

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

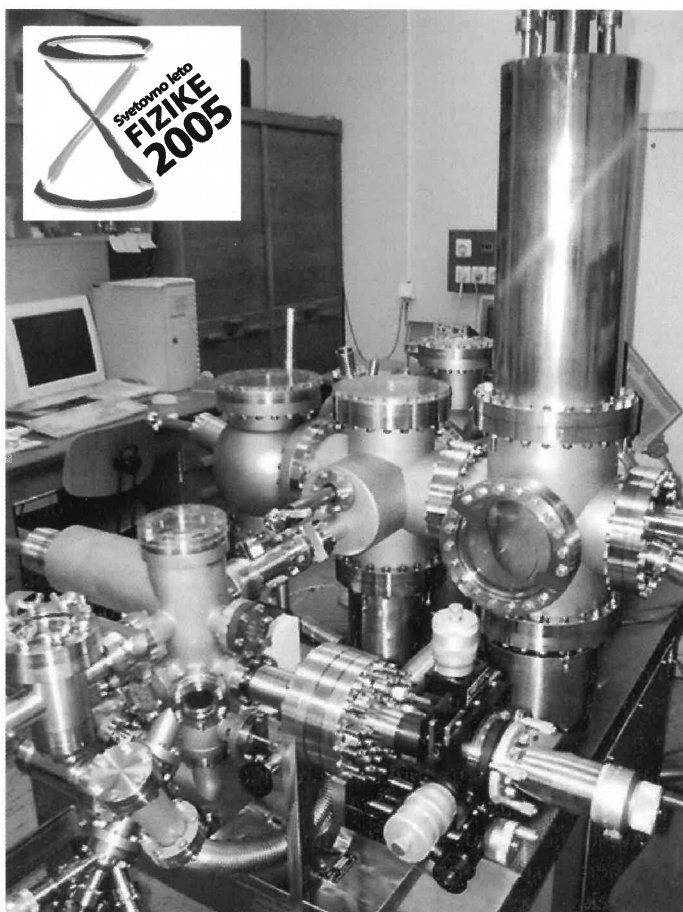
ODPISANO

2005

Letnik 52

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2005, letnik 52, številka 3, strani 65–96

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460, 2512 005 **Telefaks:** (01) 2517 281 **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://zaloznistvo.dmfa.si/omf/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBAS12X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Nada Razpet (vesti), Pavle Saksida (nove knjige), Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško stavila Monika Testen.

Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1400 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 5.000 SIT, za druge družinske člane in študente pa 2.500 SIT. Naročnina za ustanove je 8.000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2005 DMFA Slovenije – 1608

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

TUNELSKI MIKROSKOP KOT NANOTEHNOLOŠKO IN ANALITIČNO ORODJE

ROK ŽITKO

Institut Jožef Stefan

in

IGOR MUŠEVIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko

Univerza v Ljubljani

PACS: 61.16.Ch, 68.35.-p, 33.15.-e

Razvoj vrstične tunelske mikroskopije je omogočil nastanek čisto novih področij raziskovanja v nanoznanosti. Stik med konico mikroskopa in površino vzorca si lahko predstavljamo kot kemijski reaktor atomskih dimenzij, v katerem lahko s tunelirajočimi elektroni in električnim poljem trgamo in tvorimo kemične vezi.

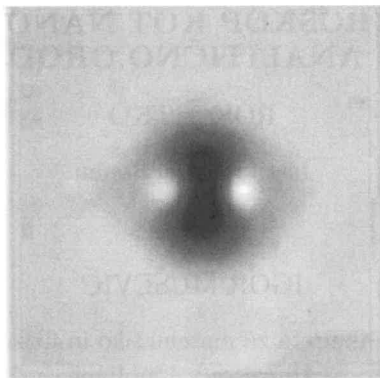
TUNNELING MICROSCOPE AS NANOTECHNOLOGIC AND ANALYTICAL TOOL

The development of scanning tunneling microscopy led to entirely new domains of research in nanosciences. The junction between the microscope tip and the surface of the sample can be considered as a tiny chemical reactor of atomic dimensions, where tunneling electrons and electric field are used to break and create chemical bonds.

Vrstični tunelski mikroskop (angl. *scanning tunneling microscope*, STM) se je kmalu po odkritju leta 1982 uveljavil kot izjemno močno in vsestransko orodje na področju fizike površin. Z vidika nanoznanosti je pomemben razvoj nizkotemperaturnih tunelskih mikroskopov (LT-STM), hlajenih s tekočim helijem, katerih delovne temperature so pod 10 K. Pri nizkih temperaturah se difuzija molekul na površinah močno upočasni, zato ti instrumenti omogočajo načrtno premikanje atomov in molekul ter druge manipulacije z nanoskopskimi delci [1, 2]. Uporaba LT-STM za slikanje, spektroskopske meritve in manipuliranje nanostruktur je brez dvoma eno izmed najbolj obetavnih področij nanoznanosti. Naj naštejemo le tri izmed najbolj odmevnih uspehov iz preteklih let:

- **Slikanje z atomsko ločljivostjo**

Pri slikanju topografije in elektronske strukture površin je glavna prednost delovanja pri nizkih temperaturah večja mehanska stabilnost in občutljivost sistema, saj je veliko manj mehanskih in električnih šumov. Z namensko sestavljenimi instrumenti lahko vidimo celo notranjo strukturo enostavnih molekul in kemične vezi (slika 1) [1].



Slika 1. Notranja struktura molekule acetilena C_2H_2 . Slike, posnete s STM, moramo zelo pazljivo tolmačiti, saj se v njih kažejo tako lastnosti površine kot tudi lastnosti konice. Pogosto moramo za pravilno razumevanje primerjati izmerjene slike s slikami, izračunanimi na podlagi različnih modelov. Na prikazani sliki, denimo, „vidimo“ atoma vodika kot bela vrha, črna vdolbina v središču je posledica trojne kovalentne vezi med atomoma ogljika, atomov ogljika pa ne moremo razložiti [1].¹

• Tunelska spektroskopija

Tunelska spektroskopija je merjenje električne karakteristike tunelskega stika: merimo tunelski tok v odvisnosti od napetosti med vzorcem in konico. Tunelski spekter ponavadi prikažemo kot graf diferencialne prevodnosti dI/dV v odvisnosti od napetosti V . S takšno meritvijo določimo lokalno gostoto elektronskih stanj, ki je približno sorazmerna z dI/dV . Ločimo lahko, ali se površina obnaša kot kovina ali kot polprevodnik. Če je med konico in površino kakšna nečistoča, na primer molekula, je možno izmeriti njeno prevodnost. Skozi molekule namreč lahko teče razmeroma velik tok, če elektroni resonančno tunelirajo skozi katero izmed molekulskih orbital. V tunelskem spektru zato dobimo ostre vrhove pri napetostih, ki ustrezajo energijam teh orbital. Pri takšnih meritvah so nizke temperature ključnega pomena, saj je razširitev spektralnih vrhov sorazmerna s temperaturo.

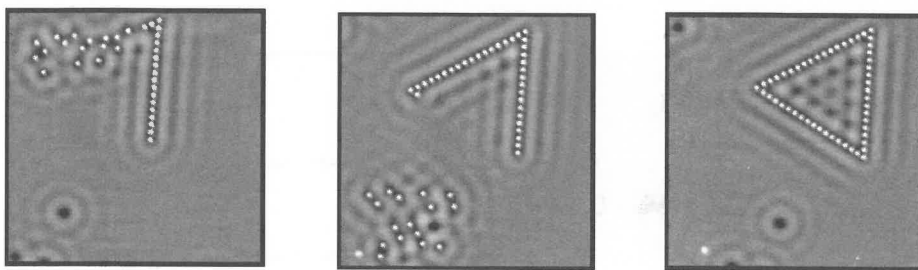
Če je vzorec v magnetnem polju, je možno s tunelsko spektroskopijo izmeriti celo energijo, ki je potrebna, da obrnemo spin posameznim adsorbiranim atomom [3].

• Izdelava in študij nanostruktur

LT-STM so prvič uporabili za izdelavo nanostruktur že leta 1990, ko so z atomi ksenona na površini niklja Ni(110) napisali črke 'IBM'. Naj-

¹Slike 1, 3, 4 in 5 so z dovoljenjem ponatisnjene iz članka W. Hoja *Single-molecule chemistry*, J. Chem. Phys. **117** (2002), str. 11033. Copyright © 2002 American Institute of Physics.

bolj imenitne načrtno izdelane nanostrukture so bržkone kvantne korale (slika 2). Spektroskopsko določena lokalna gostota stanj v notranjosti korala je takšna kot pri delcih, ujetih v dvodimenzionalni potencialni jami. Kvantne korale so torej igrišče, kjer lahko preverjamo osnovne zakone kvantne mehanike.



Slika 2. Gradnja kvantne korale iz atomov srebra na površini Ag(111) ($49,3\text{ nm} \times 49,3\text{ nm}$, $U = +39\text{ mV}$, $I = 1,1\text{ nA}$, $T = 6\text{ K}$) [4].

1. Kemična sinteza na površinah

LT-STM je učinkovito orodje iz dveh razlogov:

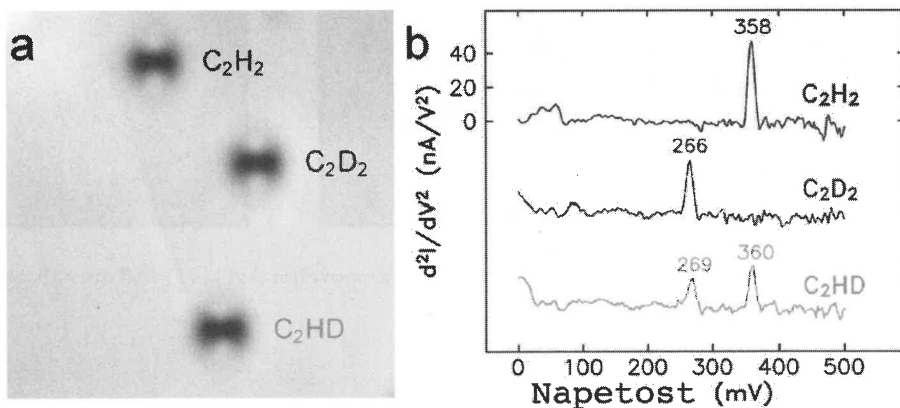
- Sprememba razdalje med konico in objektom za delček nanometra lahko spremeni jakost interakcije med njima za več velikostnih redov, kar omogoča načrtno premikanje adsorbatov.
- Tipična razdalja med konico in objektom je $0,6\text{ nm}$ in potencialna razlika okoli 1 V , kar ustreza električnemu polju, ki je velikostnega reda električnega polja v notranjosti molekul, zato lahko s STM trgamo kemične vezi in povzročamo kemične reakcije.

1.1 Določanje položaja in identitete adsorbatov

Pri načrtni gradnji nanostruktur potrebujemo poleg orodja tudi oči. Videti moramo, kje na površini in kakšne vrste so molekule. Lege atomov in molekul lahko v večini primerov brez težav določimo z navadno topografsko tunelsko mikroskopijo.

Na topografskih slikah je razvidna notranja struktura molekul, vendar je oblika močno odvisna od vezavnega mesta molekule. Topografska slika je namreč kompleksna konvolucija elektronskih lastnosti adsorbata, površine in konice mikroskopa, zato po teh slikah ne moremo sklepati o kemični identiteti adsorbatov. Veliko dragocenih informacij dobimo s spektroskopijo

neelastično tunelirajočih elektronov (angl. *inelastic electron tunneling spectroscopy*, IETS) [5]. Iz spektrov tunelskega toka lahko razberemo nihajne lastnosti molekul. Vibracijski spektri so zanesljivi „prstni odtisi“ adsorbiranih molekul in jih lahko uporabimo za identifikacijo kemičnih spojin. IETS je uporaben tudi za razlikovanje med izotopi, ki imajo sicer identične topografske slike (slika 3).

