

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

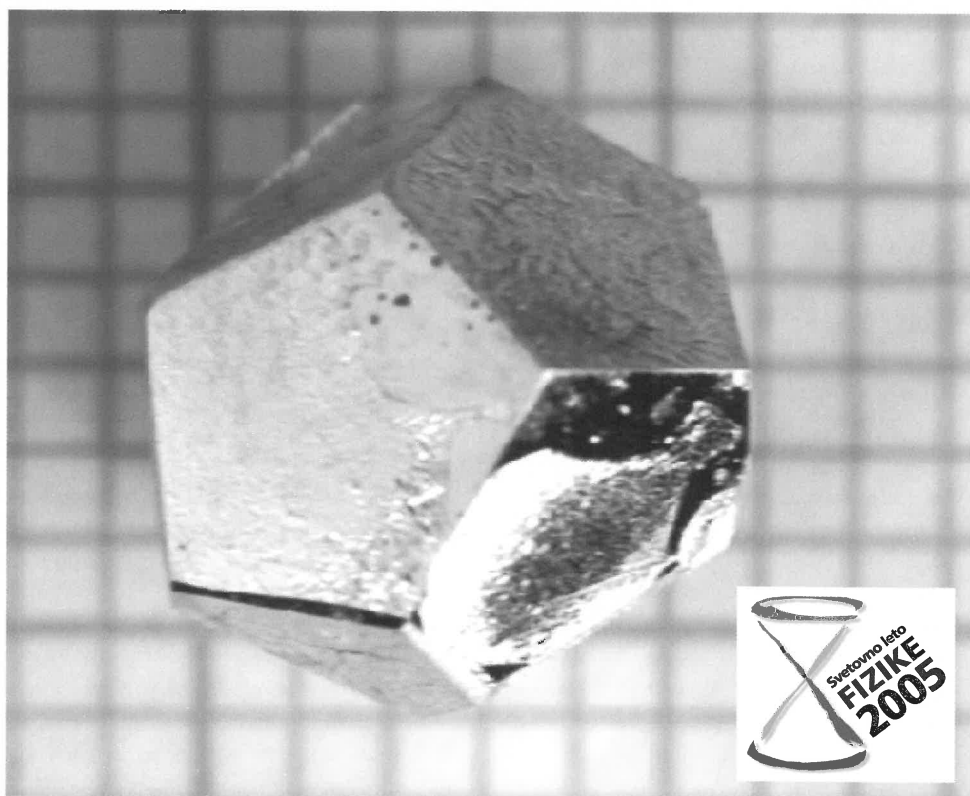
ODPISANO

2005

Letnik 52

2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasiló Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2005, letnik 52, številka 2, strani 33–64

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana.
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460, 2512 005. **Telefaks:** (01) 2517 281. **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://zaloznistvo.dmfa.si/omf/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787. **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana. **SWIFT (BIC):** SKBAS12X. **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Nada Razpet (vesti), Pavle Saksida (nove knjige), Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško stavila Monika Testen.

Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1400 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 5.000 SIT, za druge družinske člane in študente pa 2.500 SIT. Naročnina za ustanove je 8.000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Agencija za raziskovalno dejavnost ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2005 DMFA Slovenije – 1604

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oziroma $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

KVAZIKRISTALI

JANEZ DOLINŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 61.44.Br

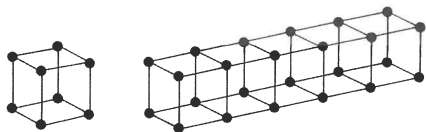
Kvazikristali so trdne snovi, v katerih obstaja nov red dolgega dosega brez translacijske simetrije. Njihove simetrije vsebujejo „prepovedane“ elemente, kot npr. 5-, 8-, 10- in 12-števne rotacijske osi. Kvazikristali so zlitine kovinskih elementov (Al-Pd-Mn, Al-Cu-Fe, Al-Ni-Co, Tb-Mg-Zn, itd.), po transportnih lastnostih pa so bolj podobni izolatorjem kot kovinam. Visokokvalitetni kvazikristali imajo veliko električno upornost in majhno toplotno prevodnost (podobno prevodnosti okenskega stekla), so izredno trdi (trši od jekel), kemijsko nereaktivni (ne korodirajo) in imajo majhen količnik trenja. V njih je možno uskladiščiti velike količine vodika.

QUASICRYSTALS

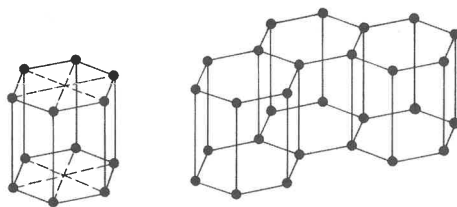
Quasicrystals are solid materials having a new type of perfect long-range order without translational periodicity. Their symmetries (icosahedral, dodecagonal, decagonal, octagonal, and pentagonal) involve symmetry elements such as 5-, 8-, 10- and 12-fold rotation axes, which are incompatible with the periodicity of a Bravais lattice. A consequence of nonperiodicity is that quasicrystals – alloys of metallic elements (Al-Pd-Mn, Al-Cu-Fe, Al-Ni-Co, Tb-Mg-Zn, etc.) – exhibit more semimetallic to insulating properties. Their favourable physical and mechanical properties – high hardness, resistance to corrosion and wear, low friction coefficient, low electrical and thermal conductivity, superplasticity at elevated temperatures, ability to store large amounts of hydrogen – make quasicrystals interesting new materials for the technological application.

V naravi lahko snov obstaja v treh različnih agregatnih stanjih: plinastem, tekočem in trdnem. Nekatere trdne snovi imajo osnovne gradnike – atome – razporejene v pravilno mrežo. Te snovi imenujemo kristali. V kristalih lahko definiramo skupek majhnega števila atomov na določenih medsebojnih razdaljah, ki tvorijo osnovno celico kristalne mreže (slika 1a, b). Kristal zgradimo tako, da zlagamo osnovne celice v prostor drugo za drugo, podobno kot gradimo zid iz enakih opek. Tako zgrajena kristalna mreža je periodična v prostoru. Pravimo, da v njej obstaja strukturni red dolgega dosega, saj je lega vsakega atoma v prostoru natančno določena.

Teorija Bravaisovih kristalnih mrež nam pove, da lahko prazen prostor v celoti zapolnimo le z osnovnimi celicami, ki imajo določeno simetrijo glede na vrtenje. Pri zasuku osnovne celice okrog dane osi se mora razporeditev atomov ponoviti že pri zasuku za manj kot celoten krog. Periodične kristalne mreže lahko zgradimo le iz osnovnih celic, ki so simetrične glede na enega od štirih zasukov – za kot 180, 120, 90 ali 60 stopinj. V ravninski mreži imajo



Slika 1a. Kubična osnovna celica in kubična kristalna mreža



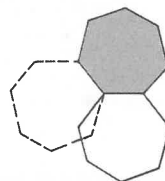
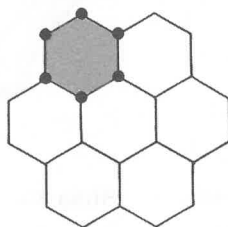
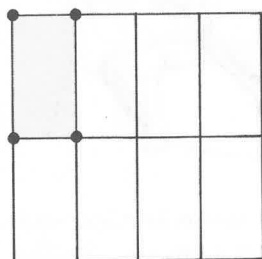
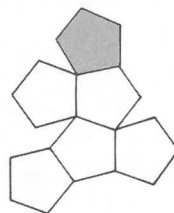
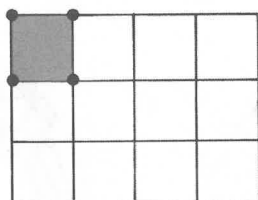
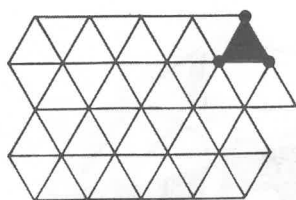
Slika 1b. Heksagonalna osnovna celica in heksagonalna kristalna mreža

take osnovne celice obliko pravokotnika, trikotnika, kvadrata in šesterokotnika (slika 2a). Pravimo tudi, da imajo omenjene osnovne celice simetrijo dvo-, tri-, štiri- ali šestštevne osi. Te simetrije v kristalografiji imenujemo „dovoljene“. V principu je možno definirati tudi osnovne celice z drugačnimi simetrijami. Tak primer je peterokotnik, ki pri vrtenju skozi središče preide sam vase že pri zasuku za petino celotnega kroga. Peterokotnik ima simetrijo petštevne osi. S sestavljanjem peterokotnikov pa prostora ne moremo pokriti v celoti (slika 2b), saj med peterokotniki ostajajo prazne vrzeli. Podobno velja, da prostora ne moremo zapolniti enolično z osnovnimi celicami s simetrijo, višjo od šesterokotnika (torej s sedmerokotniki, osmerokotniki, itd.), saj se take osnovne celice prekrivajo. Petštevno simetrijo in simetrije, večje od šestštevne, zato imenujemo „prepovedane“ simetrije.

V več stoletjih raziskav fizike in kemije trdnih snovi je med znanstveniki veljalo prepričanje, da vse kristalne strukture vsebujejo le dovoljene simetrije, medtem ko struktur s prepovedanimi simetrijami v naravi ni. Veliko osuplost je povzročilo odkritje D. Shechtmana leta 1984, ko je objavil strukturo kovinske zlitine aluminij-mangan [1]. Rentgenska uklonska slika je kazala na to, da ima zlitina popolno simetrijo telesa ikozaedra (slika 3a, b). Simetrija ikozaedra vsebuje poleg dovoljenih simetrijskih elementov dvo- in trištevni osi ter simetrije zrcaljenja glede na središčno točko telesa (inverzija) tudi prepovedano simetrijo petštevne osi. Kasneje so odkrili še strukture z drugimi prepovedanimi simetrijami: s pentagonalno (vsebuje petštevno os), oktagonalno (osemštevna os), dekadagonalno (desetštevna os) ter dodekadagonalno (dvanajstštevna os). Vse te strukture so popolnoma urejene na način, da je lega vsakega atoma v mreži natanko določena. Strukture imajo torej popoln red dolgega dosega. Zaradi vsebnosti prepovedanih simetrij pa take strukture niso prostorsko periodične in ne moremo definirati osnovne celice. Te neperiodične strukture s popolnim redom dolgega dosega so poimenovali kvaziperiodične, kristale s takimi strukturami pa kvazikristale [2].

Matematični primer dvodimenzionalnega pentagonalnega kvazikristala je Penrosejeva mreža (slika 4a), dvodimenzionalno oktagonalno simetrijo pa ima Ammann-Beenkerjeva mreža (slika 4b).

Kvazikristali



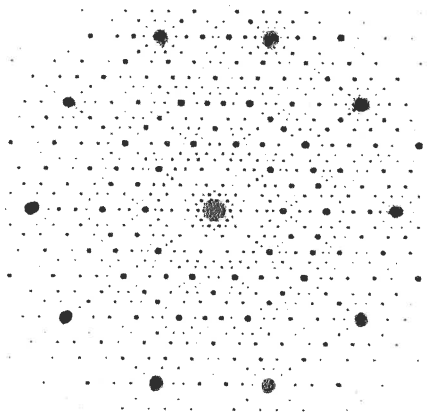
Slika 2a. Osnovne celice s kristalografsko „dovoljenimi“ simetrijami (2-, 3-, 4- in 6-števne rotacijske osi)

Slika 2b. Osnovne celice s „prepovedanimi“ simetrijami (5-števna, 7-števna os in višje) ne pokrijejo prostora enolično (se prekrivajo).

