

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

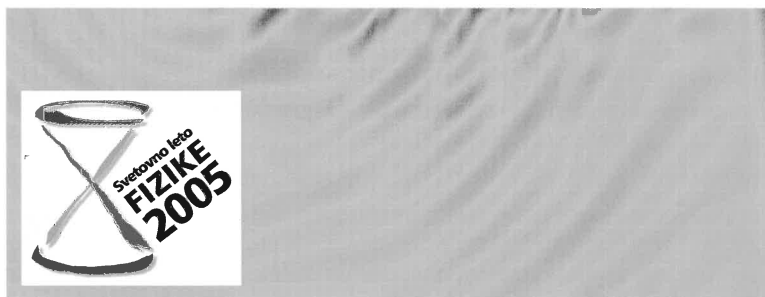
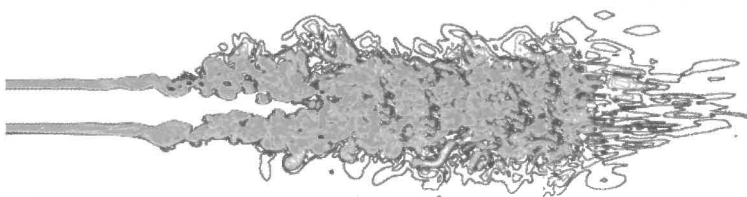
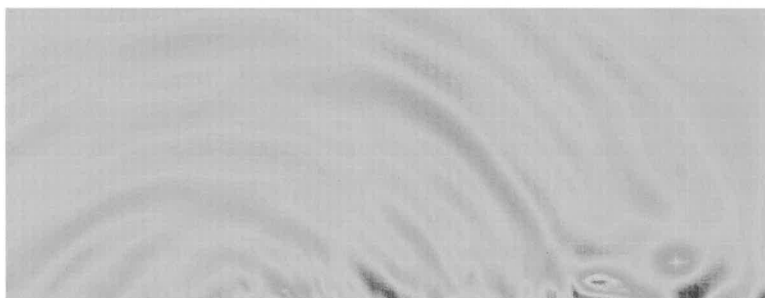
ODPISAN

2005

Letnik 52

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2005, letnik 52, številka 5, strani 129–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460, 2512 005 **Telefaks:** (01) 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://zaloznistvo.dmfa.si/omf/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Nada Razpet (vesti), Pavle Saksida (nove knjige), Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško stavila Monika Testen.

Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1400 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 5.000 SIT, za druge družinske člane in študente pa 2.500 SIT. Naročnina za ustanove je 8.000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2005 DMFA Slovenije – 1616

Poštšina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželeno velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

LIGHTHILLOVA AKUSTIČNA ANALOGIJA IN ZVOČNI HRUP PRI TURBULENCI, PRVI DEL

RUDOLF PODGORNIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

NIKOLA HOLEČEK

Gorenje Velenje

BRANE ŠIROK in MARKO HOČEVAR

Fakulteta za strojništvo
Univerza v Ljubljani

PACS: 47.27.Sd, 43.25.+y, 43.50.+y

Izpeljali bomo osnovne enačbe za t. i. *Lighthillovo akustično analogijo* in pokazali, kako vodijo do zvočne emisije (hrupa) pri lokaliziranem turbulentnem gibanju tekočine. Pokazali bomo, da je jakost hrupa sorazmerna z osmo potenco karakteristične hitrosti turbulentnega gibanja.

LIGHTHILL ACOUSTIC ANALOGY AND NOISE IN TURBULENCE, FIRST PART

We will derive the basic equations of the so called *Lighthill acoustic analogy* and show how they lead to acoustic emission (noise) in the case of a localized turbulence in a fluid. We will show that the intensity of this noise is proportional to the eighth power of the characteristic velocity of the turbulent motion.

1. Uvod

Iz vsakdanjih izkušenj vemo, da turbulentno gibanje tekočine vodi do zvočnega sevanja, v splošnem hrupa. Slišimo ga lahko pri letalskih motorjih, zračnih turbinah, nelaminarnem gibanju tekočin, gospodinjskih aparatih... V splošnem povsod tam, kjer obstaja lokalno turbulentno gibanje tekočin. V tem prispevku si bomo pogledali, kako pride do nastajanja zvoka pri turbulenci in kako ga opišemo z enačbami klasične hidrodinamike. Naš cilj bo izpeljava t. i. *Lighthillove akustične analogije*, ki nam bo pomagala razumeti naravo izsevanega zvoka pri turbulenci. Čeprav je formalna izpeljava Lighthillove akustične analogije precej netrivialna in zahteva določeno predznanje hidrodinamike, jo bomo skušali predstaviti tudi opisno in jo tako narediti dostopno širšemu krogu bralcev.

2. Lighthillova enačba

Najprej bomo prepisali osnovne enačbe hidrodinamike [1] v obliki, ki bo zelo podobna valovni enačbi s kvadrupolnimi izvori. Valovno enačbo seveda poznamo, če ne od drugod, pa iz elektromagnetnega polja [2]. V prostoru brez izvorov polja je valovna enačba homogena, v prostoru z izvori pa vsebuje člene, ki predstavljajo te izvore [2]. Ti izvori so lahko časovno spremenljivi zunanji (skalarni) naboji, dipolni (vektorski) momenti ali pa kvadrupolni (tenzorski) momenti. S terminom *kvadrupolni izvori* imamo v mislih izvore, ki jih lahko opišemo z neko tenzorsko funkcijo prostora in časa. Sledeč Lighthillu se bo pokazalo, da lahko osnovne enačbe hidrodinamike zapišemo v obliki valovne enačbe s tenzorskimi izvori. Ta zapis enačb hidrodinamike nam bo omogočil, da bomo zapisali njihovo rešitev v območju daleč stran od izvorov v obliki zvočnega polja. Podobno ravnamo tudi v elektromagnetnem primeru, kjer rešitev nehomogene valovne enačbe v radiacijskem približku zapišemo v obliki retardiranih potencialov, ki se daleč stran reducirajo na elektromagnetni val.

Začeli bomo z **Navier-Stokesovo enačbo** za komponente Eulerjeve hitrosti tekočine, $v_i(\mathbf{r}, t)$, in njeno gostoto, $\rho(\mathbf{r}, t)$, ki jo zapišemo v standardni komponentni obliki [1] kot

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1)$$

Tu je p tlak tekočine, p_{ij} pa je napetostni tenzor strižnih hitrosti. Komponenta ij tega tenzorja predstavlja i -to komponento sile, ki deluje prek površine z j -to komponento enotskega normalnega vektorja. Člen na levi strani imenujemo tudi substancialni odvod hitrosti, označimo ga z $\frac{D}{Dt}$, in nam pove, kako se hitrost spreminja s časom, če se pri opazovanju gibljemo skupaj s tekočino [1]. V primeru neviskozne tekočine, $p_{ij} = 0$, se zgornja enačba poenostavi v **Eulerjevo enačbo**

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (2)$$

Za viskozne tekočine je v splošnem p_{ij} funkcija gradientov hitrosti $\frac{\partial v_k}{\partial x_i}$ oziroma funkcija tenzorja strižnih hitrosti, ki je enak kar simetriziranemu gradientu $\dot{u}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Za t. i. newtonske tekočine je p_{ik} v najnižjem redu linearna funkcija $\dot{u}_{ij}$, in sicer velja [1]

$$p_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) + \left(\zeta - \frac{2}{3} \eta \right) \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik}. \quad (3)$$

Za nestisljive tekočine je zadnji člen na desni strani zgornje enačbe enak nič, saj predstavlja časovni odvod relativnih sprememb volumna. Celoten napetostni tenzor torej lahko zapišemo kot $-p\delta_{ik} + p_{ik}$. V zgornji enačbi sta η in ζ dinamična in dilatacijska viskoznost tekočine. Poleg Navier-Stokesove enačbe velja še kontinuitetna enačba oziroma zakon o ohranitvi mase v obliki

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (4)$$

kjer lahko uvedemo vektor gostote masnega toka snovi $j_i = \rho v_i$. Pomnožimo kontinuitetno enačbo (4) z v_i in jo prištejmo Navier-Stokesovi enačbi, pa dobimo **Reynoldsovo enačbo**

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_j}. \quad (5)$$

V zgornji enačbi smo definirali tenzor toka gibalne količine π_{ij} kot

$$\pi_{ij} = \rho v_i v_j + (p - p_0)\delta_{ij} - p_{ij}. \quad (6)$$

Tenzor π_{ij} imenujemo tenzor toka gibalne količine zato, ker lahko Reynoldsovo enačbo identificiramo z enačbo ohranjanja gibalne količine. Preberemo jo kot: vsota časovnega odvoda gostote gibalne količine in divergenca tenzorja toka gibalne količine je nič. Podobno je vsota časovnega odvoda gostote in divergence vektorja gostote masnega toka enaka nič. Konstanto p_0 , ki je irelevantna za obliko Reynoldsove enačbe, smo vstavili, ker nam bo koristila kasneje, ko jo bomo tudi natančno definirali.

Pri linearnem približku za neviskozno tekočino dobimo za tenzor toka gibalne količine

$$\pi_{ij}^{(0)} = (p - p_0)\delta_{ij}. \quad (7)$$

Prvi člen v (6) je nič, ker se omejimo le na linearne člene v hitrosti, zadnji pa, ker se omejimo zgolj na idealne, neviskozne tekočine. V nadaljevanju obravnave, kot je običajno, predpostavimo, da so časovne spremembe tlaka in gostote dovolj hitre, da ne more priti do izmenjevanja toplote z okolico. To pomeni, da mora biti entropija na enoto mase, $s = S/m$, konstantna oziroma da imamo opraviti z adiabatnimi spremembami tlaka in gostote, pri katerih sta tlak in gostota povezana z adiabatno enačbo stanja v obliki

$$p = p(\rho, s), \quad s = \text{konst.} \quad (8)$$

Če je v statičnem primeru $p = p_0 = p(\rho_0, s)$, potem je za majhne spremembe okrog te vrednosti

$$p \cong p(\rho_0, s) + \left(\frac{\partial p(\rho, s)}{\partial \rho} \right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \dots = p_0 + c_0^2 (\rho - \rho_0) + \dots, \quad (9)$$

kjer smo označili $c_0^2 = \left(\frac{\partial p(\rho, s)}{\partial \rho} \right)_{\rho_0}$. Pokazalo se bo, da je c_0 ravno hitrost zvočnega valovanja. Za konstanto v enačbi (7) sedaj vzamemo ravno $p_0 = p(\rho_0, s)$ in imamo potemtakem

$$\pi_{ij}^{(0)} = (p - p_0)\delta_{ij} = c_0^2(\rho - \rho_0)\delta_{ij}. \quad (10)$$

Reynoldsovo in kontinuitetno enačbo tako zapišemo v obliki

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(p - p_0) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho - \rho_0) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Prvo enačbo sedaj odvajamo po x_i , drugo po t in ju odštejemo. Dobimo seveda valovno enačbo zvočnega valovanja v obliki

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) (p - p_0) = \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2} \right) c_0^2(\rho - \rho_0) = 0. \quad (12)$$

Potemtakem ni c_0 res nič drugega kot adiabatsna hitrost širjenja zvoka. Ta enačba seveda velja le v delih prostora, kjer ni nobenih akustičnih izvorov. Če bi jih imeli, bi morali nastopati na desni strani valovne enačbe kot izvorni členi. Tako je recimo v teoriji elektromagnetnega polja [2], kjer imamo v valovnih enačbah za skalarni in vektorski potencial t. i. Riemann-Sommerfeldove enačbe [2], na desni strani gostoto naboja in gostoto toka nabojev kot izvore polj.

