lahko uvidimo tudi neposredno iz enačbe (6). Če delimo (6) z V_0 in vzamemo limito $V_0 \rightarrow \infty$, dobimo

$$\sin k(a/2 + \Delta) \cdot \sin k(a/2 - \Delta) = 0. \quad (10)$$

Ko vzamemo, da je prvi faktor enak nič, sledi $k = n\pi/(a/2 + \Delta)$ in energijske lastne vrednosti so $E = \hbar^2 n^2 \pi^2 / 2m(a/2 + \Delta)^2$, pri čemer je $n = 1, 2, \dots$. Za te vrednosti parametra k dobimo iz (3) $A = 0, B \neq 0$, tako da so lastne valovne funkcije $\psi(x) = B \sin k(a/2 + x)$ na intervalu $-a/2 < x \leq \Delta$, sicer so nič. Podobno dobimo, ko je v (10) drugi faktor enak nič, da je $k = n\pi/(a/2 - \Delta)$, $E = \hbar^2 n^2 \pi^2 / 2m(a/2 - \Delta)^2$ in $\psi(x) = A \sin k(a/2 - x)$ na intervalu $\Delta \leq x < a/2$, drugje pa nič.

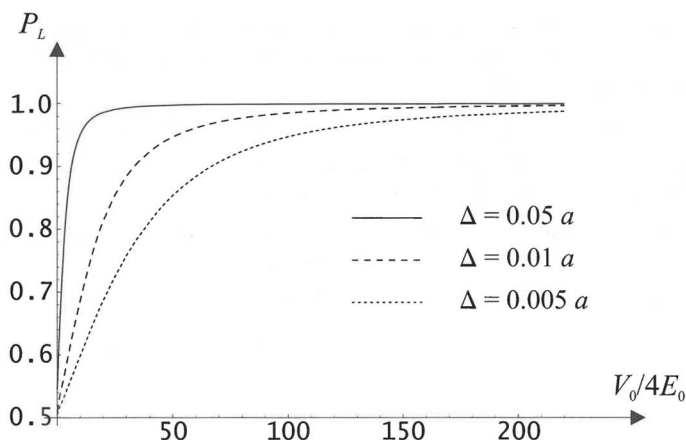
Sklenimo z naslednjima ugotovitvama. Prvič, rezultat, ki ga je dobil Gea-Banacloche [2] in smo ga v enostavnejši obliki ponovno izpeljali v tem



Slika 5. (a) Simetrično in antisimetrično osnovno stanje s pregrado $V_0 \rightarrow \infty$ pri $x = 0$. (b) Pravilna valovna funkcija v ničtem redu za izračun vpliva majhne motnje, ki jo povzroči premik pregrade ($V_0 \rightarrow \infty$) od $x = 0$ k $x = \Delta$.

prispevku, se sklada s splošnimi značilnostmi dvonivojskih tunelskih sistemov, kakor sta jih prva nakazala Claverie in Jona-Lasinio [4]. Da namreč v dvojni potencialni jami majhna nesimetrija potenciala privede do lokalizacije simetrične in antisimetrične valovne funkcije osnovnega stanja vedno, kadar je tunelski razcep osnovnega stanja majhen v primerjavi z energijsko razliko med prvim vzbujenim stanjem (stanjem z $n = 2$) in osnovnim stanjem (stanjem z $n = 1$), tj. $E_2 - E_1 = 12\pi^2 E_0$. Da je res tako, lahko vidimo, če primerjamo sliko 4 s sliko 6, na kateri je v odvisnosti od razmerja $V_0/4E_0$ prikazana verjetnost $P_L = \int_{-a/2}^{\Delta} \psi^2(x) dx$, da najdemo delec v levi jami. Valovna funkcija $\psi(x)$ je normirana simetrična valovna funkcija za delec v osnovnem stanju, kakor jo določajo enačbe (2), (3) in (5). Podobno tematiko v dveh dimenzijah, kjer potencialno bariero nadomešča ozek kanal, obravnava [9].

Drugič, zelo posrečeno optično analogijo, predstavljeno v [2], je mogoče razširiti tudi na stoječe valove na struni, obteženi s točkastimi masami, kjer pride do matematično in fizikalno zelo podobnega pojava. Pojav, ki je moral biti že stoletja znan glasbenikom, uglaševalcem in izdelovalcem godal, je matematično opisal Lord Rayleigh v svojem klasičnem delu *The Theory of Sound* [10]. Vzemimo homogeno struno dolžine a s koncema, pritrjenima pri $x = \pm a/2$ in s točkasto maso M , pritrjeno pri $x = \Delta$. Enačba, ki določa dovoljena valovna števila, je zelo podobna enačbi (6), ki določa dovoljene



Slika 6. Odvisnost verjetnosti P_L , da najdemo delec na levi strani predeljene jame, v odvisnosti od jakosti $V_0/4E_0$ funkcije δ , ki predstavlja pregrado. Izvlečena, črtkana in pikčasta krivulja predstavljajo vrednosti $\Delta = 0,05 a$, $0,01 a$ in $0,005 a$.

energije delca v razdeljeni jami, in vodi do obnašanja enake vrste, kakor ga prikazujeta sliki 1 in 2. V posebnem primeru, ko je masa pritrjena na struno v sredini ($\Delta = 0$), se frekvence normalnih načinov nihanja, ki imajo na sredini voz, ne spremenijo, medtem ko se normalnim načinom nihanja, ki so simetrični glede na sredino strune, frekvenca zniža. Če je masa M zelo velika, kar ustreza $V_0 \rightarrow \infty$ v kvantnem primeru, tvorijo frekvence normalnih načinov nihanja zaporedja tesno skupaj ležečih parov, ki se razlikujejo v frekvenci za vrednost, ki gre kot $1/M$ proti nič. Oblika strune, ki niha v osnovnem načinu nihanja, je enaka krivuljam s slike 3.

Tako se zdi, da je pojav, ki je v prispevku obdelan v kvantnomehničnem kontekstu, značilen za katerokoli valovno enačbo, ki vodi do diskretnih načinov nihanja.