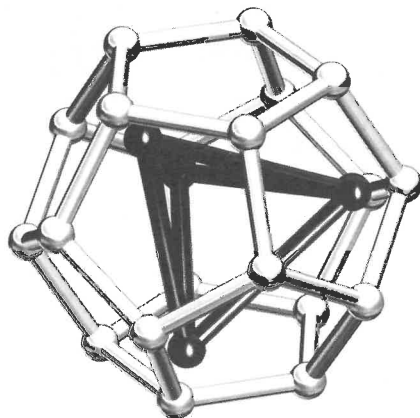
Razliko med periodično in kvaziperiodično strukturo lahko predstavimo na enostavnem modelu hipotetičnega enodimenzionalnega kristala v obliki linearne verige, ki je sestavljena iz dolgih (L) in kratkih (S) segmentov. Periodičen kristal dobimo tako, da najprej definiramo osnovno zaporedje obeh segmentov, na primer v obliki LS, nato pa dodajamo osnovno zaporedje v prostor drugo za drugo. Dobimo periodično verigo LSLSLSLSL..., kjer segment LS predstavlja osnovno celico. Periodičen kristal smo tako dobili z uporabo pravila dodajanja. Kvaziperiodičen kristal pa dobimo, če namesto pravila dodajanja uporabimo pravilo zamenjave: v zaporednih korakih zamenjujemo segment L z zaporedjem LS, segment S pa s segmentom L. Veriga sedaj nastaja v inflacijskih korakih na naslednji način:

začetno zaporedje:	LS
prva zamenjava:	LSL
druga zamenjava:	LSLLS
tretja zamenjava:	LSLLSLSL
itd.	

Rezultat je popolnoma urejena veriga, kjer je lega vsakega od segmentov L in S v verigi natančno določena, vendar pa taka veriga ne kaže nika-kršne translacijske periodičnosti; v njej ne najdemo vzorca, ki bi se po neki



Slika 3a. Rentgenska uklonska slika dekahonalnega kvazikristala Al-Ni-Co z desetštevno simetrijo



Slika 3b. Detajl strukture kristalne mreže ikozaedričnega kvazikristala $\text{Cd}_{5.7}\text{Yb}$. Zunanjo lupino tvorijo atomi, razporejeni v dodekaeder (z ikozaedrično simetrijo), notranja lupina pa je tetraeder.

periodi spet ponovil. Kvaziperiodično strukturo smo tako dobili z uporabo matematičnega pravila zamenjave, zato v verigi obstaja popoln red dolgega dosega, ki pa ni periodičen.

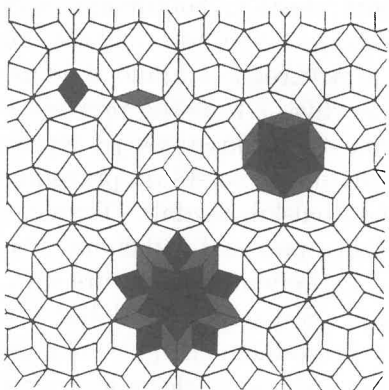
Kristalografsko se periodične in kvaziperiodične strukture velikokrat opisujejo v recipročnem prostoru valovnih vektorjev $\vec{G}$, ki je konjugiran direktnemu prostoru Bravaisove mreže. Prostorska porazdelitev atomov $\rho(\vec{r})$ v realnem prostoru se razvije v Fourierovo vrsto gostotnih valov z vektorji recipročne mreže $\vec{G}$

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\vec{G}} \rho_{\vec{G}} \exp(i\vec{G} \cdot \vec{r}). \quad (1)$$

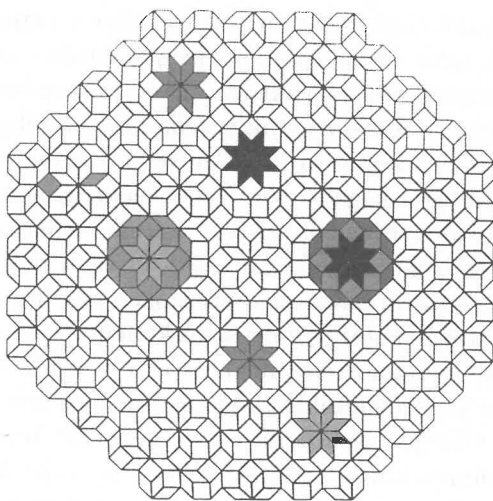
Tukaj V pomeni volumen kristala, $\rho_{\vec{G}}$ pa so Fourierove komponente atomske gostote. V periodičnih kristalih recipročni vektorji $\vec{G}$ predstavljajo diskretno množico, kjer lahko vsak vektor $\vec{G}$ zapišemo kot celoštevilčno linearno kombinacijo treh bazičnih vektorjev $\vec{a}_i$:

$$\vec{G} = h\vec{a}_1 + k\vec{a}_2 + l\vec{a}_3. \quad (2)$$

Trojica celih števil h, k, l predstavlja Millerjeve indekse. V kvazikristalih število linearno neodvisnih baznih vektorjev v recipročnem prostoru presega dimenzijo realnega prostora. Pri ikozaedričnih kvazikristalih vsebuje recipročni prostor šest bazičnih vektorjev $\vec{a}_i$ in enačbo (2) je treba zamenjati



Slika 4a. Penrosejeva mreža s pentagonalno simetrijo



Slika 4b. Ammann-Beenkerjeva oktagonalna mreža

z enačbo

$$\vec{G} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3 + n_4 \vec{a}_4 + n_5 \vec{a}_5 + n_6 \vec{a}_6. \quad (3)$$

Tako se ikozaedrična struktura opisuje v šestdimenzionalnem recipročnem prostoru, valovni vektorji $\vec{G}$ pa tvorijo množico, ki gosto zapolni recipročni prostor.

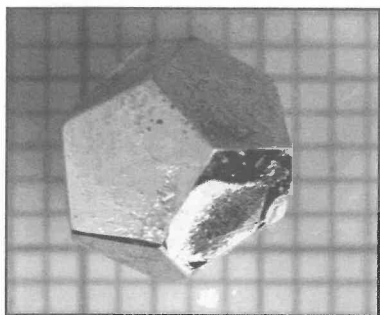
Dejstvo, da vektorji recipročne mreže tvorijo gosto množico, razloži tudi šibke transportne pojave v kvazikristalih, kot sta majhna električna in toplotna prevodnost. Elektrone, ki prenašajo električni tok in toploto po kristalu, ter mrežna nihanja, ki prenašajo toploto, lahko v valovni sliki v približku opišemo kot ravne sinusne valove. V periodičnih strukturah se lahko razširjajo ravni valovi s poljubnimi valovnimi vektorji $\vec{k}$, razen s tistimi, ki zadoščajo Braggovemu uklonskemu pogoju

$$2\vec{G} \cdot \vec{k} \pm |\vec{G}|^2 = 0. \quad (4)$$

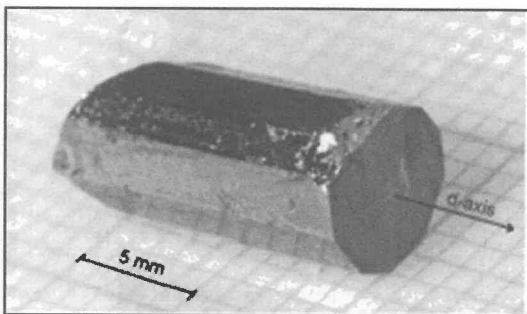
Stanja $\vec{k}$, ki zadoščajo pogoju (4), so izjemna in predstavljajo stoječe valove, ki ne sodelujejo pri transportnih pojavih (ne prenašajo toka in toplote). V kvazikristalih izjema postane pravilo. Zaradi goste množice vektorjev $\vec{G}$ je Braggov pogoj (4) izpolnjen za skoraj vsak valovni vektor $\vec{k}$, zato obstaja le malo ravnih valov, ki bi sodelovali v transportnih pojavih. Posledici sta majhna električna in toplotna prevodnost, kar je presenetljivo, saj so kvazikristali zlitine dobrih kovin, npr. Al-Cu-Fe. Povsem izolatorski pa kvazikristali niso. V kvaziperiodičnih mrežah se še vedno lahko razširjajo ravni valovi

z valovnimi dolžinami, ki so velike v primerjavi z medatomske razdaljami. Za take valove pomeni kvazikristalna struktura elastični kontinuum, kjer mikroskopska struktura ni več pomembna. Tako se lahko po kvazikristalih širijo dolgovalovna akustična mrežna nihanja, ki povzročijo majhno, a od nič različno toplotno prevodnost, po velikosti primerljivo s toplotno prevodnostjo okenskega stekla. Tudi električna prevodnost kvazikristalov je, čeprav majhna, različna od nič. Zaradi neperiodičnosti mreže se stanja prevodniških elektronov lokalizirajo na skali nekaj medatomskih razdalj. Termične fluktuacije povzročijo preskoke (tuneliranje) elektronov med različnimi lokaliziranimi stanji, zato se električna prevodnost z višanjem temperature večja, kar je ravno obratno kot pri običajnih kovinah. Situacija je podobna kot pri polprevodnikih, kjer se število elektronov v prevodnem energijskem pasu z višanjem temperature večja zaradi termičnega vzbujanja elektronov prek polprevodniške energijske vrzeli. Tako imajo kvazikristali in polprevodniki pozitiven temperaturni koeficient električne prevodnosti, kovine pa negativnega. Zares veliko električno upornost (ki je inverzna količina električni prevodnosti) do nekaj sto tisoč $\mu\Omega\text{cm}$ dosežejo visokokvalitetni kvazikristali pri nizkih temperaturah okrog 4 K (za primerjavo povejmo, da znaša specifična upornost čistega aluminija pri 4 K le nekaj stotink $\mu\Omega\text{cm}$); v bližini absolutne ničle pa nekateri celo preidejo v izolatorsko stanje s specifično upornostjo prek 1 Ωcm . Do sedaj znan tak kvazikristal je ikozaedrični Al-Pd-Re.

Doslej je znanih že več kot osemdeset različnih snovi s kvazikristalno strukturo, največ od tega z ikozaedrično simetrijo. Snovi so bile vzgojene v laboratorijih, v naravi še niso bile opažene. Kvazikristali so zlitine kovinskih elementov, kot npr. ikozaedrični Al-Pd-Mn, Al-Cu-Fe, Al-Mn, Tb-Mg-Zn in Cd-Yb, dekaagonalni Al-Ni-Co, Al-Mn-Fe in V-Ni-Si, oktaagonalni Mn-Si-Al in Mn-Fe-Si, itd. Kvaziperiodične strukture se v zlitinah tvorijo v ozkem medsebojnem koncentracijskem razmerju vhodnih elementov. Pri zlitini aluminij-paladij-mangan se ikozaedrična faza tvori pri razmerju 70 % (at.) Al, 22 % Pd ter 8 % Mn. Pri odstopanju koncentracij za več kot 2 % od teh vrednosti pa že nastane običajna periodična struktura. Kvazikristale gojimo iz talin. Monokristale centimetrskih dimenzij je možno vzgojiti z metodami Czochralskega, Bridgmana in „self-flux“ [3] (slika 5a, b), polikristale pa s taljenjem zmesi elementov v indukcijskih pečeh in z brizganjem taline na vrteče se hladno bakreno kolo (metoda „planar flow casting“). Pri metodi „self-flux“ poiščemo v faznem diagramu taline zmesi elementov t. i. prvo solidifikacijsko cono, to je temperaturno in koncentracijsko področje, kjer soobstajata tekoča in trdna faza. Po nekem času zrastejo v talini lepi monokristali, ki jih dobimo tako, da preostalo talino odlijemo. Pri metodah Czochralskega in Bridgmana moramo najprej vzgojiti semena kristalov z neko drugo metodo (npr. „self-flux“). Pri metodi Czochralskega seme pri-



Slika 5a. Ikozaedrični kvazikristal Dy-Mg-Zn z dodekagonalno morfološko obliko (ki je dualna ikozaedrični), vzgojen z metodo „self-flux“.

