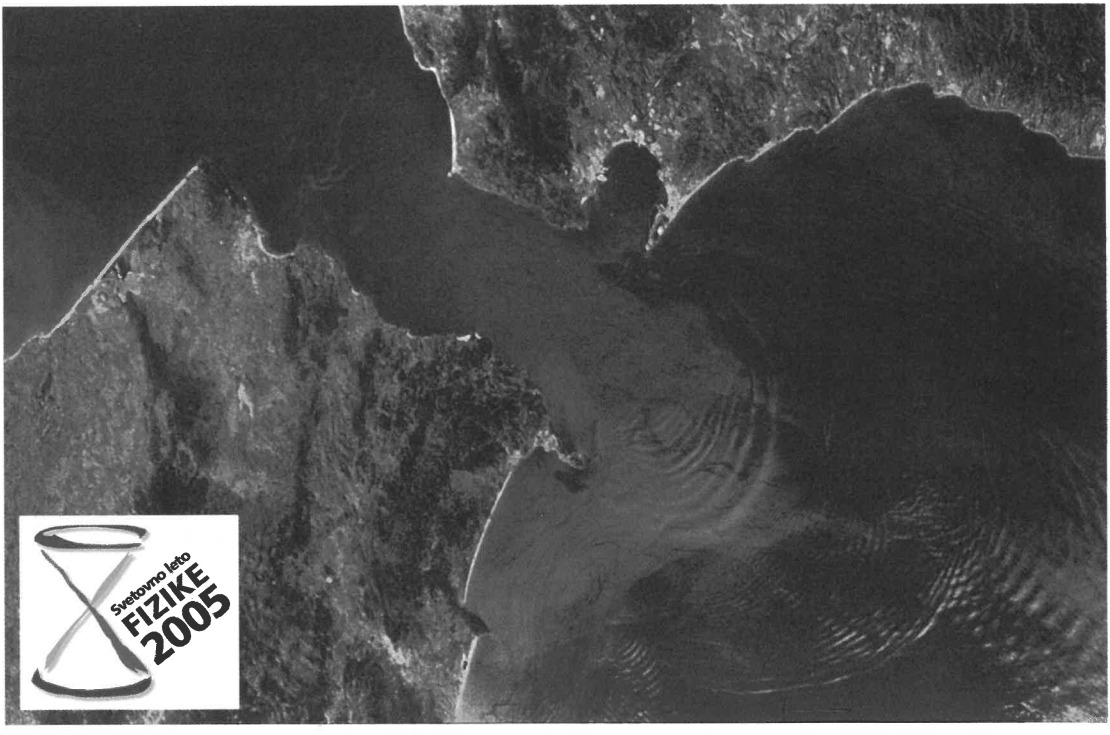
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473–7466

ODPISANO

2005
Letnik 52
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2005, letnik 52, številka 6, strani 161–192

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460, 2512 005 **Telefaks:** (01) 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://zaloznistvo.dmfa.si/omf/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Nada Razpet (vesti), Pavle Saksida (nove knjige), Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško stavila Monika Testen.
Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1400 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 5.000 SIT, za druge družinske člane in študente pa 2.500 SIT. Naročnina za ustanove je 8.000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2005 DMFA Slovenije – 1626 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

---

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

SOLITONI IN CUNAMIJI

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 47.20.Ky

Članek po najpreprostejši poti uvede solitone in omeni cunamije, ki so v zadnjem času zbudili precej pozornosti.

SOLITONS AND TSUNAMIS

In the article solitons are introduced in the simplest way and tsunamis, which recently attracted considerable interest, are mentioned.

1. Uvod

Leta 1834 je mladi Škot John Scott Russell opazoval ladjo, ki sta jo po kanalu hitro vlekla konja. Val ob premcu ladje je potoval naprej, ko se je ladja zaustavila. Dobro vidna osamljena izboklina na gladini vode med potovanjem ni spremenila oblike ali hitrosti. Russell jo je na konju s hitrostjo kakih 14 km/h zasledoval še več kot kilometer. Bil je prepričan, da je zasledil pomemben pojav – imenoval ga je *translacijski val* – in ta dan imel za najsrečnejšega v življenju. Na vrtu si je zgradil kanal in na njem delal poskuse, ki pa na sodobnike niso naredila vtisa. Cenili so ga le po uspešnih načrtih za ladijske trupe in poskusu, pri katerem je med prvimi z zvočilom na vlaku opazoval Dopplerjev pojav pri zvoku.

Tedaj so bili prepričani, „da morajo med potovanjem dolgi valovi v pravokotnem kanalu nujno spremeniti obliko“, kot je odločno zatrdil George Biddell Airy. Med prvimi je na možnost, da ni tako, pomislil Joseph Valentin Boussinesq. Kot profesor v Lillu – pozneje je deloval na Sorboni – je od leta 1871 obravnaval nelinearno valovanje z disperzijo [1]. Naredil je velik korak, vendar so bile njegove izpeljave po nepotrebnem zapletene. Svoj prispevek je dodal tudi lord Rayleigh leta 1876. Do končne rešitve pa sta se dokopala Diederik Johannes Korteweg in Gustav de Vries. Korteweg je kot učenec Johannesa Diderika van der Waalsa na univerzi v Amsterdamu obranil prvo doktorsko delo, v katerem je z mislijo na kri v arterijah obdelal tok viskozne tekočine po prožni cevi. Kot profesor matematike in mehanike na tej univerzi je sodil, da Boussinesq ni zadovoljivo odpravil neskladja med Airyjevo trditvijo in Russellovim translacijskim valom. Na to je opozoril svojega študenta de Vriesa, ki je pojav obdelal v doktorskem delu leta 1894.

Leto zatem je izšel članek, v katerem sta povzela doktorsko delo [2]. De Vries je pozneje učil na srednjih šolah.

Korteweg in de Vries sta ugotovila, da učinek nelinearnosti izravna učinek disperzije. Tako lahko po gladini vode potuje motnja s posebno obliko, ki se ne spreminja. Po najpreprostejši poti izpeljimo njuno enačbo in obravnavajmo njene rešitve. Izpeljava ne bo stroga. Najprej v enačbo valovanja vključimo disperzijo. Nato obdelamo nelinearnost in jo tudi vključimo v enačbo valovanja. Oboje povežemo v Korteweg-de Vriesovo enačbo in navedemo njeni rešivi.

2. Valovi na vodi

Obravnavajmo ravno valovanje vode v kanalu z vodoravnim dnom in s pravokotnim presekom s širino b. Viskoznosti ne upoštevamo. Ne oziramo se na površinsko napetost γ. To je dopustno, dokler je globina velika v primeri s $\sqrt{3\gamma/\rho g}$, kar meri pri vodi 0,46 cm. Pri manjši globini pa površinska napetost celo prevlada nad težo. Os x usmerimo vzdolž kanala in os y navpično navzgor, tako da je nemotena gladina vode pri $y = h$. Deli vode se gibljejo v navpičnih ravninah v smeri potovanja valovanja in v smeri pravokotno nanjo. Robni pogoj na dnu kanala zahteva, da se deli vode ne gibljejo v navpični smeri. Tako smemo vzeti, da se deli vode nad dnom gibljejo po elipsah, ki se na dnu izrodijo v daljice.

Odmik dela vode v ravnem valovanju, ki potuje v smeri pozitivne osi x proti desni, opišemo s komponentama $s_{x1} = -s_{0x} \sin(kx - \omega t)$ in $s_{y1} = s_{0y} \cos(kx - \omega t)$. Robni pogoj na dnu zahteva $s_y(y = 0) = 0$. Tako uporabimo nastavek $s_{0y} = kys_0$ in $s_{0x} = s_0$, če je valovna dolžina $\lambda = 2\pi/k$ veliko večja od globine h. Enačbi:

$$s_{x1} = -s_0 \sin(kx - \omega t), \qquad s_{y1} = kys_0 \cos(kx - \omega t) \tag{1}$$

že upoštevata, da voda ni stisljiva: $\nabla \mathbf{v}_1 = \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{y1}}{\partial y} = \frac{\partial^2 s_{x1}}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 s_{y1}}{\partial y \partial t} = 0$. Ravno valovanje, ki potuje v smeri negativne osi x proti levi, opišemo s komponentama odmika:

$$s_{x2} = -s_0 \sin(kx + \omega t), \qquad s_{y2} = s_0 ky \cos(kx + \omega t). \tag{2}$$

3. Disperzija

Iz enakih valovanj, ki potujeta proti desni in proti levi, sestavimo stoječe valovanje [3], [4]:

$$\begin{aligned} s_x &= s_{x1} + s_{x2} = -2s_0 \sin kx \cos \omega t, \\ s_y &= s_{y1} + s_{y2} = 2kys_0 \cos kx \cos \omega t. \end{aligned} \tag{3}$$

V tem primeru sta komponenti hitrosti:

$$v_x = \frac{\partial s_x}{\partial t} = 2\omega s_0 \sin kx \sin \omega t\,, \qquad v_y = \frac{\partial s_y}{\partial t} = -2ky\omega s_0 \cos kx \sin \omega t\,. \quad (4)$$

V začetnem trenutku $t = 0$ voda miruje in je gladina okoli izhodišča dvignjena za:

$$s_y(t = 0, y = h) = 2khs_0 \cos kx\,. \quad (5)$$

Četrt nihajnega časa pozneje, v trenutku $t = \frac{1}{2}\pi/\omega$, pa je premik delov vode enak 0, tako da se gladina ujema z ravnovesno lego. Deli vode se tedaj gibljejo s komponentama hitrosti:

$$v_x(t = \tfrac{1}{2}\pi/\omega) = 2s_0\omega \sin kx\,, \qquad v_y(t = \tfrac{1}{2}\pi/\omega) = -2kys_0\omega \cos kx\,. \quad (6)$$

Spočetka imajo deli vode na gladini presežek potencialne energije z gostoto $w_p = \frac{1}{2}\rho g s_y(t = 0, y = h)$. Polovica upošteva, da je težišče stolpca vode na polovici višine. Z gostoto izračunamo presežek potencialne energije vode na območju od $x = 0$ do $x = \frac{1}{4}\lambda = \frac{1}{2}\pi/k$:

$$\Delta W_p = \int w_p s_y(t = 0, y = h) b \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho g b \int s_y^2(t = 0, y = h)\mathrm{d}x =$$

$$= 2\rho g b s_0^2 k h^2 \int_0^{kx=\pi/2} \cos^2 kx \mathrm{d}(kx) = \tfrac{1}{2}\pi\rho g b s_0^2 k h^2.$$

Četrt nihajnega časa pozneje imajo deli vode samo kinetično energijo z gostoto $w_k = \frac{1}{2}\rho v^2 = 2\rho\omega^2 s_0^2(\sin^2 kx + k^2y^2\cos^2 kx)$. Z njo izračunamo kinetično energijo vode na navedenem območju:

$$W_k = \iint w_k b \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\rho s_0^2\omega^2 b \int_{y=0}^{h} \int_0^{kx=\pi/2} \left(\sin^2 kx + k^2y^2\cos^2 kx\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{2\rho s_0^2\omega^2 b}{k} \int_{x=0}^{\pi/2} \left(h\sin^2 kx + \tfrac{1}{3}k^2h^3\cos^2 kx\right) \mathrm{d}(kx) =$$

$$= \frac{\rho s_0^2\omega^2 bh\pi}{2k} \left(1 + \tfrac{1}{3}k^2h^2\right).$$

V stoječem valovanju energija ne potuje in na navedenem območju presežek potencialne energije preide v kinetično energijo. Iz enačbe $\Delta W_p = W_k$ sledi zveza $ghk^2 = \omega^2(1 + \frac{1}{3}h^2k^2)$ in iz nje izluščimo fazno hitrost valovanja:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}(1 - \tfrac{1}{6}k^2h^2)\,. \quad (7)$$

Ker je produkt kh majhen, smo v Taylorjevi vrsti upoštevali samo dva člena. Enačba (7) na podlagi nastavka $s_{0y} = kys_0$ je samo prvi približek enačbe $c = \sqrt{gh\tanh(kh)}$. Hitrost valovanja je odvisna od valovne dolžine – valovanje ima disperzijo. Po tej strani je imel Airy prav.

