

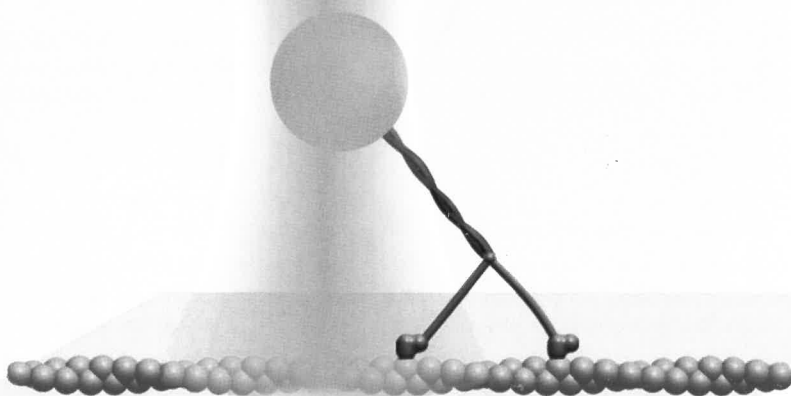
ODPISANO

2005

Letnik 52

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2005, letnik 52, številka 4, strani 97–128

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460, 2512 005 **Telefaks:** (01) 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://zaloznistvo.dmfa.si/omf/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Nada Razpet (vesti), Pavle Saksida (nove knjige), Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško stavila Monika Testen.

Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1400 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 5.000 SIT, za druge družinske člane in študente pa 2.500 SIT. Naročnina za ustanove je 8.000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2005 DMFA Slovenije – 1612

Poština plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

MANIPULACIJA MOLEKULARNIH MOTORJEV Z OPTIČNO PINCETO

MOJCA VILFAN

Institut Jožef Stefan

PACS: 87.16.Nn, 87.80.Cc

Usmerjeno gibanje celic in transport snovi znotraj celic omogoča posebna vrsta proteinov, ki jih imenujemo molekularni motorji. S kombiniranjem optične pincete in fluorescenčne mikroskopije lahko opazujemo premikanje molekularnega motorja, razločimo posamične korake, ki jih motor opravi vzdolž aktinskih filamentov, in ugotovimo, kako se giblje. Optična pinceta nam tudi omogoča, da spremljamo vedenje motorja pod vplivom zunanje obremenitve. Take meritve so pomembne, saj v naravi motor pogosto deluje v kombinaciji z drugimi, močnejšimi motorji. Tovrstne meritve daje pomembne informacije o mehanizmu premikanja motorja in o delovanju celice kot celote.

MANIPULATION OF MOLECULAR MOTORS USING OPTICAL TWEEZERS

Directed motion of cells and transport of matter within cells is regulated by a special kind of proteins, the so-called molecular motors. Combining optical tweezers and fluorescence microscopy, motion of a molecular motor can be observed, single steps can be resolved and the stepping mechanism can be determined. Additionally, the optical tweezers enable us to study the behaviour of a motor under external loads. These measurements are especially relevant as in vivo the motor often co-localizes with other, much stronger, motors. The experiments give important information on the stepping mechanism of a motor and thus contribute to a better understanding of the cell.

1. Uvod

Ko se odpravimo na pot, želimo čim hitreje, varno in zanesljivo priti iz kraja A v kraj B. Izberemo poti, ki povezujejo izhodišče s ciljem, in prevozno sredstvo, ki nam je na voljo in ki ustreza poti. Tako reševanje problema ni omejeno zgolj na makroskopski svet – tudi v celicah je prevoz organiziran na podoben način.

V celicah živih bitij je za premikanje in prenos snovi vzpostavljen transportni sistem, ki temelji na usmerjenem gibanju vzdolž vnaprej načrtanih poti. Tako usmerjeno gibanje je pri transportu snovi in premikanju bistveno bolj učinkovito kot, recimo, prosta difuzija molekul v prostoru. Molekule, ki opravljajo transport, imenujemo *molekularni motorji*. To so posebni proteini, ki imajo sposobnost uporabiti kemijsko energijo, praviloma shranjeno v molekulah adenozin-tri-fosfata (ATP), za usmerjeno gibanje v določeni smeri po vnaprej predpisani poti. Za boljše razumevanje lahko poiščemo analogijo

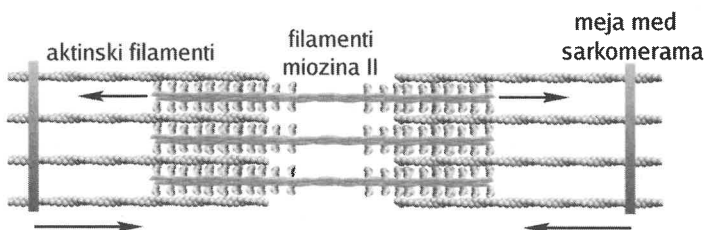
v makroskopskem svetu: molekularne motorje nadomestimo z avti, molekule ATP z gorivom, filamente, vzdolž katerih se gibljejo motorji, pa z enosmernimi cestami.

Filamenti, ki jih pri premikanju izkoriščajo motorji, so dolgi filamenti citoskeleta. Le-ti so različni za različne vrste motorjev, mi se osredotočimo zgolj na *aktinske filamente*. Aktin je protein, ki ga je v celici evkariontov največ. Filamenti, ki jih tvori, so razmeroma tanki (premer 6–8 nm), dolgi pa tudi več 10 μm . Največ jih najdemo tik pod zunanjo membrano celice, zato je aktin tisti, ki določa njeno obliko. Pomembno vlogo ima tudi pri premikanju, fagocitozi in delitvi celice, najbolj opazna pa je naloga, ki jo opravlja skupaj z molekularnim motorjem *miozinom* pri krčenju mišic [1].

V tem prispevku bom podrobneje predstavila molekularni motor miozin in opisala, kaj nam o njegovem delovanju razkrijejo eksperimenti z optično pinceto.

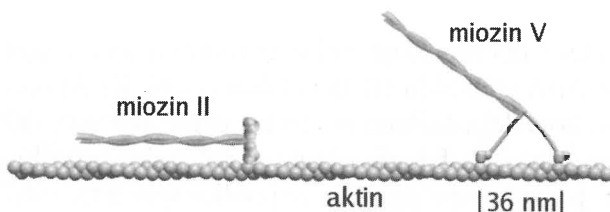
2. Miozin, mišice in še kaj

Kadar govorimo o molekularnem motorju miozinu, ne moremo mimo pomembne naloge, ki jo ima pri krčenju mišic. Mišica je namreč sestavljena iz dolgih vlaken, v katerih najdemo gosto mrežo filamentov aktina in mišičnega miozina, ki se med seboj prepletajo. Njihovo razporeditev najlepše prikažemo na shemi osnovnega gradnika mišične celice – *sarkomere* (slika 1): tanki aktinski filamenti so na enem koncu pripeti na steno sarkomere, vmes pa so debeli filamenti miozina, ki so sestavljeni iz velikega števila molekul. Miozin, ki ga najdemo v mišicah, je tako imenovani miozin II. Njegova molekula ima dimerno obliko z dolgim vijačno-vijačnim repom (slika 2). Ti repi se povezujejo v mikrometrške filamente, funkcionalne glave pa vedno ostanejo na zunanji strani. Ko mišica prejme signal za krčenje, začnejo glave motorja hidrolizirati ATP (porabljati kemijsko energijo) in motorji začnejo



Slika 1. Shematski prikaz osnovne enote mišice – sarkomere. V njej se filamenti aktina in miozina II prepletajo in krčenje mišice je posledica mimobežnega drsenja filamentov.

teči, pri čemer je smer premikanja določena z asimetrijo polarnega aktinskega filameta. Posledica delovanja motorjev je mimobežno drsenje miozinskih in aktinskih filamentov in tako se mišica skrči, ne da bi se pri tem spremenila dolžina posameznih filamentov. Tipičen filament mišičnega miozina ima okoli 300 miozinskih glav, kar pod ugodnimi pogoji omogoča hitrosti drsenja okoli 15 $\mu\text{m/s}$. Za krčenje ene sarkomere iz raztegnjenega stanja (tipično 3 μm) v skrčeno stanje (2 μm), je tako potrebna manj kot desetinka sekunde. Ker v mišični celici vse sarkomere skoraj istočasno prejmejo signal za krčenje, je desetinka sekunde tudi časovna skala, na kateri se skrči celotna mišica.



Slika 2. Shematski prikaz filameta aktina in molekularnih motorjev miozina II in miozina V. Perioda dvojnovijačne strukture aktina je 36 nm.

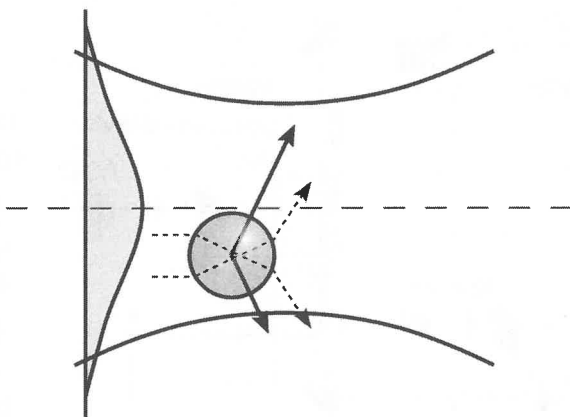
Mišični miozin II je le en predstavnik zelo velike družine miozinov, ki se razlikujejo tako po zgradbi, obliki, kot tudi nalogi, ki jo imajo v celici. Trenutno je poznanih okoli 150 različnih vrst, vendar so le redki obširneje preučevani. Eden bolj raziskanih je *miozin V* (slika 2). Najdemo ga predvsem v nevronih, to je celicah živčevja, kjer skrbi za transport raznih organelov, veziklov in nukleinskih kislin. V nasprotju z miozinom II se miozin V ne združuje v filamente, ampak tečejo molekule miozina V vzdolž aktina posamično. Čeprav je hitrost premikanja zato bistveno manjša, saj dosega ena molekula hitrost največ okoli 350 nm/s, je razdalja, ki jo opravi pri tem, izredno velika, pogosto več mikronov. Tako imenovana procesivnost motorja (to je lastnost, da lahko naredi ena molekula več zaporednih korakov) je zasnovana na dejstvu, da sta glavi motorja večino časa vezani na aktin in ga spustita le med korakom samim. Situacija je drugačna pri miozinu II, ki je zgolj med korakom vezan na aktin, sicer pa ne. Dolgo časa ni bilo jasno, na kakšen način se molekula miozina V premika – ali se premika kot gosenica (ena glava vedno ostaja vodilna) ali molekula „hodi“ kot človek (vodilna glava se izmenjuje). Poskusi s fluorescenčno označenimi molekulami so pokazali, da dvoglava molekula dejansko „hodi“ kot človek [2, 3]. Pri tem motor porabi po eno molekulo ATP za vsak korak.

Zaradi procesivnega gibanja posameznih molekul in razmeroma majhne hitrosti je miozin V idealen za eksperimente, kjer nameravamo preučevati eno samo molekulo. Molekula je poleg tega še razmeroma velika (slika 2) in na koncu repa nespecifično veže tovor, kar pomeni, da jo lahko v laboratorijskih eksperimentih brez večjih težav pritrdimo na steklo ali na polistirensko kroglico. Izkazalo se je, da take molekule najboljše opazujemo s kombinacijo fluorescence in optične pincete, saj nam kombinirana postavitev omogoča celo vrsto poskusov in načinov manipulacije gibanja motorja.

3. Optična pinceta

Začetni poskusi manipulacije mikrometrskih delcev s svetlobo segajo v leto 1970, ko je Arthur Ashkin (Bellevue laboratoriji, ZDA) opazil, da lahko z močno zbranim laserskim žarkom nevtralne delce ulovimo, držimo na mestu ter po želji premikamo [4]. Kmalu za tem so začeli delati poskuse z biološkimi vzorci, vendar je prišlo do pravega napredka šele leta 1987, ko so prvič uporabili manj destruktivne laserje. Takrat so lahko prvič držali bakterijo *Escherichia coli* v pasti več ur. Bakterija je eksperiment ne samo preživel, ampak se je, medtem ko je bila ujeta, celo razmnoževala [5]. V zadnjem času uporabljamo optično pinceto vse bolj za preučevanje posameznih molekul, npr. DNA in molekularnih motorjev [6].