LITERATURA

- [1] L. Hardy, *Spooky action at a distance in quantum mechanics*, Contemp. Phys. **39** (1998), str. 419–429.
- [2] J. Gea-Banacloche, *Splitting the wave function of a particle in a box*, Am. J. Phys. **70** (2002), str. 307–312.
- [3] L. D. Landau in E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics (Non-relativistic Theory)*, 3. izdaja, Pergamon Press, Oxford 1985, str. 183.
- [4] P. Claverie in G. Jona-Lasinio, *Instability of tunneling and the concept of molecular structure in quantum mechanics: The case of pyramidal molecules and the enantiomer problem*, Phys. Rev. A **33** (1986), str. 2245–2253.
- [5] I. Kuščer et al., *Fizika za srednje šole*, III. del, DZS, Ljubljana 2002, str. 255.

- [6] M. Lakner in J. Peternelj, *Comment on "Splitting the wave function of a particle in a box" by Julio Gea-Banacloche* [Am. J. Phys. **70** (3), 307–312 (2002)], Am. J. Phys. **71** (2003), str. 519.
- [7] S. Flugge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin 1971, str. 35–40.
- [8] U. Oseguera, *Effect of infinite discontinuities on the motion of a particle in one dimension*, Eur. J. Phys. **11** (1990), str. 35–38.
- [9] M. Batista, M. Lakner in J. Peternelj, *Particle tunnelling between two boxes joined with a long thin tube*, Eur. J. Phys. **25** (2004), str. 145–156.
- [10] J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound*, Vol. I, Dover, New York 1945, str. 204–206.

VESTI

DNEVI FIZIKE

Leto 2005 je bilo svetovno leto fizike. Mnogi ste že takrat spoznali, da je tudi fizika lahko zanimiva in zabavna. V letu 2006 se bomo vsi, ki se v Sloveniji ukvarjamo s fiziko, zopet zbrali v Tehniškem muzeju Slovenije v Bistri, da vam še bolj približamo to osnovno naravoslovno vedo. Ogledali si boste lahko zanimive eksperimente, se udeležili predavanj in delavnic, ki jih bodo v sodelovanju s Tehniškim muzejem Slovenije in Društvom matematikov, fizikov in astronomov Slovenije pripravili sodelavci Fakultete za matematiko in fiziko iz Ljubljane, Pedagoške fakultete iz Ljubljane, Pedagoške fakultete iz Maribora, Instituta Jožef Stefan iz Ljubljane in Politehnike iz Nove Gorice. Poleg tega bo 20. maja ponovno zaživel verižni eksperiment, za katerega se lahko prijavite na spletnih straneh Tehniškega muzeja Slovenije (<http://www.tms.si/>).



**Dnevi fizike bodo potekali v prostorih
Tehniškega muzeja Slovenije od 16. do 21. maja 2006.**

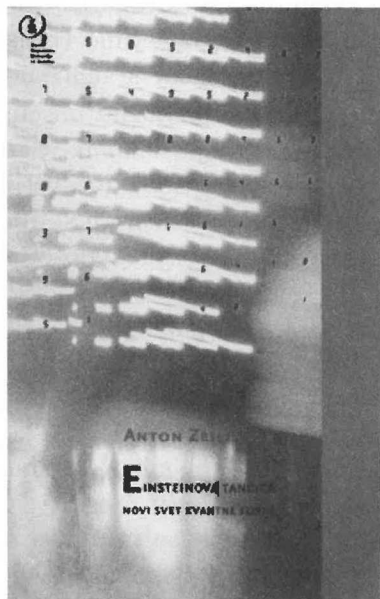
Za vse nadaljnje informacije, prijave in vprašanja nas lahko dobite na telefonih (01) 7506 672, (031) 583 461 (Milojka Čepón) ali (01) 4361 606, (041) 994 276 (Barbara Vodopivec) in elektronski pošti info@tms.si, Milojka.Cepon@tms.si, Barbara.Vodopivec@tms.si.

NOVE KNJIGE

Anton Zeilinger: EINSTEINOVA TANČICA: NOVI SVET KVANTNE FIZIKE, prevedel Ludvik Jevšenak, Zavod RS za šolstvo, Ljubljana 2005, 175 strani.

Pred kratkim je pri Zavodu Republike Slovenije za šolstvo izšel prevod knjige *Einsteinova tančica*, ki jo je napisal tudi med slovenskimi kolegi znan avstrijski fizik Anton Zeilinger. Zeilingerja poznamo po eksperimentih, s katerimi širi meje kvantne mehanike v svet klasične fizike. Za svoje delo je prejel več odmevnih mednarodnih nagrad.

Avtor pripoved, ki obsega 175 strani, začne z zgodovinskim opisom rojstva teorije kvantne mehanike. Opiše Youngov interferenčni poskus, ki je demonstriral dualizem med valovanjem in delci ter kvantno načelo nedoločenosti. Iz Youngovega poskusa se naučimo tudi, kako meritve vplivajo na izid poskusa. V knjigi je predstavljenih tudi nekaj miselnih eksperimentov, katerih namen je bil pokazati, da kvantna mehanika ni popolna teorija. Med njimi je še najbolj znan Einstein-Podolsky-Rosenov (EPR) paradoks, kjer naj bi meritve sistema prepletenih delcev kršila načela posebne teorije relativnosti. Prepletenost delcev je kvantnomehanski pojav, ko so kvantna stanja posameznih delcev povezana s stanji drugih delcev. Prepleteni delci nastanejo denimo pri razpadu drugega delca, pri čemer fizikalni zakoni zagotavljajo ohranitev določenih količin. Pri razpadu delca s spinom nič mora biti vsota vrtilnih količin nastalih delcev tudi enaka nič. Če torej pri enem od delcev pomerimo spin, obrnjen navzgor, mora biti pri drugem obrnjen navzdol. V kvantni mehaniki je valovna funkcija, ki določa verjetnost za izid določenega eksperimenta, najpopolnejši opis kvantnega stanja in v najboljšem primeru torej poznamo samo verjetnost, da bomo izmerili določeno vrednost spina. Kvantna mehanika napoveduje naslednje. Prepleteni delci v hipu vplivajo drug na drugega, čeprav so lahko več svetlobnih let narazen. Meritev spina enega od delcev povzroči razpad valovne funkcije, saj postane rezultat meritve spina drugega delca povsem določen. Ta informacija je merilcu na voljo hitreje, kot če bi se prenesla s svetlobno hitrostjo. Pojav je znan kot



„nelokalno obnašanje“ (ali slabšalno „kvantna čudnost“). Albert Einstein je pripisal to čudno delovanje na daljavo skritim spremenljivkam, čeprav se mu je tudi ta koncept, ki ga je predlagal David Bohm, zdel poceni rešitev iz zagate. Trdil je, da so napovedi kvantne mehanike sicer pravilne, vendar zgolj rezultat statistične porazdelitve neznanih lastnosti delcev. Tak pogled sledi načelom lokalnega realizma: telesa, ki niso v stiku, ne vplivajo neposredno drug na drugega (princip lokalnosti) in lastnosti telesa so določene, še preden jih izmerimo (Einstein je nekoč Nielsa Bohra podražil, ali misli, da Lune ni, kadar je nihče ne gleda).