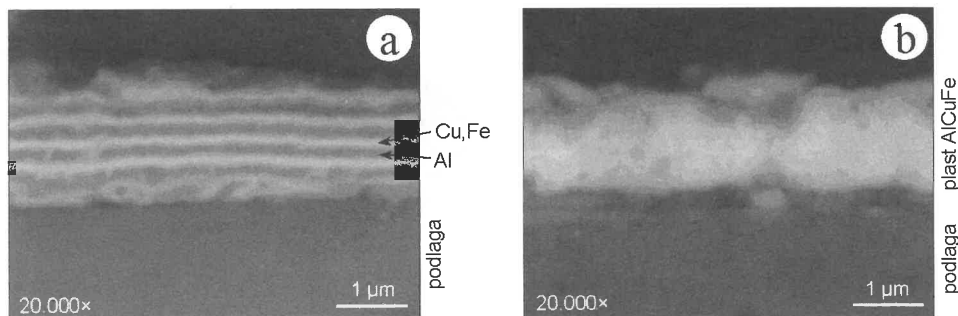


Slika 5b. Dekagonalni Al-Ni-Co kvazikristal z dekaprizmatično morfološko obliko, vzgojen z metodo Bridgmana.

trdim na palico, ki jo potem pomočimo v talino in iz nje počasi vlečemo (kakšen milimeter na uro) z istočasnim počasnim vrtenjem palice za homogenizacijo vzorca. Pri metodi Bridgmana pa talino postavimo v peč, v kateri obstaja gradient temperature. V zgornjem delu peči je temperatura višja od tališča kvazikristala, v spodnjem pa nižja. S počasnim spuščanjem taline prek temperature tališča se tvorijo lepi monokristali. Kvalitetni monokristalni vzorci imajo dober strukturni red brez defektov v kvaziperiodični kristalni mreži. V njih obstaja popoln red na prostorski skali nekaj desetink mikrometra, kar je celo več kot pri najkvalitetnejših običajnih periodičnih kristalih.

Kvazikristali imajo zanimive fizikalne lastnosti, ki kažejo na možnost njihove široke uporabe v tehnologiji. So trši od jekel, kemijsko nereaktivni (ne korodirajo), slabi električni in toplotni prevodniki, imajo majhen količnik trenja. So krhki pri sobni temperaturi, a postanejo mehki (superplastični) pri temperaturah nad 500 stopinj Celzija. V njih je možno uskladiščiti velike količine vodika. Te lastnosti nakazujejo možnosti uporabe kvazikristalov za trde prevleke, za plasti s termično zaporo (npr. prevleke strojnih delov, ki se močno grejejo), „tribološke“ materiale (npr. kroglični ležaji in hitro se vrteči deli motorjev) in za shranjevanje vodika za potrebe gorivnih celic.

Za odkritje kvazikristalov je izraelski znanstvenik Dany Shechtman prejel leta 1999 Wolfovo nagrado za fiziko. V raziskave fizike kvazikristalov smo se pred desetimi leti dejavno vključili tudi slovenski znanstveniki. Na Odseku za fiziko trdne snovi ter Odseku za tanke plasti in površine Instituta „Jožef Stefan“ raziskujemo strukturne, elektronske in magnetne lastnosti ikozaedričnih in dekalnih kvazikristalov z različnimi spektroskopskimi metodami. Med mednarodno odmevne dosežke ljubljanske skupine



Slika 6a. Plastna struktura posameznih elementov Al, Cu in Fe po nanosu v vakuumskem naprševalniku. Slika je dobljena z vrstičnim elektronskim mikroskopom.

Slika 6b. Po termični obdelavi pri 550 stopinjah Celzija termična difuzija atomov ustvari homogeno Al-Cu-Fe kvazikristalno tanko plast.

sodi razvoj in izdelava novih kvazikristalnih tankih plasti ikozaedričnih kvazikristalov družine Al-Cu-Fe [4] s povečano trdoto, zmanjšanim količnikom trenja in obrabo, nekorozivnostjo ter majhno električno in toplotno prevodnostjo. Kvazikristalne tanke prevleke Al-Cu-Fe (v koncentracijskem razmerju $\text{Al}_{62}\text{Cu}_{25.5}\text{Fe}_{12.5}$) so bile izdelane v letu 2003 z zaporednim nanašanjem tankih plasti osnovnih elementov Al, Cu in Fe na podlago v vakuumskem naprševalniku (slika 6a). V naslednjem koraku je bila ta plastna struktura termično obdelana pri visoki temperaturi, kjer je termična difuzija atomov med različnimi plastmi ustvarila homogeno kvazikristalno strukturo z želenimi fizikalno-mehanskimi lastnostmi (slika 6b). Točno določeno koncentracijsko razmerje med posameznimi elementi, ki je ključno za nastanek kvazikristalne faze, je bilo doseženo z ustreznimi časi nanašanja (in s tem debelinami) plasti posameznih elementov v plastni strukturi. Uporabnost novih tankih plasti se kaže pri prevlekah orodja (npr. kirurškega skalpela), strojnih delov, kuhinjske posode, štedilnikov in druge bele tehnike, itd.

LITERATURA

- [1] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias, J. W. Cahn, *Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry*, Phys. Rev. Lett. **53** (1984), str. 1951–1953.
- [2] C. Janot, *Quasicrystals – A Primer*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [3] M. Feuerbacher, C. Thomas, K. Urban, *Single-quasicrystal growth*, Quasicrystals (ur. H.-R. Trebin), Wiley-VCH GmbH, 2003, str. 1–26.
- [4] M. Čekada, P. Panjan, D. Jurić, J. Dolinšek, A. Zalar, *Deposition and characterization of Al-Cu-Fe thin films*, Thin Solid Films **459** (2004), str. 267–270.

OPERATORSKO MONOTONE IN OPERATORSKO KONVEKSNE FUNKCIJE

TOMAŽ KOSEM

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 15A48, 47A60

V tem članku obravnavamo operatorsko monotone funkcije. To so realne funkcije, katerih razširitve na hermitske matrike ohranjajo Löwnerjevo delno urejenost. Izpeljemo lastnosti takšnih funkcij, integralno reprezentacijo in spoznamo soroden koncept operatorske konveksnosti.

OPERATOR MONOTONE AND OPERATOR CONVEX FUNCTIONS

In this article class of monotone operator functions is introduced. Those are real functions, which extensions to Hermitian matrices preserve Löwner partial ordering. We derive properties of such functions, integral representation and get acquainted with concept of operator convexity.

1. Definicije in zgledi

Hermitska matrika $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ je **pozitivno semidefinitna** oz. krajše **pozitivna**, kadar za vsak $x \in \mathbb{C}^n$ velja $\langle Ax, x \rangle \geq 0$. Stožec pozitivnih matrik na običajen način določa (Löwnerjevo) delno urejenost na $n \times n$ hermitskih matrikah, se pravi $A \leq B$, kadar je razlika $B - A$ pozitivna matrika.

Naj bo f realna funkcija na intervalu I . Če je $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ diagonalna matrika z diagonalnimi elementi $\lambda_j \in I$, definiramo $f(\Lambda) = \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$. Če je $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitska matrika z lastnimi vrednostmi v I , potem matriko A diagonaliziramo, tj. $A = U\Lambda U^*$, kjer je Λ diagonalna in U unitarna matrika, in definiramo $f(A) = Uf(\Lambda)U^*$. Hitro se prepričamo, da je definicija neodvisna od diagonalizacije.

Funkciji f , ki je monotona glede na Löwnerjevo delno urejenost na hermitskih matrikah poljubne velikosti, tj. če $A \leq B$ implicira $f(A) \leq f(B)$, pravimo **operatorsko monotona**.

Funkcija f je **operatorsko konveksna**, če za poljuben par hermitskih matrik A, B enake velikosti in za vsak $\lambda \in [0, 1]$ velja

$$f((1 - \lambda)A + \lambda B) \leq (1 - \lambda)f(A) + \lambda f(B). \quad (1)$$

V definiciji operatorsko konveksne funkcije se moramo vprašati, ali je $f((1 - \lambda)A + \lambda B)$ sploh dobro definirana. To nam zatrdi naslednja trditev, ki jo dokažemo s pomočjo izreka o preslikavi spektra (glej [3]).

Trditev 1. Naj bosta A, B poljubni $n \times n$ hermitski matriki, katerih spektra $\sigma(A), \sigma(B)$ sta vsebovana v intervalu $I = [\alpha, \beta]$. Potem je spekter poljubne konveksne kombinacije matrik A in B tudi vsebovan v I .

Ukvarjali se bomo samo z zveznimi funkcijami. Preprosto je videti, da smemo v tem primeru pogoj (1) nadomestiti s

$$f\left(\frac{A+B}{2}\right) \leq \frac{f(A) + f(B)}{2}. \quad (2)$$

Funkcija f je **operatorsko konkavna**, če je $-f$ operatorsko konveksna.

Hitro preverimo, da sta množica operatorsko monotoni in množica operatorsko konveksnih funkcij zaprti za linearne kombinacije s pozitivnimi števili in tudi za limite funkcij po točkah.

Končni cilj članka je izpeljati integralsko reprezentacijo operatorsko monotoni funkcij. Na poti do njega bomo srečali nekaj trditev, ki terjajo zahtevne in obsežne dokaze, zato bomo nekatere samo skicirali ali celo izpustili. Radoveden bralec jih lahko najde v [3] ali [1].

Primer 1. Funkcija $f(t) = \alpha + \beta t$ je operatorsko monotona (na vsakem intervalu) za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\beta \geq 0$, operatorsko konveksna pa za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Primer 2. Funkcija $f(t) = t^2$ je operatorsko konveksna na vsakem intervalu, saj za hermitski matriki A, B velja

$$\frac{A^2 + B^2}{2} - \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 - AB - BA) = \frac{1}{4}(A - B)^2 \geq 0.$$

Torej je funkcija $f(t) = \alpha + \beta t + \gamma t^2$ operatorsko konveksna za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \geq 0$.

Primer 3. Funkcija $f(t) = t^2$ na $[0, \infty)$ ni operatorsko monotona. Za $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ je $B \geq A$, toda $B^2 - A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ni pozitivna matrika.

Primer 4. Funkcija $f(t) = t^3$ na $[0, \infty)$ ni operatorsko konveksna. Za $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ in $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ je $\frac{A^3 + B^3}{2} - \left(\frac{A+B}{2}\right)^3 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, kar pa ni pozitivna matrika.

Večkrat bomo rabili preprosta dejstva, ki jih združimo v naslednjo lemo:

Lema 1. (i) Če je A pozitivna matrika, potem je $A \leq I$ natanko tedaj, kadar je $r(A) \leq 1$. (Z $r(A)$ označimo spektralni radij matrike A , z I pa identično matriko.)

(ii) Operator A je skrčitev ($\|A\| \leq 1$) natanko tedaj, kadar je $A^*A \leq I$. To je ekvivalentno pogoju $AA^* \leq I$. (Z $\|\cdot\|$ označimo običajno operatorsko normo.)

(iii) Če je $B \geq A$, za vsako matriko X velja $X^*BX \geq X^*AX$.

(iv) Če je $B \geq A \geq 0$ in je B obrnljiva matrika, je $\|A^{1/2}B^{-1/2}\| \leq 1$.

Dokaz. Dokažimo le točko (iv), ki je zahtevnejša. Če je $B \geq A \geq 0$, je po točki (iii) $I \geq B^{-1/2}AB^{-1/2} = (A^{1/2}B^{-1/2})^* (A^{1/2}B^{-1/2})$ in zato po točki (ii) $\|A^{1/2}B^{-1/2}\| \leq 1$. ■

Trditev 2. Funkcija $f(t) = -\frac{1}{t}$ je operatorsko monotona na $(0, \infty)$.

Dokaz. Naj bosta A in B obrnljivi hermitski matriki, za kateri velja $B \geq A$. Ker je $(B^{-1/2})^* = B^{-1/2}$, je po lemi 1 (iii) $I \geq B^{-1/2}AB^{-1/2}$. Pišimo $K = A^{1/2}B^{-1/2}$. Potem je $K^* = B^{-1/2}A^{1/2}$ in $I \geq K^*K$. Po lemi 1 (ii) je to ekvivalentno $I \geq KK^*$, tj. $I \geq A^{1/2}B^{-1}A^{1/2}$. Upoštevaše še enkrat lemo 1 (iii), je potem $A^{-1} \geq B^{-1}$, s tem pa smo dokaz končali. ■

Izrek 1. Funkcija $f(t) = t^r$ je operatorsko monotona na $[0, \infty)$ za $0 \leq r \leq 1$.

Dokaz. Izrek natančno dokažimo za $r = 1/2$, pri drugih vrednostih potence r pa dokaz le skicirajmo.