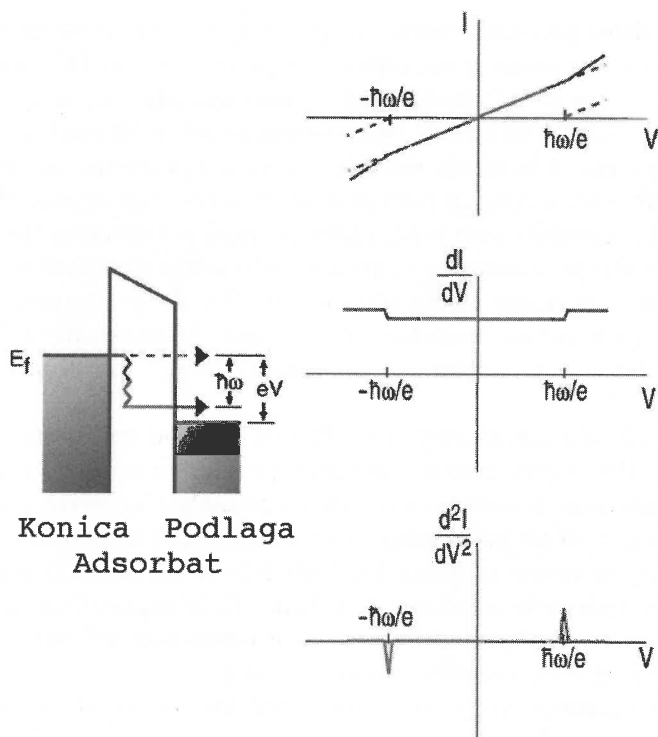


Slika 3. Z IETS lahko ločimo različne izotope, saj so lastne nihajne frekvence odvisne od atomskih mas [1].

Tipične lastne nihajne energije molekul so na območju do 500 meV. Ko zadosti povečamo napetost med konico in vzorcem, imajo tunelirajoči elektroni zadosti energije, da lahko vzbudijo nihajna stanja v molekuli. Ker lahko tedaj elektroni tunelirajo po dveh „poteh“ (v molekuli lahko vzbudijo nihanje ali pa ga ne), bo verjetnost za prehod večja, zato začne tunelski tok hitreje naraščati z napetostjo. Koleno v odvisnosti toka od napetosti ustreza skoku prvega odvoda (t. i. diferencialne prevodnosti, dI/dV) oziroma vrhu v spektru drugega odvoda (slika 4). Skok diferencialne prevodnosti, $\Delta\sigma = \Delta(dI/dV)$, je kar sorazmeren s presekom za neelastično sipanje.

1.2 Premikanje atomov in molekul

Adsorbirane delce lahko premikamo na različne načine z uporabo fizikalnih in kemičnih interakcij, ki obstajajo na območju tunelskega stika. Adsorbat namreč ves čas sledi minimumu potencialne energije.



Slika 4. Tunelirajoči elektroni se lahko sipajo neelastično in del svoje energije predajo v obliki „fonona“. Iz tunelskega spektra lahko razberemo karakteristične frekvence [1].

V grobem razlikujemo dva načina premikanja:

- „vodoravno“ **premikanje**, pri katerem med premikanjem delec ostane na površini snovi;
- „navpično“ **premikanje**, pri katerem delec poberemo s konico STM in ga spustimo na drugem mestu.

Pri vodoravnem premikanju je sila med adsorbatom in konico pretežno kemičnega značaja, saj k njej v največji meri prispevajo medatomske potenciali. S premikanjem konice lahko spreminjamo velikost in smer te sile ter premikamo adsorbirane snovi na površini. Glede na vrsto interakcij med konico in adsorbatom razlikujemo tri osnovne načine vodoravnega premikanja:

- Če je interakcija privlačna, adsorbat sledi konici – to je **sledenje**.
- Če je interakcija odbojna, adsorbat s konico potiskamo – to je **potiskanje**.
- Če je privlačna interakcija tako močna, da je adsorbat ujet pod konico ali pa celo vezan nanjo, takšno premikanje imenujemo **drsenje**.

Pri drsenju se delec premika zvezno, medtem ko v prvih dveh primerih diskretno skače iz ravnovesne v ravnovesno lego na potencialni hiperploskvi. Dolžina skokov je po navadi enaka medatomske razdalji, saj imajo adsorbati odlikovana adsorpcijska mesta. Iz časovne odvisnosti toka med manipulacijo lahko tako sklepamo, s kakšnim načinom premikanja imamo opravka.

Ker razdalje med konico in površino ne moremo neposredno določiti, je mera za razdaljo *tunelska upornost*, razmerje med potencialno razliko in tunnelskim tokom. Pri premikanju adsorbatov je tunelska upornost velikostnega reda 100 k Ω , pri navadnem slikanju pa nekaj G Ω . Za primerjavo, upornost enoatomskega točkovnega kontakta med konico in substratom (enoatomski kontakt dobimo v trenutku, ko se konica zaleti v površino), je enaka $h/2e^2 = 12,9 \text{ k}\Omega$.²

Uspeh premikanja adsorbatov je močno odvisen od strukture in kemične sestave konice. Ponovljive premike je bolje opravljati z nekoliko topimi konicami, saj idealno ostre konice (ki sicer dajo optimalno ločljivost pri slikanju) ne preživijo velikih sil ob premikanju. Interakcije med konico in površino so zares močne, saj je atome možno odstraniti celo iz površinskih stopnic, kjer so atomi v energijsko zelo ugodnem položaju. To je pomemben dosežek, saj so stopnice pogost površinski defekt, ki nam lahko rabi kot zaloga atomov, iz katerih potem gradimo umetne nanostrukture.

Novost je premikanje večjih organskih molekul, ne da bi te razpadle zaradi prekomernih sil. Uspelo je na primer premikanje molekule Cu-TBPP in fullerena C₆₀. Molekulo lahko premaknemo, če je difuzijska prepreka za bočno premikanje nižja od energije, potrebne za cepljenje kemičnih vezi znotraj molekule. Mehanizem premikanja je pri velikih molekulah nekoliko drugačen kot pri manjših adsorbatih. Konica ob približevanju molekulo najprej nekoliko deformira, in sicer tako, da se difuzijska prepreka zniža, nato pa molekula skoči na sosednje mesto. Tako molekulo pravzaprav mehansko porivamo. Iz časovne odvisnosti tunelskega toka dobimo informacijo o notranji dinamiki molekule med njenim premikanjem, tako da vemo, kako molekula „hodi“.

Pri navpičnem premikanju lahko adsorbat dvignemo in prenesemo s površine na konico na tri načine:

- Z mehanskim „dotikanjem“ adsorbata: konica in površina sta tako blizu, da ni več energijske prepreke med adsorpcijo na površini ali na konici, zato lahko adsorbat preskoči.
- Z uporabo električnega polja. Polje med vzorcem in konico je takšno, da tok elektronov teče od vzorca proti konici. Do prenosa adatomskega pride zaradi s tokom ojačane elektromigracije. V tunnelskem stiku je namreč

²To je obratna vrednost kvanta prevodnosti $G_0 = 2e^2/h$, torej prevodnosti enega sipalnega kanala v balističnem prevodniku (prevodniku s stoddostno prepustnostjo).

jakost toka zelo velika, elektroni pa se sipajo na defektu (adsorbatu) in mu predajo gibalno količino.

- Z električnimi pulzi.

Konica STM je torej nanoskopski žerjav, ki omogoča sestavljanje tridimenzionalnih nanostruktur. Reverzibilno lahko dvigamo tako posamezne atome kot tudi manjše molekule, na primer ogljikov monoksid CO ali amoniak NH_3 . Praktično to storimo tako (vrednosti so za primer dvigovanja molekule CO na Ag(110)), da konico STM postavimo nad molekulo, napetost v stiku nastavimo na 250 mV, nato pa zvišujemo tok od 0,1 nA do 10 nA.

S konico, na katero je pritrjen adatom ali molekula, pogosto dosežemo veliko boljšo ločljivost pri topografskem slikanju, pri tunelski spektroskopiji pa vidimo nihanje načine, ki s čisto konico niso vidni. Tako lahko preverimo tudi, v kolikšni meri so rezultati meritev neodvisni od vrste atoma na vrhu konice.

1.3 Kemične reakcije s posameznimi molekulami

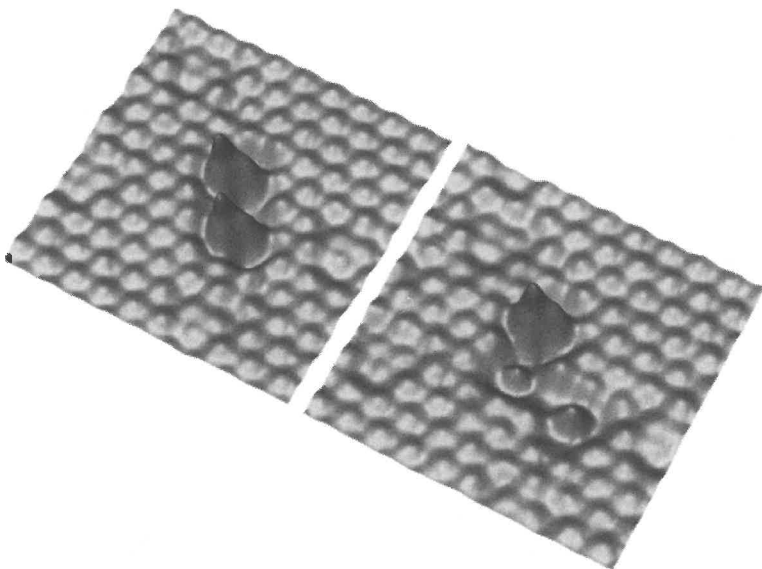
Kemična reakcija je preureditev sredic (sredica je jedro skupaj z zapolnjenimi lupinami atomskih orbital) in ustrezna sprememba oblaka valenčnih elektronov oblaka, ki adiabatno sledijo tem premikom. Gibanje sredic v notranjosti molekul je torej intimno povezano s kemičnimi reakcijami, zato nas ne preseneča, da lahko z neelastičnim sipanjem elektronov povzročamo kemične prehode v posameznih molekulah [1].

Kemične vezi lahko pretrgamo z vibracijsko vzbuditvijo vezi s tunelskimi elektroni [6], ki imajo zadosti energije, da je lahko del oddajo v obliki fonona ob neelastičnem sipanju. Ko je prenesena energija večja od razpadne energije, se vez razcepi. Odvisnost med tokom in hitrostjo disociacije nam pove, koliko kvantov nihanja moramo vzbuditi, da molekula razpade. Pri zadosti visoki napetosti zadostuje en sam tunelski elektron, da je nihanje način vzbujen prek disociacijske prepreke (linearna odvisnost hitrosti razpada od toka), pri nižjih napetostih pa je potrebnih več zaporednih trkov, do katerih more priti v času, krajšem od relaksacijskega (potenčna odvisnost hitrosti razpada od toka).

Obstoj mejne vrednosti napetosti pomeni, da imamo opravka z resonanco (antivezavno orbitalo), v katero se veže elektron. Čeprav je razpadni čas za vzbujena stanja adsorbatov na kovinah zelo kratek, je ta vseeno zadosti dolg, da se energija elektrona pretvori v nihanje energijo.