Disperzijo (7) vgradimo v enačbo za valovanje. Zanimamo se samo za odmike gladine v smeri osi y in preimenujemo s_y v s. Uvidimo, da za valovanje brez disperzije $s \propto \sin(kx - \omega t)$, ki potuje proti desni, velja zveza:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \sqrt{gh}\,\frac{\partial s}{\partial x} = 0\,. \tag{8}$$

Enačbo lahko dobimo, če v valovni enačbi $\partial^2 s/\partial t^2 - gh\,\partial^2 s/\partial x^2 = 0$ operator razstavimo: $(\partial/\partial t - \sqrt{gh}\,\partial/\partial x)(\partial/\partial t + \sqrt{gh}\,\partial/\partial x)s = 0$ in obdržimo samo njegov desni del, ki opiše potovanje motnje proti desni.

Domnevamo, da sledi zveza (7) iz enačbe:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \sqrt{gh}\frac{\partial s}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^3 s}{\partial x^3} = 0\,.$$

S prejšnjo rešitvijo se hitro prepričamo, da moramo za konstanto vstaviti $\alpha = \frac{1}{6}h^2\sqrt{gh}$. Enačba, ki disperzijo upošteva v prvem približku, se potemtakem glasi:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \sqrt{gh}\left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 s}{\partial x^3}\right) = 0\,. \tag{9}$$

4. Nelinearnost

Račun začnemo na novo, da bi v enačbo brez disperzije uvedli nelinearnost [5]. Upoštevamo samo komponento hitrosti delov vode v smeri osi x, $v_x = v$, ki je veliko večja od druge komponente. Ker je globina majhna v primeri z valovno dolžino, vzamemo, da ta hitrost ni odvisna od koordinate y. Sestavimo kontinuitetno enačbo s tokom, sorazmernim z ρyv, in maso, sorazmerno z ρy. Pokrajšamo s konstantno gostoto ρ, da preostane:

$$\frac{\partial(yv)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = y\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0\,. \tag{10}$$

Navier-Stokesova enačba za nestisljive in neviskozne kapljevine $\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\rho^{-1}\nabla p$ da s $p = \rho gy$ za ta primer $\partial v/\partial t + v\partial v/\partial x = -g\partial y/\partial x$ in:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + g\frac{\partial y}{\partial x} = 0\,. \tag{11}$$

Enačbo (10) pomnožimo z $\sqrt{y/g}$ in jo odštejemo od enačbe (11). Nazadnje dobimo:

$$\frac{\partial(v - 2\sqrt{gy})}{\partial t} + (v - \sqrt{gy})\frac{\partial(v - 2\sqrt{gy})}{\partial x} = 0\,.$$

Po zgledu (8) sklepamo, da se količina $v - 2\sqrt{gy}$ ohrani za opazovalca, ki potuje s hitrostjo $v - \sqrt{gy}$ proti desni ($v - 2\sqrt{gy}$ je ena od *Riemannovih invariant*). Izraz $v - 2\sqrt{gy}$ je negativen, saj se hitrost v ne razlikuje znatno od $\sqrt{gh}$, tako da je potovanje usmerjeno proti levi. V nemoteni vodi je $v = 0$ in $y = h$, tako da je invarianta enaka $v - 2\sqrt{gy} = -2\sqrt{gh}$ in je hitrost potovanja $v = 2\sqrt{gy} - 2\sqrt{gh}$. To vstavimo v kontinuitetno enačbo (10) in dobimo $\partial y/\partial t + (3\sqrt{gy} - 2\sqrt{gh})\partial y/\partial x = 0$. Vpeljemo razliko $s = y - h$ in z njo izrazimo y v enačbi. Koren razvijemo v vrsto in obdržimo samo dva člena:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \sqrt{gh}\left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{3s}{2h}\frac{\partial s}{\partial x}\right) = 0\,. \tag{12}$$

Enačbo (12), ki upošteva nelinearnost, združimo z enačbo (8), ki upošteva disperzijo, v *Korteweg-de Vriesovo enačbo*:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \sqrt{gh}\left(\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{3s}{2h}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 s}{\partial x^3}\right) = 0\,. \tag{13}$$

V prvem redu drugi člen v oklepaju upošteva nelinearnost in tretji disperzijo. Zaradi nelinearnosti potuje motnja z večjo amplitudo hitreje od motnje z manjšo amplitudo. Motnja se razleze in njen sprednji del postane bolj strm, zadnji pa bolj položen. Zaradi disperzije potuje motnja z večjo amplitudo počasneje od motnje z manjšo amplitudo. Sprednji del motnje postane položnejši, zadnji pa bolj strm. Tako pričakujemo, da prvi učinek izravna drugega. Presenetljivo pa je, da je motnja, ki potuje z nespremenjeno obliko, zelo obstojna. Pri začetnem pogoju z več poljubnimi vrhovi navadno preostane nekaj motenj, ki potujejo z nespremenjeno obliko, čeprav se sicer nekaj energije porazgubi.

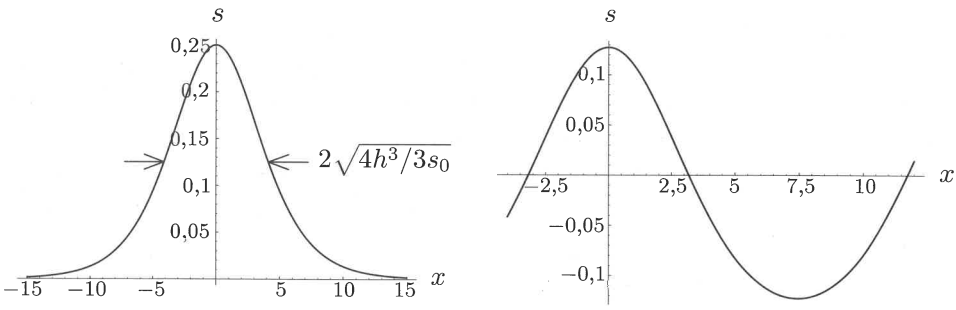
Korteweg in de Vries sta najprej zahtevala, da gladina v veliki razdalji ni motena. Za ta primer reši enačbo (13) osamljena motnja:

$$s = s_0 \operatorname{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3s_0}{4h^3}}\,(x - ct)\right], \tag{14}$$

ki so jo imenovali *solitarno (osamljeno) valovanje* (slika 1). Pri tem pomeni $\operatorname{sech}(z) = 1/\cosh(z) = 2/(e^z + e^{-z})$. S programskim paketom *Mathematico* se prepričamo, da (14) reši enačbo (13), če za hitrost potovanja motnje postavimo $c = \sqrt{gh}\,(1 + \frac{1}{2}s_0/h)$.

Potem sta opustila zahtevo o nemoteni gladini v veliki razdalji in dobila periodično rešitev (slika 1):

$$s = s_0 \operatorname{cn}^2\left[\sqrt{\frac{3(s_0 + l)}{4h^3}}\,(x - c't)|m\right], \qquad m = \frac{s_0}{s_0 + l}\,, \tag{15}$$



Slika 1. Soliton $s = s_0\mathrm{sech}^2[\sqrt{3s_0/4h^3}\,(x - ct)]$ (12) za $t = 0$ s podatki, ki se približno ujemajo z Russellovimi: $s_0 = 0{,}25$ m, $h = 1{,}6$ m, $c = 4{,}27$ m/s $= 15{,}4$ km/h, širina motnje je $2\sqrt{4h^3/3s_0} = 2 \cdot 4{,}67$ m (levo). Cnoidalni val $s = s_0\mathrm{cn}^2[\sqrt{3(s_0 + l)/4h^3}\,(x - c't)|m]$ (13) za $t = 0$ s podatki $s_0 = 0{,}25$ m, $h = 1{,}6$ m, $l = \frac{9}{16}s_0$, $m = 0{,}64$, $c' = 4{,}10$ m/s. Valovna dolina je širša kot valovni vrh. Vodoravna črta ustreza nemoteni gladini. Po Kortewegu in de Vriesu bi dobili hitrost $c_1' = 3{,}83$ m/s (desno).

s poljubno dolžino l. Po znaku za funkcijo kosinus amplitudinis $\mathrm{cn}(z|m)$ in „sinusoidalnih valovih" sta vpeljala ime *cnoidalni valovi*. Jacobijeva eliptična funkcija je $u(\varphi|m) = \int_0^\varphi \mathrm{d}\vartheta/(1 - m\sin^2\vartheta)^{1/2}$, inverzna funkcija pa amplituda $\varphi = am(u|m)$. Za $l \to 0$ in $m = 1$ sledi $\mathrm{cn}(z|1) = \mathrm{sech}(z)$ in solitonska rešitev, za $l \to \infty$ in $m = 0$ pa $\mathrm{cn}(z|0) = \cos z$ in sinusni valovi. Z *Mathematico* se prepričamo, da (15) reši enačbo (13), če za hitrost postavimo $c' = \sqrt{gh}[1 + \frac{1}{2}(s_0 - l)/h]$. Toda pri nesinusnem valovanju hitrost ni enolično določena, kot je v podobnem primeru ugotovil George Gabriel Stokes. Korteweg in de Vries sta vpeljala hitrost c_1' z zahtevo, da je gibalna količina vode enaka 0 v opazovalnem sistemu, ki se giblje s to hitrostjo. Cnoidalni valovi ne zbujajo veliko pozornosti.

Tudi solitarni valovi so dolgo veljali le za nepomembno posebnost, češ da zahtevajo posebne začetne pogoje. Enrico Fermi, John Pasta in Stanislaw Ulam so se leta 1955 med prvimi z računalnikom lotili dinamične nelinearne naloge. Raven niz harmoničnih nihal – s tedanjim računalnikom so jih obvladali le nekaj manj ali več kot sto – so med seboj sklopili s kubično anharmonično vezjo in raziskali, kako se energija iz danega lastnega nihanja seli v druga lastna nihanja. Opazili so periodično vedenje in ugotovili, da je gibanje precej laže obvladati, kot so pričakovali. Prehod k zveznemu primeru jih je pripeljal do Korteweg-de Vriesove enačbe. Deset let pozneje je Martin D. Kruskal izpeljal to enačbo za ravno valovanje z veliko valovno dolžino v nelinearni mreži. Z Normanom J. Zabuskym je numerično rešil enačbo in rešitev imenoval *soliton*. Odtlej so ugotovili, da so solitoni pomembni v številnih delih fizike: v fiziki plazme, fiziki kristalov, elektrodinamiki, gravitaciji, fiziki delcev. Z optičnimi solitoni na primer po svetlobnih vodnikih

zanesljivo prenašajo sporočila prek zelo velike razdalje. Že pred desetimi leti so brez motenj dosegli 20 gigabitov na sekundo prek 14 tisoč kilometrov. Pri tem pa za zdaj ravnega, to je enorazsežnega, primera še ni uspelo posplošiti na več razsežnosti.

Najbolj presenetljivo je spoznanje, da solitona, ki potujeta drug proti drugemu, po trku obdržita svojo obliko, „gresta nemoteno drug skozi drugega". To velja za večji soliton, ki zasleduje manjšega, ali za solitona v nasprotnih smereh. Po izkušnjah s šibko sklopljenimi valovanji bi – nasprotno – pričakovali, da bi solitona močno zmotila drug drugega. Tako so solitoni kot *instantoni* prišli tudi v kvantno teorijo polja.