Sedaj poskušajmo ugotoviti, kakšno enačbo dobimo, če upoštevamo tudi dele tekočine, kjer približek linearne neviskozne tekočine ne drži. Najprej definirajmo **Lighthillov napetostni tenzor** T_{ij} kot [3]

$$T_{ij} = \pi_{ij} - \pi_{ij}^{(0)} = \rho v_i v_j + ((p - p_0) - c_0^2(\rho - \rho_0)) \delta_{ij} - p_{ij}. \quad (13)$$

Srednji člen v oklepaju sedaj ni več enak nič, kot bi sledilo iz (10), saj nismo več v linearnem približku. Lighthillov napetostni tenzor je očitno simetričen v svojih indeksih. S pomočjo Lighthillovega napetostnega tenzorja lahko Reynoldsovo enačbo zapišemo kot

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial \pi_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} = - \frac{\partial (\pi_{ij} - \pi_{ij}^{(0)})}{\partial x_j} \quad (14)$$

oziroma kot

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial c_0^2(\rho - \rho_0)}{\partial x_i} = - \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (15)$$

Če sedaj zgornjo enačbo odvajamo po $\frac{\partial}{\partial x_i}$ in kontinuitetno enačbo (11) po $\frac{\partial}{\partial t}$, eliminiramo iz obeh enačb mešani odvod gostote gibalne količine $\frac{\partial^2(\rho v_i)}{\partial t \partial x_i}$, pa že dobimo **Lighthillovo*** enačbo [4]

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2}\right)(p - p_0) = \left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{c_0^2 \partial t^2}\right)c_0^2(\rho - \rho_0) = -\frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (16)$$

Izpeljali smo torej to, kar smo napovedali v uvodu: osnovni enačbi hidrodinamike, torej Navier-Stokesovo enačbo in kontinuitetno enačbo smo prepisali v obliki nehomogene valovne enačbe s kvadrupolnimi (tenzorskimi) izvori. Posebej velja poudariti, da je Lighthillova enačba **eksaktna** in pomeni dejansko zgolj drugačen zapis Navier-Stokesove enačbe. Na žalost je seveda, enako kot Navier-Stokesova enačba, v splošnem le težko rešljiva. Njen čar pa je v tem, da nam nekako naravno sugerira približke, ki bi jih težko uvideli neposredno iz Navier-Stokesove enačbe. Formalno torej nismo pridobili nič. Konceptualno pa, kot se bo izkazalo, veliko, saj bomo lahko rešitev v primeru prostorsko omejenih izvorov zapisali kot akustični val.

3. Lighthillova akustična analogija

V nasprotju z enačbo (12) Lighthillova enačba velja tudi v delih prostora, kjer imamo akustične izvore [4]. Ti izvori imajo očitno kvadrupolno naravo, kar razberemo iz oblike desne strani enačbe (16), in njihova velikost na enoto volumna je podana ravno z Lighthillovim tenzorjem. O tem se lahko prepričamo, če Lighthillovo enačbo primerjamo z enačbo za elektromagnetna potenciala v kvadrupolnem približku porazdelitve sevalnih izvorov. Lighthillov tenzor bi v tem primeru nadomestil tenzor kvadrupolnega momenta porazdelitve sevalnih izvorov. Kvadrupolna narava akustičnih izvorov je najpomembnejša značilnost Lighthillove enačbe. Kvadrupolni izvori pomenijo, da je gibanje tekočine zelo šibek akustični izvor in da se le majhen del celotne energije gibanja tekočine pretvori v zvočno valovanje.

Povzemimo: Lighthillu je uspelo zapisati osnovne enačbe hidrodinamike, torej Navier-Stokesovo in kontinuitetno enačbo, v obliki valovne enačbe za akustični polji, torej polji tlaka in gostote, s kvadrupolnimi izvori. Zaradi podobnosti z enačbo akustičnega valovanja se zgornja teorija včasih imenuje tudi **Lighthillova akustična analogija**. Tako kot Navier-Stokesova enačba v splošnem ni analitično rešljiva, velja ista ugotovitev tudi za Lighthillovo enačbo.

*Sir Michael James Lighthill, rojen 23. januarja 1924 v Parizu, umrl 17. julija 1998 v Sarku na Kanalskih otokih. Znameniti angleški matematik, ki se je večinoma posvečal zapletenim problemom hidrodinamike.

V Lighthillovi akustični analogiji za zdaj še ne vemo ničesar o naravi Lighthillovega tenzorja. Razen seveda tega, da je zapleten. Pomudimo se sedaj pri njegovi strukturi. Lighthillov tenzor enačbe (13) vsebuje sledeče člene:

- Prvi člen predstavlja Reynoldsove napetosti in glede na to, da je nelinearen, se ga da večinoma zanemariti povsod, razen v delih prostora, kjer je gibanje turbulentno.
- Drugi člen predstavlja presežni del toka gibalne količine glede na linearno tekočino z gostoto ρ_0 . Ta člen je posledica predvsem nelinearnosti v amplitudi in nestisljivosti. Za inženirsko uporabo pri podzvočnih hitrostih sta relativna sprememba tlaka in gostote zelo majhni in je zato razmerje med tem in prvim členom v Lighthillovem tenzorju obratno sorazmerno z Reynoldsovim številom in potemtakem v splošnem majhno.
- Zadnji del Lighthillovega tenzorja je posledica viskoznosti in opisuje atenuacijo zvoka v realni, viskozni tekočini. Večinoma je Reynoldsovo število v delih prostora z akustičnimi izvori zelo veliko in viskozni člen lahko običajno brez večjih posledic zanemarimo.

Od celotnega Lighthillovega tenzorja nam torej ponavadi ostane zgolj člen $T_{ij} \simeq \rho v_i v_j$ v delih prostora s turbulentnim gibanjem tekočine. Povsod drugod je $T_{ij} = 0$.

4. Sevalne rešitve Lighthillove enačbe

Sedaj se posvetimo rešitvam Lighthillove enačbe. Pri tem se bomo precej naslanjali na teorijo sevanja pri elektromagnetnem polju. Tam so rešitve nehomogene valovne enačbe t. i. retardirani potenciali [2], ki podajajo odvisnost skalarnega in vektorskega potenciala od časovno spremenljive gostote zunanjih nabojev in tokov. Daleč stran od (po privzetku) prostorsko omejenih zunanjih izvorov se retardirana polja reducirajo na polja, ki opisujejo elektromagnetni val. To je na kratko povzetek teorije elektromagnetnega sevanja. V Lighthillovem primeru pa bosta analogno gostotno oziroma tlačno polje tekočine funkciji časovno spremenljivih komponent Lighthillovega tenzorja, ki predstavlja hidrodinamske izvore. Daleč stran od prostorsko omejenih komponent Lighthillovega tenzorja pa bomo, podobno kot v elektromagnetnem primeru, dobili sevalno akustično polje. Lighthillova analogija in teorija elektromagnetnega sevanja gresta torej tu z roko v roki.

Sedaj zgornji opis še formalizirajmo. Spomnimo se najprej rešitve enačb za retardirani skalarni potencial φ v elektromagnetnem polju [2]. Osnovna enačba za retardirani skalarni potencial se glasi

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (17)$$

kjer je tu c hitrost svetlobe v vakuumu, ρ pa je gostota naboja. Rešitev zgornje nehomogene valovne enačbe je retardirani skalarni potencial v obliki

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (18)$$

Iz te rešitve lahko, kot vemo, zgradimo teorijo sevanja elektromagnetnih valov, tako da opazujemo polje v veliki oddaljenosti od njegovih izvorov. Takšnemu načinu pravimo tudi sevalni približek.

Povrnimo se sedaj k Lighthillovi enačbi in jo skušajmo rešiti na podoben način. Hitro lahko zapišemo, da je formalna rešitev enačbe (16)

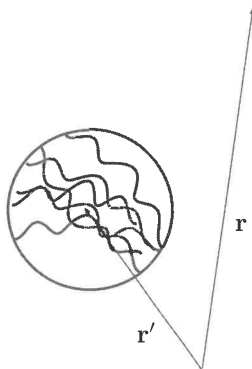
$$\begin{aligned} (\rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0) &= \frac{1}{4\pi c_0^2} \int_V \frac{\partial^2 T_{ij}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0}\right)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \frac{1}{4\pi c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_V \frac{T_{ij}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c_0}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (19)$$

Prek zadnjega enačaja smo preskočili z dvojno parcialno integracijo, uporabili Gaussov teorem in upoštevali, da je na meji velikega volumna Lighthillov tenzor po predpostavki enak nič. Zgornja zveza določa lokalne spremembe gostote tekočine v prostoru le, kadar so komponente Lighthillovega tenzorja bodisi podane vnaprej ali pa že poznamo rešitev Navier-Stokesove enačbe, ki jo lahko vstavimo v Lighthillov tenzor. Komponente Lighthillovega tenzorja namreč ne opisujejo le akustičnih izvorov, analogno kot recimo gostota naboja pri EM retardiranih potencialih [2], pač pa opisujejo tudi modulacijo zvoka zaradi nelinearnosti, konvekcijo zvoka z lokalno hitrostjo tekočine, lom zvoka zaradi lokalnih sprememb v gostoti in pa atenuacijo zvoka zaradi viskoznih in toplotnih efektov. Narava zgornjega retardiranega gostotnega polja je zato nekoliko dugačna kot analogen primer v EM polju (18). Enačba (19) je torej v najboljšem primeru le formalna rešitev osnovnih enačb hidrodinamike in ima kot takšna le omejeno vrednost. Iz formalne rešitve pa bomo dobili uporabno rešitev, če bomo vpeljali pametne in smiselne približke. In ravno v tem je fundamentalen pomen Lighthillove akustične analogije.

Kot je ugotovil Lighthill [4], lahko relativno preprosto in nazorno obravnavamo enačbo (19) le pri velikih Reynoldsovih številih in majhnih gostotnih spremembah v volumnu akustičnih izvorov. V tem primeru nam od vseh členov Lighthillovega tenzorja ostane le prvi, torej člen Reynoldsovih napetosti

$$T_{ij}(\mathbf{r}, t) \cong \rho_0 v_i(\mathbf{r}, t) v_j(\mathbf{r}, t), \quad (20)$$

ki je različen od nič le v območju turbulentnega toka in je tam tudi neodvisen od zvočnega polja. Reynoldsov del Lighthillovega tenzorja poznamo bodisi na osnovi ustreznih meritev ali pa na osnovi približnih teorij turbulentnega gibanja tekočin [5].



Slika 1. Slika prikazuje geometrijo turbulentnega izvora, prostorsko omejenega okrog $\mathbf{r}'$, in točke opazovanja akustičnih polj $\mathbf{r}$. Če je izvor prostorsko omejen in kompakten, točka opazovanja pa je daleč stran, potem lahko v enačbi (19) razvijemo celoten izraz na desni po $\mathbf{r}'/|\mathbf{r}|$.

Nadalje predpostavimo, da je področje, kjer je Lighthillov tenzor različen od nič, torej območje turbulentnega toka, prostorsko omejeno, glej sliko 1, in da lahko privzamemo, da je do najnižjega reda v sevalnem približku podobno kot pri multipolnem razvoju EM polja [2]

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \cong |\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{|\mathbf{r}|} + \dots \quad (21)$$

To pomeni, da opazujemo akustična polja daleč stran od njihovih izvorov. Potemtakem v tem primeru tudi sledi, da lahko krajevni odvod v (19) do najnižjega reda nadomestimo s časovnim odvodom kot

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \longrightarrow -\frac{x_i}{c_0 |\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (22)$$

saj v limiti sevalnega polja velja za poljubno funkcijo $f\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}\right)$, da je

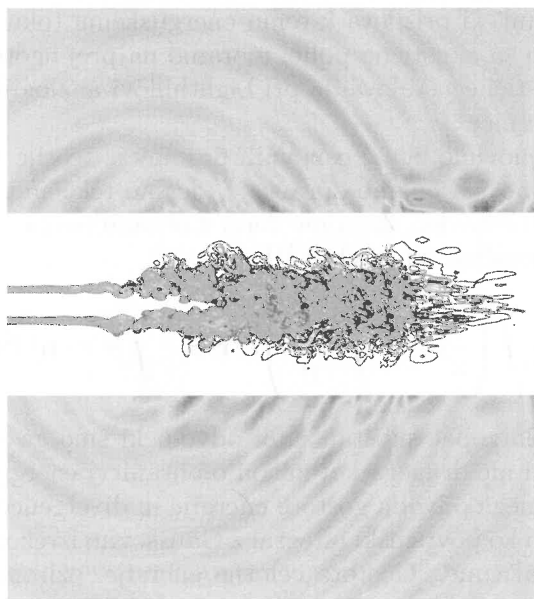
$$\frac{\partial f\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} \times \frac{\partial}{\partial x_i} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}\right) \cong \frac{\partial f}{\partial t} \left(-\frac{x_i}{c_0 |\mathbf{r}|}\right) + \dots \quad (23)$$

Pri dvojnem odvodu v enačbi (19) nam ni treba odvajati tudi imenovalca, kajti ta prispeva zgolj k višjim redom, mi pa se bomo zadovoljili le s sevalnim,

torej najnižjim približkom. Na osnovi vsega povedanega imamo končno

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &\cong \rho_0 + \frac{x_i x_j}{4\pi c_0^4 r^3} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V T_{ij} \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0} \right) d^3 \mathbf{r}' = \\ &= \rho_0 + \frac{n_i n_j}{4\pi c_0^4 r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \rho_0 v_i \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0} \right) v_j \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0} \right) d^3 \mathbf{r}',\end{aligned}\quad (24)$$

kjer smo vpeljali enotski smerni vektor $n_i = \frac{x_i}{r}$. Zgornja enačba nam torej podaja sevalni del akustičnega polja gostote tekočine daleč stran od akustičnih izvorov, ki jih predstavlja Reynoldsov del Lighthillovega tenzorja.