Naj bo $B \geq A \geq 0$ in B obrnljiva matrika. Potem je po lemi 1 (iv)

$$1 \geq \|A^{1/2}B^{-1/2}\| \geq r(A^{1/2}B^{-1/2}) = r(B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4}),$$

kjer enakost spektralnih radijev sledi iz podobnosti matrik $A^{1/2}B^{-1/2}$ in $B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4}$. Ker je $B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4}$ pozitivna, po lemi 1 (i) velja $I \geq B^{-1/4}A^{1/2}B^{-1/4}$. Po lemi 1 (iii) je zato $B^{1/2} \geq A^{1/2}$. S tem smo dokazali trditev v primeru, če je B obrnljiva matrika. Če pa B ni obrnljiva, potem je za poljuben $\varepsilon > 0$ matrika $B + \varepsilon I$ pozitivna in obrnljiva. Torej je $(B + \varepsilon I)^{1/2} \geq A^{1/2}$. Ko pošljemo $\varepsilon \downarrow 0$, dobimo zaradi zveznosti $B^{1/2} \geq A^{1/2}$.

S pomočjo posebnega primera se prepričamo, da izrek velja v primeru diadičnega ulomka $r = \frac{m}{2^n}$, $1 \leq m \leq 2^n$, kar dokažemo z indukcijo na n . Ker so diadični ulomki gosti na $[0, 1]$, velja izrek za vse $r \in [0, 1]$. ■

Trditev 3. Naj bosta A, B pozitivni obrnljivi matriki. Potem velja

$$\frac{A^{-1} + B^{-1}}{2} - \left(\frac{A + B}{2} \right)^{-1} = \frac{(A^{-1} - B^{-1})(A^{-1} + B^{-1})^{-1}(A^{-1} - B^{-1})}{2}.$$

Torej je funkcija $f(t) = \frac{1}{t}$ operatorsko konveksna na $(0, \infty)$.

2. Karakterizacije

V tem razdelku obravnavamo karakterizacije operatorsko konveksnih in monotonih funkcij ter medsebojno povezanost le-teh. V dokazih bomo pogosto uporabljali operatorje na direktni vsoti $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, kjer je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, da bi ugotovili oz. dokazali določeno lastnost operatorja na $\mathcal{H}$.

Izrek 2. Naj bo f realna zvezna funkcija na intervalu I , ki vsebuje 0. Naslednji pogoji so ekvivalentni:

- (i) f je operatorsko konveksna na I in $f(0) \leq 0$.
- (ii) $f(K^*AK) \leq K^*f(A)K$ za vsako skrčitev K in vsak hermitski operator A s spektrom v I .
- (iii) $f(PAP) \leq Pf(A)P$ za vsak ortogonalni projektor P in vsak hermitski operator A s spektrom v I .

Dokaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Naj bo $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ operator na $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ in K skrčitev na $\mathcal{H}$. Označimo $L = (I - KK^*)^{1/2}$ in $M = (I - K^*K)^{1/2}$. Operatorja

$$U = \begin{pmatrix} K & L \\ M & -K^* \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} K & -L \\ M & K^* \end{pmatrix} \quad (3)$$

sta unitarna na $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Potem je

$$U^*TU = \begin{pmatrix} K^*AK & K^*AL \\ LAK & LAL \end{pmatrix}, \quad V^*TV = \begin{pmatrix} K^*AK & -K^*AL \\ -LAK & LAL \end{pmatrix}$$

in zato

$$\begin{pmatrix} K^*AK & 0 \\ 0 & LAL \end{pmatrix} = \frac{U^*TU + V^*TV}{2}.$$

Potem je

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} f(K^*AK) & 0 \\ 0 & f(LAL) \end{pmatrix} &= f\left(\frac{U^*TU + V^*TV}{2}\right) \leq \\
 &\leq \frac{f(U^*TU) + f(V^*TV)}{2} = \frac{U^*f(T)U + V^*f(T)V}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ U^* \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix} U + V^* \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix} V \right\} \leq \\
 &\leq \frac{1}{2} \left\{ U^* \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U + V^* \begin{pmatrix} f(A) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V \right\} = \\
 &= \begin{pmatrix} K^*f(A)K & 0 \\ 0 & Lf(A)L \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Dobili smo torej, da je

$$\begin{pmatrix} K^*f(A)K - f(K^*AK) & 0 \\ 0 & Lf(A)L - f(LAL) \end{pmatrix}$$

pozitiven operator na $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Zožimo ga na prvo kopijo $\mathcal{H}$ in dobimo pozitiven operator na $\mathcal{H}$, skratka, $f(K^*AK) \leq K^*f(A)K$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ker je vsak projektor P skršitev in hermitski, je ta implikacija očitna.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Naj bosta A, B hermitska operatorja s spektrom znotraj intervala I in $0 \leq \lambda \leq 1$. Pišimo $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in naj bo W unitarni operator

$$\begin{pmatrix} \lambda^{1/2}I & -(1-\lambda)^{1/2}I \\ (1-\lambda)^{1/2}I & \lambda^{1/2}I \end{pmatrix}.$$

Potem je

$$\begin{aligned}
 PW^*TWP &= (WP)^*T(WP) = \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda^{1/2}I & (1-\lambda)^{1/2}I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^{1/2}I & 0 \\ (1-\lambda)^{1/2}I & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda A + (1-\lambda)B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Torej je

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} f(\lambda A + (1-\lambda)B) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix} &= f(PW^*TWP) \leq \\
 &\leq Pf(W^*TW)P = PW^*f(T)WP = \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Podobno kot v dokazu implikacije (i) $\Rightarrow$ (ii) s pomočjo pozitivnega operatorja na $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

$$\begin{pmatrix} \lambda f(A) + (1-\lambda)f(B) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(\lambda A + (1-\lambda)B) & 0 \\ 0 & f(0) \end{pmatrix}$$

dobimo, ko ga zožimo na obe kopiji $\mathcal{H}$, da je f operatorsko konveksna in $f(0) \leq 0$. ■

Naslednji izrek opisuje povezanost med operatorsko konveksnostjo in monotonostjo. V dokazu bomo potrebovali pomožno

Trditev 4. Naj bo $\begin{pmatrix} A & C^* \\ C & B \end{pmatrix}$ hermitski operator na $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Potem za poljuben $\varepsilon > 0$ obstaja $\lambda > 0$, da velja

$$\begin{pmatrix} A & C^* \\ C & B \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} A + \varepsilon I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}.$$

Dokaz. Ker je $\left\langle \begin{pmatrix} \varepsilon I & -C^* \\ -C & \lambda I - B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \varepsilon \|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle Cx, y \rangle + \lambda \|y\|^2 - \langle By, y \rangle \geq \varepsilon \|x\|^2 - 2\|C\| \|x\| \|y\| + \lambda \|y\|^2 - \|B\| \|y\|^2$ in za $\lambda \geq \frac{\|C\|^2}{\varepsilon} + \|B\|$ zadnji izraz nenegativen za vse $x, y \in \mathcal{H}$, je trditev dokazana. ■

Izrek 3. Naj bo $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ zvezna funkcija. Potem je f operatorsko monotona natanko tedaj, kadar je operatorsko konkavna.

Dokaz. Predpostavimo, da je f operatorsko monotona funkcija. Če pokažemo, da je $f(K^*AK) \geq K^*f(A)K$ za vsak pozitiven operator A in vsako skršitev K , bo po izreku 2 sledilo, da je f operatorsko konkavna. Naj bo $T = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in U unitaren operator, definiran v (3). Potem velja $U^*TU = \begin{pmatrix} K^*AK & K^*AL \\ LAK & LAL \end{pmatrix}$. Po trditvi 4 obstaja za poljuben $\varepsilon > 0$ tak $\lambda > 0$, da je

$$U^*TU \leq \begin{pmatrix} K^*AK + \varepsilon I & 0 \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}.$$

Če nadomestimo T s $f(T)$, dobimo

$$\begin{pmatrix} K^*f(A)K & K^*f(A)L \\ Lf(A)K & Lf(A)L \end{pmatrix} = U^*f(T)U = f(U^*TU) \leq \begin{pmatrix} f(K^*AK + \varepsilon I) & 0 \\ 0 & f(\lambda)I \end{pmatrix}$$

zaradi operatorske monotonosti f . Torej je

$$\begin{pmatrix} f(K^*AK + \varepsilon I) - K^*f(A)K & -K^*f(A)L \\ -Lf(A)K & f(\lambda)I - Lf(A)L \end{pmatrix}$$

pozitivna matrika. Ker je vodilna podmatrika pozitivne matrike spet pozitivna, velja $K^*f(A)K \leq f(K^*AK + \varepsilon I)$ za vsak $\varepsilon > 0$. Ko gre $\varepsilon \downarrow 0$, dobimo $K^*f(A)K \leq f(K^*AK)$.

Za dokaz obrata predpostavimo, da je f operatorsko konkavna funkcija. Naj bo $0 \leq A \leq B$. Potem lahko za poljuben $0 < \lambda < 1$ pišemo

$$\lambda B = \lambda A + (1 - \lambda) \frac{\lambda}{1 - \lambda} (B - A).$$

Ker je f operatorsko konkavna, dobimo

$$f(\lambda B) \geq f(\lambda A) + (1 - \lambda) f\left(\frac{\lambda}{1 - \lambda} (B - A)\right).$$

Ker f slika $[0, \infty)$ nazaj vase, je slika pozitivne matrike spet pozitivna matrika. Iz gornje neenakosti potem sledi, da je $f(\lambda B) \geq \lambda f(A)$. Pošljimo $\lambda \uparrow 1$ in vidimo, da je $f(B) \geq f(A)$, torej je f operatorsko monotona funkcija. ■

Posledica 1. Naj bo $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ zvezna funkcija. Če je f operatorsko monotona, je $g(t) = \frac{1}{f(t)}$ operatorsko konveksna funkcija.

Dokaz. Naj bosta A, B obrnljivi pozitivni matriki. Po prejšnjem izreku je funkcija f operatorsko konkavna, torej je $f\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \frac{f(A)+f(B)}{2}$. Ker invertiranje ($X \mapsto X^{-1}$) obrača relacijo $\leq$ in je konveksna preslikava na pozitivnih operatorjih (glej trditvi 2 in 3), dobimo

$$\left[f\left(\frac{A+B}{2}\right) \right]^{-1} \leq \left[\frac{f(A)+f(B)}{2} \right]^{-1} \leq \frac{f(A)^{-1} + f(B)^{-1}}{2}.$$

Ker je g zvezna funkcija, je potem operatorsko konveksna. ■

Prej smo videli, da so funkcije $f(t) = t^r$ operatorsko monotone za $r \in [0, 1]$. Naslednji izrek nam pove še več:

Izrek 4. Na $(0, \infty)$ definirane funkcije $f(t) = t^r$, kjer je r realno število, so operatorsko monotone natanko tedaj, kadar je $0 \leq r \leq 1$.

Dokaz. Če je $0 \leq r \leq 1$, je po izreku 1 funkcija $f(t) = t^r$ operatorsko monotona. Če $r \notin [0, 1]$, funkcija ni konkavna na $(0, \infty)$. Zato po izreku 3 ni operatorsko monotona. ■

3. Deljene difference

Z I označimo odprt interval $(-1, 1)$. Naj bo f zvezno diferenciable funkcija na I . **Prva deljena diferenca** je funkcija $f^{[1]}: I \times I \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom

$$f^{[1]}(\lambda, \mu) = \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu}, \text{ če } \lambda \neq \mu,$$

$$f^{[1]}(\lambda, \lambda) = f'(\lambda).$$

Če je Λ diagonalna matrika z diagonalnimi elementi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ki pripadajo intervalu I , s $f^{[1]}(\Lambda)$ označimo $n \times n$ matriko, katere (i, j) -ti element je $f^{[1]}(\lambda_i, \lambda_j)$. Če je A hermitska in $A = U\Lambda U^*$, potem definiramo $f^{[1]}(A) = U f^{[1]}(\Lambda) U^*$.