Že Ashkin je ugotovil, da je za opazovanje bioloških (tudi živih) vzorcev najprimerneje uporabiti laser z valovno dolžino v infrardečem območju. Pri teh valovnih dolžinah je absorpcija najmanjša, kar občutno zmanjša nezaželeno segrevanje in uničenje vzorca. Večina optičnih pincet zato uporablja kot vir svetlobe Nd:YAG laser, katerega valovna dolžina je 1064 nm. Laserski snop v optični pinceti je močno zožen, kar dosežemo z zbiralno lečo (objektivom) z veliko numerično aperturo. Če blizu tako zbranega snopa postavimo objekt, ki ima lomni količnik večji od lomnega količnika okolice, deluje nanj sila, ki ga vleče v središče snopa. Pojav sile najlažje razložimo, če si shematsko narišemo prehod žarkov skozi objekt, v našem primeru dielektrično kroglico (slika 3). Žarki, ki prehajajo skozi kroglico, se lomijo, pri čemer pride do spremembe gibalne količine. Če bi bil profil intenzitete snopa povsod enak, bi se spremembe gibalnih količin med seboj izničile in ostal bi samo svetlobni tlak na kroglico. V močno zbranem Gaussovem snopu pa je zaradi gradienta intenzitete skupna sprememba gibalne količine in s tem sila, ki deluje na kroglico, različna od nič in kaže proti osi laserskega snopa. Velikost sile na kroglico je odvisna od moči laserja, običajno so sile med 1 in 100 pN.

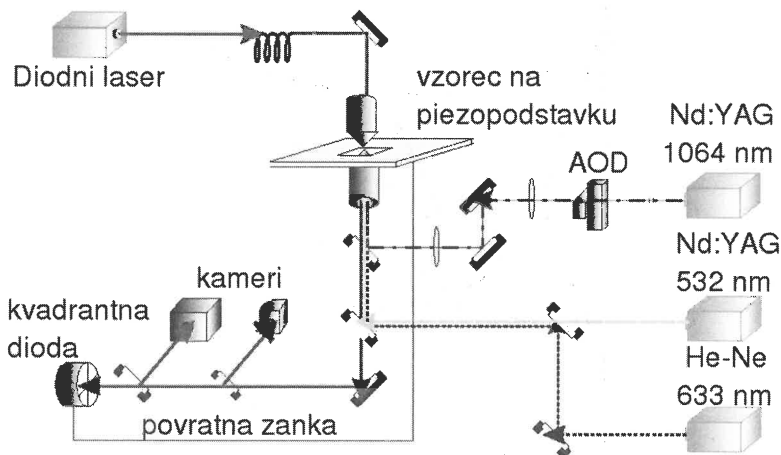


Slika 3. Shematski prikaz prehoda žarkov skozi dielektrično kroglico. Zaradi loma pride do sprememb gibalnih količin žarkov in tako do sile na kroglico, ki jo vleče v središče zbranega laserskega snopa.

Za poskuse ni dovolj, da kroglico ujamemo, moramo jo znati tudi premikati in pri tem natančno poznati njeno lego. To lahko naredimo na več načinov: kroglico lahko direktno opazujemo z digitalno kamero, lahko pa osvetljeno kroglico preslikamo na kvadrantno fotodiodo, ki zazna vsakršen odmik od ravnovesne lege (slika 4). Lego kroglice lahko določimo na nekaj nanometrov natančno na milisekundni časovni skali.

Čeprav lahko z optično pinceto ujamemo posamezne molekule, je za opazovanje molekularnih motorjev primerneje, če motor najprej pritrdimo na polistirensko kroglico. To naredimo tako, da zmešamo kroglice z izredno majhno količino motorjev v primerni raztopini. Zaradi lastnosti motorja, da nespecifično veže tovor, vezava na polistirensko kroglico ni problematična. Paziti moramo zgolj na to, da na kroglici ni preveč motorjev, ki bi se skušali hkrati vezati na aktin in bi se motili med premikanjem.

Ko imamo pripravljen motor, mu moramo „zgraditi“ cesto, po kateri bo tek. V ta namen je potrebno aktin pritrditi, pri čemer se nam ponujata dve možnosti. Prva možnost je, da aktin vezemo na krovno stekelce, ki tvori steno našega vzorca. Taka priprava je razmeroma preprosta, vendar lahko vezava popači filament in tako vpliva na gibanje motorja. Drug način je vezava aktina med dve kroglici, ki ju simultano držimo v dveh pasteh (slika 5). Preklapljanje laserskega žarka z akustooptičnimi deflektorji je namreč dovolj hitro, da nam omogoča hkratno manipulacijo več delcev, saj je čas preklapljanja bistveno hitrejši od karakterističnega časa difuzije kroglice. Slednja izvedba je tehnično bolj zapletena, vendar lahko v tem primeru motor neovirano teče po aktinu in lahko opazujemo morebitno vijačno gibanje



Slika 4. Postavitev optične pasti v kombinaciji s fluorescenčno mikroskopijo. IR Nd:YAG laser uporabimo za optično pinceto, druga dva laserja (Nd:YAG in He-Ne) potrebujemo za vzbujanje fluorescence, AOD je akustooptični deflektor za natančno krmiljenje žarka, diodni laser in eno kamero rabimo za detekcijo lege kroglice, prav tako tudi kvadrantno diodo. Drugo kamero uporabimo za opazovanje fluorescenčno označenega aktina.

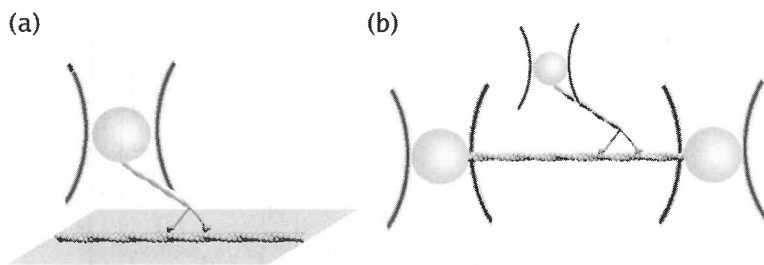
motorja okoli filamenta. Pomembno je tudi, da aktinske filamente vidimo, saj drugače ne moremo pripeljati kroglice z motorjem v njihovo bližino. V ta namen jih fluorescenčno označimo, osvetljujemo z dodatnim laserjem, katerega valovna dolžina ustreza barvilu, in opazujemo z dodatno kamero (glej sliko 4).

Vzorec za opazovanje pripravimo tako, da med dve stekelci najprej od-pipetiramo raztopino aktinskih filamentov, ki se primejo na poprej pripravljena stekelca, šele nato dodamo razredčene kroglice z motorji. Celoten eksperiment poteka v vodni raztopini, ki poleg proteinov vsebuje še potrebne količine soli in ATP.

4. Meritve s posameznimi molekulami miozina

Ko kroglico, na katero je pritrjen motor, ujamemo in pripeljemo v bližino aktina, začne ob ustreznih pogojih (poleg pravih koncentracij raznih soli in zadostne količine ATP tudi prava vrednost pH in temperature) motor teči po aktinu in s tem vleči kroglico iz središča snopa. Če je pinceta prešibka (sile na kroglico do približno 0.7 pN), lahko motor to silo premaga in kroglica uide iz pasti. V nasprotnem primeru motor začne teči in bolj ko je oddaljen od središča snopa, večja sila deluje na kroglico in bolj ga vleče nazaj. Če želimo

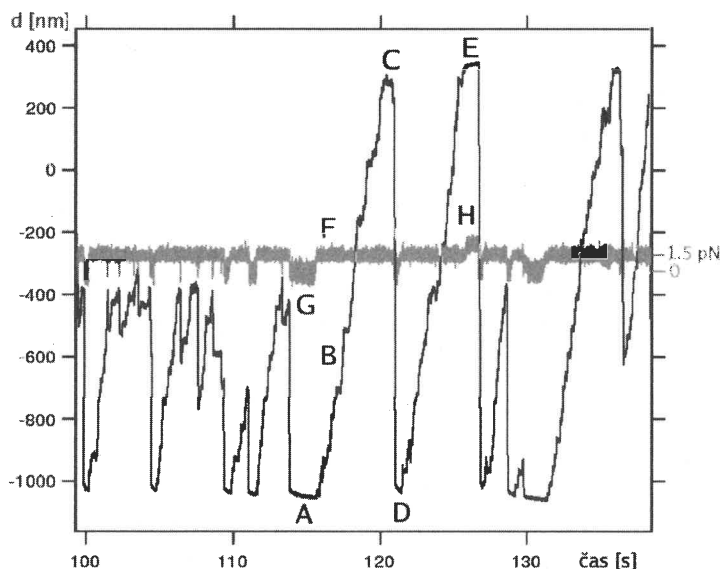
Manipulacija molekularnih motorjev z optično pinceto



Slika 5. Dva možna načina priprave vzorca: (a) Vlakno aktina je pritrjeno na krovno stekelce, miozin na kroglico, ki je ujeta v past. (b) Aktin je vpet med dve kroglici, miozin je vezan na tretjo kroglico. Kroglice ujamemo v več pasti, kar nam omogoča postavitve z akustooptičnimi deflektorji. Slednja izvedba je zahtevnejša, a motor neovirano teče po aktinu.

silo, ki deluje na motor med tekom, držati konstantno, moramo vpeljati povratno zanko. Ta sproti premika ali pinceto ali aktin in tako ohranja vnaprej določen odmik kroglice od središča snopa. Pri izvedbi povratne zanke se nam ponujata dve možnosti. Za opazovanje tekov, dolgih nekaj mikrometrov, je najugodnejše izvesti povratno zanko prek piezopodstavka, na katerega je pritrjen vzorec. Zaradi povratne zanke ostajata žarek in kroglica ves čas na istem mestu, podstavek z vzorcem in aktinom pa se kot tekoči trak izmika. Na ta način vedno ostanemo v optimalnem območju detekcije. Drugi način povratne zanke je prek akustooptičnih deflektorjev, s katerimi premikamo žarek, vzorec pa ostaja na istem mestu. Prednost te metode je predvsem hiter odziv, saj smo pri piezopodstavku omejeni z razmeroma počasnim odzivom, ki je ponavadi okoli 10 ms.

S tem ko ohranjamo izmik kroglice iz središča snopa, ohranjamo silo na kroglico – in s tem na motor – konstantno. Premikanje piezopodstavka (ali signal iz akustooptičnih deflektorjev) beležimo in tipična izmerjena krivulja je prikazana na sliki 6, kjer črna črta pomeni odmik podstavka, siva pa silo na kroglico. Na spodnjem delu je izhodiščna ravnovesna lega kroglice (A). Premikanje motorja ustreza premikanju podstavka (B), dokler motor aktina ne spusti (C) in ga povratna zanka potegne nazaj v ravnovesno lego (D). Običajno preteče motor nekaj 100 nm, včasih pa doseže največjo možno dolžino, ki je omejena z obsegom piezopodstavka (E). Takrat naredi še kakšen korak ali dva, dokler ne postane sila prevelika (tipično nad 1.7 pN) in se motor odtrga ter vrne v izhodišče. Siva krivulja predstavlja silo, ki deluje na kroglico. Zaradi povratne zanke je le-ta med tekom konstantna (F) in enaka vnaprej nastavljeni vrednosti. Manjša je le, kadar motor ni vezan na aktin (G), večja pa takrat, ko naredi motor še kakšen korak izven območja



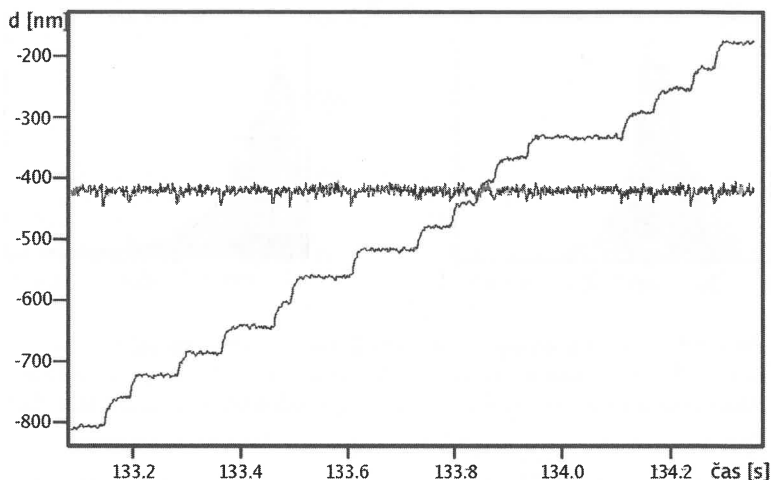
Slika 6. Značilna meritev gibanja molekularnega motorja, posneta z optično pinceto. Prikazuje izmik piezopodstavka iz izhodiščne lege, ki ustreza premikanju molekularnega motorja. Meritev je bila posneta ob nasičeni koncentraciji ATP pri konstantni sili 1.5 pN v smeri, ki je nasprotovala gibanju motorja. Podrobnejši opis je v besedilu.

povratne zanke (H). Opazimo, da je šum sile na kroglico bistveno večji, ko motor ni vezan na aktin, kot pa tedaj, ko motor teče. Meritev, predstavljena na sliki 6, vsebuje vse polno informacij o mehanizmih gibanja molekularnega motorja, mi si bomo ogledali le najosnovnejše.