Bohm je predlagal miselni poskus, podoben Einsteinovemu, ki mu matematično lažje sledimo. Ugibanje o tem, ali je kvantna mehanika le senca lokalnega realizma, je osvetlil John Bell. Zapisal je neenačbe, ki določajo pogoj lokalnosti, zaradi katere imajo korelacije med meritvami lastnosti prepletenih delcev končni doseg. Te neenačbe so pomembne, ker jih lahko eksperimentalno preverijo in poskusi potrjujejo, da statistične napovedi kvantne mehanike niso združljive z lokalnim realizmom. Vendar pa zgodba s tem še ni končana. Prava predstava je še vedno nejasna. Razvilo se je nekaj interpretacij kvantne mehanike (semantično in epistemološko razumevanje kvantne mehanike z ontološko implikacijo) in med njimi je najbolj razširjena in sprejeta Københavnska interpretacija, ki sta jo predlagala Bohr in Werner Heisenberg (v resnici večina fizikov dela po Diracovem navodilu „Molči in računaj“ in se ne ukvarja z ontološkim pomenom kvantne mehanike). Interpretacija temelji na komplementarnosti, statističnem pomenu valovne funkcije, nedoločenosti in korespondenčnem načelu. Po Københavnski interpretaciji pridemo do zaključka, da lokalnost ne velja in da valovna funkcija v resnici razpade v hipu, ko pri enem od prepletenih delcev ugotovimo njegove lastnosti.

Celo Erwin Schrödinger ni nikoli opustil ideje, da je narava deterministična in je kot primer absurdnosti ideje, da so dogodki v kvantnem svetu realni šele, kadar jih izmerimo, navedel miselni poskus, znan kot Schrödingerjeva mačka. Avtor opiše poskus in pojasni, kako se v njem dotikata kvantni in klasični svet. Ukvarja se s problemom, kdaj lahko stanje sistema opišemo kvantno in kdaj tak opis, kjer so možna mešana stanja, pripelje do absurda.

Zaradi svojih znanstvenoraziskovalnih izkušenj je prav avtor poklican, da razloži uporabnost poznavanja kvantne prepletenosti za razvoj novih tehnologij, kot so kvantni računalniki, kvantna kriptografija in teleportacija. Prek praktičnih strani kvantne mehanike nas seznani s pomenom meritve za obstoj resničnosti.

Razlaga pojavov, ki jim klasična fizika ni bila kos, je zahtevala miselni preskok, ki so ga zmožni le redki posamezniki. S koncepti kvantne meha-

nike, kot so kvantizacija energije, nedoločenost, dvojna narava in statistični značaj stanja kvantnih delcev, in kršitvami klasičnih fizikalnih načel, kot so načelo prostora in časa (vsak objekt obstaja ločeno v prostoru in času – torej ga lahko lokaliziramo in razvoj sistema lahko spremljamo s časom), kavzalnost (vsak dogodek ima svoj vzrok), determinizem (vsako stanje sistema je enolično določeno z začetnim stanjem), zveznost (kadar se sistem na koncu nahaja v različnem stanju kot na začetku, je moral pri tem preiti skozi vsa vmesna stanja) in načelo ohranitve energije, so imeli in še vedno imajo težave tudi tako bistri ljudje, kot je bil Einstein.

Zeilingerjeva knjiga nikakor ni priročnik kvantne mehanike ampak bolj filozofsko razmišljanje o pomenu temeljnih načel. Avtor se v delu izogiba matematični interpretaciji problemov in z nazornimi analogijami iz vsakdanjega življenja tudi laiku poskuša razložiti srž problema. Na nekaterih mestih moramo slepo verjeti povedanemu, s čimer pa se vsi (kar avtor tudi prizna) ne strinjajo popolnoma. Knjiga je napisana poljudno in za razumevanje zahteva le osnovno znanje fizike, zato je primerna tudi za širši krog bralcev. Pritegnila bo pozornost vsakogar, ki ga zanimata narava in njeni temelji. Če tudi vas zanima, ali se je Einstein motil, ko je dejal „God does not play dice“, jo le vzemite v roke.

Aleš Mohorič

VESTI

STROKOVNO SREČANJE IN OBČNI ZBOR DMFA Cerkno, 25. in 26. 11. 2005

Načrtovali smo srečanje ob morju, a se žal ni izteklo tako, kot smo želeli. V septembru smo namreč izvedeli, da bi imeli na voljo le dva prostora, kar bi bilo za izvedbo našega srečanja premalo. Sredi septembra smo zato morali poiskati novo lokacijo. Poklicali smo v Cerkno, kjer so se nas razveselili.

Najprej nas je skrbelo, kako bo z udeležbo, vendar je bil pogled na seznam prijavljenih sredi tedna tik pred srečanjem obetaven. Potem pa je prišla slaba vremenska napoved in še cesta skozi Poljansko dolino je bila dopoldan zaprta. Ampak v petek zjutraj se je množica začela zbirati in kmalu smo se oddahnili. V hotel nas je prispelo okoli 150.

Strokovni del je potekal v treh sekcijah: matematika – osnovna šola, matematika – srednja šola in fizika. Posebej so imeli predavanja še aplikativni fiziki.

Letos smo povzetke predavanj objavili na domači strani društva. Tako so se lahko profesorice in profesorji že doma odločili, katera predavanja oziroma delavnice bodo obiskali.