5. Cunamiji

Pri valovanju z valovno dolžino, veliko večjo od globine, postane hitrost valovanja (7) neodvisna od valovne dolžine:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}\,. \tag{16}$$

Motnja potuje, ne da bi se ji spremenila oblika. To hitrost lahko izpeljemo preprosto, ne da bi se ozirali na disperzijo ali nelinearnost [6]. V valovni kadi za demonstracijske poskuse z globino 1 cm potuje motnja s hitrostjo 0,32 m/s. Po oceanu s povprečno globino okoli 5 km pa hitrost naraste na 220 m/s = 800 km/h, na hitrost reakcijskega potniškega letala. Zadnja trditev velja za veliko valovno dolžino, na primer 100 km. Iz enačbe $t_0 = c/\lambda = \sqrt{gh}/\lambda$ sledi tedaj za nihajni čas 7,5 minute. Na to naletimo pri *cunamijih*, ki lahko nastanejo pri padcu vesoljskega telesa v morje, udorih na obali, izbruhih podmorskih ognjenikov ali podmorskih potresih. Zaradi potresa ob Sumatri v lanskem decembru in cunamija, ki ga je povzročil, se je povečalo zanimanje zanje [7].

Za potres so značilne dolžina L preloma na meji celinskih plošč, širina prelomnega območja D, pravokotna na prelom, in premik P, tudi pravokoten na prelom. Za potres je značilna površina $A = LD$, ki jo zajame. Razmere poenostavimo, če potresu priredimo eno samo dolžino $\sqrt{A}$. Naredimo nekaj površnih ocen. Pri decembrskem potresu je prelom L meril približno 1200 km po rahlo ukrivljeni črti skoraj v smeri sever-jug. Širina območja D je v povprečju dosegla 150 km približno v smeri vzhod-zahod, premik P pa v povprečju več kot 10 m, na jugu več, na severu manj. Potres z magnitudo po Richterju 9 je bil najmočnejši potres v zadnjih štiridesetih letih. Z 9 minutami je bil sploh najdaljši. Z zadnjim podatkom dobimo za hitrost potovanja preloma 2,2 km/s.

Po Hookovem zakonu je strižna napetost sorazmerna z relativno strižno deformacijo. Po tem strižno napetost ocenimo z $GP/\sqrt{A}$, če je G strižni

modul. Energijo potresa ocenimo z $\frac{1}{2}(GP^2/\sqrt{A})A = \frac{1}{2}GP^2\sqrt{A}$. Z velikostno stopnjo strižnega modula 10^{11} N/m^2 dobimo za napetost 10^7 N/m^2 = 100 barov ali manj. Ta napetost se od potresa do potresa znatno ne spremeni in se potresi v glavnem med seboj razlikujejo po prostornini, ki jo zajamejo in ki jo ocenimo z $A^{3/2}$. Sproščena energija je sorazmerna s to prostornino. Magnitudo po Richterju izrazimo z njenim desetiškim logaritmom. Tako za 1 večji magnitudi ustreza približno $10^{3/2} \approx 30$-krat večja energija.

Potres neposredno zmoti vodo približno na površini A. V splošnem so premiki dna navpični in vodoravni. Cunamije neposredno povzročijo navpični premiki. Pri največjih potresih se morsko dno ponekod zniža in drugod zviša, saj je kamnina približno nestisljiva. Pri amplitudi v navpični smeri s_0 ustreza cunamiju energija $\rho g s_0 \cdot \frac{1}{2}s_0 \cdot A = \frac{1}{2}\rho g s_0^2 A$. Ker je s_0 približno sorazmerna s P, je energija cunamija približno sorazmerna z AP^2 in naraste približno 100-krat, ko se magnituda potresa poveča za 1. Z magnitudo narašča energija cunamija torej hitreje kot energija potresa. Vendar je energija cunamija manjša od energije potresa. Če bi pretirano vzeli, da je amplituda s_0 pri cunamiju enaka premiku pri potresu P, bi bilo razmerje med energijo cunamija in energijo potresa $\frac{1}{2}\rho g s_0^2 A/(\frac{1}{2}GP^2\sqrt{A})$ enako $\rho g\sqrt{A}/G$. To je precej manjše od 1.

Ocean nima ravnega dna, zato se oblika motnje popači. Na strmih delih morskega dna se motnja odbije. Dno lahko deluje celo kot zbiralna leča. Okoli otokov se motnja ukloni in ob obali lahko pride do resonance. Po enačbi $\lambda = c/t_0 = \sqrt{gh}/t_0$ sklepamo, da se valovna dolžina spreminja sorazmerno s hitrostjo in s $\sqrt{h}$. Če na morju z globino 5 km merita hitrost 800 km/h in valovna dolžina 100 km, sta pri globini 1 m hitrost 11 km/h in valovna dolžina 1,4 km. S pojemajočo globino se manjša masa vode v motnji in narašča gostota energije. Na obalo pljusne velik val in seže daleč na kopno. Približek WKB, ki ga poznamo iz kvantne mehanike, pokaže, da je amplituda sorazmerna z $1/h^{1/4}$. Če je na morju z globino 5 km amplituda 50 cm, pri globini 1 m amplituda doseže 4,2 m. Ali se v kaki točki gladina vode najprej zniža ali zviša, je odvisno od začetnih pogojev in oddaljenosti od izvira. Obe možnosti sta približno enako pogostni. Decembrski cunami je prvič posnel kak umetni satelit, to je bil Jason 1 na nizki tirnici. Njegove fotografije so okvirno podprle preprosto fizikalno sliko. Na oceanu je valovna dolžina merila 500 km.

V resnici je cunami zelo zapleten pojav. Boljše razumevanje utegne prispevati k temu, da bodo zmanjšali škodo, ki jo povzročajo naravne nesreče te vrste.

LITERATURA

[1] J. W. Miles, *The Korteweg-de Vries equation: a historical essay*, J. Fluid Mech. **106** (1981), str. 131.

[2] D. J. Korteweg, G. de Vries, *On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves*, Phil. Mag. **39** (1895), str. 422.

[3] F. Behroozi, N. Podolefsky, *Dispersion of capillary-gravity waves: a derivation based on conservation of energy,* Eur. J. Phys. **22** (2001), str. 225.

[4] G. Margaritondo, *Explaining the physics of tsunamis to undergraduate and non-physics students*, Eur. J. Phys. **26** (2005), str. 401.

[5] K. S. Thorne, *Applications of Classical Physics*, http://www.pma.caltech.edu/Courses/ph136/yr2002/index.html .

[6] J. Strnad, *Mala fizika*, 2. del, DZS, Ljubljana 2004, str. 130.

[7] D. Stevenson, *Tsunamis and earthquakes: What physics is interesting?*, Phys. Today (6/2005), str. 10.

VESTI

ZLATI RED ZA ZASLUGE PROF. DR. JANEZU STRNADU

Prof. dr. Janez Strnad je oktobra 2005 prejel državno odlikovanje zlati red za zasluge za življenjsko delo v naravoslovju, posebno za prispevek k širjenju znanstvene kulture in razumevanja znanosti.

Kot univerzitetni učitelj je prof. Strnad ogromno prispeval k razvoju Oddelka za fiziko na Univerzi v Ljubljani, k pouku fizike in še posebej k popularizaciji fizike. Le kdo ne pozna njegovih številnih člankov, ki izhajajo v različnih slovenskih strokovnih in poljudnoznanstvenih revijah (napisal jih je že več kot 600), v dnevnem in revialnem tisku (izšlo jih je prek 200) ter njegovih prispevkov za radio (teh je bilo že več kot 50). Poleg 6 odličnih univerzitetnih učbenikov je napisal tudi okoli 45 poljudnih in strokovnih knjig. Posebej je treba izpostaviti njegova dela, ki se nanašajo na zgodovino fizike, v katerih se kaže njegovo široko enciklopedično poznavanje fizike in zaokrožen pogled na razvoj fizike v svetu in tudi pri nas. Zelo rad pa se dotakne tudi različnih modernih tem. Kot primer omenimo knjigo o fiziki osnovnih delcev z naslovom *Iz take so snovi kot sanje*, za katero je leta 1988 prejel Levstikovo nagrado. S svojima najnovejšima knjigama *Einstein: Zakaj me nihče ne razume in me imajo vsi radi* ter *Einstein:* $E = mc^2$ pa je na svojstven način prispeval k obeležitvi Svetovnega leta fizike 2005 v Sloveniji.

Odlikovancu iskreno čestitamo!

Uredništvo Obzornika

LIGHTHILLOVA AKUSTIČNA ANALOGIJA IN ZVOČNI HRUP PRI TURBULENCI, DRUGI DEL

RUDOLF PODGORNIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

NIKOLA HOLEČEK

Gorenje Velenje

BRANE ŠIROK in MARKO HOČEVAR

Fakulteta za strojništvo
Univerza v Ljubljani

PACS: 47.27.Sd, 43.25.+y, 43.50.+y

Na osnovi Lighthillove akustične analogije, ki smo jo vpeljali v prvem delu tega članka, bomo izpeljali še spektralno gostoto akustičnega hrupa pri turbulenci. Izpeljali bomo njegovo frekvenčno odvisnost in pokazali, da ga je mogoče izmeriti in uporabiti pri reševanju tehničnih problemov v industrijskih aplikacijah.

LIGHTHILL ACOUSTIC ANALOGY AND NOISE IN TURBULENCE, SECOND PART

Starting from the Lighthill acoustic analogy that we derived in the first part of this paper, we will derive the spectral density of acoustic noise in turbulence. We will derive its frequency dependence and show that it can be measured and used for solving engineering problems in industrial applications.

1. Uvod

V prvem delu tega članka smo si ogledali Lighthillovo akustično analogijo, ki preprosto pomeni drugačen zapis osnovnih enačb hidrodinamike, torej Navier-Stokesove enačbe in pa kontinuitetne enačbe, v obliki ene same Lighthillove enačbe. Le-ta ni nič drugega kot nehomogena valovna enačba za bodisi gostotno bodisi tlačno polje s tenzorskimi (kvadrupolnimi) izvori. Ugotovili smo, da za prostorsko omejene turbulentne izvore rešitev Lighthillove enačbe vodi k akustičnemu sevanju, katerega moč narašča z osmo potenco hitrosti. V tem prispevku pa nas bo zanimala tudi frekvenčna porazdelitev tega akustičnega sevanja, torej njegov frekvenčni spekter. Analiza frekvenčnega spektra je nekoliko bolj zapletena kot analiza celotne moči akustičnega hrupa, vendar ji je vredno slediti, saj vodi k izjemno pomembnemu

rezultatu, namreč frekvenčni odvisnosti spektralne gostote akustičnega sevanja. Pokazali bomo, da v okviru teorije turbulence Kolmogorova dobimo zelo preprosto frekvenčno odvisnost spektralne gostote.

2. Kraichnanova enačba

Zanima nas torej frekvenčna porazdelitev oziroma frekvenčni spekter izsevane akustične moči turbulentnih izvorov. Izračun frekvenčne odvisnosti akustičnega spektra v Lighthillovi teoriji je precej bolj zapletena zadeva kot izračun celotne izsevane moči, saj ne gre brez natančnejših predpostavk o naravi hitrostnih korelacij pri turbulentnem gibanju. Turbulenca pa je za zdaj še vedno v splošnem nerešen problem mehanike fluidov [2]. Kljub vsemu poglejmo, kaj bi se dalo reči o akustičnem spektru sevalnega polja v Lighthillovi teoriji.

Začeli bomo z izrazom za celotno izsevano akustično moč, ki smo ga izpeljali že v prvem delu tega članka. V to formulo bomo vstavili Lighthillov retardirani potencial in jo v sevalnem območju, torej za velike oddaljenosti od izvorov, preoblikovali v izraz, ki bo vseboval integral po vseh frekvencah. Po definiciji bomo lahko podintegralsko funkcijo razglasili za frekvenčno odvisno spektralno gostoto akustičnega hrupa turbulentnih izvorov. Takšen postopek je prvi ubral R. H. Kraichnan in se zato po njem tudi imenuje [4]. Kot bomo videli, bo spektralna gostota akustičnega hrupa vsebovala Fourierove frekvenčne komponente Lighthillovega tenzorja. Da bi dobili eksplicitno odvisnost spektralne gostote od frekvence, bomo zato morali predpostaviti neki model za odvisnost teh Fourierovih komponent od frekvence.