Razbijanje molekule poteka tako, da konico postavimo nad molekulo in skozi njo spustimo električni pulz: napetost nastavimo na želeno vrednost (s tem določimo energijo tunelskih elektronov, ki mora biti reda nekaj elektronvoltov za organske molekule ali pa nekaj sto milielektronvoltov za O_2) in jo vzdržujemo nekaj 10 milisekund. Ob tem merimo tunelski tok. Ko se

ta močno spremeni (običajno se zmanjša), vemo, da je prišlo do razcepa molekule. Do spremembe v toku pride zato, ker morajo elektroni po razcepu tunelirati skozi spremenjeno energijsko prepreko, na primer skozi vakuum namesto skozi molekularne orbitale. Ko nato topografsko slikamo območje, vidimo razpadne produkte (slika 5), katerih kemično identiteto lahko v številnih primerih nedvoumno določimo z neelastično tunelsko spektroskopijo. Uspelo je razbiti molekule vode H_2O , kisika O_2 , pa tudi večje molekule, kot so benzen C_6H_6 in njegovi derivati.



Slika 5. Topografska slika pred disociacijo molekule O_2 in po njej [1].

Če lahko dovolj dobro nastavimo položaj konice, lahko zlomimo eno kemično vez tako, da ostane sosednja (identična!) vez nedotaknjena. Tako lahko vezi trgamo korakoma, kot na primer pri dehidrogenaciji acetilena C_2H_2 : najprej odtrgamo en atom vodika in dobimo etinil CCH , nato pa še drugega in dobimo ogljik CC .

S spreminjanjem predznaka napetosti lahko izbiramo, ali bodo elektroni tunelirali v elektronsko stanje v molekuli ali iz njega. V primeru molekul kisika na površini $\text{Pt}(111)$ lahko tako povzročimo dve različni kemični reakciji, ki ju ločimo po različnih razpadnih produktih [1].

Najbolj preprost poskus spajanja na površinah je tvorba dimerov adatomov. Dimeri so stabilni, ne razpadejo na posamezne atome in jih lahko premikamo kot celoto. Reakcija poteka spontano. Zadostuje že, da atoma približamo na zadosti majhno medsebojno razdaljo. Pravo spajanje molekul, torej tvorjenje kovalentnih kemičnih vezi, pa je veliko večji eksperimentalni

izziv. Oba reaktanta, ki morata biti „prave vrste“, moramo približati na pravo medsebojno razdaljo in sprožiti ravno pravi električni pulz. Za potek reakcij je pomembna tudi izbira podlage, ki verjetno igra vlogo katalizatorja.

V enem prvih tovrstnih poskusov so molekulo ogljikovega monoksida CO vezali na železo Fe in dobili železov karbonil $\text{Fe}(\text{CO})$, nato pa so spojili še dodatni CO in dobili železov dikarbonil $\text{Fe}(\text{CO})_2$. Kemično vez tvorimo tako, da molekulo CO s konico STM dvignemo in jo spustimo na atom Fe. Da imamo na koncu zares opraviti z eno samo molekulo, se lahko prepričamo z nihanjsko spektroskopijo.

Reakcije lahko stimuliramo tudi s horizontalnimi manipulacijami. Molekulo CO približamo atomu kisika na površini, in sicer tako, da je atom kisika O v CO obrnjen stran od kisikovega adatomskega mesta. Reakcijo nato ponovno sprožimo s tunelskimi elektroni in dobimo molekulo CO_2 .

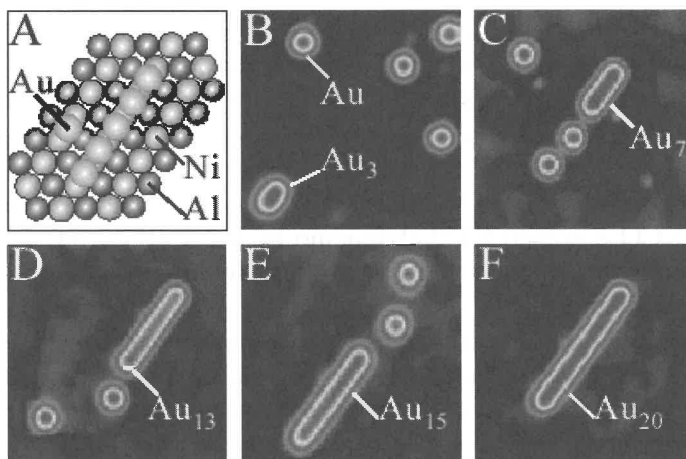
V svetu je bil zelo odmeven dosežek Saw-Wai Hlaja, ki je del svojega doktorskega usposabljanja opravil v laboratoriju za STM na Institutu „Jožef Stefan“ in svoje delo nadaljeval pri skupini za nizkotemperaturno tunelsko mikroskopijo na Freie Universität Berlin. Kot prvemu mu je uspelo sprožiti vse osnovne korake kemične reakcije z različnimi načini uporabe tunelskega mikroskopa in združiti dve molekuli jodobenzena v molekulo bifenila [7]. Na površini bakra Cu(111) je najprej iz dveh molekul jodobenzena odstranil atoma joda, dobljena fenila je z vodoravnim premikanjem približal, nato pa je med obema ustvaril kemično vez. Tako je ponovil stoletje staro Ullmannovo reakcijo z le dvema molekulama.

Želim poudariti, da je do danes uspelo tvoriti vezi med ogljikom in kisikom, med ogljikom in vodikom in med dvema atomoma ogljika, to pa so ravno vezi, ki imajo ključno vlogo v kemiji organskih spojin!

2. Nizkotemperaturni tunelski mikroskop kot analitično orodje

Z LT-STM lahko zelo natančno izmerimo elektronske lastnosti sestavljenih nanostruktur. S postopnim sestavljanjem atomov zlata v linearno verigo so pred kratkim ugotovili, kako se začnejo pojavljati kovinske lastnosti, ko velikost sistema narašča od enega samega atoma proti razsežnemu (bulk) vzorcu: izmerili so disperzijsko relacijo, efektivno maso in gostoto stanj v prevodnem „pasu“ 20-atomske verige [8]. Takšna meritev je globokega pomena, saj omogoča preizkus osnovnih načel fizike kondenzirane snovi, zato je bom opisal nekoliko bolj podrobno.

Verige atomov so sestavili na površini kristala NiAl(110) pri temperaturi 12 K z dodajanjem posameznih atomov (slika 6). Posamezni atomi verige na sliki niso vidni, kar pomeni, da se atomske orbitale močno prekrivajo.



Slika 6. Sestavljanje atomov zlata v linearno verigo [9].

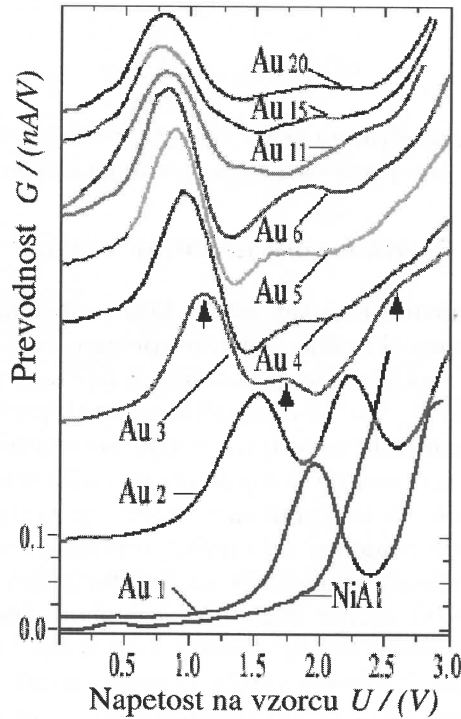
Elektronske lastnosti so izmerili s tunelsko spektroskopijo. Diferencialna tunelska prevodnost dI/dV je sorazmerna z lokalno gostoto stanj. Spekter prevodnosti na prazni površini NiAl(110) je gladka krivulja, ko pa takšen spekter izmerimo nad (izoliranim) adatomom zlata, dobimo vrh zvončaste oblike pri napetosti 1,95 V (slika 7). Ta resonanca nastane zaradi sipanja elektronov na atomski orbitali 6s zlata. Ko dodamo drugi atom, se elektronske lastnosti drastično spremenijo: resonanca se razcepi v dva vrhova pri 1,50 V in 2,25 V.

Razlaga je preprosta, saj obstaja analogija s sistemom dveh nihala, sklopljenih z vzmetjo. Lokalizirani stanji na vsakem izmed atomov ($|1\rangle$ in $|2\rangle$) imata energijo ϵ , sklopljeni pa sta s koeficientom t . Lastni energiji hamiltonke:

$$\hat{H} = \epsilon(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) - t(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \quad (1)$$

sta $\epsilon_S = \epsilon - t$ in $\epsilon_A = \epsilon + t$, ki ustrezata simetrični ($\psi = 1/\sqrt{2}(|1\rangle + |2\rangle)$) in asimetrični valovni funkciji ($\psi = 1/\sqrt{2}(|1\rangle - |2\rangle)$). Vrhova v spektru ustrezata tema „molekulska“ orbitalama. Ko v verigo dodajamo dodatne atome, prihaja do dodatnih razcepov, ki pa pri daljših verigah niso več razvidni zaradi prekrivanja razširjenih vrhov.

Diferencialna prevodnost in lokalna gostota stanj sta v prvem približku sorazmerni. Če torej izmerimo spektre prevodnosti vzdolž verige in naredimo izreze pri konstantni energiji, dobimo slike lokalne gostote stanj $\rho(x, E)$. Zaradi končne širine resonanc k lokalni gostoti stanj pri dani energiji E prispeva večje število lastnih stanj v bližini energije E . Avtorji članka so se odločili, da bodo rezultate analizirali v okviru modela kvantne jame z neskončnimi stenami. Lastna stanja kvantne jame so sinusoide $\phi_n(x) =$



Slika 7. Spektri prevodnosti različno dolgih verig atomov zlata. Spektri so izmerjeni na sredini verige in so zamaknjeni za večjo čitljivost [9].

$\sin(k_n x)$ z diskretnimi valovnimi števili $k_n = \pi n/L$, kjer je n kvantno število stanja, L pa širina potencialne jame. Lokalno gostoto stanj:

$$\rho(x, E) = a \langle x | \delta(E - \hat{H}) | x \rangle \quad (2)$$

lahko zapišemo z nastavkom:

$$\rho(x, E) = \sum_n c_n(E) |\phi_n(x)|^2, \quad (3)$$

kjer so $c_n(E)$ realni koeficienti, ki povedo, v kolikšni meri prispeva n -to lastno stanje k lokalni gostoti stanj pri energiji E . Koeficiente $c_n(E)$ za neko energijo dobimo s prilagajanjem izmerjene diferencialne prevodnosti z izračunano gostoto stanj. Nato izračunamo vrednost n , pri kateri ima krivulja $c_n(E)$ kot funkcija spremenljivke n maksimum, in v sliko disperzije vnesemo točko ($k = \pi n_{\text{max}}/L$, E). To ponovimo pri različnih energijah in točke povežemo v disperzijsko krivuljo. S prilagajanjem na pričakovano

disperzijsko relacijo:

$$E(k) = E_0 + \frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} k^2 \quad (4)$$

nato določimo rob energijskega pasu $E_0 = 0,68 \text{ eV}$ in efektivno elektronsko maso $m_{\text{eff}} = 0,5 m_e$, torej polovica mase prostega elektrona.