Oglejmo si inducirano preslikavo f na množici vseh $n \times n$ hermitskih matrik s spektrom znotraj I . Takšne matrice tvorijo odprto množico v realnem vektorskem prostoru vseh $n \times n$ hermitskih matrik. Preslikava f je (Fréchetovo) diferenciable v A , če obstaja linearna transformacija $Df(A)$ na prostoru hermitskih matrik, da je

$$\|f(A + H) - f(A) - Df(A)(H)\| = o(\|H\|) \quad (4)$$

za vsako hermitsko matriko H , za katero je $\sigma(A + H) \subset I$.

Če je preslikava f diferenciable v A , je

$$Df(A)(H) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(A + tH) \quad (5)$$

za vsako hermitsko matriko H .

Med odvodom $Df(A)$ in matriko $f^{[1]}(A)$ obstaja zanimiva zveza. Preden jo raziščemo, vpeljimo novo operacijo med $n \times n$ matrikami.

Imejmo $n \times n$ matriki $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ in $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$. Schurov oz. Hadamardov produkt matrik A in B je matrika $A \circ B = (c_{ij})_{i,j=1}^n$, kjer je $c_{ij} := a_{ij} \cdot b_{ij}$. Sedaj pa se posvetimo zvezi med $Df(A)$ in $f^{[1]}(A)$.

Lema 2. *Naj bo f polinom. Potem za vsako diagonalno matriko Λ in za vsako hermitsko matriko H velja*

$$Df(\Lambda)(H) = f^{[1]}(\Lambda) \circ H. \quad (6)$$

Dokaz. Ker sta obe strani v (6) linearni v f , zadostuje dokazati lemo za monome $f(t) = t^p$, $p = 1, 2, 3, \dots$. Za takšne f s pomočjo (5) dobimo

$$Df(\Lambda)(H) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Lambda + tH)^p = \sum_{k=1}^p \Lambda^{k-1} H \Lambda^{p-k}.$$

To je matrika, katere (i, j) -ti element je $\sum_{k=1}^p \lambda_i^{k-1} \lambda_j^{p-k} h_{ij}$. Ker je v primeru $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$\left(f^{[1]}(\Lambda) \right)_{ij} = \frac{f(\lambda_i) - f(\lambda_j)}{\lambda_i - \lambda_j} = \frac{\lambda_i^p - \lambda_j^p}{\lambda_i - \lambda_j} = \sum_{k=0}^{p-1} \lambda_i^{p-1-k} \lambda_j^k = \sum_{k=1}^p \lambda_i^{k-1} \lambda_j^{p-k}$$

in v primeru $\lambda_i = \lambda_j$

$$f'(\lambda_i) = p \lambda_i^{p-1} = \sum_{k=1}^p \lambda_i^{k-1} \lambda_i^{p-k},$$

je enakost (6) dokazana. ■

Posledica 2. Če je $A = U \Lambda U^*$ in $f \in C^1(I)$, potem je

$$Df(A)(H) = U \left[f^{[1]}(\Lambda) \circ (U^* H U) \right] U^*. \quad (7)$$

Dokaz. Če je f polinom, je

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(U \Lambda U^* + tH) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} U f(\Lambda + tU^* H U) U^* = \\ &= U \left[\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\Lambda + tU^* H U) \right] U^* \end{aligned}$$

in uporabimo (5) ter (6). V dokazu splošnega primera netrivialno uporabimo Weierstrassov aproksimacijski izrek. Zaradi dolžine in tehnične zahtevnosti ta del dokaza izpuščamo. ■

Naj bo $t \mapsto A(t)$ preslikava razreda C^1 iz intervala $[0,1]$ v prostor hermitskih matrik, ki imajo spekter znotraj I . Naj bo $f \in C^1(I)$ in definirajmo $F(t) := f(A(t))$. Po verižnem pravilu je $DF(t) = Df(A(t))(A'(t))$. Po prejšnjem izreku je potem

$$F(1) - F(0) = \int_0^1 f^{[1]}(A(t)) \circ A'(t) dt, \quad (8)$$

kjer za vsak t vzamemo Schurov produkt v bazi, ki diagonalizira matriko $A(t)$.

Izrek 5. Funkcija $f \in C^1(I)$ je operatorsko monotona na I natanko tedaj, kadar je matrika $f^{[1]}(A)$ pozitivna za vsako hermitsko matriko A s $\sigma(A) \subset I$.

Dokaz. Naj bo f operatorsko monotona funkcija in za A brez škode za splošnost vzemimo diagonalno matriko s $\sigma(A) \subset I$. Matrika H iz samih enic je pozitivna, zato je $A + tH \geq A$ za $t \geq 0$ in $f(A + tH) - f(A)$ je pozitivna matrika za dovolj majhne pozitivne t , ki zadoščajo pogoju $\sigma(A + tH) \subset I$. To implicira, da je $Df(A)(H) \geq 0$ in dalje po posledici 2 $f^{[1]}(A) \circ H \geq 0$. Zaradi posebne izbire matrike H pa to pomeni $f^{[1]}(A) \geq 0$.

Za dokaz obrata imejmo hermitski matriki A, B s spektroma v I in $B \geq A$. Definirajmo $A(t) = (1 - t)A + tB$, $0 \leq t \leq 1$. Potem ima tudi $A(t)$ spekter v I . Po predpostavki je $f^{[1]}(A(t)) \geq 0$ za vse $t \in [0, 1]$. Ker je $A'(t) = B - A \geq 0$ in ker je Schurov produkt dveh pozitivnih matrik spet pozitivna matrika (glej [3]), je $f^{[1]}(A(t)) \circ A'(t)$ pozitivna matrika za vse $t \in [0, 1]$. Po (8) je $F(1) - F(0) = f(B) - f(A) \geq 0$, torej je $f(B) \geq f(A)$. ■

Naslednje izreke navedimo brez dokazov:

Izrek 6. Če je f zvezna in operatorsko monotona funkcija na $(-1, 1)$, potem je za vsak $\lambda \in [-1, 1]$ funkcija $g_\lambda(t) := (t + \lambda)f(t)$ operatorsko konveksna.

Izrek 7. Vsaka operatorsko monotona funkcija na I je zvezno odvedljiva.

Izrek 8. Če je $f \in C^2(I)$ operatorsko konveksna funkcija, je za vsak $\mu \in I$ funkcija $g(\lambda) = f^{[1]}(\mu, \lambda)$ operatorsko monotona.

Posledica 3. Če je $f \in C^2(I)$, $f(0) = 0$, in je f operatorsko konveksna funkcija, je funkcija $g(t) = \begin{cases} \frac{f(t)}{t}, & t \neq 0 \\ f'(0), & t = 0 \end{cases}$ operatorsko monotona.

Dokaz. Upošteva je prejšnji izrek je funkcija $t \mapsto f^{[1]}(0, t)$ operatorsko monotona. Toda v našem primeru je $f^{[1]}(0, t)$ ravno $\frac{f(t)}{t}$. ■

Posledica 4. Če je funkcija f operatorsko monotona na I in je $f(0) = 0$, je funkcija $g(t) = \frac{t+\lambda}{t}f(t)$ operatorsko monotona za $\lambda \in [-1, 1]$.

Dokaz. Najprej predpostavimo, da je $f \in C^2(I)$. Po izreku 6 je funkcija $g_\lambda(t) = (t + \lambda)f(t)$ operatorsko konveksna. Po posledici 3 je torej g operatorsko monotona.

Če f ni v razredu C^2 , poiščemo zaporedje gladkih funkcij $\{f_n\}$, ki po točkah konvergirajo proti f . Poseben primer v prejšnjem odstavku uporabimo za funkcije $t \mapsto f_n(t) - f_n(0)$. Ko pošljemo $n \rightarrow \infty$, dobimo, kar pravi posledica. ■

Posledica 5. Če je f operatorsko monotona funkcija na I in je $f(0) = 0$, je f dvakrat odvedljiva v 0.

Dokaz. Po posledici 4 je funkcija $g(t) = (1 + \frac{1}{t}) f(t)$ operatorsko monotona, zato je po izreku 7 zvezno odvedljiva. Ker je f po izreku 7 zvezno odvedljiva, je funkcija h , definirana kot $h(t) = \frac{f(t)}{t}$, $h(0) = f'(0)$, tudi zvezno odvedljiva, saj je $h = g - f$. Ker je

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t) - f'(0)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t) - \frac{f(t)}{t} + \frac{f(t)}{t} - f'(0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(t)t - f(t)}{t^2} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{f(t)}{t} - f'(0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(t)}{t} \right)' + h'(0) = 2h'(0), \end{aligned}$$

je funkcija f dvakrat odvedljiva v 0 in velja $f''(0) = 2h'(0)$. ■

4. Löwnerjevi izreki

Naj bo K množica vseh funkcij f na intervalu $I = (-1, 1)$, ki so operatorsko monotone in zadoščajo pogojema $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Očitno je K konveksna množica. Pokazali bomo, da je kompaktna v topologiji konvergence po točkah, in poiskali njene ekstremne točke. To nam bo omogočilo izpeljati integralsko reprezentacijo funkcij iz K .

Lema 3. Če je $f \in K$, potem je

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \frac{t}{1-t} \quad \text{za } 0 \leq t < 1, \\ f(t) &\geq \frac{t}{1+t} \quad \text{za } -1 < t < 0, \\ |f''(0)| &\leq 2. \end{aligned}$$

Dokaz. Naj bo $A = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, kjer je $t \in (-1, 1)$ in $t \neq 0$. Po izreku 5 je matrika

$$f^{[1]}(A) = \begin{pmatrix} f'(t) & \frac{f(t)}{t} \\ \frac{f(t)}{t} & 1 \end{pmatrix}$$

pozitivna, zato ima pozitivno determinanto. Torej velja

$$\frac{f(t)^2}{t^2} \leq f'(t). \quad (9)$$

Naj bo $g_{\pm}(t) = (t \pm 1)f(t)$. Po lemi 6 sta funkciji $g_{\pm}$ konveksni. Torej sta njuna odvoda monotono naraščajoči funkciji. Ker je $g'_{\pm}(t) = f(t) + (t \pm 1)f'(t)$ in $g'_{\pm}(0) = \pm 1$, odtod sledi

$$f(t) + (t-1)f'(t) \geq -1 \quad \text{za } t > 0 \quad (10)$$

in

$$f(t) + (t+1)f'(t) \leq 1 \quad \text{za } t < 0. \quad (11)$$

Iz (9) in (10) dobimo

$$f(t) + 1 \geq \frac{(1-t)f(t)^2}{t^2} \quad \text{za } t > 0, \quad (12)$$

kar zlahka preoblikujemo v

$$0 \leq \left(\frac{t}{1-t} - f(t) \right) (f(t) + t) \quad \text{za } t > 0,$$

od koder takoj sledi prva neenakost v lemi. Drugo neenakost dobimo s podobnim argumentom z uporabo (11) namesto (10).

V dokazu posledice 5 smo videli, da velja

$$f'(0) + \frac{1}{2}f''(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{t})f(t) - f'(0)}{t} =: A,$$

torej je $f''(0) = 2A - 2$. Naj gre $t \downarrow 0$ in z uporabo prve neenakosti v lemi ugotovimo, da je limita manjša od 2. Namreč,

$$\frac{(1 + \frac{1}{t})f(t) - f'(0)}{t} \leq \frac{\frac{(t+1)t}{(1-t)} - 1}{t} = \frac{2}{1-t} \leq 2.$$

Naj gre tokrat $t \uparrow 0$. Z uporabo druge neenakosti bi na podoben način dobili, da je limita večja od 0. Ker je $f''(0) = 2A - 2$, nam oboje skupaj da $|f''(0)| \leq 2$. ■

Trditev 5. *Množica K je kompaktna v topologiji konvergence po točkah.*

Dokaz. Z J_t označimo interval $\left[0, \frac{t}{1-t}\right]$, če je $t \in [0, 1)$, in $\left[\frac{t}{1+t}, 0\right]$, če je $t \in (-1, 0)$. Ker je J_t kompakten za vsak $t \in I$, je po izreku Tihonova tudi topološki produkt $\prod_{t \in I} J_t$ kompakten. Množico K si lahko predstavljamo kot podmnožico v tem produktu intervalov, če identificiramo funkcijo f s točko $(f(t))_{t \in I}$ v topološkem produktu. Izberimo poljubno posplošeno zaporedje $\{f_i\}$ v K , ki po točkah konvergira k funkciji f . Očitno je f operatorsko monotona funkcija in $f(0) = 0$. Če pokažemo, da velja $f'(0) = 1$, bo sledilo, da $f \in K$. Potem bo K zaprta podmnožica v kompaktnem in zato kompaktna.