4.1 Dolžina in čas enega koraka

Če izsek meritve močno povečamo, lahko vidimo, da poteka premikanje piezopodstavka v diskretnih korakih (slika 7). Ti koraki ustrezajo korakom molekularnega motorja in iz meritev lahko razberemo porazdelitev dolžine korakov motorja in časa, potrebnega za en korak. Z natančno analizo ugotovimo, da se povprečna dolžina koraka ujema s periodo aktinskega filameta (36 nm), vendar je porazdelitev dolžine korakov okoli vrha razmeroma široka (slika 8a). To pomeni, da ima aktin več prostih mest, kamor se lahko veže miozin, a so ta konformacijsko manj ugodna in zato manj verjetna.

Iz porazdelitve časovnih intervalov, v katerih miozin naredi en korak, lahko sklepamo na procese, ki potekajo v molekuli med korakom samim. Oblika časovne porazdelitve (slika 8b) namreč pove, da gre pri premikanju miozina V za najmanj dva ločena procesa: enega počasnega (eksponentno

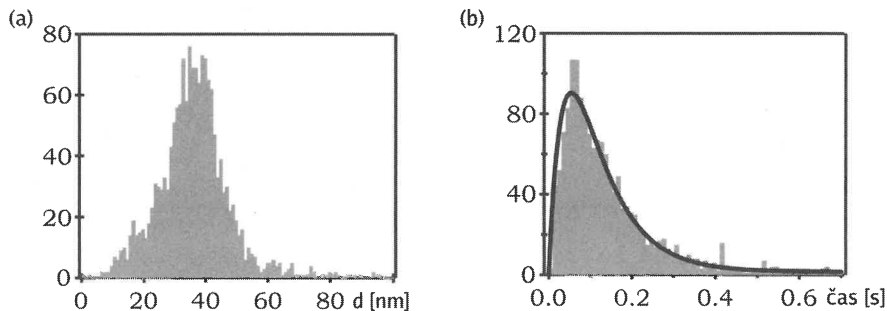


Slika 7. Povečan izsek meritve. Razločni so koraki, ki jih dela motor. V povprečju so dolgi 36 nm, kar se ujema s periodo vijačnice aktina. Sila na motor ostaja med meritvijo konstantna.

pojemanje pri daljših časih) in vsaj enega hitrega (hitro naraščanje na začetku). Zaradi omejitev našega eksperimenta hitrih procesov ne moremo razločevati in lahko damo le oceno za skupni čas. Eksponentno pojemanje za daljše čase pove, da je pri premikanju miozina V en sam počasen proces, ki omejuje hitrost gibanja. S spreminjanjem koncentracije adenozi-di-fosfata (ADP) so odkrili, da je najpočasnejši proces v ciklu enega koraka sprostitve molekule ADP z zadnje glave [7]. Šele ko se ADP sprosti, se lahko na glavo veže nova molekula ATP, ki bo dala energijo za nov korak. Zavedati se je treba, da je sprostitve ADP omejujoč proces zgolj tedaj, ko je v vzorcu zadostna količina molekul ATP. Če je le-teh zelo malo, je hitrost premikanja linearno sorazmerna s koncentracijo molekul ATP: 1 korak/s na mikromol ATP. Nadzorovano spreminjanje hitrosti je posebej prikladno za eksperimentalno delo, saj je počasnejše molekule lažje opazovati in spremljati njihovo gibanje.

4.2 Odvisnost parametrov gibanja od zunanje obremenitve

Eksperimenti z optično pinceto nam omogočajo, da spremljamo obnašanje motorja pod različno velikimi zunanjimi silami, ki zavirajo njegovo gibanje. Sami namreč lahko določimo, pri kakšnem izmiku kroglice iz ravnovesne lege sprožimo povratno zanko – čim večji je odmik, tem večja je sila,



Slika 8. Porazdelitev dolžin korakov posameznih molekul miozina (a) in časa, potrebnega za en korak (b). Široka porazdelitev dolžine korakov nakazuje, da je na aktinu več mest, kamor se lahko veže miozin. Iz časovne porazdelitve sklepamo na mehanizme premikanja.

ki deluje na kroglico in posledično na motor med tekom. Meritve kažejo, da je povprečna dolžina koraka skoraj neodvisna od obremenitve za vse sile med 0.7 pN in 1.6 pN, pri večjih silah motor sploh ne začne teči. Te ugotovitve podpirajo domnevo, da gre pri premikanju motorja za usmerjen sunek in ne za difuzivno iskanje primerne vezavnega mesta, saj bi bila dolžina koraka v tem primeru močneje odvisna od sile.

4.3 Delovanje motorjev pod veliko obremenitvijo

V celici je pogost pojav, da en tovor vežeta dva različna motorja in kaj lahko se zgodi, da mora molekula miozina sodelovati (ali nasprotovati) molekuli drugega motorja, na primer kinezina. Ta vrsta motorjev deluje z bistveno večjo silo kot miozin, tipično okoli 8 pN. Zato so raziskave, kjer na motor delujemo z izredno veliko obremenitvijo, ključnega pomena za razumevanje delovanja motorja v naravnih pogojih.

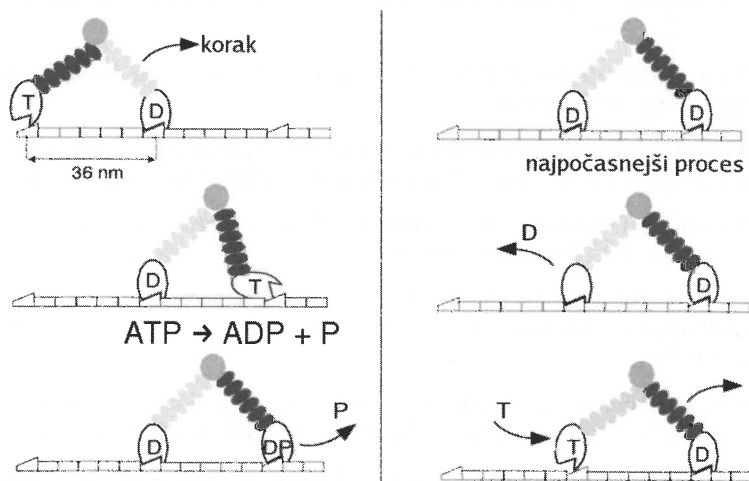
V grobem lahko ločimo dva primera – ali motor vlečemo v smeri gibanja, ali v smeri, ki gibanju nasprotuje. Če deluje na motor sila 5 pN v smeri gibanja, se dolžina koraka še vedno ujema z vijačnico aktina. Edina opazna sprememba je rahlo povečana hitrost premikanja, ki naraste za okoli 20 %.

Precej bolj zanimivo dogajanje opazimo pri močnih silah, ki zavirajo motor. Korakov naprej sploh ni več, saj sile okoli 5 pN motor ne more premagovati. Zato pa proti pričakovanjem pogosto zaznamo več zaporednih korakov v vzratni smeri. Vlako aktina je namreč asimetrično in smer premikanja motorja je s to asimetrijtočno določena. V tem primeru gre torej za korake v prepovedani smeri. Statistična obdelava podatkov pokaže, da je povprečna dolžina korakov nazaj enaka kot naprej (36 nm). Vendar pri gibanju nazaj velika sila povzroči, da je „sprednja“ glava tista, ki spusti, in

ne zadnja, kot bi pričakovali. Te ugotovitve lahko primerjamo s poskusi na „enoglavih“ različicah miozina [8], kjer so opazili, da je gibanje in obnašanje posameznega dela miozina (ene glave torej) močno odvisno od zunanje sile. Skupaj z našimi opazovanji lahko sklepamo, da je naravi še enkrat uspelo tehnično izpopolniti delovanje motorja: gibanje motorja kot celote je na zunanjo silo precej neobčutljivo, delovanje posameznih delov pa je odvisno od sile. Sklepamo, da so sile, posredovane prek elastičnih vratov v molekuli, tiste, ki skrbijo za komunikacijo med glavama, odločijo torej, katera glava bo spustila aktin in naredila korak [9, 10].

5. Model premikanja motorja

Zgoraj opisana opazovanja z optično pinceto in fluorescenčno mikroskopijo so pojasnila, kako se premika miozin V (slika 9): naj bo začetno stanje tako, da je miozin z obema glavama vezan na aktin. Sprednja nosi še molekulo ADP, zadnja pa čaka, da se nanjo veže ATP. V trenutku, ko se veže, zadnja glava spusti aktin in zaradi elastičnih sil naredi usmerjeni sunek v smeri naprej. Mimo druge glave se zavihti na novo prijemno mesto. Tam poteče hidroliza ATP v ADP, sprostitvev fosfata in ob tem vezava sedaj sprednje glave na aktinski filament. V stanju, kjer sta obe glavi vezani na aktin in obe nosita ADP, ostane molekula najdlje (okoli 100 ms). Nato zadnja glava sprosti ADP in molekula miozina je pripravljena na nov korak.



Slika 9. Trenutno uveljavljen model premikanja molekule miozina V. T označuje molekulo ATP, ki je vezana na glavo motorja, D molekulo ADP in P fosfat, ki se sprosti ob hidrolizi.

6. Povzetek

Predstavila sem enega izmed načinov uporabe optične pincete v biološke namene. Zaradi zadostne krajevnosti in časovne ločljivosti in sil, ki ustrezajo silam na nivoju posameznih molekul, je ta eksperiment za opazovanje molekularnih motorjev še posebej primeren. Opazujemo lahko diskretne korake in iz kinematike sklepamo na mehanizme premikanja molekule. Kljub temu da imamo že dokaj jasno podobo o mehanizmu premikanja miozina V, pa ostaja – in nastaja – še veliko nerešenih vprašanj.

Omenjeni poskusi so bili narejeni v laboratoriju prof. dr. Matthiasa Riefa, Tehnična univerza v Münchnu, sedaj pa jih nadaljujemo v Sloveniji, v sodelovanju Instituta Jožef Stefan ter Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani.

LITERATURA

- [1] B. Alberts et al., *Essential Cell Biology*, Garland, New York (1998).
- [2] A. Yildiz, J. N. Forkey, S. A. McKinney, T. Ha, Y. E. Goldman in P. R. Selvin, *Myosin V Walks Hand-Over-Hand: Single Fluorophore Imaging with 1.5-nm Localization*, *Science* **300** (2003), str. 2061–2065.
- [3] D. M. Warshaw, G. G. Kennedy, S. S. Work, E. B. Krementsova, S. Beck in K. M. Trybus, *Differential Labeling of Myosin V Heads with Quantum Dots Allows Direct Visualization of Hand-Over-Hand Processivity*, *Biophys. J.* **88** (2005), L30–L32.
- [4] A. Ashkin, *Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure*, *Phys. Rev. Lett.* **24** (1970), str. 156–159.
- [5] A. Ashkin, J. M. Dziedzic in T. Yamane, *Optical trapping and manipulation of single cells using infrared laser beams*, *Nature (London)* **330** (1987), str. 769–771.
- [6] J. E. Molloy, K. Dholakia in M. J. Padgett, *Preface: Optical tweezers in a new light*, *J. of Mod. Opt.* **50** (2003), str. 1501–1507.
- [7] M. Rief, R. S. Rock, A. D. Mehta, M. S. Mooseker, R. E. Cheney in J. A. Spudich, *Myosin-V stepping kinetics: A molecular model for processivity*, *PNAS* **97** (2000), str. 9482–9486.
- [8] C. Veigel, F. Wang, M. L. Bartoo, J. R. Sellers in J. E. Molloy, *The gated gait of the processive molecular motor, myosin V*, *Nat. Cell. Biol.* **4** (2002), str. 59–65.
- [9] A. E.-M. Clemen, M. Vilfan, J. Jaud, J. Zhang, M. Bärmann in M. Rief, *Force-Dependent Stepping Kinetics of Myosin-V*, *Biophys. J.* **88** (2005), str. 4402–4410.
- [10] A. Vilfan, *Elastic Lever-Arm Model for Myosin V*, *Biophys. J.* **88** (2005), str. 3792–3805.