Slika 2. Slika, ki je v barvah tudi na naslovnici, nazorno prikazuje idejo Lighthillove akustične analogije na primeru numerične simulacije turbulentnega iztekanja tekočine iz šobe (prirejeno po A. Uzun, Purdue Univeristy). Rumeni del slike (glej naslovnico) prikazuje tlačno polje, notranji del pa turbulentno hitrostno polje. Le-to očitno generira sevalno zvočno polje. Zapleten hidrodinamski problem je Lighthill razklopil v lokalizirane kvadrupolne izvore in oddaljena akustična polja. Od tod tudi ime „Lighthillova akustična analogija“.

Zapleten hidrodinamski problem smo torej razklopili na prostorsko omejene kvadrupolne izvore akustičnih polj (desna stran enačbe (25)) in pa sama akustična polja daleč stran od izvorov. To Lighthillovo razklopitev nam ponazarja slika 2. Reynoldsov del Lighthillovega tenzorja v splošnem seveda ni znan in je njegova oblika odvisna od tega, kakšne so predpostavke o naravi turbulentnega toka.

Potrebno je tudi pojasniti, da velja zgornja izpeljava le za volumsko porazdeljene izvore. Curle [3] je ustrezno posplošil Lighthillovo teorijo tudi na površinske izvore, za katere se izkaže, da imajo dipolarno naravo.

5. Izsevana akustična moč

Podobno kot v elektromagnetnem primeru nas tudi pri Lighthillovi analogiji zanima, koliko energije izsevajo akustični izvori na enoto časa oziroma kakšna je njihova moč. V elektromagnetnem primeru na to vprašanje odgovorimo tako, da s pomočjo Poyntingovega vektorja izračunamo energijski tok skozi zaključeno površino daleč stran od izvorov. Sevalni del retardiranih potencialov je edini, ki prispeva k temu energijskemu toku. Da bi podoben račun napravili še za akustično polje, moramo najprej ugotoviti, kako je definirana moč akustičnega valovanja pri Lighthillovi analogiji. O tem namreč nismo povedali še nič.

Za začetek ponovimo nekaj osnovnih pojmov iz teorije zvočnega valovanja. Predpostavimo, da imamo opravka z idealno tekočino, kar je večinoma kar ustrezna predpostavka. Začnimo torej z ohranitvenim zakonom za energijo nevizkozne tekočine, ki se glasi [1]

$$\frac{D}{Dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \int_0^\rho \frac{p d\rho}{\rho} \right) d^3\mathbf{r} = - \int_{\partial V} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) d^2\mathbf{r}. \quad (25)$$

D/Dt je tu seveda zopet substancialni odvod, ki smo ga vpeljali že v (1). Zgornja enačba ni nič drugega kot zakon o ohranitvi energije in pravi, da je vsota substancialnega odvoda gostote energije in divergence gostote energijskega toka (potem ko površinski integral z Gaussovimi izrekom preoblikujemo v divergenco) enaka nič. Gostota celotne energije, oziroma bolj natančno proste energije, ki je podana z izrazom $\frac{1}{2} \rho v^2 + \int_0^\rho \frac{p d\rho}{\rho}$ in je enaka vsoti kinetične energije in pa tlačne energije gibanja tekočine, se pri gibanju tekočine spreminja zato, ker v gibajoči se volumen doteka (ali pa iz njega odteka) energijski tok z gostoto $p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$.

Če sedaj od zgornje enačbe odštejemo še ustrezne člene za statičen primer, podan s $p = p_0$, potem sledi, da je gostota zvočne energije, ki je seveda kar enaka celotni energiji, v sevalnem območju akustičnega sevanja enaka

$$w = \frac{1}{2} \rho v^2 + \int_0^\rho \frac{(p - p_0) d\rho}{\rho}, \quad (26)$$

medtem ko je gostota energijskega toka zvočnega valovanja podana z

$$\mathbf{j} = (p - p_0) \mathbf{v}. \quad (27)$$

V sevalnem približku, kot že vemo, tudi velja (22), in zato dobimo Eulerjevo enačbo v obliki

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (28)$$

kjer smo po predpostavki zopet zanemarili viskoznost in nelinearne člene v hitrosti. Zgornjo enačbo razpišemo kot

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} \cong \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \cong \frac{x_i}{c_0 r} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (29)$$

njena rešitev je podana z

$$\mathbf{v} \cong \frac{(p - p_0)}{\rho_0 c_0} \mathbf{n}, \quad (30)$$

kjer je $\mathbf{n}$ že prej definirani smerni vektor. Gostoto toka zvočne energije lahko potemtakem zapišemo kot

$$\mathbf{j} = (p - p_0) \mathbf{v} = \frac{(p - p_0)^2}{\rho_0 c_0} \mathbf{n}. \quad (31)$$

Sedaj ko vemo, kako se gostota energijskega toka izraža z akustičnimi polji, lahko v sevalnem področju potemtakem celotno moč akustičnih izvorov zapišemo v obliki

$$\mathcal{P} = \oint (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS = \oint \frac{c_0^3 (\rho - \rho_0)^2}{\rho_0} dS = \oint \frac{(p - p_0)^2}{\rho_0 c_0} dS. \quad (32)$$

To je hkrati tudi osnovna enačba, ki jo potrebujemo za to, da bi izračunali izsevano moč v Lighthillovi analogiji. Če iz retardirane rešitve Lighthillove enačbe izluščimo sevalni del akustičnih polj, lahko s pomočjo zgornje enačbe izračunamo, koliko energije na časovno enoto odnese akustično sevanje. Toliko o osnovnih pojmi akustike, sedaj pa se povrnimo k Lighthillovi enačbi in njenim rešitvam.

6. Lighthillov „ v^8 “ zakon

Naša naslednja naloga je, da združimo retardirano rešitev Lighthillove enačbe, ki opisuje oddaljena akustična polja, in definicijo celotne izsevane moči, ki smo jo ravnokar izpeljali. To nam bo omogočilo, da bomo celotno izsevano moč povezali z lastnostmi turbulentnih izvorov, ki jih vsebujejo komponente Lighthillovega tenzorja. Lotimo se tega načrta.

Privzemimo, da Lighthillov tenzor določajo prostorsko omejeni turbulentni izvori, ki jih popišeemo z različno velikimi turbulentnimi vrtinci. V skladu

s Kolmogorovom [1] vpeljemo značilno hitrost v in pa dimenzijo ℓ turbulentnega vrtinca. Statistične fluktuacije hitrosti v različnih delih turbulentnega toka, ki so med seboj oddaljeni za več kot ℓ , vzamemo za neodvisne.

Torej predpostavimo, da turbulentni tok v volumnu V_0 generira V_0/ℓ^3 med seboj neodvisnih turbulentnih vrtincev. To pomeni, da lahko v volumnskem integralu v enačbi (25) integriramo po vsakem vrtincu posebej in pri integralu ustrezno centriramo koordinatni sistem na ta vrtinec. Velikost volumnskega integrala po enem vrtincu je potemtakem

$$\int_V \rho_0 v_i(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}) v_j(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c_0}) d^3 \mathbf{r}' \sim \rho_0 v^2 \ell^3. \quad (33)$$

Velikostni red časovnega odvoda je ob identičnih predpostavkah $\frac{\partial}{\partial t} \sim \frac{v}{\ell}$. Za celoten sistem V_0/ℓ^3 turbulentnih vrtincev tako dobimo

$$(\rho - \rho_0) \sim \frac{V_0}{\ell^3} \times \frac{1}{4\pi c_0^4 r} \times \left(\frac{v}{\ell}\right)^2 \times \rho_0 v^2 \ell^3 = \frac{V_0}{\ell^3} \frac{\ell \rho_0 v^4}{4\pi c_0^4 r}. \quad (34)$$

V tej sliki torej vsak od V_0/ℓ^3 med seboj neodvisnih turbulentnih vrtincev prispeva k celotni akustični moči člen

$$\mathcal{P}_\ell = \oint (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{c_0^3 (\rho - \rho_0)^2}{\rho_0} 4\pi r^2 = \frac{c_0^3}{\rho_0} \left(\frac{\ell \rho_0 v^4}{4\pi c_0^4 r} \right)^2 4\pi r^2 = \frac{\ell^2 \rho_0 v^8}{4\pi c_0^5}. \quad (35)$$

Celotna izsevana akustična moč turbulentnih izvorov je potemtakem

$$\mathcal{P} \cong \frac{V_0}{\ell^3} \mathcal{P}_\ell = \frac{\rho_0 v^8}{4\pi \ell c_0^5} V_0 = \frac{\rho_0 c_0^3}{4\pi \ell} M^8 V_0. \quad (36)$$

To je znameniti **Lighthillov „ v^8 “ zakon** [4], ki podaja celotno izsevano akustično moč turbulentnih izvorov. M je Machovo število oziroma razmerje v/c_0 . Izsevana akustična moč torej narašča z osmo potenco lokalnih turbulentnih hitrosti v akustičnem izvoru.

Ocenimo še velikost akustične emisije turbulentnih izvorov. Energija, ki jo moramo na časovno enoto dovajati zunanji izvorom, da poganjajo turbulentne vrtince, mora biti velikostnega reda

$$\mathcal{P}_0 \cong \frac{v}{\ell} \frac{1}{2} \rho_0 v^2 V_0. \quad (37)$$

Izkoristek turbulentne akustične emisije η , definiran kot razmerje med izsevano akustično močjo in celotno močjo, ki je potrebna za vzdrževanje turbulentnega toka izvorov, lahko torej ocenimo kot

$$\eta \sim \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_0} \sim M^5. \quad (38)$$

Za Machova števila, ki so manjša od 0,4 (kar je realna ocena za običajne turbulentne izvore) ima akustična emisija izkoristek manj kot 1 %. Lighthill je prvi ocenil, da akustična emisija turbulentnih izvorov predstavlja le zelo majhen delež celotne energije, ujete v turbulentno gibanje. Lighthillova ugotovitev je pomembno prispevala k teoriji hrupa v letalstvu in aerodinamiki na splošno.

Kljub temu da je izsevana akustična energija relativno majhna v primeri s celotno energijo gibanja tekočine, pa je po absolutni vrednosti lahko še vedno zelo velika. Doslej največji hrup (ločimo seveda med hrupom in pokom), ki ga je proizvedel človek (še vedno precej patetično v primerjavi s tem, kar zmore narava), je hrup ob vzletu rakete Apollo IV. Modul Apollo IV je poganjala raketa Saturn V s petimi F1 raketnimi motorji, katerih izstopna hitrost plinov je bila okrog 3000 m/s (prva stopnja 2989,1 m/s, druga in tretja stopnja 4177,6 m/s). Velika izstopna hitrost plinov v raketnih motorjih je pri vzletu povzročila potresne valove, merljive celo v zvezni državi New Jersey, ki je 1400 km oddaljena od izstrelišča v Cape Canaveralu na Floridi. Akustični hrup pri vzletu, ki ga je generiral turbulentni tok izstopnih plinov petih raketnih motorjev pa je povzročil hrup z jakostjo okrog 200 dB[†] celo na razdalji nekaj sto metrov![‡] Lighthillov „v⁸“ zakon!

Izjemno močan hrup pogorilcev[§] pri reakcijskih letalskih motorjih, ki dodatno pospešijo izpušne pline, potem ko so že oddali večino svoje energije reakcijski turbini, je posledica velike hitrosti plinov med izstopom iz turbine in izstopno šobo reakcijskega motorja, kjer se tudi vnovič dodaja pogonska gorivna zmes. Zaradi te velike hitrosti in pa Lighthillovega „v⁸“ zakona se za nekaj velikostnih redov poveča hrup reakcijskega motorja s prižganimi pogorilci. V civilnem letalstvu so zato le-ti prepovedani.