3. Kam vodi nadaljnji razvoj?

Na področju osnovnih raziskav skuša danes več skupin tunelsko mikroskopijo križati s femtosekundno optično spektroskopijo. Tako bi dosegli spodnjo mejo tako časovne kot prostorske ločljivosti pri spektroskopskih merjenjih na površinah, kar bi omogočilo pravcat preskok v razumevanju dejanskega poteka kemičnih reakcij na nivoju posameznih kemičnih vezi.

Novejši tunelski mikroskopi delujejo pri še nižjih temperaturah, celo pri nekaj sto milikelvinih. S takšnimi instrumenti je možno preučevati kvantne pojave, do katerih pride pri zelo nizkih temperaturah, kot je na primer superprevodnost, coulombska blokada ali Kondov pojav.

Pred kratkim je bil skovan izraz *nizkotemperaturna površinska kemija* za novo znanstveno disciplino na stičišču med fiziko in kemijo, katere cilj je sinteza novih organokovinskih spojin in kompozitnih materialov s posebnimi optičnimi, električnimi in magnetnimi lastnostmi. Nizkotemperaturni tunelski mikroskopi bodo gotovo postali eno izmed ključnih orodij na tem področju.

LITERATURA

- [1] W. Ho, *Single-molecule chemistry*, J. Chem. Phys. **117** (2002), str. 11033.
- [2] James K. Gimzewski in Christian Joachim, *Nanoscale Science of Single Molecules Using Local Probes*, Science **283** (1999), str. 1683.
- [3] A. J. Heinrich, J. A. Gupta, C. P. Lutz in D. M. Eigler, *Single-atom spin-flip spectroscopy*, Science **306** (2004), str. 466–469.
- [4] K-F. Braun, *Oberflächenuntersuchungen und atomare Manipulation mit einem Rastertunnelmikroskop bei tiefen Temperaturen*, disertacija, Freie Universität Berlin, 2000.
- [5] B. C. Stipe, M. A. Rezaei in W. Ho, *Single-Molecule Vibrational Spectroscopy and Microscopy*, Science **280** (1998), str. 1732.
- [6] B. C. Stipe, M. A. Rezaei, W. Ho, S. Gao, M. Persson in B. I. Lundqvist, *Single-Molecule Dissociation by Tunneling Electrons*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), str. 4410.
- [7] Saw-Wai Hla, Ludwig Bartels, Gerhard Meyer in Karl-Heinz Rieder, *Inducing All Steps of a Chemical Reaction with the Scanning Tunneling Microscope Tip: Towards Single Molecule Engineering*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), str. 2777.
- [8] N. Nilus, T. M. Wallis in W. Ho, *Development of One-Dimensional Band Structure in Artificial Gold Chains*, Science **297** (2002), str. 1853–1856.
- [9] W. Ho, *Atomically Resolved and Single Molecule Imaging, Spectroscopy, Dynamics, and Chemistry*, <http://www.physics.uci.edu/~wilsonho/stm-iets.html>.

NAGRAJENA ASIMPTOTSKA PROSTOST

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.10.Cr

Nobelovo nagrado za fiziko so v letu 2004 dobili David J. Gross, H. David Politzer in Frank Wilczek „za odkritje asimptotske prostosti v teoriji močne interakcije“ [1].

PRIZE-WINNING ASYMPTOTIC FREEDOM

The Nobel Prize in Physics 2004 was awarded to David J. Gross, H. David Politzer, and Frank Wilczek “for the discovery of asymptotic freedom in the theory of the strong interaction” [1].

Pred pol stoletja se je zdela prihodnost kvantne teorije polja zelo črna. Začelo se je sicer z uspehom kvantne teorije elektromagnetnega polja ali *kvantne elektrodinamike*, QED. Njeni zametki segajo v čas neposredno po rojstvu kvantne mehanike in Diracove enačbe za elektron. V prid ji je šlo, da je *sklopitvena konstanta*, ki meri sklopitev polja z izvirom, zelo majhna: $\alpha = e_0^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137,036$. Tako je mogoče uporabiti račun motenj (perturbacijski račun), ker zaporedni členi v razvoju v vrsto pojemajo s potenco konstante α . Neskončnosti, ki so kazile teorijo, so z *renormalizacijo* obvladali Richard Feynman, Julian Schwinger, Sin-Itiro Tomonaga in Freeman Dyson v letih tik pred drugo svetovno vojno in po njej. Okoli leta 1960 se je pokazalo, da efektivna sklopitvena konstanta z naraščajočo energijo narašča. Tako pri energiji W okoli 200 GeV, ki jo je zmogel trkalnik za elektrone in pozitrone LEP, naraste na približno $1/127$. Na splošno so ugotovili, da velja za elektromagnetno interakcijo:

$$\frac{d\alpha}{d\ln W} = \beta = \frac{2}{3}N\frac{\alpha^2}{\pi} + \dots$$

s številom rodov $N = 3$.

Hideki Yukawa je že pred vojno opisal močno interakcijo med nukleonomoma z izmenjavanjem delcev polja in napovedal njihovo maso. Po vojni so zares odkrili pione kot najlažje zastopnike mezonov. Toda sklopitvena konstanta te interakcije je merila približno 14, tako da je bilo treba opustiti vsako upanje na uporabo računa motenj. Razvoj vse zmogljivejših pospeševalnikov

je prinesel vrsto delcev, ki so delovali drug na drugega z močno interakcijo. Tako sploh ni bilo pravih osnovnih delcev, ampak je vladala „jedrska demokracija“. Na mesto kvantne teorije polja je stopila teorija *matrike* S , ki je povezovala vsa mogoča začetna stanja z vsemi mogočimi končnimi stanji pri sipanju in reakcijah. V okviru „zavezovanja“ so privzeli, da so delci te vrste sestavljeni iz vseh takih delcev. Ime (bootstrap) je namigovalo na lažnivega kljukca, ki naj bi se za svoje vezalke potegnil iz močvirja.

Razširilo se je prepričanje, da je v vseh mogočih kvantnih teorijah polja, podobno kot v kvantni elektrodinamiki, funkcija β pozitivna in efektivna sklopitvena konstanta z naraščajočo energijo narašča. Zato se je kvantne teorije polja vsaj glede močne interakcije oprijel slab glas. Spomin na te čase je že nekoliko zbledel. Zato ne razumemo več dobro Paulijeve izjave iz leta 1959, da „dobro vemo, da je teoretična fizika domala brez moči pri obravnavanju problema močnih interakcij“, in Landauove, da „smo prisiljeni sklepati, da je Hamiltonova metoda za močne interakcije mrtva in jo moramo pokopati, čeprav seveda z zasluženimi častmi“. Dyson je tedaj menil, da utegne trajati sto let, preden bodo razvili tako teorijo.

V takih okoliščinah so bili poskusi pomembnejši od teorije. Toda tudi pri poskusih ni šlo vse gladko. Tako so menili, da kaže glavnino podatkov izluščiti iz sipanja naprej – denimo pri sipanju elektrona na nukleonu, pri katerem se prenese majhna gibalna količina. Šele čez čas so uvideli, da se je bolje opreti na *globoko neprožno sipanje*, pri katerem se prenese velika gibalna količina. Pri takem sipanju elektronov na nukleonih je pri majhni energiji sipalni presek odvisen od dveh funkcij kvadrata invariantnega prenosa gibalne količine oziroma spremembe energije pri trku v laboratorijskem sistemu. James Bjorken je napovedal, da pri visoki energiji presek postane odvisen od ene same funkcije teh količin. Merjenja s stanfordskim linearnim pospeševalnikom so napoved podprla. Bjorknovega pojava ni bilo mogoče pojasniti z nobeno od tedanjih teorij polja [2].

Kurt Symanzik je na konferenci v Marseillu leta 1972 predaval o tem, da bi bilo mogoče pojav pojasniti s teorijo, v kateri bi efektivna sklopitvena konstanta z naraščajočo energijo pojemala. Vendar sam take teorije ni našel. Gerard t'Hooft se je oglasil in navedel tako teorijo. Pri raziskovanju šibke interakcije je spoznal neabelske (nekomutativne) kalibracijske teorije in je zdaj za ta primer na tablo napisal funkcijo β [2]. Vendar Symanzikovega nasveta, naj to čim prej objavi, ni upošteval.¹

¹G. t'Hooft je s svojim mentorjem M. Veltmanom dobil Nobelovo nagrado leta 1999 za

Medtem sta v Združenih državah take teorije raziskovala Gross in njegov podiplomski študent Wilczek na princetonski univerzi. Z enakim vprašanjem se je ukvarjal Politzer na harvardski univerzi. Naneslo je, da je Politzerjev mentor Sidney Coleman gostoval na princetonski univerzi. Zanimalo ga je, kakšen je znak funkcije β v tem primeru. Ali je mogoče, da bi bil negativen in bi efektivna sklopitvena konstanta z naraščajočo energijo pojemala? O tem se je Coleman pogovarjal z Grossom, ki naj bi izjavil, da sta z Wilczkom ugotovila, da je funkcija pozitivna. Coleman je pripomnil, da se je potem moral Politzer zmotiti. Po njegovem nasvetu je Politzer čez konec tedna preveril svoj račun in ni našel nobene napake. To je Coleman omenil Grossu, ki je priznal, da sta z Wilczkom zagrešila napako, ki sta jo že popravila in pripravila članek za objavo [3]. Coleman je svetoval Politzerju, naj pohiti, in njegov članek je v uredništvo Physical Review Letters prispel šest dni pozneje, na začetku maja 1973 [4]. Vsili se vprašanje, kako bi potekali dogodki, če se Coleman ne bi pogovarjal z Grossom. Na kaj je mislil Gross, ko je zapisal, da je šlo za razvoj od burke do zmagoslavja [2]? Symanzik je pozneje trdil, da gre prvenstvo Evropi, češ da v ta namen zadostuje omemba na konferenci.

Zdaj moramo poseči nazaj. Murray Gell-Mann leta 1962 in Yuval Ne'eman leta 1963 sta obravnavala zlomljeno simetrijo med hadroni, delci, zmožnimi jedrske interakcije. Gell-Mann je v tem okviru leta 1964 vpeljal tri osnovne gradnike kot *kvarke* u , d in s . Danes imamo to simetrijo za naključno posledico dejstva, da imajo ti trije kvarki razmeroma majhno maso. Kvarke so vneto iskali, a jih niso zaznali. Zato so jih razglasili le za matematično pomagalo. Istega leta je Oscar W. Greenberg vpeljal novo kvantno število *barvni naboj* kot posplošitev električnega naboja. Neodvisno od njega sta leta 1965 to storila tudi Yoichiro Nambu in Moo-Young Han. Vlogo barvnega naboja je najlažje razumeti pri resonanci Δ^{++} iz treh enakih kvarkov u z „vzporednimi“ spini. Zaradi Paulijeve prepovedi se morajo razločevati po dodatnem kvantnem številu. Med kvarkoma z barvnima nabojema deluje *barvna interakcija*, kot deluje elektromagnetna interakcija med delcema z električnima nabojema.