POT DO POSEBNE TEORIJE

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.65.+g, 03.30.+p

Pred sto leti je Einstein objavil članek, v katerem je vpeljal posebno teorijo relativnosti. Kljub temu da obstaja nekaj trdnih opornih točk, ne poznamo toka njegovih misli. Razčlenitvi članka in razpravi o mogoči poti do teorije sledi poskus, da bi njegov prispevek primerjali s prispevki predhodnikov.

THE WAY TO THE SPECIAL THEORY

A hundred years ago Einstein published the paper in which he introduced the special theory of relativity. Although there are some solid points of reference the chain of his thought remains unknown. After analyzing the paper and discussing a possible way to the theory we try to compare his contribution with those of forerunners.

K elektrodinamiki gibajočih se teles

Albert Einstein, šestindvajsetletni uslužbenec patentnega urada v Bernu, je v svojem „čudovitem letu“ 1905 napisal šest člankov. Članki – izšli so v *Annalen der Physik*, štirje tega leta in dva leto zatem – so odločilno vplivali na razvoj fizike. Četrty članek *K elektrodinamiki gibajočih se teles* je uvedel posebno teorijo relativnosti [1].

Na začetku članka je Einstein opisal poskus z magnetom in ovojem. Naj ovoj miruje in premaknimo magnet. Okoli gibajočega se magneta nastane električno polje, ki požene tok po ovoju. Naj miruje magnet in premaknimo ovoj. V tem primeru ni električnega polja, ampak se v ovoju, ki se giblje po magnetnem polju, inducira napetost, in ta požene po ovoju enak tok. Maxwelllova elektrodinamika „v uporabi za gibajoča se telesa pripelje do asimetriji, ki niso značilne za pojave“.

Nato je razgrnil načrt: „Podobni primeri in neuspešni poskusi, da bi ugotovili gibanje Zemlje relativno na ‘svetlobni medij’, kažejo, da pojmu absolutnega mirovanja ne samo v mehaniki, ampak tudi v elektrodinamiki ne ustrezajo nobene pojavne lastnosti, ampak, da za vse koordinatne sisteme, za katere veljajo mehanične enačbe, veljajo tudi enaki elektrodinamični in optični zakoni, kot so že ugotovili za pojave prvega reda. To domnevo (katere vsebino bomo imenovali ‘načelo relativnosti’) bomo povzdignili v načelo

in poleg tega vpeljali z njim navidez nezdružljivo načelo, da svetloba v praznem prostoru vedno potuje s hitrostjo c , neodvisno od gibanja sevajočega telesa. Ti dve načeli zadostujeta, da pridemo do preproste in neprotislovne elektrodinamike gibajočih se teles, osnovane na Maxwellovi teoriji za mirujoča telesa. Vpeljava 'svetlobnega etra' se bo pokazala za nepotrebno [...] Teorija, ki jo bomo razvili, se opira – kot vsaka elektrodinamika – na kinematiko togega telesa, ker izjave vsake teorije zadevajo odnose med togimi telesi (koordinatnimi sistemi), urami in elektromagnetnimi pojavi. Da teh okoliščin niso dovolj upoštevali, je pripeljalo do težav, s katerimi se zdaj otepa elektrodinamika gibajočih se teles.“ Za „koordinatni sistem“ se je pozneje uveljavilo ime „inercialni opazovalni sistem“.

Najprej je v *Kinematičnem delu* obdelal merjenje časa. Oprl se je na sočasne dogodke in s svetlobnimi bliski umeril uri, ki sta mirovali v različnih točkah prostora. Dalje je gradil na *načelu relativnosti*, da so „zakoni, po katerih se spreminjajo stanja fizikalnih sistemov, neodvisni od tega, na kate-rega od dveh koordinatnih sistemov, ki se drug proti drugemu enakomerno translacijsko gibljeta, se nanašajo spremembe stanja“, in *načelu o konstantnosti svetlobne hitrosti*, da „svetloba v 'mirujočem' koordinatnem sistemu potuje z določeno hitrostjo c neodvisno od tega, ali jo izseva mirujoče ali gibajoče se telo.“ Po splošni razpravi o krajevnih in časovnih razmikih med dogodkoma v koordinatnih sistemih, ki se gibljeta drug glede na drugega, je na dolgo na svojski način izpeljal *Lorentzevo transformacijo* [2]. Dodal je premislek o gibajočih se urah in togih telesih in ugotovil, da se za „gibajočega se“ opazovalca čas *podaljša* in dolžine v smeri gibanja *skrčijo*. Primerjal je mirujočo uro z uro, ki se od nje odpravi na pot in se vrne, kar je pozneje postalo znano kot „paradoks“ ur. Ta del je zaključil z razpravo o seštevanju hitrosti. Svetloba potuje s hitrostjo c v „gibajočem se“ koordinatnem sistemu, če potuje s hitrostjo c v „mirujočem“.

Na začetku *Elektrodinamičnega dela* je dokaj na hitro izpeljal transformacijo za električno in magnetno polje in pri tem izpustil nekaj vmesnih korakov, tako da je izpeljavi težko slediti. Nato se je lotil Dopplerjevega pojava in zvezdne aberacije. Izpeljal je transformaciji za energijo v elektromagnetnem valovanju in sevalni tlak in pokazal, da navedene transformacije Maxwellove enačbe z naboji in tokovi prevedejo v enačbe z enako obliko.

V zadnjem delu je izpeljal nov zakon gibanja. V *Dinamiki počasi pospešenega elektrona* je iz drugega Newtonovega zakona za mirujoči elektron s transformacijo izpeljal relativistični zakon gibanja pri pospeševanju v smeri gibanja in pravokotno na to smer. Za vzdolžni primer je izpeljal izrek o kinetični energiji. Tako v članku najdemo domala vse enačbe, ki jih srečamo v

sodobnih uvodih v posebno teorijo relativnosti. Še v čudovitem letu je dodal zelo kratek članek *Ali je masa telesa odvisna od energije, ki jo vsebuje?* z zvezo med maso in energijo [3].

Koraki na Einsteinovi poti

Einstein je leta 1895 kot šestnajstletni dijak sestavil zapis *O raziskovanju stanja etra v magnetnem polju*. V njem je po tedanji navadi upošteval eter kot nosilec elektromagnetnega valovanja. Vedel je za Hertzeve poskuse z radijskimi valovi, a ni poznal Maxwellove elektrodinamike. Pozneje se je spominjal, da je še v istem šolskem letu razmišljal o tem, kako bi svetlobi sledil s hitrostjo svetlobe. To je imenoval „prvi otročji zamišljeni poskus, povezan s posebno teorijo relativnosti“.

V drugem letniku študija 1897/98 je načrtoval poskus, pri katerem bi izmeril hitrost Zemlje v etru. Sredi leta 1899 je Milevi Marić, s katero se je poročil leta 1903, pisal: „Vse bolj sem prepričan, da elektrodinamika gibajočih se teles, kot jo razumejo zdaj, ne ustreza resničnosti in da jo je mogoče predstaviti preprosteje. Uvedba pojma ‘eter’ v električne teorije je pripeljala do predstave sredstva, o gibanju katerega lahko govorimo, po moje, ne da bi mu mogli prirediti kak fizikalni smisel.“ Sredi tega leta je v Aarau pomislil na to, kako gibanje prozornih teles glede na eter vpliva na potovanje svetlobe v njih. Razmišljal je „tudi o teoriji v tej zadevi, ki se mi zdi sprejemljiva“. Malo pozneje jo je obvestil, da je pisal W. Wienu v Aachen „o delu z relativnim gibanjem etra glede na snov“, ki ga je njun profesor fizike pri svojem predavanju „obravnaval tako mačehovsko“. Na Wiena se je obrnil zaradi njegovega članka iz leta 1898 z opisom 13 možnosti za merjenje hitrosti Zemlje v etru. Med temi je omenil tudi Michelsonov poskus z interferometrom s pravokotnima krakoma.

O tem svojem načrtu za poskus je Einstein pripovedoval na predavanju v nemščini *Kako sem ustvaril teorijo relativnosti?* med obiskom v Kjotu leta 1922 [4]. Neavtoriziranemu poročilu s predavanja v japonščini in njegovemu angleškemu prevodu nekateri raziskovalci ne zaupajo. „Tedaj nisem dvomil o obstoju etra in gibanju Zemlje. Napovedal sem, da ima svetloba pri odboju na zrcalu različni energiji glede na to, ali je vzporedna ali nasprotno vzporedna s smerjo gibanja Zemlje v etru. Predlagal sem, da bi to ugotovili z dvema termoelementoma z merjenjem razlike toplot, ki se razvijeta v obeh.“

Einsteinovo pismo prijatelju iz jeseni leta 1901 zbuja vtis, da Wienov površni opis Michelsonovega poskusa ni naredil vtisa na Einsteina, ki tedaj

še ni poznal Lorentzevega dela: „Zopet sem si zamislil preprostejši način, da bi raziskal gibanje snovi glede na svetlobni eter, zasnovan na običajnih interferenčnih poskusih.“ Ali je mislil na ponovitev Fizeaujevega poskusa z interferometrom, v katerem delni curek potuje v smeri toka vode, drugi pa v nasprotni smeri? Z Maxwellovo elektrodinamiko, ki je niso zajela redna predavanja, pa se je tedaj že seznanil. Kaže, da je študiral po učbeniku Augusta Föppla, iz katerega je posnel opis poskusa z magnetom in ovojem. Tedaj je v pismu Maričevi poročal: „Zelo vneto delam na elektrodinamiki gibajočih se teles, kar obeta, da bo postalo pomemben članek.“ Konec leta 1901 je poročal o razpravi, ki jo je imel v Zürichu o elektrodinamiki gibajočih se teles z enim od profesorjev. Ta mu je svetoval, naj dognanja objavi in podprl njegov načrt za poskus. Tedaj je Einstein verjel, da bi ga poskus v enem koraku „pripeljal do rešitve problema, katerega daljnosežnost je že slutil. Toda ni bilo nobene možnosti, da bi napravo zgradil. Skepticizem njegovih učiteljev je bil prevelik, duh podjetnosti premajhen.“ To preberemo v življenjepis, ki ga je Einstein odobril.

Maričevi je omenil, da bo najverjetneje napisal članek v naslednjih tednih, a do posebne teorije relativnosti je potreboval še 3 leta in pol. Lotil se je dela Hendrika Antoona Lorentza *Poizkus teorije električnih in optičnih pojavov v gibajočih se telesih* iz leta 1895. Po lastni izjavi je od vseh Lorentzevih del pred letom 1905 poznal samo to. V njem je Lorentz obravnaval elektrodinamiko gibajočih se teles in snov opisal kot množico elektronov in pozitivnih atomskih ostankov. Za svetlobo je ugotovil, da potuje v etru s hitrostjo c , ki ni odvisna od hitrosti svetila.

Prijatelj Michele Besso, ki je bil med letoma 1904 in 1908 tudi zaposlen na patentnem uradu, je Einsteina že prej opozoril na Machovo kritiko Newtonovega absolutnega časa. Einstein je v delu Davida Huma med drugimi prebral misel, da je „čas samo način obstoja realnih teles“. Maja 1905 je Einstein imel pomemben pogovor z Bessom [4]. Iz kjotskega predavanja izhaja, da je razmišljal o tem, da naj bi za elektron veljale Lorentzeve enačbe v „mirujočem“ in v „gibajočem se“ koordinatnem sistemu. Pri tem je zaupal Maxwellovim enačbam, ki naj bi tudi veljale v obeh koordinatnih sistemih, saj so dale v obeh sistemih, povezanih z Lorentzevo transformacijo, enako hitrost svetlobe. „Ta invariantnost hitrosti svetlobe pa je nasprotovala enačbi za seštevanje hitrosti, ki smo jo dobro poznali iz mehanike. Občutil sem veliko težavnost vprašanja, zakaj si primera nasprotujeta. Zapravil sem skoraj leto dni, ko sem brez uspeha poskušal modificirati Lorentzevo zamisel, toda uvidel sem, da uganke sploh ne bo lahko rešiti. [Tedaj se je brez uspeha ubadal tudi s teorijami, ki so opisovale svetlobo z delci [5].] Nepričakovano

mi je pomagal prijatelj v Bernu. Bil je zelo lep dan, ko sem ga obiskal in se z njim začel pogovarjati. [...] Ko sem tako poskusil načeti več vprašanj, sem nenadoma razumel zadevo. Naslednji dan sem ga zopet obiskal in mu brez pozdrava rekel: 'Hvala, popolnoma sem rešil problem.' Moja rešitev je zadevala pojem časa [...] čas nima absolutnega pomena, ampak je neločljivo povezan s hitrostjo signalov. S tem pojmovanjem sem prejšnjo izredno težavo skrbno rešil. Pet tednov pozneje sem končal posebno teorijo relativnosti."