7. Sklepno modrovanje

Uspelo nam je torej izračunati, kakšno akustično moč oziroma kako močan hrup seva gibanje tekočine, ki ga opišemo z lokalizirano, torej prostorsko omejeno turbulenco. Primerov takega gibanja imamo v naravi in vsakdanjem življenju veliko. Lighthill je pokazal, da je moč tega hrupa precej manjša od celotne moči, ki se veže na turbulentno gibanje. Turbulentni hrup je torej v splošnem šibak. Kljub temu pa zelo hitro raste s tipično hitrostjo turbulentnega gibanja, ki ga povzroča. Ni seveda nobenega pametnega razloga, da ta hitrost ne bi mogla biti nadzvočna. In mnogokrat tudi je. V tem primeru je turbulentni hrup lahko precej impresiven in ga

[†]dB = 10 log₁₀(P/P₀), kjer je P akustični povprečni tlak, P₀ = 2 × 10⁻⁶ N/m².

[‡]Za primerjavo: v disko klubu je akustični hrup dobre rock zasedbe približno 100 dB. 140 dB pa je največji industrijsko dovoljeni hrup **z uporabo** ustrezne zaščite.

[§]angl. *afterburners*

tudi zlahka zaznamo. Kako pa vemo, kdaj imamo opravka s turbulentnim hrupom in kdaj le-ta nastaja na kakšen drug način? Da bi odgovorili na to vprašanje, se moramo najprej posvetiti frekvenčnemu spektru turbulentnega hrupa, kar bomo storili v drugem delu tega prispevka.

LITERATURA

- [1] R. Podgornik, *Mehanika kontinuov* (pisni materiali za študente), 2005, <http://www-f1.ijs.si/~rudi/self/kontinui.html>.
- [2] R. Podgornik, *Elektromagnetno polje* (pisni materiali za študente), 2005, <http://www-f1.ijs.si/~rudi/self/emp.html>.
- [3] M. S. Howe, *Theory of Vortex Sound*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [4] M. J. Lighthill, *On Sound Generated Aerodynamically. I. General Theory*, Proc. Roy. Soc. London A **211** (1952), str. 564–587.
M. J. Lighthill, *On Sound Generated Aerodynamically. II. Turbulence as a Source of Sound*, Proc. Roy. Soc. London A **211** (1954), str. 1–32.
- [5] H. Tennekes in J. L. Lumley, *A First Course in Turbulence*, The MIT Press, Boston, 1972.

VESTI

OBVESTILO

Ob 57. občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije bomo izvedli izobraževalni seminar v dveh delih: *Fizika okoli nas* in *Matematično znanje*. Seminar se bo pričel v petek, 25. 11., ob 9. uri (registracija ob 8.30) in končal v soboto, 26. 11. 2005, v popoldanskih urah. **Lokacijo smo morali zaradi težav s prostori prestaviti, tako da bosta občni zbor in seminar znova potekala v Cerknem v Hotelu Cerkno.**

Natančnejši program in povzetki udeležencev so objavljeni na spletni strani DMFA Slovenije (<http://www.dmfa.si/>). Objavili jih bomo tudi v biltenu občnega zbora. Informacije lahko dobite pri tajniku društva Janezu Krušiču po elektronski pošti tajnik@dmfa.si ali telefonu (01) 4766 559.

Hotelske usluge si morajo udeleženci seminarja rezervirati sami najkasneje do 10. novembra (Hotel Cerkno, Sedejev trg 8, 5282 Cerkno; telefon: (05) 3743 400 ali (031) 858 876 (Majda Rojc), telefaks: (05) 3743 433, elektronska pošta: Hotel.Cerkno@siol.net). Pri prijavi navedite, da se prijavljate na seminar DMFA. Več o hotelu si lahko preberete na njihovi spletni strani <http://www.hotel-cerkno.si/>.

Cene v Hotelu Cerkno: enkratna nočitev z zajtrkom 8.500 SIT, doplačilo za enoposteljno sobo 1.900 SIT, kosilo oziroma večerja 1.700 SIT, turistična taksa, zavarovanje in prijava 473 SIT na osebo na dan.

Nada Razpet

ZVEZDICA DELNA UREJENOST NA MATRIKAH

PETER LEGIŠA

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 06A06, 15A03, 15A04, 15A48, 47A05, 47B65

Na prostoru $M_{m,n}$ realnih ali kompleksnih matrik razsežnosti $m \times n$ je definirana $*$ -urejenost takole: $A \leq B$ natanko takrat, ko je $A^*A = A^*B$ in $AA^* = BA^*$. Obravnavamo lastnosti te delne urejenosti in povezavo s parcialnimi izometrijami. Dokažemo povezavo med Penrosovim razcepom operatorjev A, B in relacijo $A \leq B$.

STAR PARTIAL ORDER ON MATRICES

The star partial order on the space $M_{m,n}$ of real or complex $m \times n$ matrices is defined by $A \leq B$ iff $A^*A = A^*B$ and $AA^* = BA^*$. We discuss the properties of the $*$ -order and its connections with partial isometries. We prove the connection between the Penrose decomposition of A, B and the relation $A \leq B$.

1. Uvod

Naj bo $M_{m,n}$ prostor matrik razsežnosti $m \times n$ s koeficienti iz polja $\mathbb{K}$, ki je polje $\mathbb{R}$ realnih števil ali polje $\mathbb{C}$ kompleksnih števil. Če je $A \in M_{m,n}$ in $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ zapišemo kot stolpec:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1, \dots, x_n]^T,$$

je produkt $A\vec{x} \in \mathbb{K}^m$. Na ta način je A tudi linearna preslikava (linearni operator) iz $\mathbb{K}^n$ v $\mathbb{K}^m$. Tako ima A *zalogo vrednosti* $\text{im } A = A\mathbb{K}^n \subseteq \mathbb{K}^m$ in *jedro* $\ker A = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{x} = 0\}$. Razsežnost zaloge vrednosti matrike A je *rang* matrike A : $\text{rang } A = \dim(\text{im } A)$. Če v $\mathbb{K}^n$ vzamemo bazo $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\vec{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$, v $\mathbb{K}^m$ pa bazo $\vec{f}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, ..., $\vec{f}_m = (0, 0, \dots, 0, 1)$, je $A\vec{e}_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{f}_i$ j -ti stolpec matrike A . Zaloga vrednosti operatorja A je linearni podprostor, napet na stolpce matrike A .

V $\mathbb{K}^n$ imamo skalarni produkt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$. Obstaja natanko ena matrika $A^* \in M_{n,m}$, da je

$$\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A^*\vec{y} \rangle \quad (\vec{x} \in \mathbb{K}^n, \vec{y} \in \mathbb{K}^m).$$

(Na levi je skalarni produkt v $\mathbb{K}^m$, na desni v $\mathbb{K}^n$.) Matrika A^* je *adjungirana matrika* k A . Matriko A^* dobimo iz A tako, da A transponiramo in, če je $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, v dobljeni matriki vse elemente konjugiramo. Matrika A^* je linearna preslikava iz $\mathbb{K}^m$ v $\mathbb{K}^n$. Če je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, je $A^* = A^T$ transponirana matrika k A .

Če sta $B \in M_{n,r}$, $C \in M_{m,n}$ in $\lambda \in \mathbb{K}$, je

$$\begin{aligned} A^{**} &= A, \\ (A + C)^* &= A^* + C^*, \\ (\lambda A)^* &= \bar{\lambda} A^*, \\ (AB)^* &= B^* A^*. \end{aligned}$$

Iz $A^*A = 0$ sledi $A = 0$.

Če je $m = n$ in $A \in M_{n,n} = M_n$ ter $A^* = A$, je A *sebiadjungiran*. Če je $B \in M_{m,n}$, je $B^*B \in M_n$ avtomatično sebiadjungiran.

Če je Y linearen podprostor v $\mathbb{K}^n$, je

$$Y^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n \mid \vec{x} \perp Y\} = \{\vec{x} \in \mathbb{K}^n \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0 \text{ za vse } \vec{y} \in Y\}$$

ortogonalni komplement podprostora Y . To je spet linearen podprostor in velja $Y \oplus Y^\perp = \mathbb{K}^n$. Ker sta Y in $Y^\perp$ medsebojno pravokotna, pravimo, da je direktna vsota $Y \oplus Y^\perp$ *ortogonalna vsota*.

Za $A \in M_{m,n}$ so enakovredne naslednje izjave:

- (i) $\vec{x} \perp \text{im } A^*$;
- (ii) $\langle \vec{x}, A^* \vec{y} \rangle = 0$ za vse $\vec{y} \in \mathbb{K}^m$;
- (iii) $\langle A \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ za vse $\vec{y} \in \mathbb{K}^m$;
- (iv) $A \vec{x} = 0$;
- (v) $\vec{x} \in \ker A$.

Torej je

$$\ker A = (\text{im } A^*)^\perp; \quad (1)$$

$$\mathbb{K}^n = \ker A \oplus \text{im } A^*. \quad (2)$$

Prav tako je $\ker A^* = (\text{im } A)^\perp$ in

$$\mathbb{K}^m = \ker A^* \oplus \text{im } A. \quad (3)$$

Vsoti v (2) in (3) sta ortogonalni vsoti.

Izrek 1. *Operator A preslika $\text{im } A^*$ izomorfno na $\text{im } A$.*

Dokaz. Če je $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, je po (2) $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, kjer je $\vec{y} \in \ker A$, $\vec{z} \in \text{im } A^*$. Potem je $A\vec{x} = A\vec{z}$ in tako $A(\text{im } A^*) = \text{im } A$. Če se omejimo na $\text{im } A^*$, je A tam injektivna. Če je namreč $A\vec{z} = 0$ in $\vec{z} \in \text{im } A^*$, je $z \in \text{im } A^* \cap \ker A = \{0\}$. Zato A preslika vektorski podprostor $\text{im } A^*$ linearно in bijektivno na $\text{im } A$ in je tako izomorfizem med obema podprostoroma. ■

Ker imata izomorfna prostora enako razsežnost, smo mimogrede dokazali, da je

$$\text{rang } A = \text{rang } A^*.$$

V nadaljevanju bomo potrebovali enostaven rezultat, katerega avtor je Roger Penrose [10]:

Lema 1. Če so $A, B, C \in M_{m,n}$ in je $AA^*B = AA^*C$, je $A^*B = A^*C$. Prav tako iz $BA^*A = CA^*A$ sledi $BA^* = CA^*$.

Dokaz. $0 = (B - C)^*(AA^*B - AA^*C) = (B - C)^*AA^*(B - C) = (A^*(B - C))^*A^*(B - C)$. Od tod je $A^*(B - C) = 0$. Če je $BA^*A = CA^*A$, je $A^*AB^* = A^*AC^*$, od tod $AB^* = AC^*$ in $BA^* = CA^*$. ■

2. Zvezdica urejenost

Na prostoru $M_{m,n}$ lahko vpeljemo zanimivo delno urejenost, imenovano *zvezdica urejenost* ali kratko **-urejenost*, takole:

Definicija 1. $A \stackrel{*}{\leq} B$ natanko takrat, ko je $A^*A = A^*B$ in $AA^* = BA^*$. Ta urejenost izvira s področja algebre, za svojo pa so jo kmalu vzeli statistiki.

V naslednjem razdelku bomo pokazali, da je to res delna urejenost. Vsekakor je relacija $\stackrel{*}{\leq}$ refleksivna: $A \stackrel{*}{\leq} A$.

Opomba 1. Za vsak $A \in M_{m,n}$ je $0 \stackrel{*}{\leq} A$. Če je $B \stackrel{*}{\leq} C$ ($B, C \in M_n$) in je B obrnljiv, je $B = C$ (saj je potem tudi B^* obrnljiv). To sledi neposredno iz definicije.

Matrika $X \in M_m$ je *unitarna*, če je $X^*X = XX^* = I_m$. Enakovredno: operator $X: \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ je unitaren, če je surjektiven in $\langle X\vec{y}, X\vec{z} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ za vse $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{K}^m$. Če je $Y \in M_m$ taka, da je $YY^T = Y^TY = I_m$, je Y *ortogonalna* matrika. Unitarna matrika $Y \in M_m(\mathbb{R})$ je realna ortogonalna matrika.

Izrek 2. Naj bosta $A, B \in M_{m,n}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, $X \in M_m$, $Y \in M_n$ unitarna. Ekvivalentne so naslednje izjave:

- (i) $A \stackrel{*}{\leq} B$;
- (ii) $A^* \stackrel{*}{\leq} B^*$;
- (iii) $\alpha A \stackrel{*}{\leq} \alpha B$;
- (iv) $XAY \stackrel{*}{\leq} XBY$;
- (v) $B - A \stackrel{*}{\leq} B$.