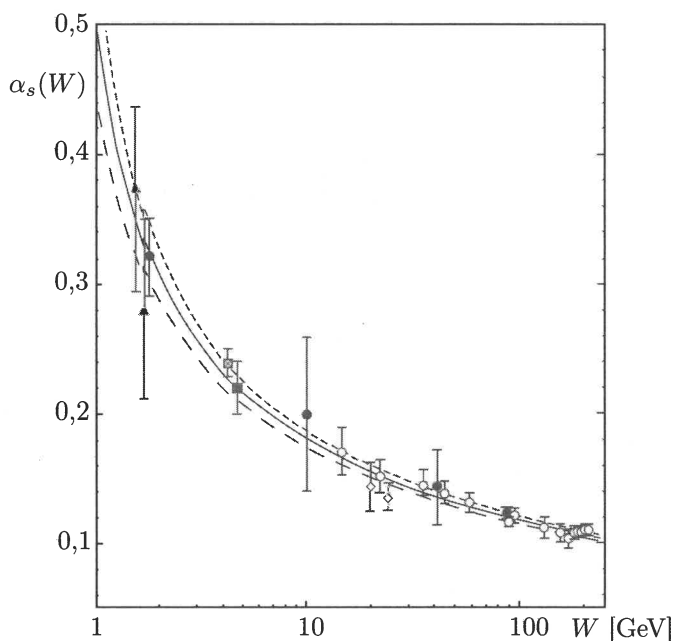
Gross in Wilczek ter Politzer so nedvoumno ugotovili, da sklopitvena

delo iz leta 1971, v katerem je ugotovil, da je neabelsko kalibracijsko teorijo za elektrošibko interakcijo mogoče renormalizirati. Kurt Symanzik je umrl leta 1983, potem ko je dve leti pred tem dobil Planckovo medaljo. James Bjorken in nekdanji Symanzikov sodelavec Curtis Callen sta dobila Diracovo medaljo leta 2004.

konstanta v navedenem primeru – drugače kot v kvantni elektrodinamiki – pojema z naraščajočo energijo. V prvem približku velja za barvno interakcijo:

$$\beta_s = \frac{d\alpha_s}{d \ln W} = -\beta_0 \frac{\alpha_s^2}{\pi} + \dots, \quad \beta_0 = \frac{11}{6} N_b - \frac{1}{3} N_k.$$

$N_b = 3$ je število različnih barvnih nabojev in $N_k = 6$ število različnih kvarkov. Iz zapisane enačbe izhaja $\alpha(W) = \pi/[\beta_0 \ln(W/\Lambda)]$, če je Λ parameter, ki podaja značilno energijo v barvni interakciji. Pri tej interakciji je razmerje W/Λ veliko, medtem ko si lahko mislimo, da je pri elektromagnetni interakciji majhno.

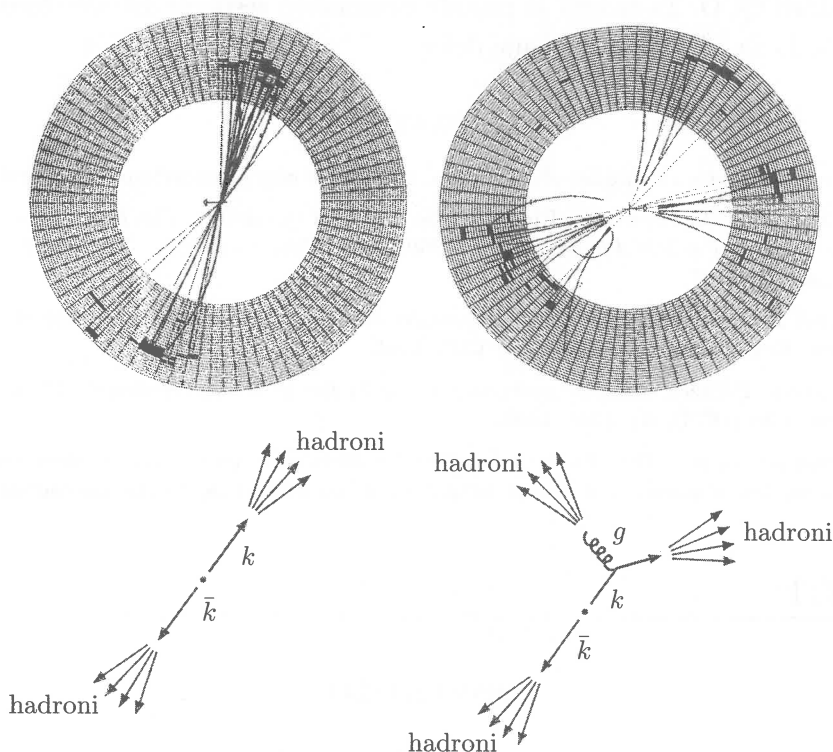


Slika 1. Sklopitvena konstanta barvne interakcije α_s v odvisnosti od razpoložljive energije W . Znaki kažejo izmerjene vrednosti: trikotnički pri globokem neprožnem sipanju, krožci pri trkih elektronov in pozitronov, kvadratki s poševno stranico pri trkih hadronov in kvadratki z vodoravno stranico pri stanjih kvarkonijev (J/ψ , Υ). Sklenjena krivulja, krivulja s krajšimi in krivulja z daljšimi črticami po vrsti ustrezajo napovedim z energijo Λ 211 MeV, 245 MeV in 181 MeV [5].

Nazorno je mogoče pojasniti, da sklopitvena konstanta za elektromagnetno interakcijo z naraščajočo razdaljo in pojemajočo energijo pojema: virtualni fotoni nimajo električnega naboja in naboj virtualnih elektronskih parov tem bolj zastira naboj delca, čim večja je razdalja. Pri barvni interakciji so razmere drugačne, ker poleg virtualnih parov kvarkov nastajajo tudi virtualni gluoni, ki s svojim barvnim nabojem in antinabojem delujejo na barvni naboj kvarkov in povzročijo, da barvni naboj močneje učinkuje na večji razdalji.

Nagrajena asimptotska prostost

Čim večja energija je na voljo, čim bliže so si kvarki v barionu ali kvark in antikvark v mezonu, tem manjša je sklopitvena konstanta. Poznejša merjenja to ugotovitev neposredno podpirajo (slika 1). Pri zelo veliki energiji, to je v zelo majhni razdalji, postane sklopitvena konstanta zelo majhna in asimptotsko enaka 0. Tedaj se kvarki vedejo, kot da bi bili prosti. To je *asimptotska prostost*. Nasprotno pri vse manjši energiji in vse večji razdalji sklopitvena konstanta narašča. S tem pojasnimo, zakaj kvarkov ne moremo sprostiti iz hadrona in jih opazovati prostih. Kvarki so v hadronu *uklenjeni*.



Slika 2. Dva pljuska (levo) in trije pljuski (desno). Dogodka so zaznali z merilnikom JADE ob nakopičevalnem obroču za elektrone in pozitrone PETRA v laboratoriju DESY v Hamburgu leta 1979 pri razpoložljivi energiji 10 GeV oziroma 30 GeV.

Šele na podlagi asimptotske prostosti je bilo mogoče izdelati kvantno teorijo polja barvne interakcije ali *kvantno kromodinamiko*, QCD. Kvanti njenega polja, *gluoni*, nosijo barvni naboj in barvni antinaboj in se po tem razlikujejo od kvantov elektromagnetnega polja fotonov. Gluon deluje ne-

posredno na gluon, medtem ko foton ne deluje neposredno na foton. To zaplete račune v QCD. Kvarke pri zelo veliki energiji in zelo majhni razdalji pa vseeno lahko obravnavamo kot proste. Pri trku elektrona in pozitrona v trkalniku nastane na primer par kvarka in antikvarka. V zelo majhni razdalji se vedeta kot prosta delca in odletita v nasprotnih smereh. Potem zaradi barvne interakcije nastanejo novi pari kvarka in antikvarka in nazadnje odletita vsaksebi *pljuska* barvno nevtralnih hadronov (slika 2). Pri še večji razpoložljivi energiji se pojavi še tretji pljusk. Sproži ga gluon, ki se sprosti poleg para kvarkov. Dva ali trije pljuski, ki so jih leta 1979 zaznali, so podprli QCD. Ta teorija je postala pomemben sestavni del *standardnega modela*, ki za zdaj dobro opisuje delce.

LITERATURA

- [1] *The Nobel Prize in Physics 2004*, <http://nobelprize.org/physics/laureates/2004/> .
- [2] L. Hoddeson, L. Brown, H. Riordan, Max Dresden (uredniki), *The Rise of the Standard Model. Particle Physics in the 1960s and 1970s*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [3] David J. Gross, Frank Wilczek, *Ultraviolet behaviour of non-Abelian gauge theories*, Phys. Rev. Letters **30** (1973), str. 1343–1346.
- [4] H. David Politzer, *Reliable perturbative results for strong interactions?*, Phys. Rev. Letters **30** (1973), str. 1346–1349.
- [5] Johan Rathsmann, *This Years Nobel Prize in Physics – Asymptotic freedom and the observation of quarks and gluons*, <http://www3.tsl.uu.se/theyp/rathsmann/nobel.pdf> .

VESTI

OBVESTILO

V Obzorniku za matematiko in fiziko **49** (2002), št. 2, str. 62–63, in na domači strani DMFA <http://www.dmfa.si/> je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge (z utemeljitvami) za letošnja priznanja pošljete **do 15. oktobra 2005** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana**.

Predsednik DMFA:
Zvonko Trontelj

NIČLE ODVODA POLINOMA

MIRKO DOBOVIŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 12D10, 30C15

V članku bomo dokazali izrek, ki pove, da ničle odvoda polinoma ležijo v konveksni ogrinjači ničel polinoma samega. Dokažemo tudi, da sta ničli odvoda polinoma tretje stopnje v goriščih ene od elips, včrtanih trikotniku, ki ima za oglišča ničle polinoma. Povemo tudi, kje se ta elipsa dotika stranic.

THE ROOTS OF THE DERIVATIVE OF A POLYNOMIAL

In the article we prove a theorem which tells us that the zeroes of the derivative of a polynomial lie in the convex hull of the zeroes of the polynomial itself. We also prove that the roots of the derivative of a cubic are the foci of an ellipse inscribed in the triangle whose vertices are the roots of the original cubic.

Rollejev izrek pove, da leži med dvema realnima ničloma realne diferenciable funkcije ene spremenljivke vsaj ena ničla njenega odvoda. Iz zgornjega takoj sledi naslednja enostavna lastnost polinomov:

Izrek 1. *Če so vse ničle polinoma z realnimi koeficienti realne in vse ležijo na intervalu $[a, b]$, so tudi vse ničle njegovega odvoda realne in pripadajo istemu intervalu.*

Dieudonné [3] se je vprašal, ali lahko izrek posplošimo na polinome s kompleksnimi koeficienti. Odgovor je pozitiven. V splošnem so ničle polinoma s kompleksnimi koeficienti kompleksna števila. Zato bomo namesto intervala v izreku 1 morali vzeti konveksno ogrinjačo ničel. Zdi se, da je rezultat, ki ga bomo dokazali, prvi našel Gauss [1]. Bolj pa je znan pod imenom Lucasov izrek [2]. Zelo bogato bibliografijo člankov, povezanih z ničlami polinomov, lahko najdemo v knjigi [4]. V njej je tudi dokazanih precej zanimivih in manj znanih lastnosti polinomov.

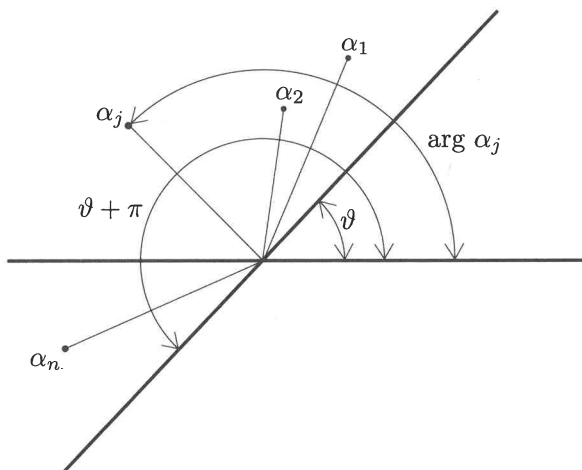
V dokazu bomo uporabili naslednjo preprosto trditev, ki je geometrijsko dokaj nazorna:

Lema 2. *Naj za neničelna kompleksna števila α_j , $j = 1, 2, \dots, n$, za neki $\vartheta \in \mathbb{R}$ velja*

$$\vartheta \leq \arg \alpha_j < \vartheta + \pi, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Potem vsota teh števil, $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, ni enaka 0.