Ker smo povzetke predavanj objavili tudi v Biltenu srečanja, naj naštejemo le predavatelje in naslove njihovih predavanj oziroma delavnic, in sicer v takem vrstnem redu, kot so predavali:

Petek, 25. novembra 2005

Matematika – osnovna šola:

- Mara Cotič in Darjo Felda, *Govorimo o matematiki – se razumemo?*
- Nada Marčič, Sonja Kosič, Nevenka Dušak, Boštjan Repovž, *Kako smo v Sloveniji razvijali preizkuse znanj za merjenje matematičnega znanja ob zaključku OŠ*
- Milena Strnad, *Kako lažje do razumevanja matematike?*
- Zlatan Magajna, *Kaj se dogaja z matematičnim znanjem naših učencev?*
- Amalija Žakelj, *Matematično znanje slovenskih osnovnošolcev v luči mednarodne raziskave*
- Olga Arnuš, Vilko Domajnko, Darjo Felda, Tilka Jakob, *Matematična delavnica*

Matematika – srednja šola:

- Damjan Kobal, *Ocenjevanje matematičnega znanja – iluzija objektivnosti*
- Boštjan Kuzman, *Virtualna učilnica pri poučevanju matematike*
- Nada Razpet, *Matematično razmišljanje*
- Dušan Modic, *Zanimivi koti v trikotniku*
- Mara Cotič, Darjo Felda, *Govorimo o matematiki – se razumemo?*
- Olga Arnuš, Vilko Domajnko, Darjo Felda, Tilka Jakob, *Matematična delavnica*
- Ivan Drnovšek, *Obtežimo trikotnik*
- Marko Razpet, *Elipsa in Cassinijev oval*

V večernem delu, ki so ga za osnovnošolske profesorje vodili tajniki komisij, so se le-ti seznanili s spremembami pravilnikov pri osnovnošolskih tekmovanjih, srednješolski profesorji matematike pa so sodelovali na okrogli mizi *Matematika pri maturi*, ki so jo pripravili Tomaž Pisanski, Dragomir Benko, Milan Jevnikar in Janez Žerovnik.

Fizika:

- Jože Rakovec, *Odkod vendar tropskim ciklonom tako rušilna moč?*
- Nataša Vaupotič, *Spektralne barve, oko in barve*
- Barbara Rovšek (soavtor Jure Bajc), *Mavrica*
- Robert Repnik, *Opazovanje Sonca*
- Boris Kham, *Prenos kolobarjastega Sončevega mrka iz Španije*
- Samo Božič, *Frank-Hertzev poskus*
- Nada Razpet, *Fizika naše ulice*
- Janez Strnad, *Konec etra?*
- Peter Prelog, *Poskus poenostavljene razlage dilatacije in relativnosti časa ob računalniško programiranih ilustracijah svetlobne ure in Einsteinovih vlakov*
- Gorazd Planinšič, *Aktivno učenje ob poskusih in primerih iz življenja*

Po večerji je prišel na vrsto sprostitveni del, ki je bil namenjen glasbi, plesu, resnim in manj resnim debatam ob omizjih. V restavraciji je bilo prijetno toplo, zunaj pa je vztrajno naletaval sneg. Bilo je pravo zimsko razpoloženje. Nekaj udeležencev je odšlo domov, v hotelu jih je ostalo še vedno več kot 100.

Sobota, 26. 11. 2005

Delo smo pričeli v dveh sekcijah. Matematiki so najprej prisluhnili Mariji Vencelj in *Fizikalno-fiziološkim razlogom za uvedbo glasbenih lestvic in matematični potrditvi optimalnosti temperirane uglasitve* in nato še vabljenemu predavanju Vladimirja Batagelja z naslovom *Pajčevine*.

Fiziki so najprej prisluhnili Karlu Šmigocu, ki je govoril o *Prostem padu in načelu ekvivalentnosti*, nato pa še vabljenemu predavanju Marka Mikuža (soavtor Danilo Zavrtanik) o *Snovi, prostoru... in času*.

Svetovno leto fizike je vplivalo na mlade raziskovalce. Da to drži, je pokazal osnovnošolec Robi Vaupotič, ki je sestavil na vrvicah visečo cesto (bolje rečeno tire), po katerih je spustil kovinsko kroglico. Poskus je predstavil med odmorom v fizikalni sekciji.

Po odmoru se je pričel občni zbor DMFA. Ker je bilo ob 11. uri navzočih manj kot polovica članov DMFA, se je občni zbor v skladu s 16. členom Pravil DMFA pričel ob 11.30. V delovno predsedstvo so bili izvoljeni: predsednik Peter Vencelj, člana Jožica Dolenšek in Stanislav Pirnat, zapisnikar Janez Krušič. Overovatelj za zapisnika sta bila Janez Strnad in Gregor Dolinar.

Novi častni član DMFA Slovenije je postal Peter Petek. Društvena priznanja so prejeli: Vesna Harej, Osnovna šola Dravljje, Ljubljana; Milan Hladnik, FMF, Ljubljana; Janko Lužnik, IMFM, Ljubljana; Vlasta Pospeh Fischer, I. gimnazija v Celju; Jelislava Sakelšek, upokojenka; Osnovna šola Vojke Šmuc Izola (Scuola elementare Vojka Šmuc Isola).

Poročila o delu društva so bila sprejeta brez pripomb. Nov odgovorni urednik Obzornika za matematiko in fiziko Peter Šemrl je povedal, kaj vse namerava storiti, da bi bila revija zanimiva za vse člane društva.

Peter Merljak s Šolskega centra Nova Gorica je predlagal, da bi bile naloge s preteklih tekmovanj brezplačno dostopne prek interneta, kot so nekoč že bile.

Zvonka Alt je pozvala člane društva, da naj storijo čim več, da bi se število naročnikov Preseka povečalo. Matjaž Željko je poročal o nekaterih spremembah pravilnikov tekmovanj. Vsi pravilniki so objavljeni na internetni domači strani DMFA.

O opravljenem in načrtovanem delu pri organizaciji 47. mednarodne matematične olimpijade (MMO'06), ki bo v juliju 2006 v Sloveniji, sta poročala Zvonko Trontelj in Gregor Dolinar, predsednik in član ožjega organizacijskega odbora MMO'06. Vse člane DMFA prosimo za sodelovanje in pomoč pri organizaciji te zahtevne prireditve.

Jelislavo Sakelšek smo na njeno željo razrešili kot sekretarko komisije za popularizacijo fizike v osnovni šoli in za novega sekretarja te komisije izvolili Saša Kožuha, učitelja fizike na OŠ Ketteja in Murna v Ljubljani.