Dokaz. Trivialno je preveriti enakovrednost točk (i), (ii) in (iii). Iz (i) sledi (iv), iz (iv) pa (i), če upoštevamo, da sta tudi $X^* = X^{-1}$ in $Y^* = Y^{-1}$ unitarna. Iz (i) sledi (v), saj je

$$(B - A)^*(B - A) - (B - A)^*B = -(B - A)^*A = A^*A - B^*A = 0 \quad \text{itd.}$$

Iz (v) sledi (i), saj je $B - (B - A) = A$. ■

Še eno lahko preverljivo trditev zapišimo:

Trditev 1. Iz $A \stackrel{*}{\leq} B$ sledi $A^*A \stackrel{*}{\leq} B^*B$.

3. Kaj pravzaprav pomeni, da je $A \stackrel{*}{\leq} B$

Izrek 3. Za $A, B \in M_{m,n}$ je $A \stackrel{*}{\leq} B$ natanko takrat, ko je:

$$A\vec{z} = B\vec{z} \quad \text{za vse } \vec{z} \in \text{im } A^* \quad \text{in} \quad B(\ker A) \subseteq \ker A^*. \quad (4)$$

Dokaz. Enakovredne so naslednje trditve:

- (i) $AA^* = BA^*$;
- (ii) $AA^*\vec{x} = BA^*\vec{x}$ za vse $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$;
- (iii) $A\vec{z} = B\vec{z}$ za $\vec{z} \in \text{im } A^*$.

Če je $A^*A = A^*B$ in $\vec{y} \in \ker A$, je $0 = A^*A\vec{y} = A^*B\vec{y}$, torej $B\vec{y} \in \ker A^*$. Tako iz $A \stackrel{*}{\leq} B$ sledi (4).

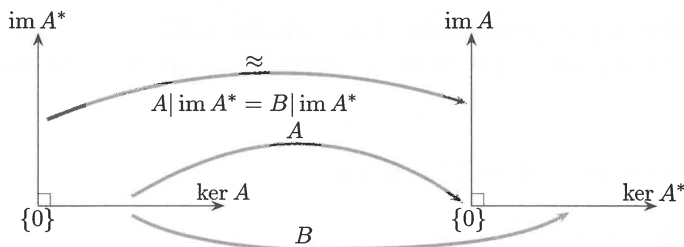
Če velja (4) in je $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, razstavimo po (2): $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{y} \in \ker A$, $\vec{z} \in \text{im } A^*$. Potem je $A\vec{x} = A\vec{z}$ in $B\vec{x} = B\vec{y} + B\vec{z} = B\vec{y} + A\vec{z}$ in $B\vec{y} \in \ker A^*$. Tako je $A^*B\vec{x} = A^*A\vec{z} = A^*A\vec{x}$, saj je $A^*B\vec{y} = 0$. Se pravi, $A^*A = A^*B$. Dokazali smo že, da iz (4) sledi $AA^* = BA^*$. Torej iz (4) sledi $A \stackrel{*}{\leq} B$. ■

Posledica 1. Za $A, B \in M_{m,n}$ iz $A \stackrel{*}{\leq} B$ sledi $\text{im } A \subseteq \text{im } B$ in $\ker B \subseteq \ker A$.

Dokaz. Po (2) in (3) imamo ortogonalni vsoti $\mathbb{K}^n = \ker A \oplus \text{im } A^*$, $\mathbb{K}^m = \ker A^* \oplus \text{im } A$ (slika 1).

Po izreku 1 operator A preslika $\text{im } A^*$ izomorfno na $\text{im } A$, $\ker A$ pa v $\{0\}$. Operator B se na $\text{im } A^*$ ujema z A , torej je $B(\text{im } A^*) = \text{im } A$ in od tod $\text{im } B \supseteq \text{im } A$. Če je $B\vec{x} = 0$, razstavimo $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $\vec{y} \in \ker A$, $\vec{z} \in \text{im } A^*$. Potem je $0 = B\vec{x} = B\vec{y} + B\vec{z} = B\vec{y} + A\vec{z}$. Ker sta zadnja sumanda po (4) in (3) pravokotna, je $A\vec{z} = 0$. Toda A je na $\text{im } A^*$ injektivna. Zato je $\vec{z} = 0$ in $\vec{x} = \vec{y} \in \ker A$. ■

Zvezdica delna urejenost na matrikah



Slika 1

Izrek 4. Naj za $A, B \in M_{m,n}$ velja $A \leq^* B$. Definiramo operator $B_1: \ker A \rightarrow \ker A^*$ z $B_1 \vec{z} = B \vec{z}$ ($\vec{z} \in \ker A$). Potem so $\ker A$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^m$ enaki po vrsti ortogonalnim vsotam (slika 2):

$$\ker A = \ker B_1 \oplus \operatorname{im} B_1^* = \ker B \oplus \operatorname{im} B_1^*,$$

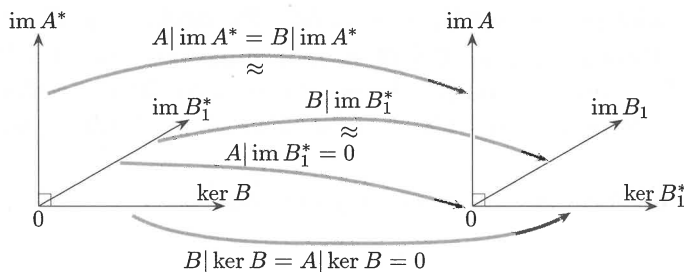
$$\mathbb{K}^n = \ker B \oplus \operatorname{im} B_1^* \oplus \operatorname{im} A^*, \quad (5)$$

$$\mathbb{K}^m = \ker B_1^* \oplus \operatorname{im} B_1 \oplus \operatorname{im} A. \quad (6)$$

Operator B preslika $\operatorname{im} B_1^*$ izomorfno na $\operatorname{im} B_1 = B(\ker A)$, $\ker B_1 = \ker B$ pa v 0. Operator B se na $\operatorname{im} A^*$ in na $\ker B_1$ ujema z A . Od tod je $\operatorname{im} B = \operatorname{im} A \oplus \operatorname{im} B_1$ in $\operatorname{im}(B - A) = \operatorname{im} B_1$, torej

$$\operatorname{im} B = \operatorname{im} A \oplus \operatorname{im}(B - A), \quad (7)$$

kjer je na desni ortogonalna vsota.



Slika 2

Dokaz. Po (2) in (3) je $\ker A = \ker B_1 \oplus \operatorname{im} B_1^*$ in $\ker A^* = \ker B_1^* \oplus \operatorname{im} B_1$, zato veljata (5) in (6). Po posledici 1 je $\ker B \subseteq \ker A$, zato je $\ker B = \ker B_1$.

Operator B se na $\ker A$ ujema z B_1 , zato po izreku 1 preslika $\operatorname{im} B_1^*$ izomorfno na $\operatorname{im} B_1 = B(\ker A)$. Če je $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z} + \vec{w}$, kjer je $\vec{y} \in \ker B$,

$\vec{z} \in \text{im } B_1^*, \vec{w} \in \text{im } A^*$, je po izreku 3 in posledici 1 $B\vec{x} = B\vec{z} + B\vec{w} = B\vec{z} + A\vec{w}$ in $A\vec{x} = A\vec{w}$, torej $(B - A)\vec{x} = B\vec{z} \in B(\text{im } B_1^*) = \text{im } B_1$, zato $\text{im}(B - A) = \text{im } B_1$. ■

V nadaljevanju so $A, B, C \in M_{m,n}$.

Posledica 2. Če je $A \stackrel{*}{\leq} B$, je

$$\text{rang } B = \text{rang } A + \text{rang}(B - A). \quad (8)$$

Iz enakosti (8) pa ne sledi $A \stackrel{*}{\leq} B$.

Primer 1. Če je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, je $\text{rang } B = \text{rang } A + \text{rang}(B - A)$, vendar pa je $AA^* \neq BA^*$.

Posledica 3. Če je $A \stackrel{*}{\leq} B$ in $B \stackrel{*}{\leq} A$, je $A = B$.

Dokaz. Po posledici 2 je $\text{rang } B = \text{rang } A + \text{rang}(B - A)$ in $\text{rang } A = \text{rang } B + \text{rang}(A - B)$. Od tod je $\text{rang}(B - A) = 0$ in tako $B = A$. ■

Trditev 2. Če je $A \stackrel{*}{\leq} B$ in $B \stackrel{*}{\leq} C$, je $A \stackrel{*}{\leq} C$.

Dokaz. Naj bo $\vec{z} \in \text{im } A^*$. Ker po izreku 2 velja $A^* \stackrel{*}{\leq} B^*$, posledica 1 pove, da je $\vec{z} \in \text{im } B^*$. Po izreku 3 je $C\vec{z} = B\vec{z} = A\vec{z}$. Naj bo še $\vec{x} \in \ker A$. Videti moramo, da je $C\vec{x} \in \ker A^*$, se pravi $A^*C\vec{x} = 0$. Po izreku 4 razstavimo $\vec{x} = \vec{y} + \vec{w}$, kjer je $\vec{y} \in \ker B$, $\vec{w} \in \text{im } B_1^*$. Po izreku 3 je $C\vec{y} \in \ker B^* \subseteq \ker A^*$. (Upoštevajmo, da je $A^* \stackrel{*}{\leq} B$ in uporabimo posledico 1.) Po definiciji operatorja B_1 je $\text{im } B_1^* \subseteq \text{im } B^*$. Vemo, da se na $\text{im } B^*$ po izreku 3 ujemata C in B . Tako je po izreku 4 $C\vec{w} = B\vec{w} \in B(\text{im } B_1^*) = \text{im } B_1 \subseteq \ker A^*$. ■

Posledica 4. Relacija $\stackrel{*}{\leq}$ je delna urejenost na $M_{m,n}$.

4. Zvezdica urejenost in operatorji ranga 1

Če sta $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$, $\vec{y} \in \mathbb{K}^n$, lahko definiramo operator $\vec{x} \otimes \vec{y} \in M_{m,n}$ takole:

$$(\vec{x} \otimes \vec{y})\vec{z} = \langle \vec{z}, \vec{y} \rangle \vec{x} \quad (\vec{z} \in \mathbb{K}^n).$$

Če sta $\vec{x}, \vec{y}$ neničelna, je zaloga vrednosti operatorja $\vec{x} \otimes \vec{y}$ enaka $\mathbb{K}\vec{x}$ in je $\vec{x} \otimes \vec{y}$ operator ranga 1.

Jasno je, da je $\vec{x} \otimes \vec{y} = 0$, če in samo če je $\vec{x} = 0$ ali $\vec{y} = 0$. Produkt $\vec{x} \otimes \vec{y}$ je linearen v prvem faktorju in konjugirano linearen v drugem faktorju, npr.

$$(\alpha \vec{x}) \otimes (\beta \vec{y}) = (\alpha \beta) (\vec{x} \otimes \vec{y}).$$

Velja:

$$(\vec{x} \otimes \vec{y})^* = \vec{y} \otimes \vec{x},$$

saj je za poljubna $\vec{z} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{w} \in \mathbb{K}^m$

$$\langle (\vec{y} \otimes \vec{x}) \vec{w}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{w}, (\vec{x} \otimes \vec{y}) \vec{z} \rangle.$$

Za $A \in M_{r,m}$ je

$$A(\vec{x} \otimes \vec{y}) = (A\vec{x}) \otimes \vec{y}.$$

Za $C \in M_{n,p}$ je

$$(\vec{x} \otimes \vec{y})C = \vec{x} \otimes (C^*\vec{y}),$$

saj je leva stran enaka

$$(C^*(\vec{x} \otimes \vec{y})^*)^* = (C^*(\vec{y} \otimes \vec{x}))^* = ((C^*\vec{y}) \otimes \vec{x})^* = \vec{x} \otimes (C^*\vec{y}).$$

Od tod je za $\vec{a} \in \mathbb{K}^m$, $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$

$$(\vec{x} \otimes \vec{y})(\vec{a} \otimes \vec{b}) = \langle \vec{a}, \vec{y} \rangle (\vec{x} \otimes \vec{b}).$$

Trditev 3. Če je $A \in M_{m,n}$ in sta $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$, $\vec{y} \in \mathbb{K}^n$ neničelna, je

$$\vec{x} \otimes \vec{y} \stackrel{*}{\leq} A$$

natanko takrat, ko je

$$A^*\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \vec{y} \quad \text{in} \quad A\vec{y} = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \vec{x}.$$

Dokaz. Po definiciji je $\vec{x} \otimes \vec{y} \stackrel{*}{\leq} A$ natanko takrat, ko je

$$(\vec{y} \otimes \vec{x})(\vec{x} \otimes \vec{y}) = (\vec{y} \otimes \vec{x})A = \vec{y} \otimes (A^*\vec{x})$$

in

$$(\vec{x} \otimes \vec{y})(\vec{y} \otimes \vec{x}) = A(\vec{y} \otimes \vec{x}) = (A\vec{y}) \otimes \vec{x}.$$