Dokaz. Najprej dokažimo lemo za $\vartheta = 0$. Če so argumenti vseh α_j enaki 0, so to pozitivna realna števila. Njihova vsota je pozitivno število in torej ni enaka 0. Če ima vsaj eno od njih od nič različen argument, ima to število pozitiven imaginarni del. Druga imajo nenegativne imaginarne dele, zato je vsota imaginarnih delov pozitivna in število α ni enako 0.



Slika 1

Če je $\vartheta \neq 0$, pomnožimo vse α_i z $e^{-i\vartheta}$. Po že dokazanem vsota števil $e^{-i\vartheta}\alpha_j$ ni enaka 0. Zato

$$\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j = e^{i\vartheta} \left(\sum_{j=1}^n e^{-i\vartheta} \alpha_j \right) \neq 0. \quad \blacksquare$$

Spomnimo se, da je konveksna ogrinjača (ravninske) množice A najmanjša konveksna množica, ki vsebuje množico A . Konveksna ogrinjača neprazne končne množice točk v ravnini je zaprt konveksen večkotnik. Ni nujno, da ima toliko oglišč, kot je točk. Lahko je celo izrojen v daljico ali točko.

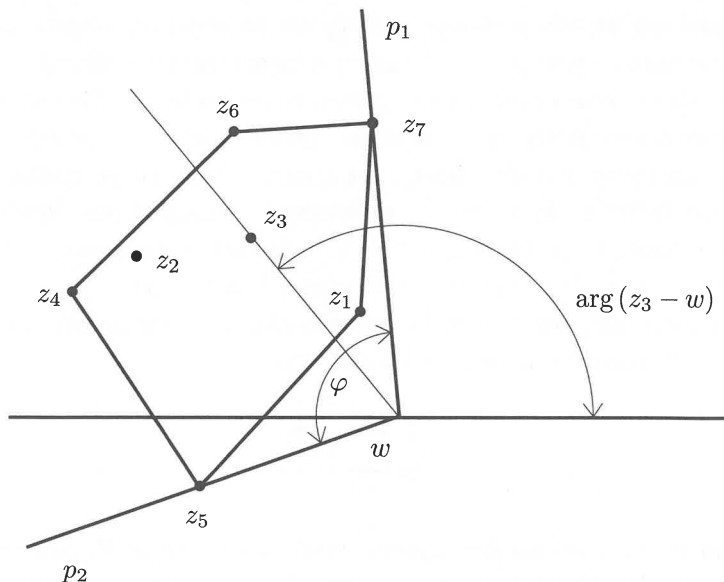
Gauss je dokazal naslednjo trditev:

Izrek 3. Naj bodo $z_1, z_2, \dots, z_n$ za $n > 1$ različna kompleksna števila in $m_1, m_2, \dots, m_n$ pozitivna realna števila. Vse ničle racionalne funkcije

$$F(z) = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{z - z_j} \quad (1)$$

ležijo v konveksni ogrinjači števil $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Ničle odvoda polinoma



Slika 2

Dokaz. Na sliki 2 narišimo primer, ko je n recimo 7.

Konveksno ogrinjačo točk $z_1, z_2, \dots, z_n$ označimo s K . Naj bo sedaj w ničla funkcije F , ki ni v poligonu K . Ker je množica K konveksna in zaprta, w pa točka zunaj nje, oklepata nosilni premici p_1 in p_2 iz točke w na konveksno množico K kot φ , ki je manjši od π . Izračunajmo argumente sumandov v (1):

$$\arg \frac{m_j}{w - z_j} = \arg \frac{1}{w - z_j} = -\arg(w - z_j) = \arg(z_j - w).$$

Argumenti števil $(z_j - w)$ so vsi na intervalu, ki je krajši od π . Lema 2 pove, da je vsota

$$F(w) = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{w - z_j} \neq 0.$$

To pa je v protislovju s tem, da je w ničla funkcije F . ■

Opomba. Gaussa je zanimala fizikalna interpretacija zgornjega izreka. Med drugim je obravnaval naslednja primera:

Primer 1. Na ravnini imamo v n točkah izvire ($n > 1$). Tekočina se razliva po vodoravni ravnini. Če ravnino identificiramo s kompleksnimi števili,

nam kompleksna števila podajajo položaj na tej ravnini, hkrati pa kompleksna števila lahko identificiramo tudi z dvorazsežnimi vektorji. Za hip si zamislimo, da imamo en sam izvir jakosti m_1 v točki z_1 . Pretoki skozi krožnice s središčem v točki z_1 morajo biti enaki. Zato hitrost tekočine pada obratno sorazmerno z oddaljenostjo od izvira. Smer pa je enaka smeri od izvira z_1 do točke z , kjer hitrost računamo. Kompleksno število, ki določa smer v točki z , je $(z - z_1)/|z - z_1|$, hitrost v dani smeri v tej točki pa $m_1/(2\pi|z - z_1|) \cdot (z - z_1)/|z - z_1| = (m_1/2\pi)(\bar{z} - \bar{z}_1)$.

Če je izvirov več, dobimo za hitrost tekočine v poljubni točki kompleksne ravnine (razen seveda v izvirih) naslednji izraz:

$$v = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\bar{z} - \bar{z}_j}. \quad (2)$$

Zgornja vsota je enaka konjugirani vrednosti funkcije F , zapisane v (1). Dokazali smo, da ima taka funkcija ničle lahko le v konveksni ogrinjači točk z_j , $j = 1, 2, \dots, n$. Z drugimi besedami: točke, kjer je hitrost enaka 0, so lahko le v konveksni ogrinjači izvirov. Ker je F racionalna funkcija, ki ima v števcu polinom stopnje manjše ali enake $n - 1$, so točke, kjer je hitrost enaka 0, izolirane točke in jih je manj kot izvirov.

Primer 2. Naj med n delci na ravnini ($n > 1$) deluje sila, ki je obratno sorazmerna z razdaljo med delci in premo sorazmerna z maso (nabojem) delcev. Potem lahko silo w , s katero sistem delcev z maso (pozitivnimi naboji) $m_1, m_2, \dots, m_n$, ki so postavljeni v točkah $z_1, z_2, \dots, z_n$ kompleksne ravnine, deluje na delec v točki z , spet zapišemo s formulo (2). Izrek 3 pove, da so točke, kjer je sila enaka 0, v konveksni ogrinjači točk z_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Takih točk ni več kot $n - 1$.

Do konca članka bomo obravnavali polinome. Ker obravnavamo le ničle, nič ne izgubimo na splošnosti, če predpostavimo, da je vodilni koeficient vseh polinomov, ki se bodo pojavili, enak 1. Tudi stopnja polinoma naj bo vsaj 2.

Naj bo p polinom vsaj druge stopnje, z različnimi ničlami $z_1, z_2, \dots, z_n$ in vodilnim koeficientom 1. Zapišemo ga lahko kot

$$p(z) = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_n)^{m_n},$$

kjer so m_j naravna števila.

Ničle odvoda polinoma

Odvod polinoma za $z \neq z_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ zapišimo v naslednji obliki:

$$p'(z) = m_1(z - z_1)^{m_1-1}(z - z_2)^{m_2} \dots (z - z_n)^{m_n} + \dots + \\ + (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \dots m_n(z - z_n)^{m_n-1} = p(z)F(z),$$

kjer je funkcija F definirana v (1). Če število w , ki je ničla odvoda p' , ni hkrati ničla polinoma p (tj., če ni večkratna ničla polinoma p), mora biti ničla racionalne funkcije F .

Sedaj že lahko napišemo glavni rezultat:

Izrek 4. *Naj bo p polinom s kompleksnimi koeficienti stopnje vsaj 2. Ničle polinoma p' ležijo v konveksni ogrinjači ničel polinoma p .*

Dokaz. Števila $m_1, m_2, \dots, m_n$ so naravna števila, torej pozitivna. Izrek 3 pove, da so vse ničle funkcije F v konveksni ogrinjači točk $z_1, z_2, \dots, z_n$ (tj. ničel polinoma p). Druge ničle odvoda p' so enake nekaterim od teh točk. ■

O legi ničel odvoda je znanih še precej rezultatov. Podrobneje si oglejmo polinome s tremi različnimi ničlami. Polinom s tremi različnimi ničlami z_1, z_2 in z_3 in vodilnim koeficientom 1 lahko zapišemo kot

$$p(z) = (z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2}(z - z_3)^{m_3}.$$

Stopnjo polinoma označimo z $n = m_1 + m_2 + m_3$. Odvod polinoma za $z \neq z_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ spet zapišimo kot

$$p'(z) = p(z)F(z),$$

kjer je racionalna funkcija F oblike

$$F(z) = \frac{m_1}{z - z_1} + \frac{m_2}{z - z_2} + \frac{m_3}{z - z_3}. \quad (3)$$

Če pri štetju ničel upoštevamo večkratnost, je vseh ničel odvoda $n - 1$. V točkah, kjer ima p večkratno ničlo, ima tudi odvod ničlo. Tako dobimo $n - 3$ ničel odvoda polinoma p . Preostali dve ničli pa sta različni od z_1, z_2 in z_3 . Ti dve sta ničli funkcije F .

Označimo ju z e in f , s s_{jk} daljico, ki v kompleksni ravnini povezuje točki z_j in z_k , $j \neq k$, in zapišimo izrek za primer, ko ničle polinoma ne ležijo na premici. Če ležijo, se namreč trikotnik in elipsa izrodita v daljici.

Izrek 5. V trikotnik z oglišči z_1 , z_2 in z_3 lahko včrtamo elipso z goriščema e in f . Elipsa se stranic trikotnika dotika v točkah a_3 , a_1 in a_2 , za katere velja, da delijo stranice trikotnika s_{12} , s_{23} in s_{31} v razmerjih $m_1 : m_2$, $m_2 : m_3$ in $m_3 : m_1$.

Opomba. Če ima polinom enojne ničle, dotikališča elipse stranice trikotnika razpolavljajo.

Dokaz. Ker dokaz izreka vsaj po dolžini presega okvir, primeren za to revijo, si oglejmo dokaz le za primer, ko so ničle polinoma enojne. Če so ničle enojne, je $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ in točke a_1 , a_2 in a_3 razpolavljajo stranice trikotnika.

Izrek bomo pokazali v dveh korakih. Najprej bomo pokazali, da je premica skozi z_1 in z_2 tangenta na elipso z goriščema e in f v točki a_3 . V drugem koraku pa bomo pokazali, da so poloski elips z goriščema e in f , ki se dotikajo daljic s_{12} , s_{23} in s_{31} , enake. To pa pomeni, da imamo opravka z eno elipso, ki je včrtana trikotniku in ima za dotikališča točke a_3 , a_1 in a_2 .

Premik $z - a$ premakne tako ničle polinoma kot ničle odvoda za a . Zato nič ne izgubimo na splošnosti, če predpostavimo, da je

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0. \quad (4)$$

Ničli odvoda polinoma $p(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)z - z_1z_2z_3$, to je polinoma

$$p'(z) = 3z^2 + z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3,$$

sta

$$e = \sqrt{\frac{-z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3}{3}} \quad \text{in} \quad f = -\sqrt{\frac{-z_1z_2 - z_1z_3 - z_2z_3}{3}}.$$

Iz zgornjega vidimo, da bo središče elipse v točki 0, ki je zaradi (4) hkrati težišče trikotnika z oglišči z_1 , z_2 in z_3 .