Einstein je po Lorentzevem zgledu eter izenačil z inercialnim opazovalnim sistemom. To ga je pripeljalo do nasprotja. Ali ne obstaja en sam tak sistem? Hitrost svetlobe v sistemu, ki se giblje glede na eter, je večja ali manjša, saj je treba hitrosti svetlobe prišteti hitrost sistema ali jo od nje odšteti. To pa nasprotuje načelu relativnosti, ki zahteva, da je hitrost svetlobe neodvisna od hitrosti svetila v vseh inercialnih sistemih. Nasprotje je razrešil tako, da je opustil enačbo za seštevanje hitrosti, ki ji je dotlej zaupal. Ali se mu je med pogovorom z Bessom porodila odločilna misel, da „mirujoči“ in „gibajoči se“ opazovalec izmerita med dogodkoma različna časovna razmika in ne velja znana enačba za seštevanje hitrosti? To bi ga pripeljalo do osnovnega dogovora o času in umerjanju ur. Bessu se je – edinemu – v članku zahvalil.

Za odtenek gre, ko iščejo nasprotje med načelom relativnosti in enačbo za seštevanje hitrosti [4] ali med načelom relativnosti in načelom o konstantni hitrosti svetlobe [5]. Bližje je prvo stališče. Einstein je v prvem članku pripomnil, da si načeli na videz nasprotujeta, a že v članku o zvezi med maso in energijo [3] je pod črto pripomnil: „Uporabljeno načelo o konstantnosti svetlobne hitrosti seveda vsebujejo Maxwellove enačbe.“ S tem sta se osnovni načeli zlili v načelo relativnosti in ni bilo več nasprotja. Nasprotje med Galilejevo in Lorentzevo enačbo za seštevanje hitrosti pa je ostalo. Načelu relativnosti je bilo treba dodati le zahteve po homogenosti in izotropnosti prostora in homogenosti časa, ki so zagotovile, da so Lorentzeve transformacije linearne.

Relativnost pred Einsteinom

Giordano Bruno je leta 1584 v *Večerji na pepelnično sredo* opisal poskus s kamnom na ladji, o katerem so tedaj razpravljali. Opazovalec na ladji, ki jo enakomerno nosi s seboj reka, spusti kamen z vrha jambora. Kamen zadene palubo ob podnožju jambora. Opazovalec na obali spusti kamen iz točke, v kateri je tisti hip vrh jambora. Ta kamen pade navpično na tla in zaostane

za kamnom na ladji. Ob tem je pripomnil: „Razloček med kamnoma lahko pojasnimo le, če vzamemo, da se stvari, ki so pritrjene na ladjo ali sodijo k njej, gibljejo z njo, tako da kamen nosi s seboj gibanje ladje, in drugi z osebo, ki nima tega gibanja.“ Čeprav Bruno sicer v fiziki ni bil doma, je v tem primeru slutil načelo relativnosti.

Načelo je izrekel Galileo Galilei leta 1632 v *Dialogu*. Slikovito je mislil na „nekaž muh, metuljev in drugih malih letečih živali“ v zaprtem prostoru na ladji. „[...] ladja naj se začne gibati s poljubno hitrostjo, če je le gibanje enakomerno in ne gre zdaj sem zdaj tja. V navedenih pojavih ne boste zasledili najmanjše spremembe niti ne boste mogli po katerem od njih povedati, ali se ladja giblje ali miruje.“ Pri tem se je lahko oprl na spoznanje, da se kamen pri vodoravnem metu giblje po paraboli. Zares pa je načelo omejil na „lokalna gibanja“ in bil prepričan, da za gibanje planetov ne velja.

Christiaan Huygens je v odgovoru na nagradno nalogo o trkih londonske Kraljeve družbe leta 1669 izhajal od zakona vztrajnosti in prožnega trka dveh enakih krogel z nasprotno enakima hitrostma. „Izreka [...] veljata za opazovalca na ladji, ki se glede na obalo giblje s poljubno konstantno hitrostjo, kot za opazovalca na obali.“

Isaac Newton je leta 1687 v *Principih* uporabil besedo „relativno“ in zapisal: „Medsebojna gibanja teles, ki jih vsebuje določen prostor, so enaka ne glede na to, ali prostor miruje ali se giblje enakomerno po ravni črti brez kakršnega koli krožnega gibanja.“ Zavedal se je, da načelo izhaja iz njegovega drugega zakona, zato mu ni pripisoval velikega pomena.

Proti koncu 19. stoletja je razprava o načelu oživila v zvezi z Maxwellovimi enačbami. Zanje načelo ni veljalo, če so upoštevali staro enačbo za seštevanje hitrosti. Henri Poincaré je v letih 1895, 1899 in 1900 načelo postopno razširil na elektrodinamične in optične pojave in leta 1904 uporabil ime *načelo relativnosti*. Ugotovil je, da je „nemogoče meriti absolutno gibanje otipljive snovi glede na eter; lahko edino opazujemo gibanje otipljive snovi glede na otipljivo snov“, „da so zelo verjetno optični pojavi odvisni samo od *relativnega* gibanja materialnih teles“ in podvomil o obstoju etra. Slutil je, da vodi to do „popolnoma nove vrste dinamike, za katero bo značilno predvsem pravilo, da nobena hitrost ne more preseči hitrosti svetlobe.“

Iskali so transformacijo, s katero bi nadomestili Galilejevo transformacijo, da bi obveljalo načelo relativnosti za Maxwellove enačbe. George Francis Fitzgerald je pojasnil izid Michelsonovega poskusa s privzetkom, da se dolžina telesa v smeri gibanja skrči. Do enakega sklepa je prišel neodvisno od njega H. A. Lorentz, ki se je postopno – najprej v prvem redu v/c (v je hitrost Zemlje v etru), nato v drugem in naposled leta 1904 splošno – dokopal

do te transformacije. Poincaré je leto zatem predložil, naj bi jo imenovali po Lorentzu. Transformacijo je prvi izpeljal Joseph Larmor že leta 1897 in jo objavil v knjigi tri leta pozneje skupaj s transformacijo za električno in magnetno polje. Kaže, da Lorentz in Poincaré nista poznala Larmorjevega dela. Larmor se je zavedal, da so Maxwelllove enačbe invariantne glede njegove transformacije, a tega ni povezal z načelom relativnosti [6]. Poincaré je leta 1905 dognal, da preme Lorentzeve transformacije sestavljajo grupo.

Einstein je trdil, da se je od poskusov oprl na Bradleyevo zvezdno aberracijo in Fizeaujevo merjenje hitrosti svetlobe v gibajoči se vodi. Ta pojava prvega reda sta mu zadostovala. Michelsonov poskus in drugi pojavi drugega reda se mu niso zdeli pomembni. Že Maxwell je ugotovil, da vsebuje izid poskusa v laboratoriju vselej razmerje v^2/c^2 , ker mora potovati svetloba v dani smeri in se vrniti. Dvomil pa je, da je mogoče pri merjenju doseči dovolj dobro natančnost, in iskal možnost, da bi izkoristili pojav prvega reda, na primer mrke Jupitrove lune. Michelsonu pa je uspel poskus, ki ga Maxwell ni imel za izvedljivega. Einstein tega poskusa v članku [1] ni omenil. Najprej je trdil, da ga tedaj sploh ni poznal. Njegove poznejše izjave so si delno nasprotovale. Pokazalo se je, da je za poskus vedel pred letom 1905 vsaj po Lorentzevem delu iz leta 1895 in po Poincaréjevi knjigi *Znanost in domneva* iz leta 1902. Vendar zanj poskus ni bil pomemben, kot je bil za Fitzgeralda in Lorentza.

Po elektrodinamiki gibajočih se teles

K obema Einsteinovima člankoma je bilo treba le malo dodati. Max Planck je leta 1906 vpeljal poznejši četverec energije in gibalne količine ter navedel transformacijo zanj ter dodal variacijski princip. Gilbert N. Lewis in Richard C. Tolman sta leta 1909 prispevala zakon o ohranitvi gibalne količine v sistemu delcev. Nekajkrat se je k posebni teoriji vrnil tudi Einstein. Leta 1906 je obravnaval gibanje težišča in možnost, da izmerijo $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ pri poskusih z delci β . Leta 1907 je opisal možnost za merjenje prečnega Dopplerjevega pojava in vpeljal polno energijo γmc^2 . Tega leta je v *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* prispeval dolg pregledni članek *O načelu relativnosti in sklepi, ki izhajajo iz njega* [7]. Einstein je tedaj vseskozi govoril le o načelu relativnosti. Leta 1907 je Paul Ehrenfest predložil ime *teorija relativnosti*, ki se je prijelo. Posebna je postala teorija po letu 1916, da so jo ločili od splošne.

V preglednem članku [7] je Einstein povzel vsebino članka *K elektrodinamiki gibajočih se teles* [1] in orisal svoj pogled na razvoj teorije. „Do-

kler smo verjeli, da zajamejo Newtonove enačbe vso fiziko, je veljalo načelo relativnosti. Dvom o tem načelu je sprožila sijajna potrditev Lorentzeve elektrodinamike gibajočih se teles.“ Stara teorija je izhajala iz mirujočega etra, po katerem naj bi se gibala Zemlja, in prizadevali so si, da bi izmerili njeno hitrost. Lorentz je pokazal, da tega ni pričakovati pri pojavih prvega reda. Toda negativni izid Michelsonovega in Morleyevega poskusa je razširil to spoznanje tudi na pojave drugega reda. Zdelo se je, da Lorentzeva teorija ne bo obveljala. „Presenetljivo pa se je pokazalo, da zadostuje samo natančnejše pojmovanje časa, da premagamo omenjeno težavo. Treba je bilo samo uvideti, da je mogoče pomožno količino, ki jo je H. A. Lorentz vpeljal in imenoval ‘lokalni čas’, definirati kot ‘čas’ nasploh. Če sprejmemo to definicijo časa, osnovne enačbe Lorentzeve teorije ustrezajo načelu relativnosti, če prejšnje transformacijske enačbe [Galilejevo transformacijo] nadomestimo s takimi, ki ustrezajo novemu pojmovanju časa [z Lorentzevo transformacijo]. Domneva H. A. Lorentza in Fitzgeralda se pojavi potem kot nujna posledica teorije.“

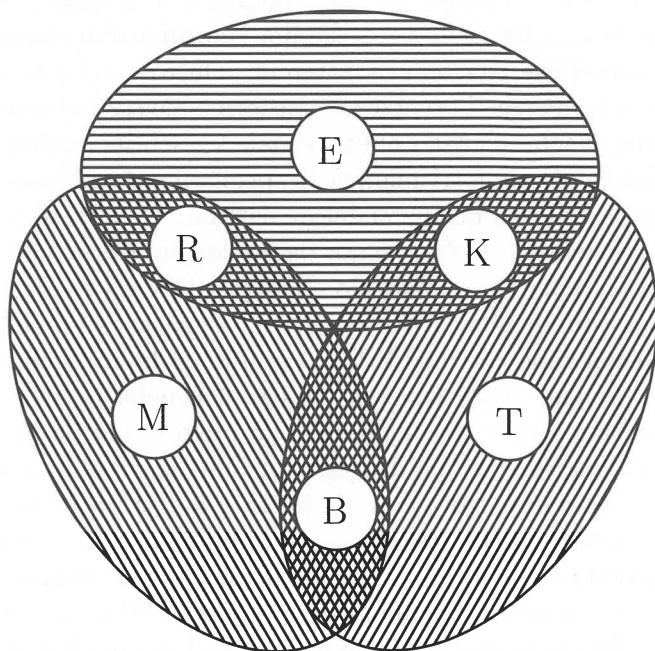
Članek [7] je vseboval tudi več novosti. Med drugim je razpravljal o eksperimentalni podpori teorije. Nekaj časa se je zdelo, da merjenja z delci β nasprotujejo posebni teoriji relativnosti in podpirajo neko drugo teorijo. Einsteina to ni vznemirilo, češ da druga teorija temelji na posebnih privzetkih, ki zajamejo le ozek krog pojavov. Zares so natančnejša merjenja kmalu podprla posebno teorijo relativnosti. V članku je Einstein prvič poskusil zajeti gravitacijo s teorijo relativnosti in s tem stopil na pot, ki ga je osem let pozneje pripeljala do splošne teorije relativnosti.