Upoštevajmo $(\vec{y} \otimes \vec{x})(\vec{x} \otimes \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle (\vec{y} \otimes \vec{y}) = \vec{y} \otimes (\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \vec{y})$ in

$$(\vec{x} \otimes \vec{y})(\vec{y} \otimes \vec{x}) = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle (\vec{x} \otimes \vec{x}) = (\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle \vec{x}) \otimes \vec{x}. \quad \blacksquare$$

Posledica 5. Če je $U \in M_n$ unitaren in $\vec{y} \in \mathbb{K}^n$ enotski vektor, $\vec{x} \in \mathbb{K}^m$ neničeln, je

$$\vec{x} \otimes \vec{y} \stackrel{*}{\leq} U \text{ natanko takrat, ko je } \vec{x} = U\vec{y}.$$

Dokaz. Vsekakor je ta pogoj potreben. Če je $\vec{x} = U\vec{y}$, je tudi $\vec{x}$ enotski vektor in $U^*\vec{x} = U^{-1}\vec{x} = \vec{y}$. ■

Posledica 6. Če sta $\vec{f}_i \in \mathbb{K}^m$ in $\vec{e}_j \in \mathbb{K}^n$ (standardna) bazna vektorja, je $\vec{f}_i \otimes \vec{e}_j$ matrika, ki ima na mestu (i, j) število 1, povsod drugje pa ničle. Večkrat pišemo

$$\vec{f}_i \otimes \vec{e}_j = E_{ij}$$

in pravimo, da so $\{E_{ij} \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m\}$ matrične enote. Vidimo, da je za $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$ in $A \in M_{m,n}$

$$\lambda E_{ij} \stackrel{*}{\leq} A \text{ natanko takrat, ko je } E_{ij} \stackrel{*}{\leq} \lambda^{-1} A,$$

se pravi

$$(\lambda^{-1} A)^* \vec{f}_i = \vec{e}_j \text{ in } (\lambda^{-1} A) \vec{e}_j = \vec{f}_i.$$

To pa se pravi, da ima matrika A na mestu (i, j) število λ , povsod drugje v i -ti vrstici in j -tem stolpcu pa same ničle.

Primer 2. Če je $n = m = 2$ in $i = j = 1$, je

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{*}{\leq} A$$

natanko takrat, ko je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix},$$

kjer je $d \in \mathbb{K}$ poljuben. Tako je npr.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \stackrel{*}{\leq} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Obe matriki v tej relaciji sta sebiadjungirani.

V $M_n(\mathbb{C})$ imamo še neko drugo, precej bolj splošno znano delno urejenost, ki jo v matrični teoriji imenujemo *Löwnerjeva urejenost* in jo označujemo z $\stackrel{L}{\leq}$.

Definicija 2. Za $A \in M_n(\mathbb{C})$ je $A \stackrel{L}{\geq} 0$ natanko takrat, ko je $\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$ za vse $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$. Če sta $B, C \in M_n(\mathbb{C})$, je $B \stackrel{L}{\leq} C$ natanko takrat, ko je $C - B \stackrel{L}{\geq} 0$.

Da je to res delna urejenost, nam pove:

Trditev 4. Če je $A \in M_n(\mathbb{C})$ taka, da je $\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ za vse $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$, je $A = 0$. Če je $A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$ in $\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ za vse $\vec{x} \in \mathbb{R}$, je $A = 0$.

Dokaz. Če je $A = A^*$, obstaja ortonormirana baza $\{\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n\}$ za $\mathbb{K}^n$, tako da je $A\vec{q}_k = \lambda_k \vec{q}_k$ za $k = 1, \dots, n$ [3, str. 83 in 97]. Iz $\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ za vsak $\vec{x}$ sledi $\langle A\vec{q}_k, \vec{q}_k \rangle = \lambda_k = 0$ za vsak k . Od tod je $A\vec{q}_k = 0$ za vsak k in $A = 0$.

Če je $A \in M_n(\mathbb{C})$ in $\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ za vsak $\vec{x}$, pišimo $A = M + iN$, kjer je $M = M^*$, $N = N^*$. Ker je $\langle A\vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle M\vec{x}, \vec{x} \rangle + i\langle N\vec{x}, \vec{x} \rangle$ in je $\langle M\vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, M\vec{x} \rangle = \overline{\langle M\vec{x}, \vec{x} \rangle}$, sta $\langle M\vec{x}, \vec{x} \rangle$ in $\langle N\vec{x}, \vec{x} \rangle \in \mathbb{R}$ za vsak $\vec{x}$. Od tod je $\langle M\vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle N\vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ za vsak $\vec{x}$, zato po prejšnjem $M = N = 0$. ■

Pogosto Löwnerjevo urejenost omejimo na realni vektorski prostor sebiadjungiranih matrik v M_n . V tem primeru je $\mathbb{K}$ lahko tudi $\mathbb{R}$, kot nam pove drugi stavek trditve 4.

Opomba 1 in primer 2 povesta, da se zvezdica urejenost in Löwnerjeva urejenost ne ujemata – tudi če ju omejimo na prostor sebiadjungiranih matrik.

Za vsak $A \in M_{m,n}$ je $A^*A \stackrel{L}{\geq} 0$. Če je $R = R^* \in M_n$, je $R^2 \stackrel{L}{\geq} 0$.

Trditev 5. Naj bo $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ enotski vektor, $\mu \in \mathbb{K}$ neničeln in $B \in M_n$. Ekvivalentni sta naslednji trditvi:

- (i) $B\vec{x} = \mu\vec{x}$, $B^*\vec{x} = \lambda\vec{x}$ za neki skalar λ ;
- (ii) $\mu\vec{x} \otimes \vec{x} \stackrel{*}{\leq} B$.

Dokaz. Iz (i) sledi (ii):

$$\langle B\vec{x}, \vec{x} \rangle = \mu \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, B^*\vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \lambda\vec{x} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle.$$

Tako je $\lambda = \bar{\mu}$ in $B^*\mu\vec{x} = \mu B^*\vec{x} = \mu\lambda\vec{x} = \mu\bar{\mu}\vec{x} = \langle \mu\vec{x}, \mu\vec{x} \rangle \vec{x}$ in $B\vec{x} = \mu\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \mu\vec{x}$. Uporabimo trditev 3.

Iz (ii) sledi (i), saj je $B\vec{x} = \mu\vec{x}$ in $B^*\mu\vec{x} = \langle \mu\vec{x}, \mu\vec{x} \rangle \vec{x} = \mu\bar{\mu}\vec{x}$, torej $B^*\vec{x} = \bar{\mu}\vec{x}$. ■

5. Sebiadjungirani idempotenti

Če je $P \in M_n$ sebiadjungiran idempotent, se pravi $P = P^* = P^2$, pravimo tudi, da je P *pravokotni projektor* (ortogonalni projektor). Operator P namreč na linearnem podprostoru $\ker(I - P) = P\mathbb{K}^n = \text{im } P$ deluje kot identiteta, ortogonalni komplement $(\text{im } P)^\perp = \text{im}(I - P)$ pa preslika v 0.

Primer 3. Če je $\vec{e} \in \mathbb{K}$ enotski vektor, je $\vec{e} \otimes \vec{e}$ pravokotni projektor na enorazsežni podprostor $\mathbb{K}\vec{e}$.

Izrek 5. Če je $P \in M_n$ sebiadjungiran idempotent in za $A \in M_n$ velja $A \stackrel{*}{\leq} P$, je A sebiadjungiran idempotent in $AP = PA = A$.

Dokaz. Vemo, da je

$$A^*A = A^*P = PA \quad \text{in} \quad AA^* = PA^* = AP. \quad (9)$$

Po posledici 1 je $\text{im } A \subseteq \text{im } P$, zato $PA\vec{x} = A\vec{x}$ za vsak $\vec{x}$ in tako $PA = A$. Upoštevajmo (9), pa je $A = A^*A$ in tako $A = A^*$, od tod $A = A^*A = A^2$. Torej je A sebiadjungiran idempotent. Po (9) je $PA = AP = A$. ■

Če pišemo $A = Q$, je $\text{im } Q \subseteq \text{im } P$. Na množici pravokotnih projektorjev se torej ujemata zvezdica urejenost in običajna urejenost, to je: večji projektor projicira na večji podprostor. Ta običajna urejenost na ortogonalnih projektorjih je seveda tudi Löwnerjeva urejenost, saj je npr. v tem primeru $(P - Q)^2 = P - Q \stackrel{\perp}{\geq} 0$, torej $P \stackrel{\perp}{\geq} Q$.

Posledica 7. Na množici ortogonalnih projektorjev se zvezdica urejenost in običajna urejenost ujemata.

Trditev 6. Če je $P \in M_n$ sebiadjungiran idempotent in $B \in M_n$, velja: $P \stackrel{*}{\leq} B$ natanko takrat, ko B in B^* delujeta kot identični operator na zalogi vrednosti $\text{im } P = P\mathbb{K}^n$ operatorja P .

Dokaz. $P \stackrel{*}{\leq} B$ natanko takrat, ko je $P^*P = P = P^*B = B^*P$ in $PP^* = P = BP^* = BP$, se pravi,

$$P \stackrel{*}{\leq} B \quad \text{natanko takrat, ko je} \quad P = BP = B^*P. \quad \blacksquare$$

Definicija 3. Sebiadjungirana idempotenta P, Q sta *pravokotna* (ortogonalna), če je $PQ = 0$. Pišemo $P \perp Q$.

V nadaljevanju bomo potrebovali naslednja lahko preverljiva dejstva:

Trditev 7. Če sta P, Q sebiadjungirana idempotenta, je $P \perp Q$ natanko takrat, ko je $\text{im } P \perp \text{im } Q$. V tem primeru je $P + Q$ sebiadjungiran idempotent in $\text{im}(P + Q) = \text{im } P \oplus \text{im } Q$.

6. Parcialne izometrije

Definicije 4. Naj bo Y linearen podprostor v $\mathbb{K}^n$, Z pa linearen podprostor v $\mathbb{K}^m$ in $\dim Y = \dim Z$. Če obstaja operator $V \in M_{m,n}$, tako da je $\|V\vec{y}\| = \|\vec{y}\|$ za vse $\vec{y} \in Y$ in da je $V(Y) = Z$, $V(Y^\perp) = \{0\}$, pravimo, da je V *parcialna izometrija* z začetnim prostorom Y in s končnim prostorom Z .

Pravokotni projektor na Y je *začetni projektor*, pravokotni projektor na Z pa *končni projektor* za V .

Začetni prostor za V je $(\ker V)^\perp$, končni prostor pa $\operatorname{im} V$.

Če V zožimo na Y , ohranja norme in s tem razdalje (pa tudi skalarni produkt), tako da pravimo, da je V na Y *izometrija*.

Če je $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, razstavimo $\vec{x} = \vec{y} + \vec{w}$, kjer je $\vec{y} \in Y, \vec{w} \in Y^\perp$. Potem je $V\vec{x} = V\vec{y}$ in od tod $\|V\vec{x}\| = \|V\vec{y}\| = \|\vec{y}\| \leq \|\vec{x}\|$. Zato je $\|V\| \leq 1$. (Če je $V \neq 0$, je seveda $\|V\| = 1$.)

Če je $\|V\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$, to pomeni $\|\vec{y}\| = \|\vec{x}\|$, zato $\vec{x} = \vec{y} \in Y$.

Izrek 6. Za $V \in M_{m,n}$ so ekvivalentne naslednje trditve:

- (i) V je parcialna izometrija;
- (ii) $VV^*V = V$;
- (iii) V^*V je ortogonalni projektor;
- (iv) V^* je parcialna izometrija;
- (v) VV^* je ortogonalni projektor;
- (vi) $V \leq^* W$ za neko parcialno izometrijo W .

Dokaz. Omejimo se lahko na primer $V \neq 0$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Naj bo Y začetni prostor za V . Če je $\vec{y} \in Y$ enotski vektor, je

$$1 = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle V\vec{y}, V\vec{y} \rangle = \langle V^*V\vec{y}, \vec{y} \rangle.$$

Označimo $\vec{x} = V^*V\vec{y}$, pa je $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 1$. Ker je $\|V\| = 1$, je $\|\vec{x}\| \leq 1$. Od tod je

$$\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 1 - 2\operatorname{Re}(\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle) = 1 + \|\vec{x}\|^2 - 2 \leq 0.$$

Tako je $\vec{x} = \vec{y}$, se pravi $V^*V\vec{y} = \vec{y}$ in od tod $VV^*V\vec{y} = V\vec{y}$. Če je $\vec{w} \in Y^\perp = \ker V$, je $VV^*V\vec{w} = V^*V\vec{w} = V\vec{w} = 0$. Res je $VV^*V = V$. Obenem vidimo, da je V^*V začetni projektor za V .