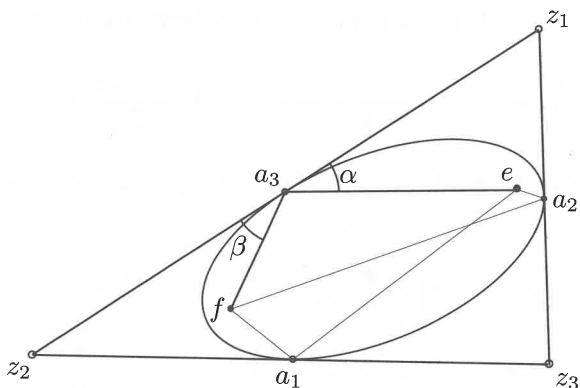
Za elipso je značilno, da tangenta v katerikoli točki elipse oklepa enak kot z zveznicama te točke z gorišči. Pokažimo, da sta kota $\alpha = \angle ea_3z_1$ in $\beta = \angle za_3f$ enaka (glej sliko 3). S tem bomo pokazali, da je premica skozi točki z_1 in z_2 tangenta na elipso z goriščema e in f .

Ker je

$$a_3 = \frac{1}{2}z_2 + \frac{1}{2}z_1,$$

je

$$\frac{1}{a_3 - z_1} + \frac{1}{a_3 - z_2} = 0. \quad (5)$$



Slika 3

Ker sta e in f ničli funkcije F , lahko funkcijo F zapišemo kot

$$F(z) = \frac{3(z-e)(z-f)}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}.$$

Ker velja (5), je

$$\frac{1}{a_3 - z_3} = \frac{3(a_3 - e)(a_3 - f)}{(a_3 - z_1)(a_3 - z_2)(a_3 - z_3)}.$$

Od tod dobimo

$$\frac{(e - a_3)}{(z_1 - a_3)} \frac{(f - a_3)}{(z_2 - a_3)} = \frac{1}{3}.$$

Zato sta enaka argumenta

$$\arg \left(\frac{e - a_3}{z_1 - a_3} \right) = \arg \left(\frac{z_2 - a_3}{f - a_3} \right).$$

Isto lahko naredimo za kote pri a_2 in a_1 . Preveriti moramo še, da so te tri elipse v resnici ena sama elipsa. V ta namen bomo izračunali vsoto razdalj točke a_3 do gorišč. Označimo to vsoto z $2a$, torej

$$2a = \left| e - \frac{z_1 + z_2}{2} \right| + \left| f - \frac{z_1 + z_2}{2} \right|. \quad (6)$$

Če kvadriramo in upoštevamo, da je $f = -e$, dobimo

$$(2a)^2 = \left| e - \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \left| e + \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + 2 \left| e^2 - \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right)^2 \right|. \quad (7)$$

Ker je $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, hitro poenostavimo desni sumand:

$$e^2 - \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right)^2 = \frac{-z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1}{3} - \left(\frac{z_1 + z_2}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} (z_1 - z_2)^2.$$

Če na prvih dveh sumandih v (7) uporabimo paralelogramsko enakost, dobimo

$$\begin{aligned} (2a)^2 &= 2|e|^2 + 2 \left| \frac{z_1 + z_2}{2} \right|^2 + \frac{1}{6} |z_1 - z_2|^2 = \\ &= 2|e|^2 + \frac{1}{3} |z_1 + z_2|^2 + \frac{1}{6} |z_1 + z_2|^2 + \frac{1}{6} |z_1 - z_2|^2. \end{aligned}$$

Ko upoštevamo paralelogramsko enakost za zadnja sumanda, dobimo simetrični izraz

$$(2a)^2 = \frac{1}{3} \left(2|z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1| + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 \right),$$

kar nam pove, da bi dobili isto vrednost tudi, če bi računali vsoto razdalj točke a_1 ali točke a_2 do gorišč. S tem smo poseben primer izreka za $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ dokazali. ■

V članku [5] lahko bralec najde celo konstrukcijo, kako pri podanih ničlah polinoma tretje stopnje samo z ravnilom in šestilom konstruirati ničle odvoda.

Če so v funkciji F , zapisani v (3), števila m_1 , m_2 in m_3 poljubna neničelna realna števila, lahko dokažemo izrek, podoben izreku 5. Namesto elipse dobimo krivuljo drugega reda (elipsa, hiperbola, parabola ali dve premici).

Ob koncu še omenimo, da podobne rezultate dobimo tudi za polinome višjih stopenj. Daljice med ničlami so spet tangente, vendar tokrat na krivulje višjih redov. Dokaze zadnjih trditev lahko bralec najde v knjigi [4].

LITERATURA

- [1] C. F. Gauss, *Collected Works*, vol. 3, str. 112; vol. 8, str. 32; vol. 10, part II (ur. L. Schlessinger), str. 189–191.
- [2] F. Lucas, *Géométrie des polynômes*, J. École Polytech. (1), **46** (1879), str. 1–33.
- [3] J. Dieudonné, *Sur une généralisation du théorème de Rolle aux fonctions d'une variable complexe*, Ann. of Math. **31** (1930), str. 79–116.
- [4] M. Marden, *Geometry of Polynomials*, 2nd ed., Mathematical Surveys No. 3, American Mathematical Society, Providence, 1966.
- [5] J. L. Walsh, *On the location of the roots of the derivative of a polynomial*, Ann. of Math. (2), **22** (1920), str. 128–144.

K RAZPRAVI O POUČEVANJU MATEMATIKE V OSNOVNI IN SREDNJI ŠOLI

(Spremna beseda k prevodu članka L. A. Steena:
**KAKO LAHKO MATEMATIKI PRISPEVAMO
K PREDUNIVERZITETNEMU IZOBRAŽEVANJU**)

PETAR PAVEŠIĆ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 00A35

V ZDA že dobro desetletje poteka široka in zelo intenzivna razprava o poučevanju matematike na preduniverzitetni ravni. Prevedeni članek obravnava prednosti in pasti nekaterih značilnih praks, ki so se razširile po razpravi, predvsem standardiziranja zahtevanega znanja in zunanjega vrednotenja uspeha šolarjev, učiteljev in celih šol. Ob tem podaja nekaj predlogov, kako lahko „profesionalni“ matematiki prispevamo k uspešnosti teh praks. V spremni besedi povežemo vsebino prevoda z javno razpravo o pouku matematike v Sloveniji. Za lažje razumevanje je dodan slovarček nekaterih specifičnih ameriških pojmov.

ON K-12 EDUCATION

(Translator's note to L. A. Steen's article:
**HOW MATHEMATICIANS CAN CONTRIBUTE
TO K-12 EDUCATION**)

A decade-long discussion ('Math Wars') on the K-12 education in the US established the role of state standards for the mathematical education and the use of high-stakes exams for the evaluation of achievements of students, their teachers and even entire schools. The translated article explains some pros and cons of these practices, and gives several proposals how mathematicians can contribute to their improvement. We relate the article with the actual debate on the pre-university mathematical education in Slovenia, and add a glossary of some technical terms used in the American school system.

Razprava, kako najbolje poučevati matematiko in kakšno matematično znanje pridobijo učenci v našem šolskem sistemu, je v strokovnih krogih vedno živa. Rezultati mednarodnih primerjav pa so iz teh vprašanj nenadoma naredili vročo temo, o kateri se krešejo mnenja na ulici, v medijih in med politiki. Čeprav se pogosto ponavljajo že znani argumenti, se tudi s tem povečuje javno zavedanje o pomenu in kompleksnosti pouka matematike. Idealno bi bilo, če bi bili potem, ko se bodo strasti pomirile in se bo debata vrnila v strokovne vode, določeni pojmi in argumenti razčiščeni in bi se lahko

premišljanje o izboljšanju sedanjega stanja nadaljevalo na višji ravni. Žal je malo verjetno, da bo v času javnega zanimanja dosežena kritična masa razprav, ki bi tak napredek omogočila. Zato vsem, ki se jih omenjeni problemi tičejo, priporočam, da se vsaj do neke mere seznanijo z razpravo, ki na to temo že skoraj dve desetletji poteka v ZDA (glej npr. [1] in [2]).

Za iztočnico sem prevedel uvodnik (glej [3]) septembrske številke časopisa *Notices of the American Mathematical Society*, glasila največjega ameriškega (in svetovnega) matematičnega združenja. Revija *Notices* je sicer namenjena predvsem raziskovalnim matematikom, vendar redno objavlja tudi članke, posvečene raznim vidikom poučevanja matematike. Prevedeni članek je zanimiv, ker je kratek in se dotika skoraj vseh glavnih tem, s katerimi se ukvarjamo tudi pri nas. Že iz načina pisanja je razvidno, da izhaja avtor iz neprimerno širše in bolj razvejane razprave o pouku matematike. To je razumljivo, saj je velikost dežele in izredna decentraliziranost ameriškega šolskega sistema ustvarila pravcati laboratorij različnih praks in načinov poučevanja matematike. Nekateri prijemi so nastali kot odgovor na neuspešnost prejšnjih, drugi kot izrastki raznih pedagoških teorij, tretji spet kot modne muhe ali zaradi političnih pritiskov lokalnih oblasti oziroma staršev ali celo zaradi komercialnih pritiskov založnikov učbenikov.

Za lažje razumevanje bom pojasnil nekaj ključnih pojmov, ki jih boste našli v prevodu. Originalni izrazi so v narekovajih.

SLOVARČEK

Preduniverzitetno izobraževanje ustreza ameriškem 'K-12 education' ('kindergarten through 12 grade').

Matematične vojne ('Math Wars') je popularno poimenovanje za široko in zelo ostro javno razpravo, ki se je razvila predvsem v Kaliforniji v prvi polovici devetdesetih let ob reformi programov in uvedbi standardov matematičnega znanja in ki še ni povsem pojenjala.

Naj noben otrok ne zaostane ('No Child Left Behind') je ime zveznega šolskega zakona iz leta 2002 z močnim poudarkom na zunanjem ocenjevanju znanja in od tod izpeljanem razvrščanju šol, na standardih znanja, na s certifikati potrjeni usposobljenosti učiteljev in na pravici

staršev do izbire šole. Na nastanek zakona je vplivala tudi skrb zbuja-joča (ne)uspešnost ameriških otrok na mednarodnih primerjavah znanja.

Odločilni izpiti ('high-stakes tests') pomenijo sprotne oblike zunanega preverjanja, običajno po tri med vsem preduniverzitetnim šolanjem za vsak glavni predmet (analogno našim nacionalnim preizkusom znanja in maturi). Od teh izpitov je po eni strani odvisno napredovanje učencev, po drugi pa financiranje šol in plače učiteljev.

Leta 2001 je ameriški Nacionalni raziskovalni svet (NRC) objavil zelo odmevno poročilo 'Adding It Up'. V njem je med drugim takole formuliral pet glavnih prvin matematične uspešnosti (dobesedni prevodi izvirnih izrazov bi bili neustrezni, zato sem izvirnike dodatno pojasnil). To so

razumevanje pojmov ('conceptual understanding' – razumevanje matematičnih pojmov, operacij in relacij),

proceduralna spretnost ('procedural fluency' – natančno, učinkovito in ustrezno izvajanje računskih postopkov),

spособnost reševanja problemov ('strategic competence' – sposobnost oblikovanja, predstavljanja in reševanja matematičnih problemov),

miselna prilagodljivost ('adaptive reasoning' – sposobnost logičnega premišljevanja, razlaganja in utemeljevanja) ter

dovzetnost za matematiko ('productive disposition' – razumevanje matematike kot uporabne in koristne, skupaj z zanašanjem na marljivost in lastno učinkovitost).