Zasluge za posebno teorijo relativnosti

Einstein si je nakopal veliko očitkov, ker v članku [1] ni citiral nobenega dela. Vendar je res, da so pred sto leti citirali precej manj kot danes. Zelo verjetno ni poznal Lorentzevega dela iz leta 1904 in Poincaréjevega iz leta 1905. V članku [7] pa je navedel dela Lorentza ter Michelsona in Morleya in nekaterih drugih fizikov, le Poincaréja ni omenil. Pregledni članek je izzvenel precej bolj umirjeno kot prvi članek. Najbrž bi bilo manj razprav o citiranju in o pomenu Michelsonovega poskusa, če bi Einstein prvi članek napisal v duhu preglednega članka in če bi ta članek poznalo več razpravljavcev.

Einstein se je izogibal razprav o prvenstvu. Trdil je, da bi najbrž kmalu kdo drug ugotovil to, kar je ugotovil on. Zagotovil je, da pri tej teoriji ni šlo za nič prelomnega: „Kar zadeva relativnostno teorijo, sploh ni vpraša-

Slika 1. V Einsteino-
vih delih iz čudovitega
leta je mogoče zaslediti
skupne poteze. Opa-
zil je neusklajenosti med
klasično mehaniko (M),
termodinamiko (T) in
klasično elektrodimi-
ko (E), ki so jih tedaj
obravnavali ločeno. Ne-
usklajenosti je pojasnil
z novimi pogledi: med
mekaniko in elektrodi-
namiko s posebno te-
orijo relativnosti (R),
med mehaniko in termo-
dinamiko s teorijo Bro-
wnovega gibanja (B) ter
med termodinamiko in
elektrodinamiko s sve-
tlobnimi kvanti v seva-
nju črnega telesa (K).
Po [10].



nja o revolucionarnem dejanju, ampak gre za naravni razvoj na črti, ki jo lahko zasledujemo stoletja.“ Nekemu prijatelju je poročal: „Četrto delo je še v osnutku in je elektrodimika gibajočih se teles, ki uporabi modifika-
cijo teorije prostora in časa, zagotovo te bo zanimal čisto kinematični del.“
G. Holton je dodal: „Einsteinov članek o teoriji relativnosti je v resnici bil eden od večjega števila prispevkov mnogih različnih piscev na splošnem ob-
močju elektrodimike gibajočih se teles. Samo v *Annalen der Physik* od 1902 do 1905 je osem člankov, ki obravnavajo ta splošni problem. Einstein sam je vedno vztrajal na tem vidiku kontinuitete.“ [8]

O Einsteinovem deležu v posebni teoriji relativnosti ni enotnega mnenja. Edmund Whittaker je leta 1951 zapisal: „Einstein je objavil delo, ki je raz-
vilo relativnostno teorijo Poincaréja in Lorentza z nekaterimi izboljšavami in vzbudilo veliko pozornosti.“ Po drugem skrajnem mnenju pa je posebno teorijo relativnosti ustvaril Einstein sam. W. Rindler misli, da je stališče „odvisno od tega, kako presojate fizikalne teorije: ali po osnovnih pojmi in
zakonih ali zgolj po rezultatih.“ [9] „Teorija Poincaréja in Lorentza“ je izšla iz raziskovanja Maxwellovih enačb v gibajočih se inercialnih sistemih in je postregla skoraj z vsemi enačbami posebne teorije relativnosti. Kdor stavi

samo na te enačbe, se lahko nagiba k Whittakerjevemu mnenju. Vzemimo, da bi eter izenačili z inercialnim koordinatnim sistemom, v katerem veljajo Maxwelllove enačbe in v katerem je hitrost svetlobe c neodvisna od gibanja svetila. Preme Lorentzeve transformacije sestavljajo grupo, zato bi Maxwelllove enačbe z enako obliko veljale v vseh inercialnih sistemih. Do posebne teorije relativnosti manjka le spoznanje, da je časovni razmik med dogodoma odvisen od inercialnega sistema. Čeprav so pred Einsteinom poznali Lorentzevo transformacijo, pa so 'lokalni čas' $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ imeli zgolj za matematično pomagalo. Niso pomislili na to, da bi bilo mogoče čas t' izmeriti in da gibajoče se ure tečejo drugače. V Lorentzevi transformaciji niso opazili simetrije med količino ct in koordinato v smeri gibanja [9].¹ Lorentz je priznal: „Glavni vzrok mojega neuspeha je bilo vztrajanje pri misli, da moramo imeti spremenljivko t za pravi čas in da ne smemo videti v mojem lokalnem času t' nič drugega kot pomožno matematično količino.“

Tako je mogoče reči, da je šlo delno za neodvisna odkritja. Načelo relativnosti je na elektromagnetne in optične pojave razširil Poincaré. Larmor, Lorentz in Poincaré so se dokopali do Lorentzevih transformacij v okviru Maxwelllove elektrodinamike in Lorentz in Poincaré sta izpeljala veliko enačb pred Einsteinom. Einstein pa je sprejel nov pogled na čas, izpeljal Lorentzeve transformacije z lastnostmi prostora in časa in iz posebne teorije relativnosti naredil orodje, ki mu je – med drugim – omogočilo, da je po zgledu stare Newtonove mehanike zgradil novo relativistično mehaniko. Vsak fizik po svoje oceni zasluge za posebno teorijo relativnosti, vendar je prav, če ni prehude stiske s prostorom ali časom, da ob Einsteinu omeni vsaj še Lorentza in Poincaréja.

LITERATURA

- [1] A. Einstein, *On the electrodynamics of moving bodies*, *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 2, *The Swiss Years: Writings, 1900–1909*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1989, str. 140 (v nadaljnjem CPAE).
- [2] A. A. Martínez, *Kinematic subtleties in Einstein's first derivation of the Lorentz Transformation*, *Am. J. Phys.* **72** (2004), str. 790–798.
- [3] A. Einstein, *Does the inertia of a body depend on its energy content?*, CPAE, str. 172.
- [4] A. Pais, *'Subtle is the Lord ...' The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford, Oxford University Press, 1982.
- [5] J. Stachel, *"What song the syrens sang": How did Einstein discover relativity*, v J. Stachel, *Einstein from "B" to "Z"*, Birkhäuser, Basel 2001.
- [6] C. Kittel, *Larmor and the prehistory of the Lorentz transformations*, *Am. J. Phys.* **42** (1974), str. 26.

¹Prvotno so poskusili skrčenje dolžin pojasniti z domnevo, da so električne sile med molekulami odvisne od hitrosti. Ni podobnega pojava, s katerim bi bilo mogoče pojasniti podaljšanje časa.

- [7] A. Einstein, *On the relativity principle and the conclusions drawn from it*, CPAE, str. 252.
- [8] G. Holton, *On the origins of the special theory of relativity*, Am. J. Phys. **28** (1960), str. 627.
- [9] W. Rindler, *Einstein's priority in recognizing time dilation physically*, Am. J. Phys. **38** (1970), str. 1111.
- [10] J. Renn, *Die klassische Physik vom Kopf auf die Füße gestellt. Wie Einstein die Spezielle Relativitätstheorie fand*, Physik Journal **3** (2004), str. 49.

VESTI

VABILO

V petek, 23. septembra 2005, ob 11. uri bo v Štrukljevi vasi pri Cerknici odkritje spominske plošče Ivu Lahu. Podrobnosti bodo objavljene v sredstvih javnega obveščanja v začetku septembra.



V tej hiši se je rodil

IVO LAH

(5. 9. 1896 – 23. 3. 1979),

veliki matematik, statistik,
demograf in aktuar

Društvo matematikov,
fizikov in astronomov
Slovenije

Občina Cerknica

Ob 50-letnici objave Lahovih števil, 23. 9. 2005.

$$L(n, k) = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}$$

Osnutek spominske plošče Ivu Lahu. Ploščo bo izdelala akademska kiparka Milena Braniselj.

Postavitve plošče so do sedaj podprli: Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Zavod za zdravstveno zavarovanje Slovenije ter Wiener Städtische zavarovalnica d.o.o.

Organizacijski odbor

CATALANOVA DOMNEVA JE DOKAZANA

JANKO BRAČIČ

Naravoslovnotehniška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 11D41

Catalanova domneva pravi, da sta 8 in 9 edini zaporedni naravni števili, ki sta popolni potenci. Pred kratkim je domnevo potrdil Preda Mihăilescu. V članku je predstavljena zgodovina domneve.

CATALAN'S CONJECTURE IS PROVEN

Catalan's Conjecture predicts that 8 and 9 are the only consecutive perfect powers among positive integers. The conjecture was recently proven by Preda Mihăilescu. In the paper the history of the conjecture is presented.

V teoriji števil je veliko problemov, ki jih zlahka razumemo, a je njihova rešitev izjemno težka. Mednje spada tudi *Catalanova domneva*, ki pravi, da sta 8 in 9 edini zaporedni popolni potenci v množici naravnih števil (popolna potenca je vsako naravno število, ki je oblike m^n , pri čemer sta m in n naravni števili, večji od 1). Z drugimi besedami, diofantska enačba

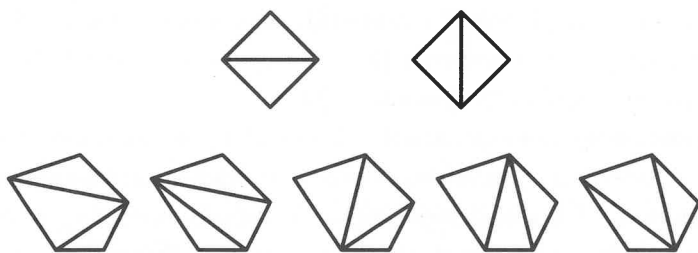
$$x^u - y^v = 1 \quad (x > 1, y > 1, u > 1, v > 1) \quad (1)$$

ima samo rešitev $x = 3, y = 2, u = 2$ in $v = 3$.

Domnevo je leta 1844 v reviji *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik* objavil belgijski matematik Eugene Catalan (1814–1894), tedaj profesor na *l'Ecole Polytechnique de Paris*. Čeprav je Catalan napisal kar nekaj člankov iz teorije števil, ni nikoli objavil ničesar, kar bi dalo slutiti, da se je ukvarjal z dokazovanjem domneve, ki nosi njegovo ime.

Catalan se je šolal pri Liouvilleu na *l'Ecole Polytechnique*. Vendar njegovo šolanje ni potekalo mirno. Leta 1834 so ga namreč izključili, verjetno zaradi njegovih političnih nazorov — zaradi nekaterih skrajno levičarskih pogledov je imel težave še kasneje. Čez čas so mu dovolili, da nadaljuje študij, tako da ga je leta 1835 brez težav končal. Istega leta se je zaposlil kot predavatelj na neki nepomembni šoli v provinci. Z Liouvillevo pomočjo je leta 1838 postal predavatelj opisne geometrije na *l'Ecole Polytechnique*. Seveda mesta na tako prestižni šoli ne bi mogel dobiti le s pomočjo svojega učitelja. Slaven je postal, ker je rešil problem, ki sprašuje, na koliko načinov

Catalanova domneva je dokazana



Slika 1. Različni razrezi štirikotnika in petkotnika na trikotnike

lahko sklenjen konveksen ravninski poligon z $n \geq 3$ stranicami razdelimo na trikotnike z diagonalami, ki se ne sekajo. Vprašanje je bilo v tistem času že dokaj staro, saj ga je prvi zastavil Euler leta 1751 v pismu Goldbachu. Na sliki 1 vidimo rešitve problema za $n = 4$ in $n = 5$. Se pravi, da lahko konveksen štirikotnik razdelimo na trikotnike na dva načina, konveksen petkotnik pa na pet načinov. Dodajmo k temu še, da imamo v primeru trikotnika ($n = 3$) eno samo *trivialno* rešitev. Pravzaprav Catalan ni prvi rešil problema. Pred njim ga je že Segner v 18. stoletju, vendar je Catalanova rešitev bolj elegantna in enostavna. Naravna števila C_m , $m = n - 2$, ki dajejo odgovor na omenjeno vprašanje, nosijo še danes ime *Catalanova števila* in se pojavljajo v povezavi z veliko drugimi problemi iz kombinatorike. Nekaj prvih Catalanovih števil je 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, ..., splošna formula pa je dana s

$$C_m = \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m} = \frac{(2m)!}{(m+1)!m!} \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Vrnimo se k Catalanovi domnevi, bolje rečeno k Catalanovi trditvi. Namreč, aprila 2002 je Preda Mihăilescu (rojen 1955), matematik romunskega porekla, potrdil Catalanovo domnevo. Mihăilescu se je šolal na ETH v Zürichu in 1997. leta tam doktoriral. Do leta 2002 je bil v matematičnih krogih praktično neznan. Ukvarjal se je z algoritmi za iskanje praštevil in je avtor programa *Cycloprove*, ki preveri, ali je dano število praštevilo. Zdaj je raziskovalec na univerzi Paderborn v Nemčiji, toda prej je bil zaposlen v podjetju, ki se ukvarja z biometriko, natančneje s proizvodnjo strojne in programske opreme za prepoznavanje prstnih odtisov. Mihăilescu je torej podobno kot Wiles izjema pravila, da matematiki dosežejo svoje najpomembnejše rezultate v mlajših letih. Mihăilescujev dokaz Catalanove domneve je

algebraičen, sloni na globokih teoretičnih dognanjih v teoriji ciklotomskih polj. Del dokaza je bil objavljen v [5], celotni dokaz pa je bil objavljen pred kratkim v istem časopisu kot domneva [6].