Po posledici 4 je vsaka od funkcij $(1 + \frac{1}{t})f_i(t)$ monotona na $(-1, 1)$. Ker je $\lim_{t \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{t})f_i(t) = f'_i(0) = 1$ za vse i , vidimo, da je $(1 + \frac{1}{t})f_i(t) \geq 1$ za $t > 0$ in ≤ 1 za $t < 0$. Če je $t > 0$, zaradi konvergence po točkah velja $(1 + \frac{1}{t})f(t) \geq 1$ in nasprotna neenakost v primeru $t < 0$. Ker je f po izreku 7 zvezno odvedljiva funkcija, je zato $f'(0) = 1$. ■

Trditev 6. Če je f ekstremna točka množice K , potem je oblike

$$f(t) = \frac{t}{1 - \alpha t}, \text{ kjer je } \alpha = \frac{1}{2}f''(0).$$

Dokaz. Naj bo f ekstremna točka množice K . Za vsak $\lambda \neq 0$, $-1 < \lambda < 1$, pišimo $g_\lambda(t) = (1 + \frac{\lambda}{t})f(t) - \lambda$. Po posledici 4 je funkcija g_λ operatorsko monotona. Opazimo, da je $g_\lambda(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \frac{\lambda}{t})f(t) - \lambda = 0$, saj je $f(0) = 0$ in $f'(0) = 1$. Podobno kot v dokazu posledice 5 dobimo $g'_\lambda(0) = f'(0) + \frac{1}{2}\lambda f''(0) = 1 + \frac{1}{2}\lambda f''(0)$. Potem funkcija h_λ , definirana kot

$$h_\lambda(t) = \frac{g_\lambda(t)}{g'_\lambda(0)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\lambda f''(0)} \left[\left(1 + \frac{\lambda}{t}\right) f(t) - \lambda \right],$$

pripada K . Ker je $|f''(0)| \leq 2$, je $|\frac{1}{2}\lambda f''(0)| < 1$. Torej smemo zapisati

$$f = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\lambda f''(0)\right) h_\lambda + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\lambda f''(0)\right) h_{-\lambda}.$$

Ker je f ekstremna točka v K , mora biti $f = h_\lambda$. To pomeni

$$\left(1 + \frac{1}{2}\lambda f''(0)\right) f(t) = \left(1 + \frac{\lambda}{t}\right) f(t) - \lambda,$$

kar preoblikujemo v

$$\lambda \left(\frac{1}{2}f''(0)f(t) - \frac{f(t)}{t} + 1 \right) = 0,$$

od koder sledi $f(t) = \frac{t}{1 - \frac{1}{2}f''(0)t}$. ■

Za $\lambda \in [-1, 1]$ si oglejmo funkcije $h_\lambda(t) = \frac{t}{1 - \lambda t}$. Trdimo, da $h_\lambda \in K$. Ker je za $\lambda = 0$ to očitno, naj bo sedaj $\lambda \neq 0$. Potem lahko h_λ zapišemo kot

$$h_\lambda(t) = \frac{1}{\lambda - \lambda^2 t} - \frac{1}{\lambda}$$

oz. $h_\lambda = f \circ g \circ h$, kjer so funkcije f, g, h podane s predpisi

$$h(x) = \lambda - \lambda^2 x,$$

$$g(x) = \frac{1}{x},$$

$$f(x) = x - \frac{1}{\lambda}.$$

Ker funkciji g in h obračata relacijo $\leq$, f pa jo ohranja, je kompozicija $f \circ g \circ h = h_\lambda$ operatorsko monotona funkcija. Očitno velja tudi $h_\lambda(0) = 0$ in $h'_\lambda(0) = 1$, se pravi $h_\lambda \in K$.

Izrek 9. *Za vsak $f \in K$ obstaja enolično določena verjetnostna mera μ na $[-1, 1]$, da je*

$$f(t) = \int_{-1}^1 \frac{t}{1 - \lambda t} d\mu(\lambda). \quad (13)$$

Dokaz. Po trditvi 6 so ekstremne točke množice K vsebovane v družini $\{h_\lambda\}$. Ker je K kompaktna in konveksna, je po Krein-Milmanovem izreku K zaprta konveksna ogrinjača svojih ekstremnih točk. Končne konveksne kombinacije elementov iz družine $\{h_\lambda: -1 \leq \lambda \leq 1\}$ lahko zapišemo kot $\int h_\lambda d\nu(\lambda)$, kjer je ν verjetnostna mera na $[-1, 1]$ s končnim nosilcem. Ker je f v zaprtju takšnih kombinacij, obstaja tako posplošeno zaporedje verjetnostnih mer $\{\nu_i\}$ na $[-1, 1]$ s končnimi nosilci, da posplošeno zaporedje $f_i(t) = \int h_\lambda(t) d\nu_i(\lambda)$ konvergira k $f(t)$ za vsak t . Prostor kompleksnih Borelovih mer na $[-1, 1]$ je izometrično izomorfen dualu prostora kompleksnih zveznih funkcij na $[-1, 1]$. Po izreku Banach-Alaoglu je enotska krogla v prostoru kompleksnih mer šibko* kompaktna. Ker je prostor verjetnostnih mer šibko* zaprta podmnožica v enotski krogli, je tudi šibko* kompakten. Torej ima posplošeno zaporedje $\{\nu_i\}$ stekališče μ . Z drugimi besedami, neko podzaporedje zaporedja $\int h_\lambda d\nu_i(\lambda)$ konvergira k $\int h_\lambda d\mu(\lambda) = \int \frac{t}{1 - \lambda t} d\mu(\lambda)$. Dokaz enoličnosti pa terja elementarna dejstva iz kompleksne in funkcionalne analize. ■

Ena od posledic enoličnosti mere μ v reprezentaciji (13) je ta, da je vsaka funkcija h_{λ_0} , $\lambda_0 \in [-1, 1]$ ekstremna točka množice K . Funkcijo h_{λ_0} lahko namreč predstavimo kot integral v (13) z mero, koncentrirano v točki λ_0 . Ker so ekstremne točke prostora verjetnostnih mer na $[-1, 1]$ ravno Diracove mere δ_{λ_0} („točkaste mase“), od tod sledi ekstremnost funkcij h_{λ_0} .

Pogoje v definiciji množice K smo potrebovali zato, da je bila K kompaktna. Sedaj jih lahko zaobidemo.

Posledica 6. *Naj bo f nekonstantna operatorsko monotona funkcija na $(-1, 1)$. Potem obstaja enolično določena verjetnostna mera μ na $[-1, 1]$, da je*

$$f(t) = f(0) + f'(0) \int_{-1}^1 \frac{t}{1 - \lambda t} d\mu(\lambda). \quad (14)$$

Dokaz. Naprej pokažimo, da je $f'(0) \neq 0$. To razberemo iz izreka 5, če vzamemo matriko $A_t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ za $t \in (-1, 1)$. Potem je namreč $f^{[1]}(A_t) = \begin{pmatrix} f'(t) & \frac{f(t)-f(0)}{t} \\ \frac{f(t)-f(0)}{t} & f'(0) \end{pmatrix}$. Ker je f monotona funkcija, je $f'(t) \geq 0$ za $t \in (-1, 1)$. Ker je f nekonstantna, obstaja t_0 , da je $f(t_0) \neq f(0)$. Če bi veljalo $f'(0) = 0$, bi bila determinanta matrike $f^{[1]}(A_{t_0})$ negativna, kar bi bilo v protislovju s pozitivnostjo matrike $f^{[1]}(A_{t_0})$.

Ker je $f'(0) \neq 0$, lahko definiramo novo funkcijo $\tilde{f}(t) := \frac{f(t)-f(0)}{f'(0)}$. Funkcija $\tilde{f}$ je operatorsko monotona in očitno pripada množici K . S pomočjo prejšnjega izreka dobimo integralsko reprezentacijo (13), od koder hitro sledi (14). ■

Izrek 10. *Naj bo f nelinearna operatorsko konveksna funkcija na $(-1, 1)$. Potem obstaja enolično določena verjetnostna mera μ na $[-1, 1]$, da je*

$$f(t) = f(0) + f'(0)t + \frac{1}{2}f''(0) \int_{-1}^1 \frac{t^2}{1 - \lambda t} d\mu(\lambda). \quad (15)$$

Dokaz. Definirajmo $\tilde{f}(t) := f(t) - f(0) - f'(0)t$. Potem je $\tilde{f}$ tudi operatorsko konveksna funkcija, ki je po predhodnih rezultatih neskončnokrat odvedljiva in velja $\tilde{f}(0) = 0$, $\tilde{f}'(0) = 0$. Naj bo $g(t) := \frac{\tilde{f}(t)}{t}$. Potem je g operatorsko monotona funkcija po posledici 3, po že znanih razmislekih pa je $g(0) = 0$, $g'(0) = \frac{1}{2}\tilde{f}''(0) = \frac{1}{2}f''(0)$. Zato ima g reprezentacijo kot (14), iz katere enostavno sledi (15). ■

Zahvala

Avtor se zahvaljuje prof. dr. Romanu Drnovšku za tehtne popravke in umestne pripombe.

LITERATURA

- [1] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [2] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [3] T. Kosem, *Neenakosti med normami hermitskih matrik*, diplomsko delo, Ljubljana, 2003.
- [4] X. Zhan, *Matrix Inequalities*, Springer, Berlin - Heidelberg, 2002.

VPRAŠANJA IN ODGOVORI

122. NETRIVIALNA RACIONALNA REŠITEV DIOFANTSKE ENAČBE – odgovor na vprašanje iz številke 6 letnika 51 (2004)

Če zaradi krajše pisave zaznamujemo produkt xy na kratko z z , torej

$$xy = z, \quad (1)$$

se diofantska enačba glasi

$$\left[9\alpha^2 (x+y)^2 - (x-y)^2\right] \left[\alpha^2 (z+1)^2 - (z-1)^2\right] = 16\alpha^2 z^2. \quad (2)$$

Preoblikujmo to enačbo na dva načina. Najprej jo zapišimo v obliki

$$(9\alpha^2 - 1)(x+y)^2 \left[\alpha^2 (z+1)^2 - (z-1)^2\right] + 4z(\alpha^2 - 1)(z-1)^2 = 0,$$

drugič pa v obliki

$$(9\alpha^2 - 1)(x-y)^2 \left[\alpha^2 (z+1)^2 - (z-1)^2\right] + 4\alpha^2 z \left[9(\alpha^2 - 1)(z+1)^2 + 32z\right] = 0.$$

Od tod dobimo z deljenjem

$$\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} = \frac{\left[9(\alpha^2 - 1)(z+1)^2 + 32z\right] \alpha^2}{(\alpha^2 - 1)(z-1)^2}. \quad (3)$$

Denimo, da so števila α , x , y , ki zadoščajo enačbi (2), racionalna. Enačba (3) pove, da je v tem primeru izraz

$$\frac{9(\alpha^2 - 1)(z+1)^2 + 32z}{\alpha^2 - 1} \quad (4)$$

kvadrat racionalnega števila. Ker je ta izraz pri $z = 0$ enak $9 = 3^2$, pišimo

$$\frac{9(\alpha^2 - 1)(z+1)^2 + 32z}{\alpha^2 - 1} = 9(1+tz)^2, \quad (5)$$

kjer je t racionalen. Iz enakosti (5) izračunamo

$$z = \frac{18(\alpha^2 - 1)(t-1) - 32}{9(\alpha^2 - 1)(1-t^2)}. \quad (6)$$

Pri poljubnih racionalnih številih α in t ($\alpha^2 \neq 1, t^2 \neq 1$) je z , ki ga dobimo od tod, racionalen in zadošča enačbi (5).