Prihodnjo pomlad bo organizirano že 50. matematično tekmovanje srednješolcev. Ob tej priliki želi Matjaž Željko kompletirati seznam rezultatov z minulih tekmovanj in prosi za pomoč pri iskanju rezultatov s prvega tekmovanja, ki je bilo v maju leta 1950.

Zvonko Trontelj je ob koncu opozoril še na potovanje v Turčijo, ki ga predvsem zaradi opazovanja Sončevega mrka pripravlja naš častni član Mitja Rosina. Občni zbor se je končal ob 13. uri.

Udeleženci si bodo gotovo posebej zapomnili tudi vožnjo po zasneženih cestah. Letos smo imeli strokovno srečanje in občni zbor pozno (vzrok je bila konferenca TIMSS). Obilica snega je opozorilo, da je treba taka srečanja pripraviti vsaj v prvi polovici novembra, če ne oktobra, kot so včasih že bila.

Poročilo sta pripravila *Nada Razpet in Janez Krušič*

PRIZNANJA DMFA SLOVENIJE

Prof. dr. Peter Petek – častni član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Peter Petek je eden bolj aktivnih slovenskih matematikov. Poleg svojega znanstvenoraziskovalnega dela na začetku v topologiji in kasneje na področju kompleksne in kvaternionske dinamike se je uveljavil tudi pri vzgoji novih generacij študentov. Opazna je njegova publicistična dejavnost na področju popularizacije matematike in širjenja matematične kulture med mladimi.

Ne nazadnje pa je s svojim organizacijskim delom v preteklih letih bistveno prispeval k uspešnemu delovanju našega društva.

Rodil se je 28. marca 1944 v Ljubljani. Kot dijak je dosegal uspehe na mednarodnih matematičnih tekmovanjih (npr. druga nagrada na matematični olimpijadi v Wroclavu leta 1963). Po študiju matematike na tedanji Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo, kjer je diplomiral 1967, in v Zagrebu, kjer je magistriral 1970, je nekaj časa študiral topologijo v Aarhusu na Danskem. Leta 1974 je z disertacijo Kohomološki kolobarji simetričnih grup doktoriral v Ljubljani, kjer je nadaljeval akademsko kariero univerzitetnega učitelja; docent je postal leta 1975, izredni profesor leta 1987. Leta 1992 je odšel na Pedagoško fakulteto Univerze v Ljubljani in bil izvoljen za rednega profesorja. Na tej fakulteti je poučeval vse do upokojitve leta 2004.

Raziskovalno se je v preteklosti Petek ukvarjal predvsem s topologijo in dinamičnimi sistemi. V tujih revijah in zbornikih je objavil več kot 20 znanstvenih člankov. Večina jih je s področja kompleksne dinamike, o kateri piše recenzije za uveljavljeno revijo *Mathematical Reviews*, zlasti pa se je v svetu uveljavil s svojimi znanstvenimi prispevki iz kvaternionске dinamike. Iz te tematike je bil mentor dvema doktorandoma, v sodelovanju z njima je tako nastalo nekaj odmevnih člankov. Na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko je ustanovil raziskovalni seminar za dinamične sisteme, ki ga še vedno vodi. Svoje znanstveno delo je zlasti po letu 1987 pogosto, skupaj več kot tridesetkrat, predstavljal na številnih mednarodnih konferencah in gostovanjih po vsej Evropi, v Severni in Južni Ameriki, v Izraelu in na Kitajskem. O topologiji, iteracijah funkcij in diskretni dinamiki je pisal poljudne prispevke tudi v domače revije. Samo v *Obzorniku za matematiko in fiziko* ima objavljenih 19 člankov. Mladi bralci pa ga poznajo kot avtorja številnih krajših prispevkov in nekaj daljših člankov v reviji *Presek*. Večkrat je predaval srednješolcem in srednješolskim učiteljem ter sodeloval na poletnih solah, ki sta jih organizirala društvo in univerza.

Obsežno je njegovo delo univerzitetnega učitelja, zato na tem mestu ni mogoče naštetih vseh različnih skupin študentov, ki jim je predaval osnovno matematiko. V svojem aktivnem obdobju je bil mentor pri 66 diplomah, 5 magisterijih ter 2 doktoratih. Za dijake in študente je napisal dve zbirki nalog in delovno gradivo ter recenziral učbenike. Z Državno založbo Slovenije je sodeloval pri prevodih nekaterih poljudnoznanstvenih knjig. Omeniti je treba, da je bil ob vsem svojem znanstvenoraziskovalnem, publicističnem in ožjem pedagoškem delu aktiven tudi v širšem strokovnem smislu (član komisije za učbenike pri Zavodu za šolstvo, član kurikularne komisije za osnovno šolo pri uvajanju devetletke, vodja podiplomskega študija izobraževalne smeri matematike na FNT, skrb za izboljšanje matematičnega izobraževanja v okviru projekta *Tempus* za Univerzo v Ljubljani, pomoč pri ustanavljanju nove študijske smeri matematika-računalništvo, predstojnik oddelka za matematiko in računalništvo na Pedagoški fakulteti v Ljubljani).

Slika o profesorju Petku ne bi bila popolna, če ne bi omenili, da je ob svojem obsežnem in raznovrstnem delu in ob svoji številni družini našel čas še za eno svojo ljubezen, šah, ki ga aktivno igra od študentskih let. Tako, kot na drugih področjih, si je tudi v šahu pridobil nadpovprečno znanje, saj je mojstrski kandidat, mojster dopisnega šaha in šahovski sodnik.

Naj se ob koncu dotaknemo še njegovih zaslug za naše društvo. Vseskozi je bil eden njegovih najbolj aktivnih članov. Veliko let je sodeloval v upravnem odboru DMFAS, bil njegov podpredsednik (1983) in dvakrat (1990–92 in 2002–04) predsednik. V svojem drugem mandatu je kot predsednik pripomogel k uspešni izvedbi proslav ob 250-letnici Vegovega rojstva. Bil je dolgoletni član uredniškega odbora Preseka (1975–2003), dve leti (1975–77) celo odgovorni urednik. Kot glavni urednik je 1985–86 urejal tudi Obzornik za matematiko in fiziko.