Mihăilescujevega dokaza zaradi težavnosti tu ne moremo povzeti. Poglejmo raje zgodovino Catalanove domneve in njenega reševanja. Prvi znani rezultat, povezan s Catalanovo domnevo, je zapisal okrog leta 1320 Levi ben Gerson (Leo Hebraeus), takrat slavni astronom. Pokazal je, da sta edini zaporedni potenci števil 2 in 3 lahko le 8 in 9. Danes je to enostavna naloga s kongruencami in bralec jo bo zlahka zmoget sam. Približno 100 let pred Catalanovim pismom z domnevo Crelleju, ustanovitelju in uredniku revije *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, je Euler že vedel, da sta 8 in 9 edini zaporedni naravni števili med popolnimi kvadrati in kubi. Da popolnemu kvadratu nikoli ne sledi popolni kub, pa je pred Eulerjem trdil že Fermat. Eulerjeva obravnava diofantskih enačb

$$x^3 - y^2 = 1 \quad \text{in} \quad x^2 - y^3 = 1 \quad (x > 0, y > 0) \quad (2)$$

je domiselna, vendar nekoliko dolgočasna. Kako obvladamo prvo enačbo v (2) z novjšimi metodami, tj. z uporabo Gaussovega kolobarja $\mathbb{Z}[i]$, lahko bralec prebere v [8], stran 159. Druga enačba je zahtevnejša.

Trditev 1. *Edina netrivialna rešitev enačbe $x^2 - y^3 = 1$ je dana z $x = 3$, $y = 2$.*

Dokaz. Enačbo obravnavamo v kolobarju $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$, tj. v kolobarju celih števil realnega kubičnega obsega $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$, v katerem so natanko vsa realna števila, ki jih lahko zapišemo v obliki $r + s\sqrt[3]{2} + t(\sqrt[3]{2})^2$, pri čemer so r , s in t racionalna števila (podrobnosti o številskih obsegih lahko najdete v [2]). Enačbo najprej zapišimo v obliki

$$y^3 = (x - 1)(x + 1). \quad (3)$$

Največji skupni delitelj d števil $x - 1$ in $x + 1$ je bodisi 1 bodisi 2. Če bi veljalo prvo, bi imeli dva popolna kuba, katerih razlika bi bila 2. Toda to očitno ni res. Se pravi, da je $d = 2$. Od tod najprej sledi, da je y sodo število. Zaradi (3) obstajata takšni tuji si naravni števili a in b , pri čemer je a liho število, da velja bodisi $x - 1 = 2a^3$ in $x + 1 = 2^2b^3$ bodisi $x - 1 = 2^2b^3$ in $x + 1 = 2a^3$. V prvem primeru dobimo enakost $a^3 - 2b^3 = -1$, v drugem pa

Catalanova domneva je dokazana

enakost $a^3 - 2b^3 = 1$. Iz vsake teh enakosti sledi, da je število $a - b\sqrt[3]{2}$ enota v kolobarju $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$. Enot v tem kolobarju je neskončno mnogo in so oblike

$$\left(1 + \sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right)^n \quad \text{in} \quad -\left(1 + \sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right)^n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Z obravnavo potenc $\left(1 + \sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right)^n$ in ob upoštevanju dejstva, da sta a in b naravni števili, pridemo do sklepa, da je

$$a - b\sqrt[3]{2} = -\left(1 + \sqrt[3]{2} + \left(\sqrt[3]{2}\right)^2\right)^{-1} = 1 - \sqrt[3]{2},$$

kar nam da edino rešitev $a = b = 1$ oziroma $x = 3$ in $y = 2$. ■

Za dokaz Catalanove domneve je seveda dovolj, če obravnavamo enačbo

$$x^p - y^q = 1, \tag{4}$$

pri čemer iščemo naravni števili x in y ter različni praštevili p in q . Ker je bila enačba (4) pretrd oreh, so se posamezni matematiki lotevali njenih lažjih različic. Tako je na primer leta 1850 V. A. Lebesgue (ki ga ne smemo zamenjati s slavnnejšim soimenjakom) pokazal, da enačba (4) nima rešitev, pri katerih bi bilo praštevilo q enako 2. To trditev bomo zdaj dokazali tudi mi. V dokazu bomo uporabili funkcijo v_2 , ki je definirana na racionalnih številih, različnih od 0, takole: celemu številu $n \neq 0$ priredi v_2 vrednost $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, če je 2^k največja potenca števila 2, ki deli n , za ulomek n/m , kjer sta n in m celi števili, različni od 0, pa je

$$v_2\left(\frac{n}{m}\right) = v_2(n) - v_2(m).$$

Trditev 2. *Diofantska enačba*

$$x^p - y^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0, p \text{ liho praštevilo}) \tag{5}$$

nima nobene rešitve.

Dokaz. Vzemimo, da je (x, y, p) rešitev enačbe (5), pri čemer je $p \geq 3$ praštevilo, x in y pa sta naravni števili. Pokažimo najprej, da y ne more biti liho število. Namreč, če je $y = 4z \pm 1$ ($z \in \mathbb{N}$), potem je x sodo število in zato velja

$$(4z \pm 1)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{8},$$

od koder sledi protislovna kongruenca $2 \equiv 0 \pmod{8}$. Se pravi, da je x liho in y sodo število.

Preselimo se v Gaussov kolobar $\mathbb{Z}[i]$ in pokažimo, da sta si števili $1 + iy$ in $1 - iy$ tuji. Res, če število $a + ib \in \mathbb{Z}[i]$ deli števili $1 + iy$ in $1 - iy$, deli tudi njuno vsoto 2. Ker je y sodo število, to pomeni, da $a + ib$ deli y . Toda Gaussovo celo število, ki deli $1 + iy$ in y , je lahko le enota, tj. eno od števil iz množice $\{1, -1, i, -i\}$.

V Gaussovem kolobarju $\mathbb{Z}[i]$ lahko vsako število enolično (do vrstnega reda natančno) zapišemo kot produkt praštevil iz tega kolobarja (glejte [8], str. 157–158). Iz enakosti $x^p = 1 + y^2$ zato izhaja

$$1 + iy = \alpha^p \quad \text{in} \quad 1 - iy = \bar{\alpha}^p$$

za neko število $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$. Potem pa je

$$2 = \alpha^p + \bar{\alpha}^p = (\alpha + \bar{\alpha}) (\alpha^{p-1} - \alpha^{p-2}\bar{\alpha} + \dots + \bar{\alpha}^{p-1}),$$

od koder sledi, da je realna komponenta števila α enaka ± 1 . Se pravi, da je $\alpha = \pm(1 + ic)$, pri čemer je $c \in \mathbb{Z}$. Ker je število y sodo, je sodo tudi število c . Namreč, če bi bilo c liho število, bi iz

$$1 + y^2 = \alpha^p \bar{\alpha}^p = (1 + ic)^p (1 - ic)^p = (1 + c^2)^p$$

sledilo

$$1 \equiv 2^p \equiv 0 \pmod{4}.$$

Seštejmo enakosti $1 + iy = \pm(1 + ic)^p$ in $1 - iy = \pm(1 - ic)^p$. Dobimo

$$(1 + ic)^p + (1 - ic)^p = \pm 2$$

oziroma

$$1 + \binom{p}{1}ic + \binom{p}{2}(ic)^2 + \dots + (ic)^p + 1 - \binom{p}{1}ic + \binom{p}{2}(ic)^2 - \dots - (ic)^p = \pm 2,$$

kar nam da

$$-2\binom{p}{2}c^2 + 2\binom{p}{4}c^4 - \dots \pm 2\binom{p}{p-1}c^{p-1} = \pm 2 - 2. \quad (6)$$

Leva stran v enakosti (6) je deljiva z 8, zato mora biti na desni strani 0. Vzemimo, da je $c \neq 0$. Enakost (6) delimo z $-2c^2$, tako da dobimo naslednjo zvezo med binomskimi koeficienti

$$\binom{p}{2} - \binom{p}{4}c^2 + \dots \pm \binom{p}{p-1}c^{p-3} = 0. \quad (7)$$

V primeru $p = 3$ ima (7) obliko $\binom{p}{2} = 0$, kar seveda ni res. Torej je $p \geq 5$. Toda tudi za takšna praštevila (7) ne more veljati. Da bi se o tem prepričali, uporabimo funkcijo v_2 . Poglejmo, kakšno vrednost zavzame ta funkcija na številu

$$\frac{\binom{p}{k} c^{k-2}}{\binom{p}{2}} = \binom{p-2}{k-2} \frac{2c^{k-2}}{k(k-1)},$$

pri čemer je k sodo število med 4 in $p-1$. Iz

$$v_2(2c^{k-2}) \geq k-1 > v_2(k) = v_2(k(k-1))$$

sledi

$$v_2\left(\frac{2c^{k-2}}{k(k-1)}\right) > 0$$

in zato tudi

$$v_2\left(\frac{\binom{p}{k} c^{k-2}}{\binom{p}{2}}\right) = v_2\left(\binom{p-2}{k-2} \frac{2c^{k-2}}{k(k-1)}\right) > 1.$$

Ugotovili smo, da je

$$v_2\left(\binom{p}{k} c^{k-2}\right) > v_2\left(\binom{p}{2}\right)$$

pri vseh sodih številih $4 \leq k \leq p-1$. To pomeni, da so v enakosti (7) vsi členi od drugega naprej deljivi z neko potenco števila 2, ki ne deli $\binom{p}{2}$. Toda to je protislovno. Veljati mora $c = 0$ in zato $y = 0$. ■

Dvojčica enačbe (5) je enačba

$$x^2 - y^q = 1 \quad (x > 0, y > 0, q \geq 3 \text{ praštevilo}). \quad (8)$$

V trditvi 1 smo pokazali, da ima pri $q = 3$ enačba (8) le eno netrivialno rešitev. Kako pa je z netrivialnimi rešitvami, ko je $q \geq 5$? Iskanje odgovora na to vprašanje je trajalo precej dlje, kot bi pričakovali glede na podobnost enačb (5) in (8). Šele leta 1965 je Chao Ko objavil članek, v katerem je pokazal, da pri nobenem lihem praštevilu $q \geq 5$ enačba (8) nima netrivialnih rešitev. Kasneje so Chao Kojev dokaz poenostavili, edino neelementarno dejstvo, ki je uporabljeno v poenostavljenem dokazu, je, da je grupa enot v realnem kolobarju $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, kjer je d naravno število, ki ni popoln kvadrat, generirana z -1 in $u + v\sqrt{d}$, pri čemer je (u, v) osnovna rešitev Pellve

enačbe $x^2 - dy^2 = 1$. Ker bi celoten dokaz zahteval preveč truda in prostora, ga bomo izpustili.