Opazujmo naš sistem v času $2T$, med $-T$ in T. Povprečna izsevana akustična moč $\overline{\mathcal{P}}$ v času $2T$ je glede na rezultate prvega dela (I.32)

$$\overline{\mathcal{P}} = \oint \overline{(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})}\, dS = \frac{1}{(c_0\rho_0)} \oint \overline{(p(\mathbf{r},t)-p_0)(p(\mathbf{r},t)-p_0)}\, dS\,, \qquad (1)$$

kjer smo s $\overline{\cdots}$ označili

$$\overline{\cdots} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \cdots dt\,. \qquad (2)$$

Tu smo seveda upoštevali, da sta akustični polji v splošnem funkciji časa in njuna časovna odvisnost kaže časovne fluktuacije hitrosti v turbulentnem izvoru. Enačbo (1) lahko razpišemo tudi takole. V prvem delu smo že izpeljali, da je tlačno akustično polje (I.24)

$$p(\mathbf{r},t)-p_0 = c_0^2(\rho(\mathbf{r},t)-\rho_0) = \frac{n_i n_j}{4\pi c_0^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_V T_{ij}\left(\mathbf{r}', t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0}\right) d^3\mathbf{r}'\,, \quad (3)$$

kjer je c_0 hitrost zvočnega valovanja, ρ_0 je statična vrednost gostote, in kjer je smer radij-vektorja definirana kot $n_i = x_i/r$. Spomnimo se, da je Lighthillov tenzor T_{ij} definiran takole (I.13)

$$T_{ij} = \rho v_i v_j + \left((p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)\right)\delta_{ij} - p_{ij}\,, \tag{4}$$

kjer je p_0 statična vrednost tlaka, p_{ij} pa je viskozni del napetostnega tenzorja. Sedaj uvedemo frekvenčno Fourierovo reprezentacijo za časovno odvisnost v zgornji enačbi kot

$$T_{ij}(\mathbf{r}', t') = \int e^{i\omega t'} T_{ij}(\mathbf{r}', \omega)\frac{d\omega}{2\pi}\,. \tag{5}$$

Z zgornjo definicijo frekvenčne Fourierove transformiranke Lighthillovega tenzorja ga lahko nadalje razpišemo kot

$$T_{ij}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}\right) = \int e^{i\omega t} e^{i\omega\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}{c_0}} T_{ij}(\mathbf{r}', \omega)\frac{d\omega}{2\pi}\,. \tag{6}$$

Tu smo upoštevali, da lahko v sevalnem delu akustičnih polj in pri lokaliziranih izvorih zapišemo razliko $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ do najnižjega reda po $\mathbf{r}'/r$ kot $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cong |\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|} + \cdots$ Geometrijo nam pri tem zopet predoča slika 1. To seveda podobno kot pri opisu sevanja elektromagnetnih izvorov predpostavlja, da so tudi akustični izvori kompaktni in prostorsko omejeni. Analogno sedaj lahko ravnamo tudi pri samem prostorskem delu Lighthillovega tenzorja. Tudi tega zapišemo v obliki Fourierove dekompozicije, vendar tokrat v prostoru

$$T_{ij}(\mathbf{r}', \omega) = \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} T_{ij}(\mathbf{k}, \omega)\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\,. \tag{7}$$

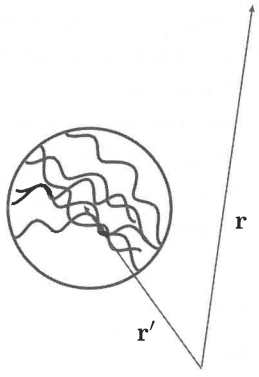
Vse zgornje izraze sedaj vstavimo v (3), upoštevamo definicijo Diracove funkcije delta v obliki Fourierovega integrala

$$\int e^{-i\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{n}}{c_0}\omega\right)\cdot\mathbf{r}'} d^3\mathbf{r}' = (2\pi)^3\,\delta^3\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{n}}{c_0}\omega\right), \tag{8}$$

pa dobimo za razliko tlakov

$$p(\mathbf{r}, t) - p_0 = \frac{(-1)}{4\pi c_0^2 r}\int \omega^2 e^{i\omega t}\left(n_i n_j T_{ij}\left(\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}, \omega\right)\right)\frac{d\omega}{2\pi}\,. \tag{9}$$

Odvisnost od $\mathbf{r}$ v zgornji enačbi je torej $n_i n_j/r$, medtem ko je očitno, da k lokalnemu tlaku prispeva le Lighthillov tenzor z valovnim vektorjem $\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}$. To je posledica dejstva, da k akustični emisiji prispevajo le skoraj nestisljivi načini nihanja [4] oziroma nestisljiva turbulenca.



Slika 1. Slika prikazuje geometrijo turbulentnega izvora, prostorsko omejenega okrog $\mathbf{r}'$, in točke opazovanja akustičnih polj $\mathbf{r}$. Če je izvor prostorsko omejen in kompakten, točka opazovanja pa je daleč stran, potem lahko razvijemo $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ po $\mathbf{r}'/|\mathbf{r}|$.

V naslednjem koraku uporabimo Wiener-Hinčinov teorem [3] na enačbi (1). Le-ta nam poveže $\overline{\mathcal{P}}$ s frekvenčnim integralom kvadrata Fourierovih komponent razlike tlakov $p(\mathbf{r},t)-p_0$, ki ga preberemo iz enačbe (9). Ne da bi se posebej poglobljeno ukvarjali s tem matematičnim korakom, navedimo le končni rezultat

$$\overline{\mathcal{P}} = \frac{1}{16\pi^2\rho_0 c_0^5}\oint \frac{dS}{r^2}\int \omega^4 \left| n_i n_j T_{ij}\left(\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n},\omega\right)\right|^2 \frac{d\omega}{2\pi}\,. \tag{10}$$

To je znamenita **Kraichnanova enačba** [4] za izsevano akustično moč, ki sledi iz Lighthillove akustične analogije za prostorsko lokalizirane izvore. Ker je desna stran (10) nelinearna v hitrostih, Lighthillov tenzor namreč vsebuje kvadratne člene v hitrosti (4), jo lahko interpretiramo takole: dva hitrostna vala $\mathbf{v}(\mathbf{k}_1,\omega_1)$ in $\mathbf{v}(\mathbf{k}_2,\omega_2)$ interagirata – člen $\left|n_i n_j T_{ij}\left(\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n},\omega\right)\right|^2$, ki je četrtega reda v hitrosti – in pri tem proizvedeta zvočni val z valovnim vektorjem $\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}$ in frekvenco ω.

Če sedaj definiramo še spektralno gostoto $p(\omega)$ kot

$$\overline{\mathcal{P}} = \int p(\omega)d\omega\,, \tag{11}$$

dobimo, da je

$$p(\omega) = \frac{1}{32\pi^3\rho_0 c_0^5}\oint \frac{dS}{r^2}\left|\omega^2\mathcal{A}(\omega)\right|^2,\ \text{kjer je}\ \mathcal{A}(\omega) = n_i n_j T_{ij}\left(\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n},\omega\right). \tag{12}$$

Trditev, ki jo vsebuje Kraichnanova enačba, lahko torej zapišemo tudi kot enačbo za spektralno gostoto akustičnega sevanja pri prostorsko omejenih

izvorih. Ne pozabimo: Kraichnanova enačba velja le v sevalnem približku, torej daleč stran od izvorov. V njihovi bližini so seveda zadeve veliko bolj zapletene. Na srečo nas tu ne zanimajo.

Za konec tega razdelka se lotimo še izvrednotenja površinskega integrala po oddaljeni mejni površini (sevalni približek!) v zgornjih enačbah. Iščemo torej $\oint \cdots dS$ po krogelni površini, ki je za r oddaljena od turbulentnih izvorov. Če se preselimo v sferične koordinate, lahko po precejšnjih algebraičnih mukah izpeljemo, da je

$$\oint \frac{n_i n_j n_k n_l dS}{r^2} = \frac{4\pi}{15}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) = \frac{4\pi}{15}\Delta_{ijkl}\,. \qquad (13)$$

Δ_{ijkl} imenujemo tudi popolnoma izotropni tenzor četrtega reda. Spomnimo se, da smo podoben rezultat uporabili tudi pri Hookovem zakonu za izotropno elastično telo, kjer smo na tak način zapisali tenzor elastične konstante K_{ijkl} [1]. Upoštevamo vse zapisano, pa ostanemo s spektralno gostoto akustičnega sevanja v obliki

$$p(\omega) = \frac{\omega^4}{120\pi^2\rho_0 c_0^5}\left(\Delta_{ijkl}\,T_{ij}\left(\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n},\omega\right)T_{kl}\left(-\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n},-\omega\right)\right), \qquad (14)$$

kjer smo upoštevali, da za poljubno Fourierovo komponento $\mathcal{B}(\omega)$ velja $|\mathcal{B}(\omega)|^2 = \mathcal{B}(\omega)\mathcal{B}(-\omega)$. Če bi poznali Lighthillov tenzor turbulentnih izvorov in njegovo eksplicitno frekvenčno odvisnost, bi od tu lahko izračunali ustrezno spektralno gostoto izsevanega zvočnega hrupa takšnih izvorov. Žal ta frekvenčna odvisnost ni preprosta in, kot bomo videli, bomo morali privzeti nekaj dodatnih predpostavk, da se bomo lahko dokopali do te frekvenčne odvisnosti.

3. Hitrostne korelacije pri turbulenci

Sedaj je čas, da povemo nekaj žalostnih resnic o turbulenci. Splošna teorija turbulentnega gibanja tekočin ne obstaja in tudi ni videti, da bi jo lahko kaj kmalu dobili. Ponavadi se zato zatečemo k modelom, ki večinoma slonijo na statističnem opisu turbulence [2]. Pri takšnem opisu nas zanimajo povprečja po reprezentativnih ansamblih hitrostnih fluktuacij. Nekako se torej pretvarjamo, da imamo opravka s statistično mehaniko turbulentnega gibanja. Uspeh takšnega ravnanja je precej nepričakovan, saj turbulenca ni ravnovesen pojav. A kljub vsemu.

Namesto da bi torej analizirali trenutno spektralno gostoto, kot jo podaja (14), opazujemo raje njeno statistično povprečje

$$\langle p(\omega)\rangle = \frac{\omega^4}{120\pi^2\rho_0 c_0^5}\,\Delta_{ijkl}\left\langle T_{ij}\left(\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n},\omega\right)T_{kl}\left(-\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n},-\omega\right)\right\rangle, \qquad (15)$$

kjer smo z $\langle \cdots \rangle$ označili povprečje po reprezentativnih fluktuacijah hitrosti v turbulentnem gibanju. To statistično povprečje ponavadi ocenimo na osnovi bolj ali manj fenomenološkega modela turbulence [2]. Za Lighthillov tenzor pri zadosti velikem Reynoldsovem številu lahko predpostavimo, da ima v območju turbulentnih izvorov Reynoldsovo obliko

$$T_{ij}(\mathbf{r},t) \cong \rho_0 v_i(\mathbf{r},t) v_j(\mathbf{r},t)\,, \tag{16}$$

torej da so vsi njegovi preostali členi zanemarljivi v primerjavi z Reynoldsovim. Fourierove komponente Lighthillovega tenzorja definiramo kot ponavadi

$$T_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \int \frac{d^3\mathbf{k}\,d\omega}{(2\pi)^4}\, T_{ij}(\mathbf{r},t)\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}. \tag{17}$$

Če sedaj v (16) obe hitrosti izrazimo analogno z njunima Fourierovima dekompozicijama $v_i(\mathbf{k},\omega)$, potem dobimo za Lighthillov tenzor v Fourierovem prostoru komponente

$$T_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \rho_0 \iint \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\frac{d\omega'}{(2\pi)} v_i(\mathbf{k}',\omega') v_j(\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega')\,. \tag{18}$$

Končno torej lahko statistično povprečje v (15) zapišemo kot

$$\begin{aligned}\langle T_{ij}(\mathbf{k},\omega) T_{kl}(-\mathbf{k},-\omega)\rangle = \rho_0^2 \iint \frac{d^3\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}\frac{d\omega'}{(2\pi)} \iint \frac{d^3\mathbf{k}''}{(2\pi)^3}\frac{d\omega''}{(2\pi)} \times \\ \times \left\langle v_i(\mathbf{k}',\omega') v_j(\mathbf{k}-\mathbf{k}',\omega-\omega') v_k(\mathbf{k}'',\omega'') v_l(-\mathbf{k}-\mathbf{k}'',-\omega-\omega'')\right\rangle .\end{aligned} \tag{19}$$

Spektralna gostota izsevanega zvočnega hrupa se torej izraža s hitrostno korelacijsko funkcijo turbulence četrtega reda. Tako daleč in nič dlje lahko pridemo s splošnim računom. Na tem mestu moramo zato privzeti nekaj lastnosti turbulence oziroma se odločiti za kak ustrezen model, če bi radi iz zgornjega računa iztisnili kakšno napoved.