Leta 1983 je prof. Petek že prejel priznanje društva za svoje delo pri Preseku. Njegovo predano delo v matematični znanosti in stroki, pri uveljavljanju matematične kulture in misli med mladimi ter v društvenih odborih in na vodilnih mestih želimo počastiti še z izvolitvijo za častnega člana Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.

Pripravil *Milan Hladnik*

Prejemniki društvenih priznanj:

Vesna Harej, učiteljica matematike in fizike

Svojo poklicno pot je začela v Škofji Loki, sedaj pa že 20 let uči matematiko in fiziko na OŠ Dravljje. Zadnja tri leta poleg teh dveh predmetov poučuje še logiko in astronomijo. Pri delu z učenci si je nabrala bogate izkušnje, ki jih uspešno prenaša na mlajše sodelavce v kolektivu in na kolege v študijskih skupinah.

Redno spremlja novosti na področju didaktike poučevanja matematike in fizike in tako je s svojimi izkušnjami sodelovala v kurikularni prenovi učnih načrtov za fiziko in naravoslovje. Svoje učence vsako leto pripravlja na tekmovanja iz matematike, fizike, logike in razvedrilne matematike in tako se sedaj že lahko pohvali s številnimi državnimi prvaki.

Že 14 let zapored vodi področno tekmovanje iz fizike za ljubljansko regijo, kjer sodeluje skoraj tretjina vseh tekmovalcev iz Slovenije. Z gospo Jelislavo Sakelšek 12 let vodita poletno šolo fizike na Bledu, ki zaradi dobre organizacije, kvalitetnega dela in prijetnega druženja učencem vsako leto ostane v lepem in trajnem spominu.

Kot članica predmetne komisije za fiziko na Državnem izpitnem centru že peto leto pripravlja naloge za nacionalno preverjanje znanja, v tem času je bila dve leti glavna ocenjevalka.

Zelo pomembno je tudi njeno mentorsko delo. Študenti Pedagoške fakultete v Ljubljani pri njenih urah res lahko spoznavaajo vedno drugačen, zanimiv postopek pri poučevanju matematike in fizike ter različne oblike in metode dela.

prof. dr. Milan Hladnik

Prof. dr. Milan Hladnik, rojen in doma v Idriji, je izredni profesor za matematično analizo na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Je eden redkih slovenskih matematikov, katerega delo sega na domala vsa področja slovenskega matematičnega življenja, od znanstvenoraziskovalnega dela, pisanja učbenikov in poljudnih matematičnih knjig ter člankov, do predavanj dodiplomskim in podiplomskim študentom. Redno predava Matematiko za biologe, Verjetnost in statistiko za študente računalništva in vodi seminar na izobraževalni smeri podiplomskega študija matematike.

Vneto sodeluje tudi pri dejavnostih, ki so posebna skrb DMFA Slovenije, kot so seminarji za učitelje matematike in društvene publikacije. Njegova osebna bibliografija, zabeležena v Cobissu, obsega več kot 140 enot. Profesor Hladnik je avtor treh in soavtor dveh univerzitetnih učbenikov, ki jih je izdalo DMFA Slovenije. Za knjižnico Sigma je napisal dve monografiji: *Moderna kvadratura kroga* in *Konveksne množice v ravnini*. Pet let je bil urednik za matematiko pri Obzorniku za matematiko in fiziko in dve leti odgovorni urednik te revije.

Bil je neutrudni vodja seminarja z naslovom Izbrana poglavja iz matematike. Vodil ga je od šolskega leta 1993/94 vse do vključno leta 2001/02 in v njegovem okviru tudi predaval z največjim številom ur med vsemi predavatelji. Zadnjih nekaj let pomaga pri organizaciji in izvedbi društvenih seminarjev za učitelje matematike.

dr. Janko Lužnik

Lani je preteklo 30 let od prvega srečanja fizikov, ki so aktivni pri uporabi fizike. Bilo je v Škofji Loki leta 1975. Pri organizaciji tega srečanja in vseh naslednjih 10 srečanj je bila vloga dr. Janka Lužnika ključna. Z njegovim delom in trdom so se srečanja dobro zakoreninila. Srečanja povezujejo fizike, ki se ukvarjajo z aplikacijo fizike tako na področju fizike kot tudi povsod tam, kamor seže fizika in se prekriva z naravoslovjem, vsemi inženirskimi disciplinami pa tudi vedami, ki vključujejo živo snov, medicino, farmacijo, celo družboslovje in bančništvo.

Najti vse aktivne fizike na teh področjih in jih navdušiti, da predstavijo svoje aplikativno delo na srečanjih s kolegi, ni enostavno delo. Dr. Lužnik je znal to narediti, znal je presoditi, da je to možno izpeljati, da je mogoče

dobiti potrebna sredstva in srečanja organizirati tako, da so ljudem vseč in so se pripravljene čez dve leti vrniti.

Vlasta Pospoh Fischer, prof.

Vlasta Pospoh Fischer že 29. leto poučuje matematiko na srednjih šolah v Celju: 14 let na Srednji zdravstveni šoli in od leta 1991 na I. gimnaziji v Celju. Zadnjih 6 let je ob poučevanju matematike tudi pomočnica ravnatelja.

Njeno poučevanje je zgledno in zelo uspešno. Spodbujanje uspešnih dijakov k še boljšim dosežkom je opazno tudi pri velikem številu udeležencev matematičnih tekmovanj, ki so osvojili srebrna in zlata priznanja. Iz „njenih“ razredov je izšlo precej kasneje uspešnih študentov matematike. Rada in veliko sodeluje pri organizaciji, izvedbi in ocenjevanju vseh šolskih in drugih tekmovanj iz matematike in logike.

Profesorica Vlasta Pospoh Fischer je priljubljena, skrbna in uspešna mentorica študentom pedagoških fakultet in profesorjem pripravnikom pred strokovnim izpitom. Od uvedbe mature naprej je zelo natančna in potrpežljiva zunanja ocenjevalka maturitetnih nalog.

Članica DMFA je od študentskih let. Aktivno sodeluje pri dejavnostih celjske podružnice in je bila vrsto let v njenem odboru.

Jelislava Sakelšek, upokojena učiteljica

Jelislava Sakelšek je svoje prve delovne izkušnje pridobila na Osnovni šoli Brestanica. Nato je 34 let (do upokojitve) učila fiziko in tehnično vzgojo na Osnovni šoli Ketteja in Murna v Ljubljani.