(ii) $\Rightarrow$ (iii). $(V^*V)^2 = V^*(VV^*V) = V^*V$, zato je V^*V sebiadjungiran idempotent.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Označimo $V^*V = P = P^* = P^2$. Za $\vec{y} \in P\mathbb{K}^n$ je

$$\|V\vec{y}\|^2 = \langle V\vec{y}, V\vec{y} \rangle = \langle V^*V\vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle P\vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \|\vec{y}\|^2.$$

Za $\vec{z} \in (I - P)\mathbb{K}^n = (P\mathbb{K}^n)^\perp$ je $P\vec{z} = V^*V\vec{z} = 0$, od tod

$$0 = \langle V^*V\vec{z}, \vec{z} \rangle = \langle V\vec{z}, V\vec{z} \rangle = \|V\vec{z}\|^2,$$

zato $V\vec{z} = 0$. Res je V parcialna izometrija z začetnim projektorjem V^*V .

(iii) $\iff$ (iv). Iz $VV^*V = V$ sledi $V^*VV^* = V^*$. Ker so (i)–(iii) ekvivalentni, je V^* parcialna izometrija z začetnim projektorjem $Q = (V^*)^*V^* =$

VV^* . Vsekakor je $\text{im } Q \subseteq \text{im } V$. Upoštevajmo $QV = VV^*V = V$, pa imamo $\text{im } V \subseteq \text{im } Q$. Tako je Q končni projektor za V .

Začetni projektor za V^* je končni projektor za V . Od tod je začetni projektor za $(V^*)^* = V$ končni projektor za V^* . Če je V^* parcialna izometrija, je po že dokazanem $V^*VV^* = V^*$, zato $VV^*V = V$.

(iv) $\Rightarrow$ (v) smo pravkar dokazali.

(v) $\Rightarrow$ (vi) je trivialno ($W = V$, saj je V^* parcialna izometrija in tako je tudi V parcialna izometrija).

(vi) $\Rightarrow$ (iii). Po trditvi 1 je $V^*V \stackrel{*}{\leq} W^*W$. Ker je W^*W ortogonalni projektor, je po izreku 5 tudi V^*V ortogonalni projektor. ■

Mimogrede smo dokazali še tole:

Posledica 8. Če je V parcialna izometrija, je $P = V^*V$ začetni in $Q = VV^*$ končni projektor za V . Tudi V^* je parcialna izometrija; njen začetni projektor je Q , končni pa P .

Trditev 8. Če sta $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{K}^m$ neničelna vektorja, je $\vec{x} \otimes \vec{y}$ parcialna izometrija natanko takrat, ko je $\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = 1$.

Dokaz. Pišimo $\vec{x} = \|\vec{x}\| \vec{e}$, $\vec{y} = \|\vec{y}\| \vec{f}$, kjer sta $\vec{e}$ in $\vec{f}$ enotska vektorja. Ker je

$$(\vec{x} \otimes \vec{y}) \otimes (\vec{x} \otimes \vec{y})^* = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 (\vec{e} \otimes \vec{f}) (\vec{f} \otimes \vec{e}) = \|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 (\vec{e} \otimes \vec{e})$$

in je $\vec{e} \otimes \vec{e}$ pravokotni projektor (primer 3), je $\vec{x} \otimes \vec{y}$ parcialna izometrija natanko takrat, ko je $\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| = 1$. ■

Izrek 7. Če sta $V, W \in M_{m,n}$ parcialni izometriji in je $Y = \text{im } V^*V = \text{im } V^*$ začetni prostor za V , velja:

$$V \stackrel{*}{\leq} W \text{ natanko takrat, ko je } W\vec{y} = V\vec{y} \text{ za vse } \vec{y} \in Y.$$

V tem primeru začetni prostor L za W vsebuje začetni prostor Y za V in končni prostor za W vsebuje končni prostor za V .

Dokaz. Če je $V \stackrel{*}{\leq} W$, po izreku 3 velja $V\vec{y} = W\vec{y}$ za $\vec{y} \in \text{im } V^* = Y$ in je tako dokaz v eno smer zaključen.

Če je $W\vec{y} = V\vec{y}$ za vse $\vec{y} \in Y = \text{im } V^*$, je $\|W\vec{y}\| = \|V\vec{y}\| = \|\vec{y}\|$ za vse $\vec{y} \in Y$, zato $Y \subseteq L$. Po izreku 3 moramo videti še, da je $W(\ker V) \subseteq \ker V^*$. Se pravi, videti moramo, da iz $V\vec{z} = 0$ sledi $V^*W\vec{z} = 0$.

Vzemimo $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ in razstavimo $\vec{x} = \vec{y} + \vec{w}$, $\vec{y} \in Y$, $\vec{w} \in Y^\perp$. Potem je $V\vec{x} = V\vec{y}$ in

$$W^*V\vec{x} = W^*V\vec{y} = W^*W\vec{y} = \vec{y} = V^*V\vec{y} = V^*V\vec{x},$$

zato $W^*V = V^*V$ in tako $V^*V = V^*W$. Če je $V\vec{z} = 0$, je $0 = V^*V\vec{z} = V^*W\vec{z}$. ■

Definicija 5. Parcialni izometriji $V, W \in M_{m,n}$ sta *pravokotni* (ortogonalni), če je $V^*W = 0$ in $VW^* = 0$. V tem primeru pišemo $V \perp W$.

Trditev 9. Parcialni izometriji $V, W \in M_{m,n}$ sta pravokotni, če in samo če sta začetna prostora obeh parcialnih izometrij pravokotna in končna prostora prav tako pravokotna. V tem primeru je $V + W$ parcialna izometrija, katere začetni prostor je direktna vsota začetnih prostorov za V in W .

Dokaz. Če je $V \perp W$, je $V^*W = 0$ in $VW^* = 0$, od tod $(VV^*)(WW^*) = 0$ in $(V^*V)(W^*W) = 0$.

Če je $VV^*WW^* = 0$, je po Penrosovi lemi 1 $V^*WW^* = 0$, od tod po tej lemi $V^*W = 0$. Enako iz $V^*VW^*W = 0$ sledi $VW^* = 0$. Računajmo pri teh pogojih še:

$$(V + W)(V + W)^* = V^*V + W^*W.$$

Ker sta projektorja V^*V in W^*W pravokotna, lahko sedaj uporabimo trditev 7. ■

Posledica 9. Če je U parcialna izometrija in $V \leq^* U$ ($U, V \in M_{m,n}$), velja:

- (i) V in $(U - V)$ sta pravokotni parcialni izometriji;
- (ii) $\text{im}(U^*U) = \text{im}(V^*V) \oplus \text{im}((U - V)^*(U - V))$.

Dokaz. (i) Po izreku 2 je $W = U - V \leq^* U$ in po izreku 6 sta V in $U - V$ parcialni izometriji. Ker je $V^*V = V^*U$, je $V^*W = V^*(U - V) = 0$. Ker je $VV^* = UV^* = VU^*$, je $VW^* = V(U^* - V^*) = 0$. Tako je $V \perp W$. Preostanek sledi iz trditve 9. ■

Trditev 10. Če sta $W_1, W_2 \in M_{m,n}$ pravokotni parcialni izometriji in je $V_1 \leq^* W_1$, $V_2 \leq^* W_2$, je $V_1 \perp V_2$.

Dokaz. Po trditvi 9 sta začetna prostora za W_1, W_2 pravokotna. Po izreku 7 sta začetna prostora za V_1, V_2 pravokotna. Enako vidimo, da sta končna prostora za V_1, V_2 pravokotna. Po trditvi 9 je $V_1 \perp V_2$. ■

7. Penrosov razcep

Privzeli bomo naslednji rezultat (*razcep singularnih vrednosti*):

Izrek 8. Naj bo $A \in M_{m,n}$ in r manjši od števil m, n . Obstajajo:

- (i) matrika $S = [s_{ij}] \in M_{m,n}$, tako da je $s_{ij} = 0$ za $i \neq j$, $s_{11} \geq s_{22} \geq \dots \geq s_{rr} \geq 0$;
- (ii) unitarni matriki $W \in M_m$, $U \in M_n$, tako da je $A = WSU$. Če je $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, lahko vzamemo, da sta W, U realni ortogonalni matriki.

Za $m = n$ in $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ imamo ta izrek dokazan v [9, str. 96]. Splošno verzijo lahko najdemo v [7, str. 414]. Števila s_{ii} so pozitivni kvadratni koreni lastnih vrednosti matrike A^*A in jih imenujemo *singularne vrednosti* matrike A .

Če privzamemo že uporabljene oznake, je za $A \neq 0$

$$S = \sum_{i=1}^r s_{ii} E_{ii} = \sum_{i=1}^r s_{ii} (\vec{f}_i \otimes \vec{e}_i).$$

Združimo člene z enakimi pozitivnimi s_{ii} , pa dobimo

$$S = \sum_{j=1}^k t_j F_j,$$

pri čemer je $F_j = \sum_{i=a(j)}^{b(j)} E_{ii} \neq 0$. Tu je $a(1) = 1$, $a(j+1) = b(j) + 1$, $t_j = s_{a(j),a(j)} = s_{b(j),b(j)}$ in $t_1 > t_2 > \dots > t_k > 0$. Velja še: $\text{rang } A = \text{rang } S = \sum_{j=1}^k \text{rang } F_j$. Za $j \neq l$ je, kot se lahko takoj prepričamo, $F_j^* F_l = F_j F_l^* = 0$. Velja še:

$$F_j^* F_j = \sum_{i=a(j)}^{b(j)} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_i = P_j = P_j^*.$$

Lahko je preveriti, da je $P_j^2 = P_j$, tako da je P_j neničeln pravokotni projektor. Od tod je

$$A = WSU = \sum_{j=1}^k t_j W F_j U = \sum_{j=1}^k t_j V_j,$$

kjer je $V_j = W F_j U \neq 0$ za $j = 1, \dots, k$. Seveda je $\text{rang } F_j = \text{rang } V_j$.

Trdimo: $\{V_1, \dots, V_k\}$ so paroma pravokotne neničelne parcialne izometrije. Res je

$$V_j^* V_j = U^* F_j^* W^* W F_j U = U^* F_j^* F_j U = U^* P_j U \neq 0$$

ortogonalni projektor, saj je sebiadjungiran in $(U^* P_j U)^2 = U^* P_j U$. Prav tako je za $j \neq l$

$$V_j^* V_l = U^* F_j^* W^* W F_l U = U^* F_j^* F_l U = U^* 0 U = 0 = V_j V_l^*.$$

Izrek 9. Vsak neničeln $A \in M_{m,n}$ lahko zapišemo na en in en sam način kot

$$A = \sum_{j=1}^k t_j V_j,$$

kjer je $t_1 > t_2 > \dots > t_k > 0$ in so $V_1, \dots, V_k$ paroma pravokotne neničelne parcialne izometrije. To je **Penrosov razcep** matrike A . Velja $\text{rang}(A) = \sum_{j=1}^k \text{rang}(V_j)$.

Enoličnost razcepa bomo dokazali v naslednjem razdelku.

8. Glavni izrek

Drazin in Hartwig [5] sta dokazala:

Izrek 10. Naj imata neničelna $A, B \in M_{m,n}$ Penrosova razcepa

$$A = \sum_{j=1}^k t_j V_j, \quad B = \sum_{r=1}^q s_r W_r.$$

Potem je $A \stackrel{*}{\leq} B$ natanko takrat, ko obstaja taka (injektivna) funkcija $\varphi: \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, q\}$, da je $t_j = s_{\varphi(j)}$ in da je $V_j \stackrel{*}{\leq} W_{\varphi(j)}$ za vsak j , $1 \leq j \leq k$.

Dokaz. Gotovo je $A^*A = \sum_{j=1}^k t_j^2 V_j^* V_j$, $AA^* = \sum_{j=1}^k t_j^2 V_j V_j^*$.