LITERATURA

- [1] Al Cuoco: *Teaching mathematics in the United States*, Notices of the AMS **50** (2003), str. 777–787, <http://www.ams.org/notices/200307/fea-cuoco.pdf>.
- [2] Allyn Jackson: *The Math Wars, California Battles It Out over Mathematics Education Reform, Part I*, Notices of the AMS **44** (1997), str. 695–702, <http://www.ams.org/notices/199706/comm-calif.pdf>; *Part II*, Notices of the AMS **44** (1997), str. 817–823, <http://www.ams.org/notices/199707/comm-calif2.pdf>.
- [3] Lynn Arthur Steen: *How Mathematicians Can Contribute to K-12 Education*, Notices of the AMS **51** (2004), str. 869, <http://www.ams.org/notices/200408/commentary.pdf>.

KAKO LAHKO MATEMATIKI PRISPEVAMO K PREDUNIVERZITETNEMU IZOBRAŽEVANJU

LYNN ARTHUR STEEN

St. Olaf College
Minnesota, ZDA

Prevod članka iz revije Notices of the AMS 51 (2004), stran 869.

HOW MATHEMATICIANS CAN CONTRIBUTE TO K-12 EDUCATION

This article originally appeared in the Notices of the AMS 51 (2004), page 869.

Zdaj, ko se tako imenovane „Matematične vojne“ že nekoliko pomirjajo, skušajo mnogi matematiki in učitelji matematike združiti sile in „zmagati v miru“. Kot so že razni politični voditelji odkrili na raznih kriznih žariščih, od Afganistana do Iraka, to ne gre tako zlahka, kot bi si mogoče želeli. Na „terenu“ se pokažejo ovire, ki jih od daleč pogosto spregledamo. Le-te zajemajo standarde znanja, ki jih posamezne ameriške zvezne države predpisujejo za preduniverzitetno izobraževanje, pritisk novega zveznega zakona, imenovanega „naj noben otrok ne zaostane“, ter odločilni izpiti, od katerih so odvisni tako napredovanje učencev in dijakov kot učiteljske službe.

V zadnjih letih sem pregledal in ocenil vrsto novih državnih standardov za poučevanje matematike in sodeloval v številnih razpravah o spreminjanju podobe standardov in odločilnih izpitov. Na podlagi pridobljenih izkušenj ponujam štiri predloge, kako naj matematiki tvorno prispevamo k izboljšanju preduniverzitetnega matematičnega izobraževanja.

- Ne glede na resne težave z jasnostjo v mnogih standardih – s čimer se ubadajo v večini zveznih držav – so razhajanja med zahtevami različnih držav bistveno manjša od razlik v matematični usposobljenosti učiteljev (in posledično v matematični uspešnosti njihovih učencev). Zato ne preseneča, da na to, kar se učenci in dijaki naučijo, bolj vpliva usposobljenost učiteljev kot natančnost pri oblikovanju standardov.

Zatorej se moramo matematiki osredotočiti predvsem na matematično usposobljenost učiteljev (kar je, navsezadnje, ena glavnih nalog visokega šolstva).

- Nasprotja med odločilnimi izpiti in zahtevami po visokih dosežkih učencev in dijakov vedno bolj naraščajo. Kadar je učiteljeva zaposlitev ali učenčevo napredovanje na kocki zaradi rezultata enega samega izpita, je zelo težko obdržati politično soglasje o potrebi po visokih dosežkih. Zato država za državo skuša odložiti, zmanjšati ali povsem izničiti posledice, ki doletijo učenca ali dijaka, kadar mu spodleti poskus za dosego sicer zaželenega visokega dosežka.

Da omogočimo ohranitev visokih standardov znanja, moramo matematiki zagovarjati prijeme, ki vrednotijo učence, učitelje in šole na podlagi večplastnih kriterijev, ne pa enkratnih odločilnih izpitov.

- Preveč podrobni standardi znanja zastirajo bogastvo notranjih povezav v matematiki in vodijo v razdrobljeni „odkljukaj in pojdi naprej“ način poučevanja in preverjanja znanja. To je v ostrem nasprotju s študijo Nacionalnega raziskovalnega sveta iz leta 2001, ki poudarja, da ima matematična usposobljenost vrsto „prepletenih in medsebojno odvisnih“ sestavin, namreč razumevanje pojmov, proceduralne spretnosti, sposobnost reševanja problemov, miselno prilagodljivost in splošna dovzetnost za matematiko. Istih pet sestavin (četudi v nekoliko drugačni formulaciji) je osnova za razpravo o matematičnem razumevanju v pred kratkim objavljenem poročilu *Standards for Success* o tem, kaj morajo šolarji po soglasnem mnenju strokovnjakov znati in biti sposobni narediti, da so lahko uspešni pri začetnih univerzitetnih tečajih.

Zato moramo matematiki pri vsaki razpravi o standardih in preverjanju znanja v preduniverzitetni matematiki zagovarjati uravnovešenost ne le med vsebinami, temveč tudi med temi prepletenimi sestavinami matematične usposobljenosti.

- Matematičnim standardom mnogih zveznih držav upravičeno očitajo, da vsebujejo izjave, ki so nejasne, netočne ali brez pomena. Pa vendar, brez dobro izbranih vzorčnih nalog celo skrbno izdelani standardi ne zmorejo natančno posredovati različnih spoznavnih ravni, potrebnih za doseganje ustreznega matematičnega znanja. Samo besede, četudi jasne in pravilne, ne morejo v celoti opisati matematičnega razumevanja. Na primer, „reši sistem dveh linearnih enačb z dvema neznankama“ je povsem jasna naloga, vendar ne pove nič o zahtevnosti, ki izvira iz tipa neznank ali koeficientov.

Dodajanje pojasnil, na primer „s celimi koeficienti“, prispeva k jasnosti, z omejevanjem pričakovanj pa tudi k atomizaciji pouka.

Z namenom, da učencem in dijakom pomagamo preizkusiti moč matematičnega mišljenja, moramo matematiki ustvarjati in prispevati vzorčne naloge, ki posredujejo pomembne vidike matematičnega mišljenja.

Gibanje za uvedbo standardov znanja je v zadnjih dveh desetletjih doseglo vrsto dobrih rezultatov, nenazadnje splošno zavedanje o naraščajoči širini in uporabnosti matematike, pomenu matematike v izobraževanju vseh učencev in dijakov in o pomembnosti prizadevanja za čim boljši uspeh. Žal pa suha, ponavljajoča se in nepovezana besedila standardov pogosto spodjedajo njihov potencial, saj postanejo le seznam točk, naštetih v dokaj poljubnem vrstnem redu. Po svoji naravi – *bistveni* naravi – pa je matematika prepletena in večrazsežna, njeni oddaljeni deli se povezujejo skozi skupno logiko in strukturo. Dobro premišljeni problemi lahko posredujejo to značilno enovitost matematike na način, ki ga naštevanje standardov nikoli ne more.

Na kratko, matematiki lahko najboljše pomagamo gibanju za standardizacijo znanja v preduniverzitetni matematiki s ponujanjem problemov – problemov, ki so izzivalni, ki presenečajo, ki širijo obzorja. Kakšni problemi bodo pritegnili in zaposlili učence petega razreda? Kakšni problemi pa bodo spodbudili starejše učence, da nadaljujejo matematično izobraževanje? Kakšne probleme bo moral znati rešiti v svojem zmeraj bolj zahtevnem delovnem okolju nekdo s srednješolsko izobrazbo? Kakšni problemi bodo iz učiteljev (ali bodočih učiteljev) naredili še boljše učitelje?

To niso problemi, ki jih običajno srečamo na standardiziranih preizkusih znanja ali na sprejemnih izpitih za univerzo. To prav tako niso primeri, ustvarjeni za ponazoritev tega ali onega standarda in tudi ne tipske naloge, ljube sestavljalcem raznih testov. Prav zares ne potrebujemo še več tovrstnih nalog. Tako za pripravo učiteljev na matematično premišljevanje kot za širjenje matematičnih izkušenj učencev in dijakov potrebujemo bogato zalogo izzivalnih problemov, ki bodo utrjevali med seboj prepletene prvine razumevanja pojmov, proceduralnih spretnosti, reševanja problemov, miselne prilagodljivosti in splošne dovtetnosti za matematiko. Če prilagodimo obrabljen pregovor: en problem, ki doseže, da šolar matematično premišljuje, je vreden sto standardov, ki mu le povedo, kaj mora misliti.

prevedel Petar Pavešić

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi svoje članice in člane k sodelovanju na strokovnem srečanju in 57. občnem zboru (25. in 26. novembra 2005 v Simonovem zalivu v Izoli). Vodilni temi bosta *Fizika okoli nas* in *Matematično znanje*. Člani društva lahko predstavijo zanimivosti s tega področja oziroma nove metode dela in novosti pri pouku matematike, fizike in astronomije (pripomočke, nove vsebine, zanimive eksperimente in posebne prilagoditve).

Predstavitev je možna v treh oblikah:

- s 25- do 30-minutnim prispevkom
- s posterjem
- s predstavitvijo učila, pripomočka, gradiva

Na voljo bodo grafoskop, projekcijsko platno in videoprojektor za prenos slike z računalnika. Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesiti s seboj.

Prijave lahko pošljete pisno ali po elektronski pošti. Obvezno morajo vsebovati:

- naslov prispevka
- ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen, oziroma domač naslov in elektronski naslov
- kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12 pt naj ne presega pol strani A4)

Prijave sprejemamo **do 15. oktobra 2005** na naslov: **Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Janez Krušič, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana** ali na elektronski naslov: Janez.Krusic@fmf.uni-lj.si. Povzetkom, ki jih boste poslali po pošti, dodajte zapis v elektronski obliki (disketo).

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora. Obvestila o dejavnostih društva so objavljena na domači strani DMFA <http://www.dmfa.si/>.

Predsednik DMFA:
Zvonko Trontelj

OBZORNIK ZA MATEMATIKO

LJUBLJANA, MAJ 200

Letnik 52, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51+5

R 177/05

COB

VSEBINA**ODPISANO**

Članki	Strani
Tunelski mikroskop kot nanotehnološko in analitično orodje, Rok Žitko in Igor Muševič	65–76
Nagrajena asimptotska prostost, Janez Strnad	77–82
Ničle odvoda polinoma, Mirko Dobovišek	83–90
K razpravi o poučevanju matematike v osnovni in srednji šoli, Petar Pavešić	91–93
Kako lahko matematiki prispevamo k preduniverzitetnemu izobraže- vanju, Lynn Arthur Steen (prevedel Petar Pavešić)	94–96
Vesti	
Obvestilo, Zvonko Trontelj	82
Vabilo, Zvonko Trontelj	XI

CONTENTS

Articles	Pages
Tunneling Microscope as Nanotechnologic and Analytical Tool, Rok Žitko and Igor Muševič	65–76
Prize-winning Asymptotic Freedom, Janez Strnad	77–82
The Roots of the Derivative of a Polynomial, Mirko Dobovišek	83–90
On K-12 Education, Petar Pavešić	91–93
How Mathematicians Can Contribute to K-12 Education, Lynn Arthur Steen (translated by Petar Pavešić)	94–96
News	82–XI

Na naslovnici je ultra-visokovakuumski sistem v laboratoriju skupine za raziskave površin na Odseku za fiziko trdne snovi Instituta „Jožef Stefan“. Poglavitni instrument sistema je novi nizkotemperaturni vrstični tunelski mikroskop (STM), ki omogoča slikanje z atomsko ločljivostjo ter premikanje posameznih atomov in molekul. Več o STM na strani <http://auger.ijs.si/nano/>.