Enačbe (1) so se lotevali tudi tako, da so vzeli za znano katero od obeh osnov. Tu bomo pogledali, kako je z rešitvami enačbe

$$2^u - y^v = 1. \quad (9)$$

Trditev 3. *Enačba (9) nima netrivialnih rešitev.*

Dokaz. Vzemimo, da je (y, u, v) netrivialna rešitev enačbe (9). Potem je očitno y liho naravno število večje od 1. Pišimo $y = 4z \pm 1$. Iz enakosti $2^u - (4m \pm 1)^v = 1$ izhaja kongruenca $-(\pm 1)^v \equiv 1 \pmod{4}$, ki velja le, če je v liho število in $y = 4z - 1$. Ker je $v > 1$, obstaja liho praštevilo p , ki deli v . Naj bo $v = pw$. Potem je

$$2^u = y^v + 1 = (y^w)^p + 1 = (y^w + 1) \left(y^{w(p-1)} - y^{w(p-2)} + \dots + 1 \right). \quad (10)$$

Števili $y^w + 1$ in $y^{w(p-1)} - y^{w(p-2)} + \dots + 1$ sta si tuji. Namreč, če naravno število d deli obe, imamo

$$y^w \equiv -1 \pmod{d} \quad \text{in} \quad y^{w(p-1)} - y^{w(p-2)} + \dots + 1 \equiv 0 \pmod{d}.$$

Oboje skupaj nam da

$$0 \equiv y^{w(p-1)} - y^{w(p-2)} + \dots + 1 \equiv p \pmod{d}.$$

Ker d ne more biti enak p , saj bi potem praštevilo p delilo 2^u , mora biti $d = 1$. Zdaj lahko sklepamo, da velja bodisi $y^w + 1 = 2^u$ in je drugi faktor v (10) enak 1 bodisi $y^w + 1 = 1$. Toda obe možnosti nas pripeljeta v protislovje.

V drugi polovici 20. stoletja so se enačbe (4) lotevali z različnimi modernimi metodami, tako algebrainimi kot analitičnimi, uporabljali pa so tudi računalnike. Z algebrainimi metodami je J. W. S. Cassels dokazal naslednji izrek:

Izrek 4. *Za vsako netrivialno rešitev (x, y, p, q) enačbe (4) velja, da p deli y in q deli x .*

Izrek ima pomembno vlogo tudi v Mihăilescujevi rešitvi Catalanove domneve. Ena od zanimivih posledic izreka 4 pa je naslednja trditev:

Trditev 5. *Ne obstajajo tri zaporedne popolne potence.*

Dokaz. Da bi prišli v protislovje, predpostavimo, da obstajajo tri zaporedna naravna števila, ki so popolne potence. Naj bodo $x^p < y^q < z^r$ ta števila. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da so eksponenti praštevila. Imamo torej dve rešitvi enačbe (4): $y^q - x^p = 1$ in $z^r - y^q = 1$. Po Casselsovem izreku potem velja, da q deli x in z , od koder sledi, da deli tudi $z^r - x^p = 2$. To nam da $q = 2$. Toda po trditvi 2 enakost $z^r - y^2 = 1$ ne velja za nobeno trojico naravnih števil, če je $r \geq 2$. ■

Z analitičnimi metodami se je enačbe (4) oziroma splošnejših diofantskih enačb tega tipa lotil C. L. Siegel. Iz splošnega rezultata o številu celoštevilske točke na dani krivulji, ki ga je Siegel objavil leta 1929, sledi, da ima pri danih p in q enačba (4) le končno mnogo rešitev. Kako določiti zgornjo mejo za število rešitev, so ugotovili šele kasneje. S pomočjo splošnega rezultata iz leta 1955, ki sta ga dokazala H. Davenport in K. F. Roth, je to storil S. Hyvärinen leta 1964. Pravi preboj pa je leta 1976 uspel R. Tijdemanu, ki je pokazal, da ima enačba (4) le končno mnogo rešitev (x, y, p, q) in da lahko eksplicitno izračunamo zgornje meje za x, y, p in q . Dokaz je v veliki meri slonel na rezultatih A. Bakerja o ocenah linearnih form logaritmov, za kar je Baker leta 1970 dobil Fieldsovo medaljo. Tijdemanov rezultat je spodbudil tekmovanje za znižanje zgornjih mej rešitev. Na primer, v začetku devetdesetih let je bilo znano, da mora veljati $\max\{p, q\} \leq 10^{26}$, če je (x, y, p, q) rešitev enačbe (4). Potem do leta 2002 pri reševanju enačbe (4) ni bilo večjega napredka.

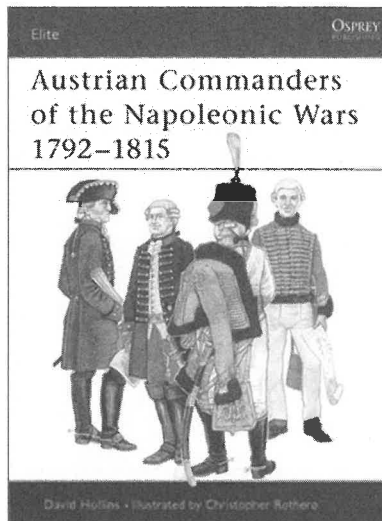
LITERATURA

- [1] G. Frey, *Der Satz von Preda Mihăilescu Die Vermutung von Catalan ist richtig!*, Internat. Math. Nachrichten **192** (2003), str. 1–11.
- [2] J. Grasselli, *Algebrائيčna števila*, DMFA 1983.
- [3] J. Grasselli, *Catalanova domneva potrjena*, Presek **32** (2004/2005) 2–3, str. 22–23.
- [4] T. Metsänkylä, *Catalan's Conjecture: Another Old Diophantine Problem Solved*, Bull. Am. Math. Soc. **41** (2003), str. 43–57.
- [5] P. Mihăilescu, *A class number free criterion for Catalan's conjecture*, J. Number Theory **99** (2003), str. 225–231.
- [6] P. Mihăilescu, *Primary cyclotomic units and a proof of Catalan's conjecture*, J. Reine Angew. Math. **572** (2004), str. 167–195.
- [7] P. Ribenboim, *Catalan's Conjecture*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), str. 529–538.
- [8] I. Vidav, *Algebra*, DMFA 1980.

David Hollins (ilustr. Christopher Rothero): AUSTRIAN COMMANDERS OF THE NAPOLEONIC WARS 1792–1815, Osprey Publishing Ltd., Oxford 2004, 64 strani.

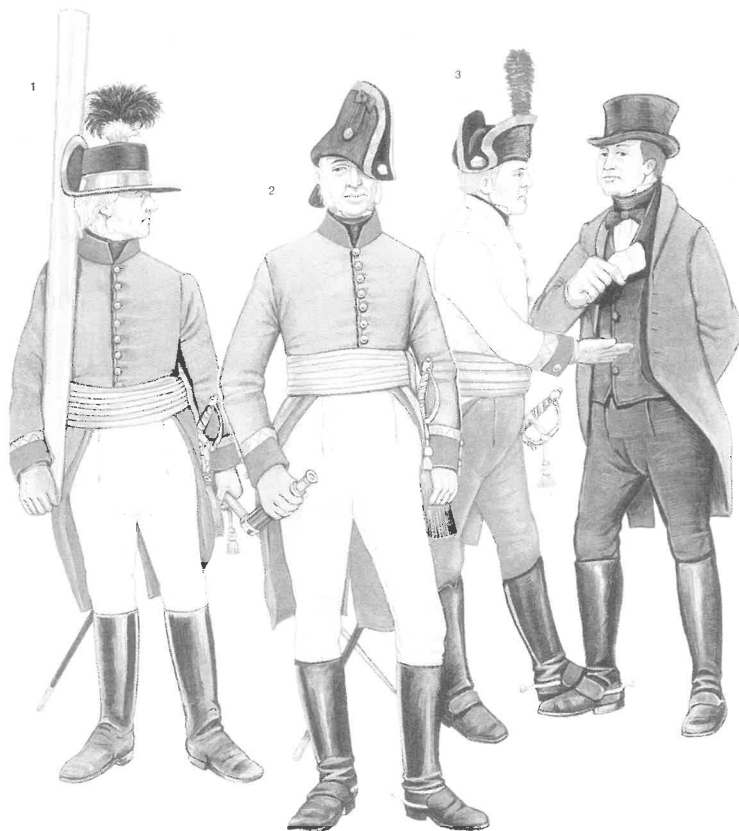
Znana britanska založba Osprey ima „na vesti“ že skoraj sto naslovov, povezanih z Napoleonovimi vojnami. Kljub temu pa je nova izdaja, ki smo jo pravkar dobili v roke, za Slovence nekaj posebnega. V njej je nov portret našega slovitega Vege (F1 na strani 38, glej sliko) z obrazom, posnetim po slovenskem petdesetotolarskem bankovcu. Rothero nam je narisal (pod)polkovnika Vego v strumni vojaški drži ob njegovem mlajšem soborcu, prav tako topničarskem polkovniku Josefu Smoli (rojen 12. 6. 1764 v Teplitzu na Češkem, umrl 1820). No ja, boste rekli, to pa ni nič pretresljivega. Pa se motite. Ob sliki je Vega to pot bržkone dokončno v tuji literaturi zapisan kot Slovenec Jurij in ne morda Georg! V kratkem življenjepisu na straneh 61–62 je ob vojaških, matematičnih in drugih znanstvenih zaslugah izrecno izpostavljen njegov slovenski rod iz Zagorice. Res je Hollins ljubljanski licej nekoliko degradiral v „high school“; vendar bi tudi povsem dobronameren prevajalec težko našel ustrezen angleški izraz za licejske študije. Do ukinitve pred dobrim poldrugim stoletjem je bil licej v večini katoliških dežel najvišji možni študij filozofskih, fizikalnih in matematičnih znanosti ter obvezna prehodna stopnja med srednješolskimi študijami in medicinsko, pravno ali teološko fakulteto. Žal danes takšnih šol že dolgo ni več; zato je besedo licej težko uporabljati v slovenščini, kaj šele prevesti.

Pisec točno popisuje Vegove zasluge, čeprav ga je povišal v polkovnika in končno celo v generalmajorja (GM na strani 62). Ob Vegovih uspehih v boju in snovanju novih možnarjev dolgega dometa je enakovredno opisal Vegove učbenike matematike in fizike; Vegovo poglavje o balistiki je razglasil za sodobni temelj te znanosti! Vsekakor velika čast; slovenski um in pero sta torej v veliki meri omogočila napredek modernih vojaških ved. Avtor ni pozabil omeniti Vegovih uspehov z logaritmovniki in članstva v številnih evropskih akademijah. Še posebej je zapisal, da se po našem Vegi imenuje krater na Luni; tako visoko so se pač povzpeli le redki vojaški poveljniki.



Austrian Commanders of the Napoleonic Wars 1792–1815

- 1: Oberst Jurij Vega
- 2: Oberst Josef Smola
- 3: FML Karl Mack, Freiherr von Leiberach



Kaj pa Vegovo računanje decimalk števila π , njegove matematične, fizikalne in astronomske študije? Ne bodimo prezahtevni; saj gre vendar za knjigo o vojaški zgodovini! Vsekakor se je naš oficir Vega med Napoleonomimi vojnami vseskozi bojeval na angleški strani; zato mu v angleški knjigi pripada zasluženost mesto.

Vegova pot od pastirja do barona je Slovincem pisana na kožo. Vsak pravoveren Slovenec si jo želi uresničiti. Zato s toliko večjim ponosom bremo tujo hvalo zaslugam naših ljudi, našega znanja in naših prizadevanj za uveljavljanje slovenskih matematične znanosti v širnem svetu. V zadoščenje nam je, da je bil Vega največji, nikakor pa ne edini v celi množici odličnih znanstvenikov iz slovenskega prostora, ki so v preteklih stoletjih gradili sodoben svet znanosti in tehnike.

Za pomoč se zahvaljujem dr. Matiji Žargiju.

Stanislav Južnič

OBZORNIK ZA MATEMATIKO I
 LJUBLJANA, JULIJ 200
 Letnik 52, številka 4

R 177/05



ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52

100002005,4

COBISS

VSEBINA**ODPISANO****Članki****Strani**

Manipulacija molekularnih motorjev z optično pinceto, Mojca Vilfan ..	97–108
Pot do posebne teorije, Janez Strnad	109–119
Catalanova domneva je dokazana, Janko Bračič	120–127

Nove knjige

Austrian Commanders of the Napoleonic Wars 1792–1815, Stanislav Južnič	128–XV
---	--------

Vesti

Vabilo na odkritje spominske plošče Ivu Lahu	119
--	-----

CONTENTS**Articles****Pages**

Manipulation of Molecular Motors Using Optical Tweezers, Mojca Vilfan	97–108
The Way to the Special Theory, Janez Strnad	109–119
Catalan's Conjecture is Proven, Janko Bračič	120–127
New books	128–XV
News	119

Na naslovnici je shematski prikaz poskusa z optično pinceto. Ta postavitev omogoča preučevanje ene same molekule, kar je osnova za razumevanje molekularnih motorjev in posredno mehanizmov, ki vodijo do nadzorovanega transporta snovi znotraj celic (glej članek na strani 97).