Enačba (3) nam zdaj da

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{3\alpha(1+tz)}{z-1}. \quad (7)$$

(Desno stran bi lahko vzeli tudi z nasprotnim znakom. Toda število α nastopa v enačbi (2) samo v kvadratih, zato smemo znak – upoštevati pri α .)

Iz enačbe (7) izhaja, da je

$$\frac{x}{y} = \frac{z-1+3\alpha(1+tz)}{z-1-3\alpha(1+tz)}.$$

Pomnožimo to enakost z $xy = z$. Potem imamo

$$x^2 = z \frac{z-1+3\alpha(1+tz)}{z-1-3\alpha(1+tz)}. \quad (8)$$

Vstavimo zdaj v ulomek na desni za z izraz (6). Po nekoliko dolgovoznem računanju in razstavljanju dobimo

$$\frac{z-1+3\alpha(1+tz)}{z-1-3\alpha(1+tz)} = -\frac{(3\alpha+1)[3(t-1)\alpha-3t-1][3(t-1)\alpha+3t+5]}{(3\alpha-1)[3(t-1)\alpha+3t+1][3(t-1)\alpha-3t-5]}.$$

Denimo zdaj, da sta racionalni števili α in t med seboj povezani z enačbo

$$\begin{aligned} (\alpha-1)(3\alpha+1)[3(t-1)\alpha+3t+1][3(t-1)\alpha-3t-5] = \\ = (\alpha+1)(3\alpha-1)[3(t-1)\alpha-3t-1][3(t-1)\alpha+3t+5]. \end{aligned} \quad (9)$$

V tem primeru se izraz (8) za x^2 glasi

$$x^2 = -z \frac{(\alpha-1)(3\alpha+1)^2}{(\alpha+1)(3\alpha-1)^2}. \quad (10)$$

Zvezo (9) med α in t lahko zapišemo takole:

$$[9(t^2-1)\alpha^2 - 9t^2 - 24t + 1]\alpha = 0.$$

Če privzamemo, da $\alpha \neq 0$, dobimo od tod enačbo

$$9(t^2-1)\alpha^2 = 9t^2 + 24t - 1. \quad (11)$$

Vstavimo v desno stran enačbe (6) za α^2 izraz, ki ga od tod izračunamo. Potem je

$$z = \frac{2(1-t)}{(t+1)(3t+1)}; \quad (12)$$

nadalje je

$$\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{\alpha^2-1}{(\alpha+1)^2} = \frac{8(3t+1)}{9(\alpha+1)^2(t-1)}.$$

Enačba (10) se zdaj glasi

$$x^2 = \frac{16(3\alpha+1)^2}{9(\alpha+1)^2(3\alpha-1)^2(t+1)^2}.$$

Desna stran je popoln kvadrat. Torej se x izraža takole:

$$x = \pm \frac{4(3\alpha+1)}{3(\alpha+1)(3\alpha-1)(t+1)}. \quad (13)$$

Racionalen je, če sta števili α in t , povezani z enačbo (11), racionalni. Ker je $y = \frac{z}{x}$, imamo

$$y = \pm \frac{3(\alpha+1)(3\alpha-1)(1-t)}{2(3\alpha+1)(3t+1)}. \quad (13^*)$$

Tako smo našli racionalno netrivialno rešitev enačbe (2), če racionalni števili α in t ustrezata enačbi (11).

Pri danem α je (11) kvadratna enačba za t , njeni koeficienti so racionalni, če je α racionalen. Kvadratna enačba z racionalnimi koeficienti ima racionalna korena natanko tedaj, kadar je njena diskriminanta kvadrat racionalnega števila. Račun pokaže, da je diskriminanta v našem primeru enaka $9(9\alpha^2-1)(\alpha^2-1)+144$. To pomeni, da ima enačba (11) racionalen koren t natanko tedaj, kadar je izraz

$$(9\alpha^2-1)(\alpha^2-1)+16 \quad (A)$$

kvadrat racionalnega števila. Npr. pri $\alpha = 2$ je izraz (A) enak $121 = 11^2$. Pripadajoči t je bodisi enak $\frac{5}{3}$, bodisi enak $-\frac{7}{9}$. Formuli (13) in (13*) nam dasta te racionalne rešitve enačbe (2): Pri $t = \frac{5}{3}$ imamo $x = \pm \frac{7}{30}$, $y = \mp \frac{5}{14}$, pri $t = -\frac{7}{9}$ pa $x = \pm \frac{14}{5}$, $y = \mp \frac{30}{7}$.

Izraz (A) je kvadrat pri $\alpha = \pm 1$ in pri $\alpha = \pm \frac{1}{3}$. Pripadajoče racionalne rešitve enačbe (2) nam dajo izrojene trikotnike z racionalnimi stranicami, racionalno ploščino in racionalnimi težiščnicami.

Pogoju (A) ustreza neskončno različnih racionalnih števil α . To ugotovimo takole: Vzemimo eliptično krivuljo

$$y^2 = x(x^2 + 5x - 32), \quad (14)$$

ki vsebuje neskončno racionalnih točk (glej [1], str. 107). Naj bosta torej $x = m$, $y = r$ koordinati racionalne točke na njej. Postavimo

$$\alpha = \frac{r}{3m}.$$

Preprost račun pokaže, da je

$$(9\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 1) + 16 = \frac{(m^2 + 32)^2}{9m^2}.$$

Torej je izraz (A) kvadrat racionalnega števila $(m^2 + 32)/3m$.

Vsak racionalni α , ki zadošča pogoju (A), dobimo iz primerno izbrane racionalne točke na krivulji (14).

Pripomba. Vse trikotnike z racionalnimi stranicami, racionalno ploščino in dvema racionalnima težiščnicama, ki jih določata formuli (13) in (13*) za x in y , sta našla po drugi poti R. H. Buchholz in L. R. Rathbun (glej [1]).

LITERATURA

- [1] I. Vidav, *Heronovi trikotniki z racionalnimi težiščnicami*, Obzornik mat. fiz. **48** (2001), str. 97–108.

Ivan Vidav

VESTI

ENAJSTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Med 23. in 29. julijem 2004 je bilo v Skopju v Makedoniji enajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike. Ljubljansko univerzo so zastopali Irena Majcen iz četrtega, Matija Pretnar iz tretjega ter Mario Šikić in Klemen Šivic iz drugega letnika. Vsi so se dobro odrezali in osvojili mesta na robu zgornje tretjine, kar je zadoščalo za tri druge (Pretnar, Šikić in Šivic) in eno tretjo nagrado (Majcen). Najvišja mesta so zasedli študentje iz Ukrajine, Poljske in Madžarske.

Dva dneva so študentje vsak dan po pet ur reševali naslednje naloge (vsaka naloga je bila vredna enako število točk, teža nalog pa je približno naraščala z zaporedno številko):

I.1. Naj bo S taka neskončna množica realnih števil, da za vsako končno podmnožico $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \subset S$ velja $|s_1 + s_2 + \dots + s_k| < 1$. Dokaži, da je S števna množica.

I.2. Naj bo $P(x) = x^2 - 1$. Koliko različnih realnih rešitev ima enačba

$$\underbrace{P(P(\dots(P(x))\dots))}_{2004} = 0?$$

I.3. Množica S_n je za $n \geq 2$ definirana kot

$$S_n = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k; 0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq \frac{\pi}{2} \text{ in } \sum_{k=1}^n \sin x_k = 1 \right\}.$$

(a) Pokaži, da je S_n interval.

(b) Naj bo l_n dolžina intervala S_n . Določi $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$.

I.4. Za $n \geq 4$ naj množica M vsebuje n točk v $\mathbb{R}^3$. Nobena četverka točk iz M naj ne leži na isti ravnini. Recimo, da se da vsako točko iz M pobarvati z belo ali črno barvo tako, da za vsako sfero, ki vsebuje vsaj štiri točke iz M , velja naslednje: natanko polovica točk v preseku je bele in polovica črne barve. Dokaži, da obstaja sfera, ki vsebuje vse točke iz M .

I.5. Naj bo X množica $\binom{2k-4}{k-2} + 1$ realnih števil, $k \geq 2$. Dokaži, da obstaja monotono zaporedje $\{x_i\}_{i=1}^k \subseteq X$, za katero velja

$$|x_{i+1} - x_1| \geq 2|x_i - x_1|$$

za vse $i = 2, \dots, k-1$.

I.6. Za vsako kompleksno število $z \notin \{0, 1\}$ definiramo

$$f(z) = \sum (\log z)^{-4},$$

kjer vsota poteka po vseh vejah kompleksnega logaritma.

(a) Pokaži, da obstajata polinoma P in Q , da je $f(z) = P(z)/Q(z)$ za vse $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

(b) Pokaži, da za $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ velja

$$f(z) = z \frac{z^2 + 4z + 1}{6(z-1)^4}.$$

II.1. Naj bo A realna 4×2 matrika, B pa realna 2×4 matrika in naj velja

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Določi BA .

II.2. Za zvezni nepadajoči funkciji $f, g: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ naj za vsak $x \in [a, b]$ velja

$$\int_a^x \sqrt{f(t)} dt \leq \int_a^x \sqrt{g(t)} dt$$

in $\int_a^b \sqrt{f(t)} dt = \int_a^b \sqrt{g(t)} dt$. Pokaži, da je

$$\int_a^b \sqrt{1+f(t)} dt \geq \int_a^b \sqrt{1+g(t)} dt.$$

II.3. Naj D označuje enotski disk v ravnini. Točke $p_1, p_2, \dots, p_n$ naj bodo izbrane točke v disku D . Dokaži, da obstaja točka $p \in D$, za katero je povprečna razdalja od p do točk $p_1, p_2, \dots, p_n$ večja ali enaka 1.

II.4. Naj bo $n \geq 1$ in M kompleksna matrika velikosti $n \times n$ z različnimi lastnimi vrednostmi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, ki imajo zaporedoma algebrajske večkratnosti $m_1, \dots, m_k$. Definiramo operator L_M s predpisom $L_M(X) = MX + XM^T$. Poišči njegove lastne vrednosti in njihove večkratnosti.

II.5. Dokaži, da velja

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{x^{-1} + \log y - 1} \leq 1.$$

II.6. Za $n \geq 0$ definiramo matrike A_n in B_n na naslednji način: $A_0 = B_0 = [1]$ in za $n > 0$

$$A_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & B_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} A_{n-1} & A_{n-1} \\ A_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Naj $S(M)$ pomeni vsoto vseh elementov matrike M . Dokaži, da velja $S(A_n^{k-1}) = S(A_k^{n-1})$ za vsaka $n, k \geq 1$.