Svojim učencem je znala vzbuditi ljubezen do fizike ter jim zahtevne fizikalne zakonitosti nazorno predstaviti na preprost in učencem razumljiv način. Kar nekaj njenih učencev je zakorakalo po njenih stopinjah in so danes uspešni profesorji fizike. Pri delu je bila vestna in inovativna. Učence je popeljala na šolska, regijska in državna tekmovanja iz fizike in jih v ta namen tudi dobro pripravila.

Zadnjih 14 let je pomemben delež prispevala kot sekretarka komisije za popularizacijo fizike v osnovni šoli. Z vso resnostjo in odgovornostjo je organizirala državna tekmovanja za zlato Stefanovo priznanje.

V posebno veselje pa ji je vodenje poletne šole fizike v Plemljevi vili na Bledu, kjer je v sodelovanju z gospo Vesno Harej 12 let predano prenašala svoje znanje in izkušnje na mlajše rodove, skrbela za strokovno in družabno kvaliteto teh srečanj ter tako mladim podarila nepozabne tedne.

OŠ Vojke Šmuc, Izola

Osnovna šola Vojke Šmuc pokriva potrebe osnovnošolskega izobraževanja za dobri dve tretjini izolskega prebivalstva in podeželja. Šola ima danes

511 učencev, kolektiv s 53 strokovnimi delavci in 18 drugimi delavci pa se trudi, da bi delali v prijaznem ozračju in da bi bili pri delu čim bolj uspešni.

Učitelji in učenci šole se vsako leto podajo nekoliko v svet. Šola je prek Projekta mreže učečih se šol navezala stike s švedskimi kolegi. V lanskem letu so končali triletni mednarodni projekt Sokrates-Comenius s partnerskimi šolami iz Anglije, Poljske in Italije. Že tretje leto so vključeni med mednarodne ekošole.

Z uvajanjem koncepta „Odkrivanje in delo z nadarjenimi učenci“ iščejo nadarjene učence in najprimernejše oblike dela z njimi. V letošnjem šolskem letu pa so uvedli dva nova projekta: Skozi igro do zdravja in šolski projekt Projekt bralne pismenosti.

Člani aktiva matematike in fizike na OŠ Vojke Šmuc so se ali se ukvarjajo s:

- sodelovanjem na mednarodnem tekmovanju DISFIDA MATEMATICA
- izpeljavo strokovnega srečanja učiteljev matematike in predstavitvijo novosti na Dnevih slovenskega izobraževanja, sodelovanjem v projektu Uporaba žepnega računalja v osnovni šoli in predstavitvijo simulacije urnika v programu 9-letne OŠ
- sodelovanjem v državnem projektu Mreže učečih se šol od leta 1998 do 2000
- organizacijo šolskih in področnih tekmovanj iz matematike, fizike in logike
- sodelovanjem s Pedagoško fakulteto v Kopru in Zavodom RS za šolstvo

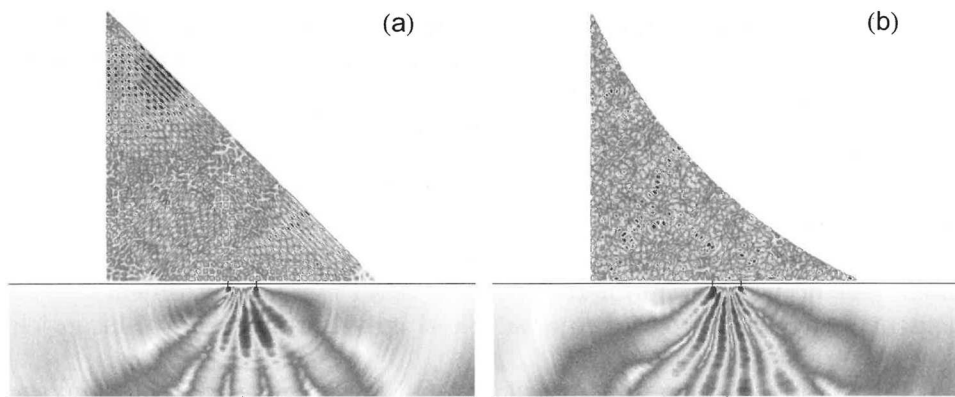
Na šoli so tudi posebej obeležili Svetovno leto fizike in pripravili pregledno razstavo starih učil, gostili verižni eksperiment in organizirali različna fizikalna predavanja.

Na podlagi predlogov pripravila *Lucijana Kračun-Berc*

ZOISOVE NAGRADE IN PRIZNANJA ZA ZNANSTVENORAZISKOVALNO DELO V LETU 2005

V prostorih Slovenske filharmonije v Ljubljani so 29. novembra 2005 slavnostno podelili Zoisove nagrade in priznanja, najvišje državne nagrade na področju znanosti. Med nagrajenci sta bila tudi dva slovenska fizika. Prof. dr. Tomaž Prosen je prejel Zoisovo nagrado za vrhunske znanstvene dosežke, doc. dr. Boštjan Zalar pa Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke. Povzemimo uradne utemeljitve, ki so objavljene na spletni strani Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo.

Doktor **Tomaž Prosen** je izredni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Je mlad znanstvenik, ki se je vključil v raziskovalno delo šele pred dobrim desetletjem. Področje njegovih raziskav sta