Za podroben izračun spektralne gostote torej potrebujemo korelacijsko funkcijo hitrosti četrtega reda v območju turbulence. Te ne poznamo, pač pa si ponavadi pomagamo s t. i. hipotezo o kvazinormalnosti izotropne turbulence, kjer lahko korelacijske funkcije četrtega reda izrazimo s produkti korelacijskih funkcij drugega reda, ki jo zapišemo z nastavkom

$$\left\langle v_i(\mathbf{k},\omega) v_j(\mathbf{k}',\omega')\right\rangle = Q_{ij}(\mathbf{k},\omega)\delta(\omega+\omega')\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,. \tag{20}$$

V kakšnem drugem fizikalnem kontekstu bi tej predpostavki rekli Gaussova, saj za Gaussovo porazdelitev velja, da vse višje momente lahko izrazimo z drugim momentom. S takšnim nastavkom lahko izpeljemo [5], da je

$$\begin{aligned}&\langle T_{ij}(\mathbf{k},\omega) T_{kl}(-\mathbf{k},-\omega)\rangle = \\ &= \rho_0^2 \iint d^3\mathbf{k}'\,d\omega' \big(Q_{ik}(\mathbf{k}',\omega-\omega') Q_{jl}(-\mathbf{k}',\omega') + Q_{il}(\mathbf{k}',\omega-\omega') Q_{jk}(-\mathbf{k}',\omega')\big)\,.\end{aligned} \tag{21}$$

Zgornji izraz očitno ni več funkcija $\mathbf{k}$ oziroma $\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}$. To pomeni, da zgornji približki ne upoštevajo retardiranega časa, ki nam dejansko daje valovni vektor $\frac{\omega}{c_0}\mathbf{n}$. Žal jih je sila težko popraviti in s temi popravki si tu ne bomo belili glave.

Sedaj smo pred odločitvijo, kaj vzeti za $Q_{ij}(\mathbf{k},\omega)$. V približku izotropne, homogene turbulence, kar je hkrati tudi najbolj preprost približek, bomo vzeli sledeč nastavek [2]

$$Q_{ij}(\mathbf{k},\omega) = \frac{E(k)R(k,\omega)}{4\pi k^2}\left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right). \tag{22}$$

Tu je $E(k)$ energijski spekter izotropne turbulence in $R(k,\omega)$ ustrezne Fourierove komponente časovne korelacijske funkcije. Izotropno in homogeno turbulenco lahko dobimo pri dovolj velikih hitrostih gibanja tekočine daleč stran od sten, ovir ali kakšnih drugih nehomogenosti. Turbulenca, ki jo inducirajo stene recimo v cevi, je drugačne narave kot izotropna in homogena turbulenca.

S tem nastavkom lahko enačbo (15) ob upoštevanju (22) prepišemo kot

$$\langle p(\omega)\rangle = \frac{\omega^4\rho_0}{30\pi^3 c_0^5}\iint d^3\mathbf{k}'d\omega'\frac{E^2(k')}{k'^4}R(k',\omega-\omega')R(k',\omega'). \tag{23}$$

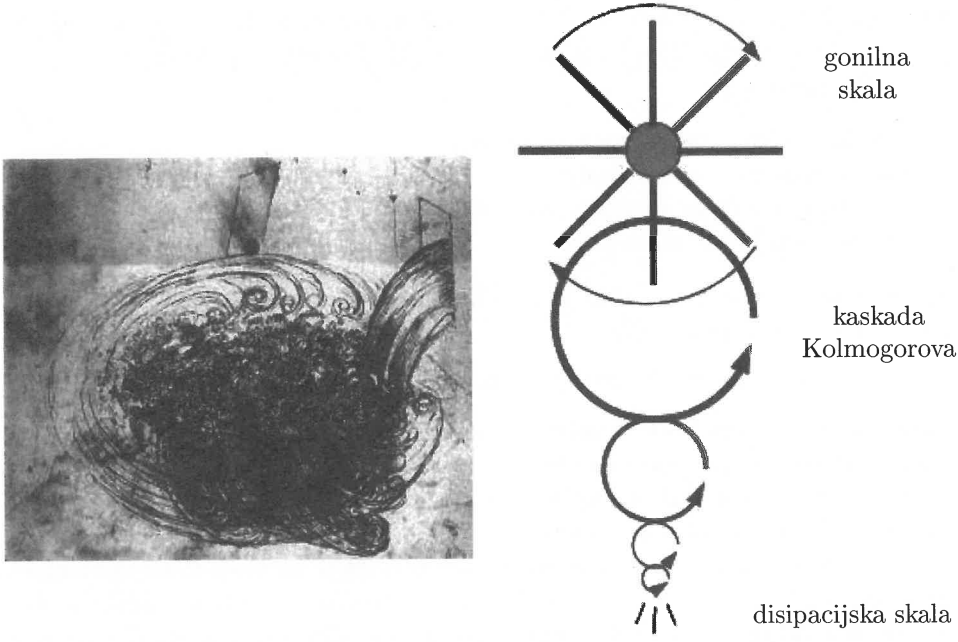
Ker je integrand zgolj funkcija absolutne vrednosti valovnega vektorja $\mathbf{k}'$, lahko zgornjo enačbo spravimo v tole obliko:

$$\langle p(\omega)\rangle = \frac{2\,\omega^4\rho_0}{15\,\pi^2 c_0^5}\int_0^\infty dk'\frac{E^2(k')}{k'^2}\hat{R}(k',\omega), \tag{24}$$

kjer smo vpeljali frekvenčno konvolucijo časovne korelacijske funkcije kot

$$\hat{R}(k,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\, R(k,(\omega-\omega'))R(k,\omega') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, R(k,t)^2 e^{-i\omega t}. \tag{25}$$

Prek zadnjega enačaja smo skočili potem, ko smo vpeljali inverzno Fourierovo transformacijo v času $R(k,t)$. Enačba (24) predstavlja pomemben Rubinstein-Zhoujev rezultat [5] za spektralno gostoto akustičnega sevanja pri homogeni izotropni turbulenci. Druge vrste turbulenca bi seveda dala drugačno formulo za spektralno gostoto.



Slika 2. Levo: turbulentni vrtinci (skica Leonarda da Vincija, 1452–1519). Leonardo je začel postavljati ovire v vodni tok in je nato opazoval gibanje, ki ga je imenoval *turbolenza*. Desno: energijska kaskada Kolmogorova. V t. i. inercialnem območju turbulence [1] velja, da veliki vrtinci, ki nastajajo na gonilni skali turbulence, generirajo manjše vrtince in tako naprej, dokler se celoten energijski tok ne disipira zaradi viskoznosti na disipacijski skali. Ohranjevanje tega energijskega toka v inercialnem območju nam pomaga dobiti energijski spekter turbulence Kolmogorova.

Kot vidimo, je spektralna gostota še vedno odvisna od detajlov energijskega spektra in časovne korelacijske funkcije. Kar nam sedaj še preostane, je, da izberemo smiselne nastavke za $E(k)$ in $R(k,\omega)$. Če se omejimo na teorijo Kolmogorova* [1], potem običajno privzamemo, da ima energijski spekter v inercialnem režimu turbulence [1] obliko

$$E(k) = \frac{C_k \epsilon^{2/3}}{k^{5/3}}, \tag{26}$$

kjer je ϵ moč turbulence na enoto mase na gonilni skali. Pod skalo razumemo tu velikost inverznega valovnega vektorja, saj vemo, da je $k = 2\pi/\lambda$, kjer je λ tipična valovna dolžina pri prostorskem Fourierovem opisu hitrosti. Tipična valovna dolžina in *skala* sta torej v tem kontekstu sinonima.

*Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987), ruski matematik in matematični fizik. Leta 1941 je postavil prvo uspešno fenomenološko teorijo turbulence.

Enačba (26) je znameniti „$k^{-5/3}$“ zakon Kolmogorova, ki sledi iz precej preproste slike energijske kaskade turbulence [1]. Povzeli bi jo lahko z besedami L. F. Richardsona[†]:

„Veliki vrtinci rodijo manjše vrtince,
ki se hranijo z vrtinčnostjo,
in manjši vrtinci imajo še manjše vrtince,
ki poniknejo z viskoznostjo.“

Za časovno korelacijsko funkcijo je slika nekoliko manj nazorna, privzamemo pa, da zadošča hipotezi [2]

$$R(k,\omega) = R(\omega/\theta(k)) \quad \text{oziroma} \quad R(k,t) = R(t\,\theta(k))\,. \tag{27}$$

Funkcija $\theta(k)$ nam pove, kakšen je dekorelacijski mehanizem oziroma, bolj specifično, dekorelacijski inverzni čas hitrostnih fluktuacij v turbulenci. Namreč produkt $t\,\theta(k)$ lahko zapišemo tudi kot $t/\tau(k)$, kjer je $\tau(k)$ korelacijski čas na skali, ki jo določa valovni vektor k.

Očitno je lahko za vsako skalo turbulence, to je za vsak k, ta mehanizem in s tem tudi dekorelacijski čas drugačen. Konkretna oblika funkcije $\theta(k)$ je odvisna od detajlov mehanizma turbulence. Da se pokazati [2], da je za generacijo akustičnega sevanja pri turbulenci smiselna oblika

$$\theta(k) = Vk\,, \tag{28}$$

kjer je V hitrost na gonilni skali [1]. Takšna oblika funkcije $\theta(k)$ pomeni, da so korelacije hitrosti nelokalne, torej da so na katerikoli skali k odvisne od hitrosti tudi na precej večjih skalah oziroma na največji – gonilni skali. Gonilna skala torej določa frekvenčno porazdelitev akustične energije. Dokaz oz. argumentacija za hipotezo, podano v (28), ni lahek niti intuitiven [2] in ga bomo tu izpustili. Na koncu se moramo tako ali tako zateči k simulacijam.

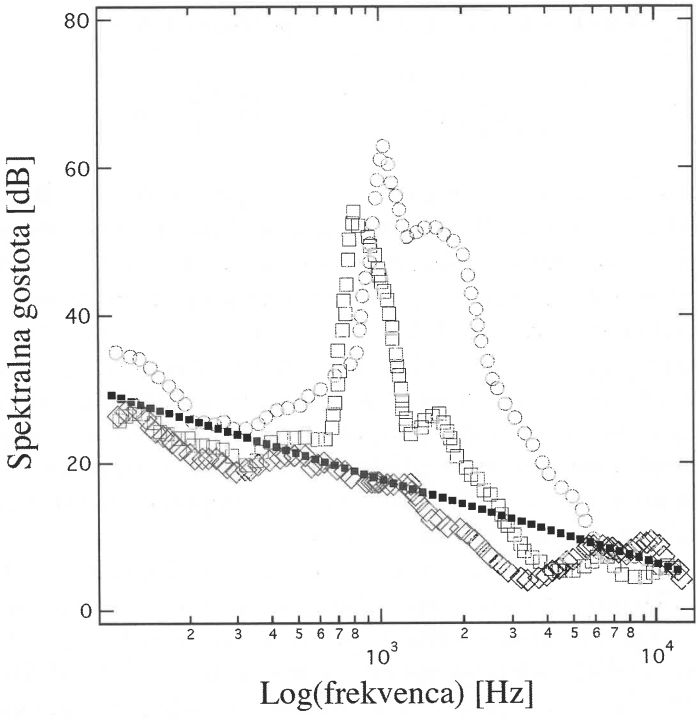
4. Rubinstein-Zhoujev „$\omega^{-4/3}$“ zakon

Vse, kar nam sedaj preostane, je, da ob vseh vpeljanih predpostavkah dejansko izračunamo frekvenčno odvisnost spektralne gostote akustične emisije pri turbulenci. Ta zadnji korak ni pretirano težak, vendar pa se moramo seveda zavedati vseh predpostavk, ki gredo vanj.