Gregor Šega

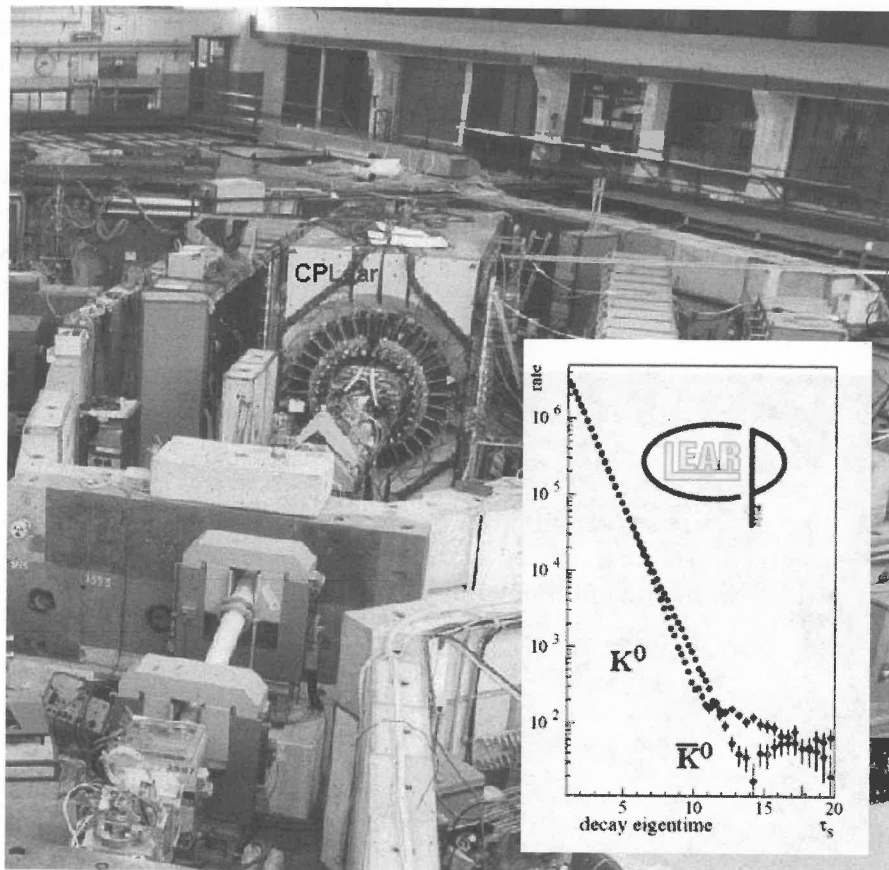
ZOISOVE NAGRADE IN PRIZNANJA ZA ZNANSTVENORAZISKOVALNO DELO V LETU 2004

V prostorih Narodnega muzeja v Ljubljani so 30. novembra 2004 podelili Zoisove nagrade in priznanja, najvišje državne nagrade za znanstvene dosežke. Nagrajeni so bili tudi trije slovenski fiziki. Prof. dr. Marko Mikuž in prof. dr. Danilo Zavrtanik sta prejela Zoisovo nagrado za vrhunske znanstvene dosežke na področju fizike osnovnih delcev, prof. dr. Igor Muševič pa Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke na področju fizike mehke snovi. Povzemimo uradne utemeljitve, ki so objavljene na spletni strani Ministrstva za visoko šolstvo, znanost in tehnologijo.

Doktor **Marko Mikuž** je izredni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in vodja Odseka za eksperimentalno fiziko osnovnih delcev na Institutu *Jožef Stefan* v Ljubljani. Doktor **Danilo Zavrtanik** je redni profesor in predsednik Politehnike Nova Gorica.

Profesor Mikuž in profesor Zavrtanik sta vodila slovensko skupino raziskovalcev, ki je v okviru projekta CPLEAR v evropskem laboratoriju CERN v Ženevi raziskovala lastnosti sistema nevtralnih kaonov, povezanih s kršitvijo kombinirane simetrije na zrcaljenje v prostoru in na konjugacijo naboja. Leta 1984 sta skupaj s sodelavci predlagala meritev kršitve simetrije na obrat časa in kombinirane simetrije CPT. Povabljen sta bila k sodelovanju pri eksperimentu CPLEAR, zasnovanem na nekoliko drugačnem konceptu. Pri eksperimentu sta si prizadevala za razširitev programa na meritev omenjenih simetrij. V začetku devetdesetih let so se jima pridružili mlajši sodelavci, ki so pod njunim vodstvom opravljali magistrska in doktorska dela. Celoten projekt se je izkazal za zelo uspešnega, saj je prispeval vrsto natančnih podatkov o parametrih kršitev simetrij. Zlasti pomembni sta prva neposredna eksperimentalna potrditev kršitve simetrije na obrat časa v mikro svetu ter zelo natančna meritev ohranitve simetrije CPT. Njuni prispevki k raziskavam segajo od priprav in gradnje detektorja do analize podatkov. Med slednje spada tudi identifikacija elektronov, kar je razvidno iz magistrskih in doktorskih del, izdelanih pod njunim vodstvom. Prav identifikacija elektronov je bila eno osnovnih orodij pri odkritju kršitve simetrije na obrat časa.

V zadnjih sedmih letih so v uglednih mednarodnih revijah izšli številni članki z rezultati njunih raziskav. Doživeli so velik odmev strokovne javnosti in nekateri tudi svetovnih dnevnih medijev. Nagrajenca uživata velik ugled



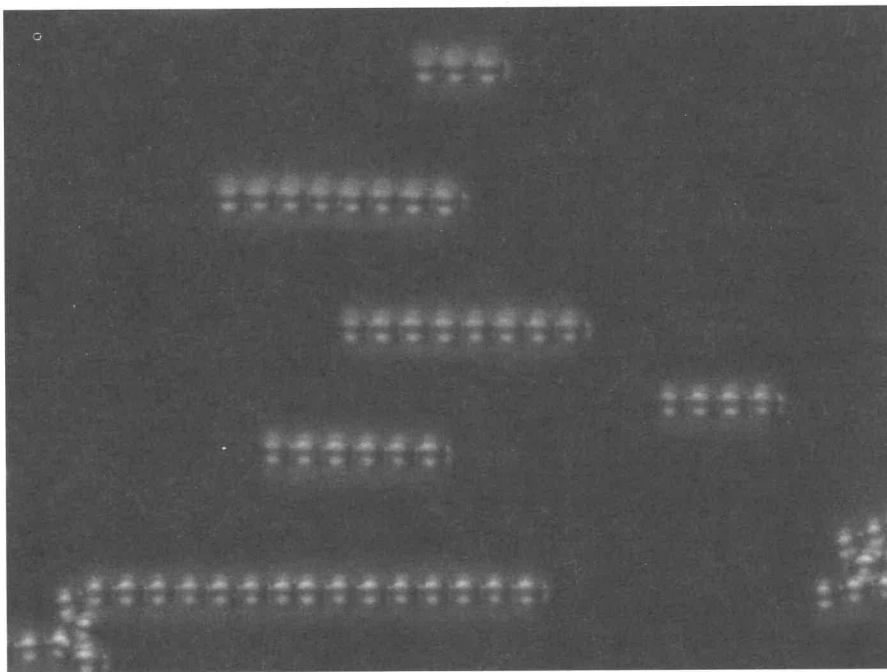
Slika 1. Fotografija eksperimenta CPLEAR, postavljenega v halo zraven nizkoenergijskega izvora antiprotonov LEAR v laboratoriju CERN. Na grafu vidimo izmerjeni razpadni krivulji nevtralnega kaona in njegovega antidelca. To je edina meritev, kjer se lepo vidi razlika med razpadnima krivuljama.

v mednarodnih znanstvenih krogih. Njuno delo pomeni vrhunski prispevek v zakladnico svetovnega znanja na področju fizike osnovnih delcev.

Doktor **Igor Muševič** je izredni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in višji znanstveni svetnik na Institutu *Jožef Stefan*.

Med najodmevnejša dela profesorja Igorja Muševiča spada eksperimentalno odkritje kristalnih mostov v reži med trdnima površinama, ki je napolnjena s tekočim kristalom v izotropni fazi. Skupaj s sodelavci je v ta namen razvil izvirno metodo, pri kateri s pomočjo mikroskopa na atomsko silo

kontrolira razdaljo med posebej obdelano stekleno mikro kroglo in stekleno ploščo. Pri tem je pri razdaljah nekaj nanometrov zaznal močno kapilarno silo. Raziskali so tudi temperaturno odvisnost kapilarne kondenzacije. Pokazali so, da lahko s pomočjo Landau-de Gennesove teorije strukturnih sil kvalitativno razložijo pojave v nanometrskem območju. Drugo njegovo delo v zadnjem obdobju zajema vrsto raziskav s področja fizike tekočih kristalov. To so v celoti izvirna dela, ki prinašajo nove ideje. Pomenijo tudi nov korak k razvoju fotonских kristalov, ki so potencialno zanimivi za elektronsko industrijo.



Slika 2. Spontana organizacija kroglic iz kvarčnega stekla v nematskem tekočem kristalu

V zadnjih sedmih letih je profesor Muševič v uglednih mednarodnih revijah objavil 50 člankov, ki so doživeli veliko odmevnost v strokovnih krogih. Je tudi soavtor monografije *Fizika feroelektričnih in anti ferroelektričnih tekočih kristalov* (*The Physics of ferroelectric and antiferroelectric liquid crystals*), ki je izšla leta 2000 pri založbi World Scientific. S svojimi deli je profesor Muševič pomembno uveljavil slovensko znanost v mednarodnem prostoru.

Uredništvo

POROČILO O SEMINARJU DMFA „STOLETJE FIZIKE – NAJPOMEMBNEJŠA ODKRITJA“

Dvodnevni seminar „Stoletje fizike – najpomembnejša odkritja“ je bil namenjen dodatnemu izpopolnjevanju srednješolskih učiteljev fizike. Predavanja so bila 28. in 29. januarja 2005 na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani, udeležilo pa se jih je 23 profesorjev. S tem seminarjem smo želeli predstaviti velikanski napredek fizike v preteklem stoletju, zato smo seminar vključili v krog prireditev ob svetovnem letu fizike.

Program je potekal v skladu s prvotnim razporedom in je obsegal naslednja predavanja: Jure Bajc nam je najprej predstavil aktivnosti, ki se bodo dogajale ob letu fizike 2005 po svetu in v Sloveniji. Opozoril nas je na zanimiva predavanja, verižne eksperimente in osrednji dogodek, to je prenos svetlobnega signala okoli sveta. Anže Slosar nam je predstavil razvoj klasične mehanike in njen prehod v relativistično ter najpomembnejša spoznanja v današnji kozmologiji. Laserji so prav gotovo eno pomembnejših odkritij prejšnjega stoletja, tako da nas je Igor Poberaj popeljal skozi osnovna načela pri vzbujanju laserske svetlobe in nas seznanil z njeno uporabo. Tomaž Podobnik nam je odkril svet osnovnih delcev in v splošnih obrisih predstavil standardni model, zlome simetrij in eksperimentalne metode v fiziki visokih energij. Fiziki so v prejšnjem stoletju odkrili tudi povsem nove pojave v trdni snovi: polprevodnike, ki so temeljito spremenili današnje življenje, in superprevodnike, od katerih si še marsikaj obetamo. Za kakšne pojave gre v enih in drugih snoveh, nam je razložil Anton Ramšak. Svet majhnega pa se vedno bolj omejuje na naprave v velikosti nekaj nanometrov. Denis Arčon je prikazal, kako jih naredimo, preiskujemo in za kaj jih lahko uporabljamo. V dvajsetem stoletju smo prišli do povsem novih spoznanj pri sestavi beljakovin. Primož Ziherl je razkril, kako lahko ugotavljamo biološke strukture s sipanjem rentgenskih žarkov. Predstavitev dosežkov fizike v zadnjem stoletju je zelo zanimiva tudi s pedagoškega stališča. Tako nam je Gorazd Planinšič prikazal nekaj zanimivih poskusov, s katerimi lahko popestrimo predavanja iz moderne fizike: kako z ohlajanjem spremenimo barvo svetlobne diode, kako iz avtomobilske žarnice naredimo elektronko in kako lahko iz navadne žarnice izvabimo rentgenske žarke.

Vsa predavanja so bila skrbno pripravljena in zanimiva za poslušalce, kar lahko sklepamo po mnogih vprašanjih in živahni diskusiji po koncu predavanj.

Žiga Šmit, Denis Arčon

OBZORNIK ZA MATEMATIKO
 LJUBLJANA, MAREC 2005
 Letnik 52, številka 2
 ISSN 0473-7466, UDK 51+52

R 177/05



COBI.S

ODPISANO

VSEBINA

Članki	Strani
Kvazikristali, Janez Dolinšek	33–40
Operatorsko monotone in operatorsko konveksne funkcije, Tomaž Kosem	41–55
Vprašanja in odgovori	
122. Netrivialna racionalna rešitev diofantske enačbe – odgovor, Ivan Vidav	56–59
Vesti	
Enajsto mednarodno tekmovanje študentov matematike, Gregor Šega	59–61
Zoisove nagrade in priznanja za znanstvenoraziskovalno delo v letu 2004	62–64
Poročilo o seminarju DMFA „Stoletje fizike – najpomembnejša odkritja“, Žiga Šmit, Denis Arčon	VII

CONTENTS

Articles	Pages
Quasicrystals, Janez Dolinšek	33–40
Operator Monotone and Operator Convex Functions, Tomaž Kosem ...	41–55
Questions & answers	56–59
News	59–VII

Na naslovnici je ikozaedrični kvazikristal Dy-Mg-Zn z dodekagonalno morfologijo (glej članek na strani 33).