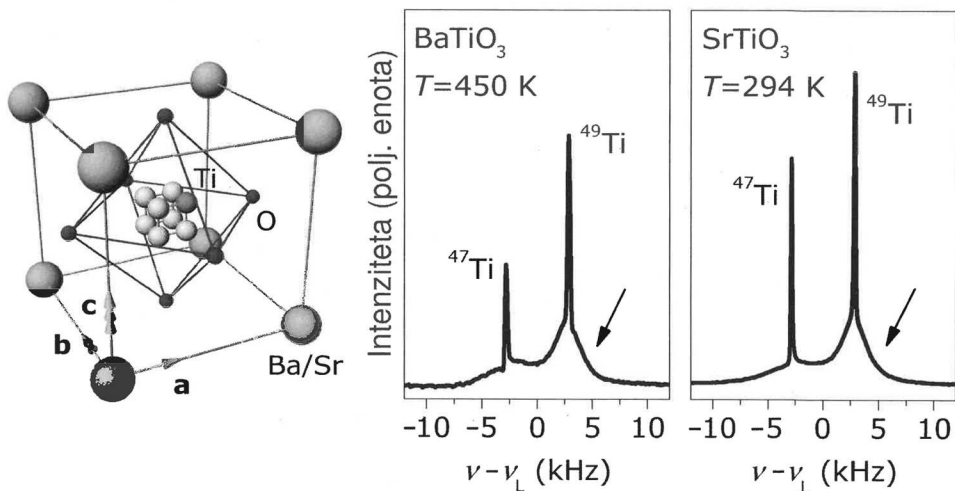
Slika 1. Kaos in dekoherenca. Sliki prikazujeta vpliv kaotične žarkovne dinamike na interferenčni poskus s Schrödingerjevimi valovi. Delec zapremo v dvodimenzionalni resonator z regularno (a) ali kaotično (b) žarkovno dinamiko, na dnu napravimo dve majhni reži v razmiku nekaj de Broglievih dolžin in opazujemo interferenčno sliko na zaslonu pod resonatorjem. Prikazana je trenutna slika verjetnostne gostote za oba primeri. V prvem primeru (a) so interferenčni jeziki ves čas na istem mestu in po integraciji v času zgradijo ostro interferenčno sliko, v drugem, kaotičnem primeru (b), pa interferenčni jeziki s časom opletajo sem in tja in povsem izmijejo interferenčni vzorec na zaslonu spodaj.

kvantna in klasična statistična fizika. Pomemben del njegovih rezultatov se nanaša na obnašanje neintegrabilnih klasičnih in kvantnih kaotičnih sistemov z malo prostostnimi stopnjami, kjer je z analitičnimi in numeričnimi metodami raziskal statistične lastnosti in univerzalnost dinamike. Z razširitvijo raziskav na kvantne sisteme več delcev je dr. Prosen vstopil v problematiko transporta v trdnih snoveh in v zelo aktualno področje teorije kvantnih računalnikov. Pri slednjem je posebej pomemben problem koherence in stabilnosti procesov kvantnega računanja, ki ga je profesor Prosen obravnaval v več svojih člankih.

Njegov celotni opus je impresiven, saj obsega 69 člankov, večinoma v najuglednejših mednarodnih revijah, kot sta *Physical Review* in *Physical Review Letters*. V zadnjih sedmih letih je izšlo 49 njegovih člankov. Kot vabljeni predavatelj je predaval na mednarodnih konferencah in uglednih institucijah. Je član uredniškega odbora mednarodne revije *Nonlinearity* in recenzent pri najprestižnejših fizikalnih revijah. Leta 2001 je dobil posebno mednarodno priznanje kot najbolj citirani slovenski mladi znanstvenik. Njegova dela so citirana 900-krat, tista iz zadnjih sedmih let pa 380-krat.

Profesor dr. Tomaž Prosen je eden najprodornejših mladih slovenskih naravoslovcev, ki je dosegel vrhunske rezultate pri raziskavah klasičnega in kvantnega kaosa ter teorije kvantnih računalnikov, s čimer je obogatil svetovno zakladnico znanja na področju teoretične fizike.

Doktor **Boštjan Zalar** je višji znanstveni sodelavec na Institutu Jožef Stefan v Ljubljani. Svoje delo je posvetil eksperimentalni fiziki trdne snovi, področju reda in nereda v kondenzirani snovi, in uporabi metode jedrske magnetne resonance pri tem. Pokazal je, da je fazni prehod v nekaterih perovskitnih feroelektrikih tudi tipa red-nered in se na skali nanosekund že v paraelektrični fazi pojavi tetragonalna deformacija. Razvil je eksperimentalno metodo za merjenje porazdelitvene funkcije lokalne polarizacije v relaksorskih feroelektrikih ter z njo pokazal, da so relaksorji tipa PMN dvokomponentni sistemi, kjer soobstajajo področja polarnega stekla in feroelektričnih skupkov. Razvil je tudi novo metodo za meritev dinamične reorientacije feroelektričnih tekočih kristalov. Z meritvijo parametra reda in difuzijskega koeficienta je pojasnil površinsko ureditev in dinamiko molekul v ultratankih nematogenih plasteh.



Slika 2. Položaj titanovega iona v paraelektrični fazi barijevega in stroncijevega titanata. Zlom lokalne kubične simetrije, ki je posledica izmika titana iz idealne lege v centru osnovne celice, je lepo viden v kvadrupolno motenem resonančnem spektru titanovih jeder kot široko satelitsko ozadje (puščici na slikah desno). Prikazana spektra sta bila izmerjena v magnetnem polju gostote 9 T, ki mu ustreza resonančna frekvenca $\nu_L = 21,42$ MHz.

Docent dr. Boštjan Zalar je v zadnjih sedmih letih skupaj s sodelavci objavil 65 del. Njegova dela so doživela veliko odmevnost v strokovni literaturi in pomenijo pomemben prispevek k razumevanju pojavov v kondenzirani snovi.

Nagrajencema iskreno čestitamo.

Uredništvo

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 2006

Letnik 53, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Aproksimacija krožnih lokov s parametričnimi polinomskimi krivuljami, Gašper Jaklič, Jernej Kozak, Marjeta Krajnc in Emil Žagar	1–10
Preprost model za razcep valovne funkcije delca v dvojni potencialni jami, Tomaž Kranjc in Jožef Peternelej	12–20
Nove knjige	
Einsteinova tančica: novi svet kvantne fizike, Aleš Mohorič	21–23
Vesti	
Matematične novice, Peter Legiša	10–11
Dnevi fizike	20
Strokovno srečanje in občni zbor DMFA, Nada Razpet in Janez Krušič ..	23–26
Priznanja DMFA Slovenije, Milan Hladnik in Lucijana Kračun–Berc	26–31
Zoisove nagrade in priznanja za znanstvenoraziskovalno delo v letu 2005	31–III

CONTENTS

Articles	Pages
Approximation of Circular Arcs by Parametric Polynomial Curves, Gašper Jaklič, Jernej Kozak, Marjeta Krajnc and Emil Žagar	1–10
A Simple Model for Splitting the Wave Function of a Particle in the Box, Tomaž Kranjc and Jožef Peternelej	12–20
New books	21–23
News	10–III

Na naslovnici je logotip dnevov fizike, ki jih organizira Tehniški muzej Slovenije v mesecu maju 2006 (glej vest na strani 20).