Torej ob upoštevanju vsega povedanega lahko sedaj izpeljemo spektralno gostoto zvočnega hrupa pri izotropni, prostorsko omejeni turbulenci kot

$$\langle p(\omega)\rangle = \frac{2\,\omega^4\rho_0}{15\,\pi^2 c_0^5}\int_0^\infty dk \frac{E^2(k)}{k^2\theta(k)}\hat{R}\left(\frac{\omega}{\theta(k)}\right). \tag{29}$$

[†]Lewis Fry Richardson (1881–1953), angleški fizik in meteorolog



Slika 3. Slika prikazuje spektralno gostoto izsevanega hrupa daleč od turbulentnega izvora, ki je v tem primeru akustično izoliran kondenzator sušilnega stroja z različnimi vrednostmi za volumski tok zraka. Rubinstein-Zhoujev „$\omega^{-4/3}$“ zakon deluje za tiste dele spektra, kjer ni specifične akustične emisije v obliki tonov. Črtasta črta predstavlja Rubinstein-Zhujev zakon, ○ ustreza pretoku 157 m^3/h, □ pretoku 125 m^3/h in ◇ pretoku 111 m^3/h.

Ko sestavimo vse skupaj, lahko za spektralno gostoto zvočnega sevanja, ki jo izseva izotropen turbulenten izvor v sevalnem približku, dobimo

$$\langle p(\omega)\rangle = \frac{2\,\omega^4 \rho_0\, C_k^2 \epsilon^{4/3}}{15\,\pi^2 c_0^5\, V} \int_0^\infty \frac{dk}{k^{19/3}} \hat{R}\left(\frac{\omega}{Vk}\right). \tag{30}$$

Če le konvolucija časovne korelacijske funkcije pada zadosti hitro pri $k \to 0$, je zgornji integral konvergenten tudi za k v bližini izhodišča. Zato nam ni treba preveč skrbeti, natančno kakšen je energijski spekter turbulence za majhne k (ki seveda ni oblike Kolmogorova). Če sedaj v zgornji integral

vpeljemo novo spremenljivko $\xi = kV/\omega$, potem dobimo

$$\langle p(\omega) \rangle = \frac{2\,\rho_0\,C_k^2\,V^{13/3}\epsilon^{4/3}}{15\,\pi^2 c_0^5\,\omega^{4/3}} \times \int_0^\infty \frac{d\xi}{\xi^{19/3}} \hat{R}\left(\frac{1}{\xi}\right) \sim \text{konst.}\ \omega^{-4/3}. \tag{31}$$

Do tega zelo netrivialnega rezultata sta se prva dokopala **Rubinstein** in **Zhou** pred petimi leti [5]. Izotropna homogena turbulenca potemtakem generira zvok, katerega spektralna gostota pada z $\omega^{-4/3}$. Oblika te frekvenčne odvisnosti spektralne gostote izsevanega hrupa je zelo odvisna od detajlov turbulence, vendar kakor hitro je model izotropne homogene turbulence sprejemljiv, je tudi oblika frekvenčne odvisnosti spektra določena. Ta frekvenčna odvisnost predstavlja generičen del akustičnega spektra turbulentnih izvorov na velikih razdaljah. Načeloma bi ga bilo mogoče opaziti pri poljubnem lokaliziranem turbulentnem izvoru. Lighthillov „v^8“ zakon in Rubinstein-Zhoujev „$\omega^{-4/3}$“ zakon sta zato najpomembnejši ugotovitvi pri analizi zvočnega sevanja turbulentnih izvorov.

Na koncu se pomudimo še pri meritvah in eksperimentalni potrditvi Rubinstein-Zhoujevega rezultata. Naše meritve zvočnega hrupa pri nabiralniku za vlago (kondenzatorju) v sušilnem stroju kažejo na njegov dvojni mehanizem. Del akustičnega spektra vedno kaže „$\omega^{-4/3}$“ odvisnost in zato sumimo, da ima izvor v prostorsko lokalizirani turbulenci na izhodu iz kondenzatorja. Na to generično osnovo pa je superponiran še specifični del akustičnega spektra, ki je odvisen od narave in geometrije kondenzatorja (glej sliko 3) in ima obliko bolj ali manj ostrih tonov. Hrup, ki ima izvor v generičnem delu spektra, le s težavo spreminjamo, nad specifičnim delom spektra pa imamo več kontrole. Zato je dekompozicija na generični in specifični del spektra pomembna za reševanje čisto tehničnih problemov v tej industrijski aplikaciji. Teorija turbulentnega hrupa nam namreč pomaga razumeti, kateri del zvočnega spektra lahko spreminjamo z različnimi konstrukcijskimi spremembami pri načrtovanju kondenzatorja in kateri del je generičen in ni pod našo neposredno kontrolo.

5. Sklepno modrovanje

Brez natančne teorije hrupa pri turbulentnem gibanju, ki sledi iz Lighthillove akustične analogije, ne bi mogli razumeti, zakaj ima njegova spektralna gostota generični del, ki ni odvisen od detajlov turbulentnega izvora in ki kaže univerzalno frekvenčno odvisnost, kot jo napoveduje teorija Rubinsteina in Zhuja. Ta generičen del spektralne gostote akustičnega sevanja bi še najlažje primerjali s Planckovim spektrom sevanja črnega telesa. Seveda se moramo pri tem zavedati pomembnih razlik. Planck je namreč našel univerzalno frekvenčno odvisnost elektromagnetnega spektra črnega telesa. V

tem primeru se da do te odvisnosti priti z manj predpostavk kot pri zvočnem spektru turbulentnega hrupa. To je posledica dejstva, da elektromagnetno polje razumemo bolje kot turbulenco. Za turbulenco nam namreč manjkajo osnovne enačbe, ki bi imele podobno vlogo, kot jo imajo Maxwellove enačbe za elektromagnetno polje. Vsekakor pa je izpeljava zvočnega spektra homogene izotropne turbulence izjemen rezultat v teoriji akustičnega hrupa v zadnjih nekaj letih in zasluži, da si ga zapomnimo.

LITERATURA

[1] R. Podgornik, *Mehanika kontinuov* (pisni materiali za študente), 2005, **http://www-fl.ijs.si/~rudi/self/kontinui.html** .

[2] H. Tennekes in J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, The MIT Press, Boston, 1972.

[3] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2. izdaja, Butterworth-Heinemann, 1996.

[4] R. H. Kraichnan, *The Scattering of Sound in a Turbulent Medium*, J. Acou. Soc. Am. **25** (1953), str. 1096–2005.

[5] R. Rubinstein in Ye Zhou, *The Frequency Spectrum of Sound Radiated by Isotropic Turbulence*, Phys. Lett. A **267** (2000), str. 379–383.

VESTI

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 2004‡

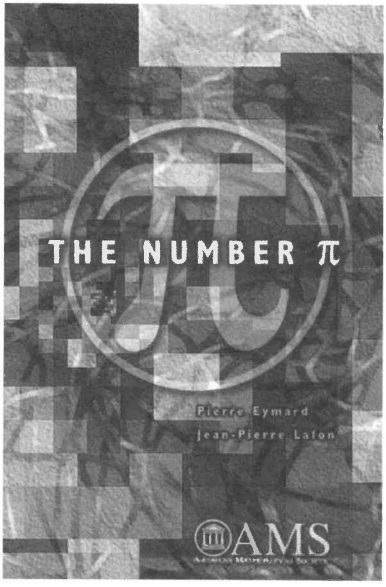
Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 29 novih članov:

2132. Avsec Urban
2133. Bernik Janez
2134. Bonča Jaka
2135. Ermenc Marija Maruša
2136. Fošnarič Miha
2137. Franc Aleksandra
2138. Grubelnik Peter
2139. Jaklič Franc
2140. Ketiš Boštjan
2141. Kogovšek Mirjam
2142. Mark Brigita
2143. Mezgec Rok
2144. Milovanović Dubravka
2145. Mlinšek Klavdija
2146. Mohorič Aleš
2147. Pavlovič Jožica
2148. Pirc Mirijam
2149. Rakun Beber Maja
2150. Rogelj Marija
2151. Schlegel Erik
2152. Selan Apolonija
2153. Senekovič Jožef
2154. Šivic Klemen
2155. Tetičkovič Matjaž
2156. Vogrin Marko
2157. Zanjkovič Samo
2158. Žigart Marko
2159. Žitko Tomislav
2160. Župec Andreja

Vladimir Bensa

‡Novi člani za leto 2003 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **51** (2004) 4, stran 121.

Pierre Eymard, Jean-Pierre Lafon: THE NUMBER π, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 2004, 322 strani.



Knjiga je leta 1999 izšla pri založbi Hermann v francoščini z naslovom *Autour du nombre* π, v letu 2004 pa je njen prevod v angleščino izdalo Ameriško matematično društvo. Razdeljena je na 6 poglavij:

1. Merjenje kroga (1–42)
2. Wallisova in nekatere druge formule (43–81)
3. Euler, spet Euler, vedno Euler (83–127)
4. Kvadratura kroga (129–194)
5. π in eliptični integrali (195–254)
6. Rešitve nalog (255–312)

V 1. razdelku 1. poglavja omenita avtorja najprej Rhindov papirus (nastal naj bi okrog leta 2000 pr. n. št.), v katerem je formula

$$\pi \frac{d^2}{4} = \left(\frac{8d}{9}\right)^2, \quad d - \text{premer kroga.}$$

Razlaga, kako so stari Egipčani prišli do nje, je npr. v [1]. V nadaljevanju je prikazan (na sodoben način) za računanje števila π Arhimedov iterativni postopek. Krogu je Arhimed (287–212) včrtal in očrtal pravilne $6{\cdot}2^n$-kotnike. Pri $n = 4$ je prišel do ocen

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Arhimed, ki še ni poznal trigonometričnih funkcij, je približke za π izpeljal le na osnovi geometričnih konstrukcij. Postopek je prikazan npr. v [2].

V 2. razdelku 1. poglavja so izpeljave raznih obrazcev, v katerih se pojavlja π: ploščina in dolžina elipse ter Arhimedove spirale, površine in prostornine rotacijskih teles (krogla, elipsoid, stožec, torus). Večino teh obrazcev je poznal že Arhimed. V 3. razdelku je obravnavan manj znani Gaussov krožni problem, v 4. razdelku pa je prikazana povezava števila π z verjetnostnim računom (Buffonov poskus metanja igle, Barbierijeva posplošitev).

V 2. poglavju se za računanje števila π pojavijo neskončni produkti in neskončne vrste. Avtorja najprej zapišeta znamenito Viètovo formulo (F. Viète, 1540–1603)

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots ,$$

s katero je število π zapisano v obliki neskončnega produkta (prvega v zgodovini matematike). Formulo je Viète izpeljal na osnovi Arhimedove ideje včrtovanja 2^n-kotnikov v enotski krog.

Dvesto let pozneje je L. Euler (1707–1783) izpeljal enakost

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha} = \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} \cdots$$

Ob upoštevanju

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha ,$$

dobimo iz tega obrazca Viètov produkt.