Oglejmo si najprej zadostnost tega pogoja. Relacija $V_j \stackrel{*}{\leq} W_{\varphi(j)}$ pomeni

$$V_j^* V_j = V_j^* W_{\varphi(j)} = W_{\varphi(j)}^* V_j \quad \text{in} \quad V_j V_j^* = W_{\varphi(j)} V_j^* = V_j W_{\varphi(j)}^*.$$

Če je $r \neq \varphi(j)$, je $W_r \perp W_{\varphi(j)}$. Ker je $V_j \stackrel{*}{\leq} W_{\varphi(j)}$, po trditvi 10 velja $W_r \perp V_j$, se pravi $V_j^* W_r = V_j W_r^* = 0$. Zato je

$$A^*B = \left(\sum_j t_j V_j^* \right) \left(\sum_r s_r W_r \right) = \sum_j t_j s_{\varphi(j)} V_j^* W_{\varphi(j)} = \sum_j t_j^2 V_j^* V_j = A^*A$$

in

$$BA^* = \left(\sum_r s_r W_r \right) \left(\sum_j t_j V_j^* \right) = \sum_j t_j s_{\varphi(j)} W_{\varphi(j)} V_j^* = \sum_j t_j^2 V_j V_j^* = AA^*,$$

torej $A \stackrel{*}{\leq} B$.

Druga smer: če je $A^*A = A^*B = B^*A$ in $AA^* = BA^* = AB^*$, je

$$V_i A^* B = (V_i A^*) B = V_i \left(\sum_j t_j V_j^* \right) B = t_i V_i V_i^* B.$$

Po drugi strani je

$$\begin{aligned} V_i (A^* B) &= V_i (A^* A) = V_i \left(\sum_j t_j^2 V_j^* V_j \right) = \\ &= \sum_j t_j^2 (V_i V_j^*) V_j = t_i^2 V_i V_i^* V_i = t_i^2 V_i. \end{aligned}$$

Ker je $t_i > 0$, je

$$V_i V_i^* B = t_i V_i \quad (i = 1, \dots, k). \quad (10)$$

Gotovo je $BW_j^* = \sum_r s_r W_r W_j^* = s_j W_j W_j^*$. Po (10) je

$$V_i V_i^* B W_j^* = t_i V_i W_j^*.$$

Leva stran je enaka $s_j V_i V_i^* W_j W_j^*$. Tako je

$$s_j V_i V_i^* W_j W_j^* = t_i V_i W_j^*. \quad (11)$$

Izračunajmo še:

$$V_i^* A B^* = V_i^* \left(\sum_j t_j V_j \right) B^* = t_i V_i^* V_i B^*.$$

Ker je $AB^* = AA^*$, je

$$V_i^* A B^* = V_i^* A A^* = V_i^* \left(\sum_j t_j^2 V_j V_j^* \right) = t_i^2 V_i^* V_i V_i^* = t_i^2 V_i^*.$$

Od tod je

$$\begin{aligned} V_i^* V_i B^* &= t_i V_i^*, \\ B^* W_j &= \sum_r s_r W_r^* W_j = s_j W_j^* W_j. \end{aligned} \quad (12)$$

Pomnožimo (12) z desne z W_j :

$$V_i^* V_i B^* W_j = V_i^* V_i s_j W_j^* W_j = t_i V_i^* W_j.$$

Tako je

$$s_j V_i^* V_i W_j^* W_j = t_i V_i^* W_j. \quad (13)$$

Po (11) je

$$t_i V_i^* V_i W_j^* W_j = V_i^* (t_i V_i W_j^*) W_j = V_i^* (s_j V_i V_i^* W_j W_j^*) W_j = s_j V_i^* W_j.$$

Pomnožimo (13) s t_i , pa vidimo, da je

$$s_j^2 V_i^* W_j = t_i^2 V_i^* W_j.$$

Če je $t_i \neq s_j$, je $V_i^* W_j = 0$.

Po (13) je

$$t_i V_i V_i^* W_j W_j^* = V_i (t_i V_i^* W_j) W_j^* = V_i (s_j V_i^* V_i W_j^* W_j) W_j^* = s_j V_i W_j^*.$$

Pomnožimo (11) s t_i , pa je

$$s_j^2 V_i W_j^* = t_i^2 V_i W_j^*.$$

Ugotovili smo: za $s_j \neq t_i$ je $V_i^* W_j = V_i W_j^* = 0$.

Po (10) je

$$0 \neq t_i V_i^* V_i = V_i^* V_i V_i^* B = V_i^* B = V_i^* \left(\sum_r s_r W_r \right) = \sum_r s_r V_i^* W_r.$$

Natanko en člen v vsoti na desni je različen od 0, torej je t_i enak nekemu s_r . Ta r označimo s $\varphi(i)$, pa je

$$V_i^* V_i = V_i^* W_{\varphi(i)}.$$

Po (12) je

$$0 \neq t_i V_i V_i^* = V_i V_i^* V_i B^* = V_i \sum_r (s_r W_r^*) = \sum_r s_r V_i W_r^*.$$

Natanko en člen v vsoti na desni je od 0 različen, in sicer tisti, za katerega je $s_r = t_i$, se pravi $r = \varphi(i)$. Ker velja

$$V_i V_i^* = V_i W_{\varphi(i)}^* = W_{\varphi(i)} V_i^*,$$

je

$$V_i \stackrel{*}{\leq} W_{\varphi(i)} \quad \text{za } i = 1, \dots, k. \quad \blacksquare$$

Dokaz (enoličnosti Penrosovega razcepa). V izreku 10 naj bo $A = B$. Potem je $A \stackrel{*}{\leq} B$ in $B \stackrel{*}{\leq} A$. Torej obstaja tudi injektivna preslikava iz $\{1, \dots, q\}$ v $\{1, \dots, k\}$. Tako je $q = k$ in φ bijektivna. Ker so t_j in s_j urejeni po velikosti, je $t_j = s_j$ in $\varphi(j) = j$ za vsak j . Ker je $V_j \stackrel{*}{\leq} W_j$ in $W_j \stackrel{*}{\leq} V_j$, je $V_j = W_j$ za vsak j . ■

Avtor se zahvaljuje recenzentu za formulacijo izrekov 3 in 4.

LITERATURA

- [1] J. K. Baksalary, F. Pukelsheim, G. P. H. Styan, *Some properties of matrix partial orderings*, Linear Algebra Appl. **119** (1989), str. 57–85.
- [2] J. Conway, *A course in functional analysis*, druga izdaja, GTM 96, Springer-Verlag, New York 1990.
- [3] J. Grasselli, A. Vadal, *Linearna algebra. Linearno programiranje*, DMFA-založništvo, Ljubljana 2003.
- [4] A. Guterman, *Linear preservers for Drazin star partial order*, Comm. Alg. **29** (2001), str. 3905–3917.
- [5] R. E. Hartwig, M. P. Drazin, *Lattice properties of the $*$ -order for complex matrices*, J. Math. Anal. Appl. **86** (1982), str. 359–378.
- [6] R. E. Hartwig, G. P. H. Styan, *Star partial order for matrices*, Linear Algebra Appl. **82** (1996), str. 145–161.
- [7] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1999.
- [8] R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the theory of operator algebras, Volume II – Advanced theory*, Graduate Studies in Mathematics 16, AMS 1997.
- [9] T. Košir, B. Magajna, *Transformacije v geometriji*, DMFA, Ljubljana 1997.
- [10] R. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **51** (1955), str. 406–413.
- [11] I. Vidav, *Linearni operatorji v Banachovih prostorih*, Podiplom. semin. mat. **14**, DMFA, Ljubljana 1992.

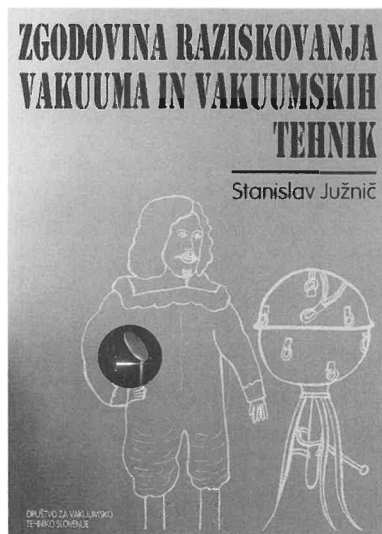
NOVE KNJIGE

Stanislav Južnič: ZGODOVINA RAZISKOVANJA VAKUUMA IN VAKUUMSKIH TEHNIK, Društvo za vakuumsko tehniko Slovenije, Ljubljana 2004, 372 strani.

Med pomembne srečne in izjemne okoliščine v razvoju Zemlje in življenja na njej nedvomno sodi tudi nastanek zračne atmosfere, ki jo Zemlja privlači ravno dovolj, da se njena sestava ne spreminja dosti že milijone let. Zrak je bil od antike naprej spoznan za enega od osnovnih elementov materije, a vse do 17. stoletja ni bilo jasnih predstav o njegovi naravi in sestavi. Pomen kisika za življenje in gorenje se je verjetno posredno dalo ugotoviti že prej, a njegova vloga se je izkazala za odločilno šele v dobi, ko so postali izvedljivi resni fizikalni in kemijski poskusi.

Vsakdo, ki se prepusti branju zanimive knjige Stanislava Južniča *Zgodovina raziskovanja vakuuma in vakuumskih tehnik*, bo dobil vtis, da je tehnika priprave vakuuma vplivala na znanost bistveno in odločilno. Ta se je lahko razvijala le tako hitro, kot je to dopuščala tehnologija danega obdobja, ki je omogočala izvedbo ključnih eksperimentov. Za opazovanje fizikalnih procesov na atomskem nivoju, za prehod ioniziranih delcev na makroskopski razdalji, za zmanjšanje toplotne prevodnosti itd. moramo zrak bistveno razredčiti. Kljub temu, da „vakuum“ srečamo že v bližnjem vesolju, je namesto potovanja tja mnogo prikladnejše vakuumске eksperimente izvajati v laboratoriju, kjer z različnimi tehnikami črpanja odstranimo zrak le iz eksperimentalne posode. Danes lahko pripravimo in še izmerimo tlak, ki je za šestnajst razredov velikosti nižji od zračnega tlaka! Pot do današnjega vedenja pa ni bila lahka. Velika odkritja 19. stoletja in potrebe industrije so dvignili nivo tehnologije, ki je omogočala še večje korake v znanosti. Kako je to potekalo v resnici, nam tehnično izobraženim naravoslovcem pogosto ni bilo posredovano. V slovenščini je morda edina primerljivo obširna knjiga *Zgodovina fizike* Jamesa Jeansa iz leta 1955, ki je izšla pri DZS, a je napisana s stališča matematika in astronoma.

Avtor novo izdane knjige v prvem od štirinajstih poglavij oriše pregled vakuumске znanosti in tehnologij od antike do 20. stoletja. V naslednjih poglavjih nas na zanimiv način seznani z raziskavami na posamičnem tehničnem področju v svetu in posebej na ozemlju, ki smo ga naseljevali Slovenci. Temeljna spoznanja z več področij znanosti poveže s tehnologijami oziroma napravami, ki so pomagale zgraditi današnjo informacijsko družbo. Posamezna poglavja obravnavajo katodne žarke, vakuumsko metalurgijo, vakuumске balone, termovko, žarnico, rentgensko elektronko, elektronski mikroskop, pospeševalnik delcev itd. Avtor je svoje obsežno znanje zgodovine fizike uporabil tako, da je velika imena posameznikov spretno vpletel v tekst z omembo ali reprodukcijo dela njihove ključne razprave ali patenta. Knjiga se, verjetno tudi v svetovnem merilu, loteva orisa zgodovine znanosti na izviren način, namreč skozi razvoj le enega od njenih bistvenih segmentov, kakršna sta, po mnenju avtorja knjige, vakuumska znanost in tehnika.



Vincenc Nemanič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER

R 177/05

Letnik 52, številka 5

ISSN 0473-7466, UDK 51 +



100002005, 5

C0B1SS 5

ODPISANO

VSEBINA

Članki

Strani

Lighthillova akustična analogija in zvočni hrup pri turbulenci, prvi del, Rudolf Podgornik, Nikola Holeček, Brane Širok in Marko Hočever	129–142
Zvezdica delna urejenost na matrikah, Peter Legiša	143–160

Nove knjige

Zgodovina raziskovanja vakuumu in vakuumskih tehnik, Vincenc Nemanič	160–XIX
---	---------

Vesti

Obvestilo, Nada Razpet	142
------------------------------	-----

CONTENTS

Articles

Pages

Lighthill Acoustic Analogy and Noise in Turbulence, First part, Rudolf Podgornik, Nikola Holeček, Brane Širok and Marko Hočever	129–142
Star partial order on matrices, Peter Legiša	143–160
New books	160–XIX
News	142

Na naslovnici je Lighthillova akustična analogija: lokalizirani turbulentni izvori ustvarjajo zvočni hrup (glej članek na strani 129).