V letu 1655 je J. Wallis (1616–1703) pokazal, da velja

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} .$$

Med številnimi formulami, ki so v tem poglavju, naj omenimo še vrsti za funkcijo $y = \arctan x$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots , \quad |x| \leq 1 \tag{a}$$

$$\arctan x = \frac{x}{1 + x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \left(\frac{x^2}{1 + x^2} \right)^n , \quad x \in \mathbb{R} \tag{b}$$

Pri $x = 1$ dobimo

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{a_1}$$

oziroma

$$\pi = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} . \tag{b_1}$$

Zanimivo je omeniti, da so vrsti (a) in (a_1) poznali že indijski matematiki v 15. stoletju. Na Zahodu za te dosežke niso vedeli. Razprave so bile

napisane v sanskrtu. Vrsta (a) in iz nje izpeljane druge enakosti so bile dolgo podlaga za izračun približkov števila π. J. Vega (1754–1802), ki ga avtorja te knjige ne omenjata, je uporabil zvezo [3]

$$\frac{\pi}{4} = 5 \arctan \frac{1}{7} + 2 \arctan \frac{3}{79}\,.$$

V nadaljevanju 2. poglavja je število π obravnavano v povezavi z verižnimi ulomki. Ob koncu pa je prikazan pomemben dosežek štirih avtorjev [4]

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right),$$

ki omogoča izračunati p-to „decimalko“ števila π (v številskem sistemu z osnovo 16), ne da bi morali izračunati poprejšnje „decimalke“.

V 3. poglavju, s spoštljivim naslovom do Eulerja, se poleg π pojavi še število e. Razvoj funkcije e^z v vrsto, kjer je z kompleksno število, privede do znanih Eulerjevih enakosti:

$$e^{i\pi} + 1 = 0\,, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\,, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\,.$$

V nadaljevanju je pojasnjena vloga π v Fourierovih vrstah. Izpeljanih je nekaj znanih obrazcev, npr.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$

Razdelki 3.4 do 3.7 obravnavajo: dilogaritemsko funkcijo, Moebiusovo funkcijo, Eulerjevo indikatorsko funkcijo, Bernoullijeva števila in funkcijo gama.

Četrto poglavje se začne z znamenitimi antičnimi problemi: kvadratura kroga, podvojitev kocke in trisekcija kota. Da se konstrukcijsko z ravnilom in šestilom ti problemi ne dajo rešiti, so dokazali šele matematiki 19. stoletja. Pri reševanju prvega problema se srečamo s konstrukcijo števila π. J. H. Lambert (1728–1777) je leta 1766 (pomanjkljivo) dokazal, da je π iracionalno število, F. Lindemann (1852–1939) pa je leta 1882 dokazal njegovo transcendentnost. Torej kvadratura kroga ni možna. Obe lastnosti sta dokazani v tej knjigi. Enaki lastnosti sta dokazani tudi za število e. Zadnji razdelek 4. poglavja obravnava problem konstruiranja pravilnih n-kotnikov.

Peto poglavje se pretežno ukvarja z novejšimi metodami izračunavanja π s pomočjo eliptičnih integralov. Izpeljane so razne formule. Posebej sta

avtorja poudarila dosežke indijskega matematičnega genija S. Ramanujana (1887–1920). Zapišimo njegovo prvo in zadnjo formulo iz te knjige:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390\,n}{396^{4n}}, \qquad \frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n}^3 \frac{42\,n + 5}{2^{12\,n+4}}.$$

Šesto poglavje je namenjeno rešitvam nalog. Okrog 100 jih je.

Knjiga je napisana na univerzitetnem nivoju. Zahtevnost se stopnjuje od poglavja do poglavja. Avtorja pravita, da je n-to poglavje, $n = 1, \ldots, 5$, na nivoju n-tega letnika.

Ob koncu te predstavitve naj bo omenjeno, da je skupini 9 raziskovalcev pod vodstvom Y. Kanade v Centru za informacijsko tehnologijo tokijske univerze uspelo v decembru 2002 izračunati π na $1,241 \cdot 10^{12}$ mest. O tem dosežku in drugih zanimivostih v zvezi s π preberemo lahko tudi v članku [5].

Še eno zanimivost preberemo na strani 196. J. P. Delahaye pravi:

> *Zaradi fizikalnih omejitev našega sveta (velikost elektronov, velikost vidnega vesolja, svetlobna hitrost itd.) nekateri menijo, da ne bo nikoli mogoče izračunati π na več kot 10^{77} mest, četudi bi človeštvo uporabilo vse svoje potenciale: razpoložljiv prostor, razpoložljivo snov in energijo.*

O računanju števila π najdemo veliko podatkov tudi v obsežni knjigi [6] in na internetnih straneh.

Knjiga je vsekakor zanimiva za širši krog bralcev. Ob njenem prebiranju spoznavamo poleg števila π tudi razvojno pot matematike od antike do današnjih dni. Število π nas bo verjetno še vznemirjalo.

LITERATURA

[1] P. Beckmann, *A History of π*, četrta izdaja, Golem Press, Boulder, 1978.

[2] H. Doerrie, *Triumph der Mathematik*, Ferdinand Hirt in Breslau, 1940.

[3] T. Pisanski, *Računanje razmerja med obsegom in premerom kroga*, Obzornik mat. fiz. **31** (1984), str. 44–48.

[4] D. H. Bailey, J. M. Borwein, P. B. Borwein, S. Plouffe, *The Quest for Pi*, Math. Intelligencer **19** (1997), str. 50–57.

[5] M. Juvan, *Število π in Jurij Vega*, Presek **31** (2003/2004), str. 213–219.

[6] L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein, *PI: A Source Book*, Third Edition, Springer, 2003.

Stane Indihar

DVANAJSTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Od 22. do 28. julija 2005 je bilo v Blagoevgradu v Bolgariji dvanajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike. Ljubljansko univerzo so zastopali Uroš Kuzman iz drugega letnika ter Aleksandra Franc, Mario Šikić in Klemen Šivic iz tretjega letnika. Kriterij za podelitev nagrad je podoben sistemu na srednješolskih matematičnih olimpijadah. Klemen Šivic je prejel prvo, Aleksandra Franc drugo, Mario Šikić pa tretjo nagrado. Uroš Kuzman je dobil pohvalo.

Ljubljanska ekipa: od leve proti desni stojijo Klemen Šivic, Aleksandra Franc in Uroš Kuzman, čepita pa Mario Šikić in vodja ekipe Marjan Jerman.

Tekmovanje je potekalo v prijetnem in prijateljskem ozračju. Ekipe so se v popoldanskem času pomerile tudi v nogometu.

Dva dneva je 227 študentov vsak dan po pet ur reševalo naslednje naloge:

I.1. Naj bo $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ kvadratna realna matrika velikosti $n \times n$, katere

element na križišču i-te vrstice in j-tega stolpca je enak $a_{ij} = i + j$. Določi rang matrike A.

I.2. Za vsako naravno število $n \geq 3$ so definirane naslednje množice:

$$S_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,;\; x_i \in \{0,1,2\}\ \forall i\}\,,$$
$$A_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n\,;\; |\{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}\}| \neq 1\ \forall i \leq n-2\} \text{ in}$$
$$B_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S_n\,;\; (x_i = x_{i+1} \Rightarrow x_i \neq 0)\ \forall i \leq n-1\}\,.$$

Pri tem $|A|$ pomeni število elementov množice A.

Dokaži, da je $|A_{n+1}| = 3 \cdot |B_n|$.

I.3. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ zvezno odvedljiva funkcija. Dokaži, da je:

$$\left| \int_0^1 f^3(x)\,dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \max_{0\leq x\leq 1} |f'(x)| \cdot \left(\int_0^1 f(x)\,dx \right)^2 .$$

I.4. Poišči vse polinome oblike $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, ki hkrati zadoščajo naslednjima pogojema:

(i) $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je permutacija števil $(0, 1, 2, \ldots, n)$;

(ii) vse ničle polinoma p so racionalna števila.

I.5. Naj bo $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, za katero velja

$$\left| f''(x) + 2xf'(x) + \left(x^2+1\right) f(x) \right| \leq 1 \quad \forall x\,.$$

Dokaži, da je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

I.6. V grupi G z $G(m)$ označimo podgrupo, ki jo generirajo vse m-te potence elementov iz G. Pokaži, da velja naslednji sklep: Če sta komutativni podgrupi $G(m)$ in $G(n)$, je komutativna tudi grupa $G(\gcd(m,n))$. Pri tem $\gcd(m,n)$ pomeni največji skupni delitelj števil m in n.

II.1. Naj bo $f(x) = x^2 + bx + c$; $b, c \in \mathbb{R}$ kvadratna funkcija in

$$M := \{x \in \mathbb{R};\ |f(x)| < 1\}\,.$$

Množica M je bodisi prazna bodisi sestavljena iz disjunktnih odprtih intervalov. Vsoto dolžin teh intervalov označimo z $|M|$. Pokaži, da je

$$|M| \leq 2\sqrt{2}\,.$$

II.2. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ realna funkcija, za katero so vse potence $(f(x))^n$, $n = 2, 3, \ldots$, polinomi. Ali mora biti tudi f polinom?

II.3. V vektorskem prostoru $n \times n$ realnih matrik $M_n(\mathbb{R})$, opremljenem z običajnima operacijama po komponentah, poišči največjo razsežnost vektorskega podprostora V, ki zadošča pogoju:

$$\operatorname{tr}(XY) = 0 \quad \forall X, Y \in V\,.$$

Pri tem $\operatorname{tr}(X)$ pomeni sled matrike X.

II.4. Pokaži, da za trikrat odvedljivo funkcijo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obstaja število $\xi \in (-1, 1)$, za katero je

$$\frac{f'''(\xi)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0)\,.$$

II.5. Poišči vsa števila $r > 0$, za katera velja naslednji sklep:

Če je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciabilna funkcija z lastnostma:

$$|\operatorname{grad} f(0,0)| = 1 \quad \text{in} \quad |\operatorname{grad} f(u) - \operatorname{grad} f(v)| \le |u - v| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^2,$$

je maksimum funkcije f na krogu $\{u \in \mathbb{R}^2;\ |u| \le r\}$ dosežen v natanko eni točki. Pri tem znak za absolutno vrednost označuje običajno evklidsko razdaljo v $\mathbb{R}^2$.

II.6. Naj bosta p in q racionalni števili in naj bo $r = p + q\sqrt{7}$. Pokaži, da obstaja matrika

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$$

s celoštevilskimi elementi in determinanto $ad - bc = 1$, za katero je

$$\frac{ar + b}{cr + d} = r\,.$$

Prvi nalogi sta tradicionalno zelo enostavni in sta namenjeni dobremu zaletu. Potem pa teža nalog približno narašča z zaporedno številko. Tako recimo prvi dan nobenemu od študentov ni uspelo rešiti naloge I.6.

Bralce Obzornika vabim, da se poskusijo v reševanju nalog. Za boljši vpogled v naloge sledijo še rešitve treh izmed nalog.

I.5. Naloga ima lepo in naravno analitično rešitev, tukaj pa kot zanimivost navedimo kratko in zvito rešitev, zasnovano na opažanju, da ima funkcija $f(x)\,e^{x^2/2}$ drugi odvod podoben pogoju v nalogi. V sledečem računu dvakrat uporabimo L'Hospitalovo pravilo:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)\,e^{x^2/2}}{e^{x^2/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(f'(x)+xf(x)\right)e^{x^2/2}}{xe^{x^2/2}} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(f''(x)+2xf'(x)+\left(x^2+1\right)f(x)\right)e^{x^2/2}}{\left(x^2+1\right)e^{x^2/2}} = 0\,.$$

L'Hospitalovo pravilo smo smeli uporabiti zato, ker gresta obakrat imenovalca proti neskončno (in tako ni treba premišljevati o limitah ustreznih števcev).

I.6. Naj bo $d := \gcd(m,n)$. Enostavno je videti, da je grupa, generirana s podgrupama $G(m)$ in $G(n)$, enaka grupi $G(d)$. Zato je dovolj preveriti, da komutirata poljubna elementa iz unije $G(m)\cup G(n)$. Naj bosta $a^m \in G(m)$ in $b^n \in G(n)$. Za komutator $z = a^{-m}b^{-n}a^m b^n$ velja

$$z = \left(a^{-m}ba^m\right)^{-n} b^n = a^{-m}\left(b^{-n}ab^n\right)^m\,,$$

zato je $z \in G(m)\cap G(n)$ in z leži v centru grupe $G(d)$. S pomočjo zveze $a^m b^n = b^n a^m z$ z indukcijo dokažemo, da je

$$a^{ml}b^{nl} = b^{nl}a^{ml}z^{l^2}\,.$$

V primerih, ko je $l = m/d$ ali $l = n/d$, dobimo

$$z^{(m/d)^2} = z^{(n/d)^2} = e\,,$$

od tod pa sledi, da je $z = e$.

II.3. Naj bo U vektorski podprostor vseh strogo zgornjetrikotnih matrik, tj. zgornjetrikotnih matrik s samimi ničlami na diagonali. Množica U je zaprta za množenje in sled vsake matrike iz U je enaka 0. Zato je

$$\dim V \geq 1+2+\cdots+(n-1) = \frac{(n-1)\,n}{2}\,.$$

Naj bo S podprostor vseh simetričnih matrik. Če je $A \in S$, je tudi matrika $A^2 = AA^\top$ simetrična in njena sled je enaka vsoti kvadratov (realnih) lastnih vrednosti. Zato prostor V ne vsebuje nobene neničelne simetrične matrike in velja:

$$\dim V = \dim(V+S) + \dim(V\cap S) - \dim S \leq$$
$$\leq n^2 - \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{(n-1)\,n}{2}\,.$$

Naloge predlagamo, izbiramo in popravljamo vodje ekip. Meni je bila zelo všeč naslednja naloga, ki pa je nismo izbrali:

P. Poišči vse funkcije $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, za katere je

$$f(\vec{u} \times \vec{v}) = f(\vec{u}) \times f(\vec{v}) \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Izkaže se, da zgornjemu pogoju zadoščajo natanko ničelna funkcija in ortogonalne preslikave z determinanto 1. Večji del dokaza je sestavljen iz dokazovanja, da je funkcija f linearna.

Marjan Jerman

SLOVESNA PODELITEV STERN-GERLACHOVE MEDALJE PROF. DR. BOGDANU POVHU

Na marčnem srečanju nemškega fizikalnega društva – DPG v Berlinu je bila profesorju dr. Bogdanu Povhu slovesno podeljena Stern-Gerlachova medalja. To je najvišje priznanje nemškega fizikalnega društva – DPG za dosežke v eksperimentalni fiziki.

Starejši kolegi se spominjajo, da je profesor Povh začel svojo fizikalno pot v Ljubljani. Študij fizike je končal v Ljubljani in ga še dopolnil na California Institute of Technology v Pasadeni. Ko se je vrnil v Ljubljano, je doktoriral (1960) in nato nekaj časa predaval jedrsko fiziko študentom fizike na Oddelku za fiziko FNT Univerze v Ljubljani. Takrat je raziskovalno delal na Inštitutu Jožef Stefan v Ljubljani. Leta 1962 je odšel na Univerzo v Freibugu, kjer je dosegel habilitacijo. Nato je leta 1966 sprejel mesto profesorja na Univerzi v Heidelbergu. Tam je še danes. Dosegel je pomembne raziskovalne uspehe in ti so botrovali, da je postal leta 1975 direktor raziskovalnega inštituta Max-Planck-Institut für Kernphysik v Heidelbergu. V Heidelbergu mu je bil podeljen naziv profesor emeritus leta 2000.

Raziskovalno delo profesorja Povha je usmerjeno v jedrsko fiziko visokih energij. Sodeloval in vodil je skupino raziskovalcev v Evropi (CERN, DESY) in v ZDA (Fermilab). Poznan je po spektroskopskih raziskavah hiperjeder. Razširil je raziskave vezavne energije hiperona v jedru v osnovnem stanju na vzbujena stanja in pri tem vpeljal nove eksperimentalne metode. S sodelavci mu je uspelo izmeriti prehode gama v lahkih lambda hiperjedrih in določiti spin-spinsko interakcijo med lambda hiperonom in nukleonom. Odkrili so tudi, da so lambda hiperoni prek interakcije spin-tir le šibko vezani, kar je

Prof. dr. Bogdan Povh (levo) in predsednik DPG prof. dr. Knut Urban ob slovesni podelitvi Stern-Gerlachove medalje 6. marca 2005 v Berlinu. Fotografija: Jan Röhl, Berlin.

drugače kot pri nukleonih v jedru. Ti in še drugi dosežki so bili osnova za podelitev Stern-Gerlachove medalje prof. dr. Bogdanu Povhu.

Čestitkam se pridružuje tudi Obzornik!

Zvonko Trontelj

MATEMATIČNO TEKMOVANJE LETA 1950

V tem šolskem letu bomo pri DMFA Slovenije organizirali že 50. matematično tekmovanje srednješolcev. Ob tej častitljivi obletnici želimo izdati zbornik dosedanjih tekmovanj. Prvo tekmovanje je bilo spomladi (najverjetneje) leta 1950. Do sedaj nam ni uspelo zbrati nobenih podatkov o udeležencih tega tekmovanja in nagrajenih tekmovalcih.

Podatki o nagrajenih tekmovalcih od leta 1951 dalje pa so že bili objavljeni v društvenih glasilih.

Če imate kakršne koli informacije o tekmovanju leta 1950 ali pa imate na zaprašenih policah še kakšno drugo dokumentarno gradivo (bilteni, seznami

udeležencev...) o kasnejših tekmovanjih od leta 1951 do 1983, vas prosimo, da nam to čim prej sporočite na elektronski poštni naslov math.comp@fmf.uni-lj.si .

Matjaž Željko

LETNO KAZALO

Obzornik za matematiko in fiziko 52 (2005)
številke 1–6, strani 1–192

Članki — Articles

Prve ocene velikosti molekul — First Estimates of Molecular Sizes (Janez Strnad) 2–6
Gruberjev magnet — Gruber's Magnet (Stanislav Južnič) 7–11
Interpolacijske metode za reševanje nelinearne enačbe — Interpolation Methods for the Solution of Nonlinear Equation (Jože Petrišič) 12–26
Kvazikristali — Quasicrystals (Janez Dolinšek) 33–40
Operatorsko monotone in operatorsko konveksne funkcije — Operator Monotone and Operator Convex Functions (Tomaž Kosem) 41–55
Tunelski mikroskop kot nanotehnološko in analitično orodje — Tunneling Microscope as Nanotechnologic and Analytical Tool (Rok Žitko in Igor Muševič) 65–76
Nagrajena asimptotska prostost — Prize-winning Asymptotic Freedom (Janez Strnad) 77–82
Ničle odvoda polinoma — The Roots of the Derivative of a Polynomial (Mirko Dobovišek) 83–90
K razpravi o poučevanju matematike v osnovni in srednji šoli — On K-12 Education (Petar Pavešić) 91–93
Kako lahko matematiki prispevamo k preduniverzitetnemu izobraževanju — How Mathematicians Can Contribute to K-12 Education (Lynn Arthur Steen, prevedel Petar Pavešić) 94–96
Manipulacija molekularnih motorjev z optično pinceto — Manipulation of Molecular Motors Using Optical Tweezers (Mojca Vilfan) 97–108
Pot do posebne teorije — The Way to the Special Theory (Janez Strnad) 109–119
Catalanova domneva je dokazana — Catalan's Conjecture is Proven (Janko Bračič) 120–127
Lighthillova akustična analogija in zvočni hrup pri turbulenci, prvi del — Lighthill Acoustic Analogy and Noise in Turbulence, First part (Rudolf Podgornik, Nikola Holeček, Brane Širok in Marko Hočevar) 129–142
Zvezdica delna urejenost na matrikah — Star partial order on matrices (Peter Legiša) 143–160
Solitoni in cunamiji — Solitons and Tsunamis (Janez Strnad) 161–169

Lighthillova akustična analogija in zvočni hrup pri turbulenci, drugi del — Lighthill Acoustic Analogy and Noise in Turbulence, Second part (Rudolf Podgornik, Nikola Holeček, Brane Širok in Marko Hočevar) 170–181

Vprašanja in odgovori — Questions & answers

122. Netrivialna racionalna rešitev diofantske enačbe – odgovor (Ivan Vidav) 56–59

Nove knjige — New books

Austrian Commanders of the Napoleonic Wars 1792–1815 (Stanislav Južnič) 128–XV
Zgodovina raziskovanja vakuuma in vakuumskih tehnik (Vincenc Nemanič) 160–XIX
The Number π (Stane Indihar) 182–185

Vesti — News

Leto 2005 – svetovno leto fizike (Zvonko Trontelj) 1
Sončni mrk 2006 (Mitja Rosina) 6
Strokovno srečanje in občni zbor DMFA Slovenije (Nada Razpet) 27–28
Nova častna člana DMFA (Jožica Dolenšek, Peter Petek, Stane Pirnat in Nada Razpet) 28–30
Društvena priznanja za leto 2004 (Lucijana Kračun Berc in Nada Razpet) 30–32
Matematične novice (Peter Legiša) 32–III
Enajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Gregor Šega) 59–61
Zoisove nagrade in priznanja za znanstvenoraziskovalno delo v letu 2004 62–64
Poročilo o seminarju DMFA „Stoletje fizike – najpomembnejša odkritja“ (Žiga Šmit, Denis Arčon) VII
Obvestilo (Zvonko Trontelj) 82
Vabilo (Zvonko Trontelj) XI
Vabilo na odkritje spominske plošče Ivu Lahu 119
Obvestilo (Nada Razpet) 142
Zlati red za zasluge prof. dr. Janezu Strnadu 169
Novi člani društva v letu 2004 (Vladimir Bensa) 181
Dvanajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Marjan Jerman) 186–190
Slovesna podelitev Stern-Gerlachove medalje prof. dr. Bogdanu Povhu (Zvonko Trontelj) 190–191
Matematično tekmovanje leta 1950 (Matjaž Željko) 191–192

http://www.obzornik.si/

CENTRALNA EKONOMSKA KNJIŽNICA

OBZORNIK ZA MATEMATIKO I
LJUBLJANA, NOVEMBER
Letnik 52, številka 6
ISSN 0473–7466, UDK 51 + 52

R 177/05
100002005,6
COBI

VSEBINA

ODPISANO

Članki **Strani**

Solitoni in cunamiji, Janez Strnad 161–169
Lighthillova akustična analogija in zvočni hrup pri turbulenci, drugi del, Rudolf Podgornik, Nikola Holeček, Brane Širok in Marko Hočevar 170–181

Nove knjige

The Number π, Stane Indihar 182–185

Vesti

Zlati red za zasluge prof. dr. Janezu Strnadu 169
Novi člani društva v letu 2004, Vladimir Bensa 181
Dvanajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike, Marjan Jerman 186–190
Slovesna podelitev Stern-Gerlachove medalje prof. dr. Bogdanu Povhu, Zvonko Trontelj 190–191
Matematično tekmovanje leta 1950, Matjaž Željko 191–192
Letno kazalo 192–XXIII

CONTENTS

Articles **Pages**

Solitons and Tsunamis, Janez Strnad 161–169
Lighthill Acoustic Analogy and Noise in Turbulence, Second part, Rudolf Podgornik, Nikola Holeček, Brane Širok and Marko Hočevar 170–181
New books 182–185
News 169–XXIII

Na naslovnici je satelitski posnetek solitonskih valov, nastalih v Gibraltarskem prelivu (glej članek na strani 161). Objavljeno z dovoljenjem STS17-34-081 Courtesy of NASA and the Lunar and Planetary Institute.