

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

ODPISANO

2005

Letnik 52

1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Svetovno leto
FIZIKE
2005



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasiló Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2005, letnik 52, številka 1, strani 1–32

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana.
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460, 2512 005. **Telefaks:** (01) 2517 281. **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://zaloznistvo.dmfa.si/omf/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787. **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana. **SWIFT (BIC):** SKBASI2X. **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Marko Zgonik, Nada Razpet (vesti), Pavle Saksida (nove knjige), Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško stavila Monika Testen.

Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1450 izvodov.

Člani društva prejéjajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 5.000 SIT, za druge družinske člane in študente pa 2.500 SIT. Naročnina za ustanove je 8.000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Agencija za raziskovalno dejavnost ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

© 2005 DMFA Slovenije – 1594

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželená velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstávjena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

LETO 2005 – SVETOVNO LETO FIZIKE

Pred 100 leti, leta 1905, se je dogodilo tisto, kar nam je dalo priložnost, da smo letošnje leto imenovali za svetovno leto fizike. V tistem čudovitem letu je Albert Einstein objavil štiri znamenite članke (o fotoefektu, o Brownovem gibanju, o specialni teoriji relativnosti in o masi energije) v *Annalen der Physik*¹, takrat prestižni fizikalni reviji. Večina velikih odkritij potrebuje nekaj časa, da se uveljavijo. Nekatera morajo skozi sita, ki še zdaleč niso samo strokovna. Tudi Einstein je naletel na obilo nerazumevanja pri uveljavljanju teorije relativnosti v obeh takratnih deželah desnega in levega totalitarizma. Ne glede na to so bile Einsteinove zamisli preverjene in potrjene s poskusi. Še več, temeljito so pripomogle k razširitvi sveta fizikalnih raziskovanj do takega, kot ga poznamo danes. Fizikom se je zdel zato predlog Evropskega fizikalnega društva, da se leto 2005 razglasi za svetovno leto fizike, popolnoma razumljiv. Treba pa je bilo narediti precej korakov, da je svetovno leto fizike postalo priznано in potrjeno v najpomembnejših svetovnih organizacijah (UNESCO, Združeni narodi). Vsa nacionalna združenja fizikov bodo prispevala bogat spored nacionalnih in mednarodnih dogodkov v letu 2005. Tudi v Sloveniji je koordinacijski odbor pri DMFA, ki ga vodi dr. Jure Bajc, sredi intenzivnega dela, da izpelje številne zamisli v letu 2005.

Poglejmo, kaj utegne prinesiti svetovno leto fizike v slovenskem okolju: Pričakujemo, da bo večji poudarek na fiziki in naravoslovju v tem letu spodbudil kar največ najboljših srednješolcev, da se bodo vpisovali na matematično-fizikalne fakultete. Pričakujemo tudi pozitiven prispevek dialogov z znanostjo, ki jih bomo pomagali ustvariti, na dogajanja v naši družbi. Ljudje moramo spoznati vse oblike razmišljanja, a moramo poskusiti tudi ločiti, katera so privedla ali obetajo privedi do kakršnegakoli napredka. Zavedati se moramo tudi, da zahtevajo obetavni miselni dosežki trdo delo in raznovrsten napor, preden nam jih uspe uresničiti in izkoristiti v vsakodnevnem življenju. Želel bi si, da bi v tem letu spoznali, da je lahko svetovno leto fizike tudi začetek še boljšega posredovanja fizikalnega znanja mladim na slovenskih šolah. To lahko store le zelo dobri učitelji fizike. V oboje bo treba vložiti vsaj toliko naporov, kot smo jih vložili v spremembo učnih načrtov.

Tudi če nam ne bo uspelo uresničiti vseh pričakovanj, če bo le nekaj zamisli čez čas prineslo dobre rezultate, je bila razglasitev leta 2005 za svetovno leto fizike na mestu.

Za DMFA Zvonko Trontelj

¹Kronološko je uredništvo *Analov* (*Annalen der Physik*) prejelo rokopise Einsteinih člankov v čudovitem letu 1905 takole:

18. marca: O hevrističnem stališču, ki zadeva nastanek in spremembo svetlobe;

11. maja: O gibanju, ki ga zahteva molekulsko-kinetična teorija svetlobe za suspendirane delce v mirujočih tekočinah;

30. junija: O elektrodinamiki gibajočih se teles;

27. septembra: Ali je vztrajnost telesa odvisna od njegove energije.

PRVE OCENE VELIKOSTI MOLEKUL

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.65.+g

Zanimivo je zasledovati, kako je velikost molekul vstopila v fiziko, preden se je razvila kinetična teorija plinov.

FIRST ESTIMATES OF MOLECULAR SIZES

It is interesting to note how the size of molecules entered into physics before the advent of the kinetic theory of gases.

Einsteinov prvi članek o površinski napetosti ni pripeljal do omembe vrednega sklepa [1]. Vseeno je bil zanj pomemben korak do članka o Brownovem gibanju v „čudovitem letu“. Ta je leta 1909 vzpodbudil Jeana Perrina k merjenju sedimentacijskega ravnovesja in povprečnega kvadratnega odmika smolnih kroglic v vodi. Rezultati iz leta 1911 so končali razpravo o obstoju molekul. Einsteinov članek nas spodbudi, da pogledamo v ozadje prvih ocen za velikost molekul pred razvojem kinetične teorije plinov. Do 19. stoletja so o atomih samo govorili, v tem stoletju pa so v njih že začenjali videti delce z določeno velikostjo. V zadnji tretjini stoletja je dobila velikost molekul trdnjšo oporo, ker so različna opazovanja začela dajati vse bolj enotne rezultate. Razprava o tem se je končala šele v drugem desetletju 20. stoletja.

Prvo oceno najdemo v prispevku *Kohezija* Thomasa Younga, očeta valovne teorije svetlobe, v dodatku k četrti izdaji Britanske enciklopedije iz leta 1816 [2], [3]. Poskusimo slediti toku njegovih misli. Trdno telo v obliki prizme z začetno dolžino l_0 s silo F obremenimo na stisk. Za zmanjšano dolžino l velja $l/l_0 = F_0/(F_0 + F)$, če je F_0 „kohezija“, to je notranja sila, s katero delujeta dela prizme drug na drugega. Prizmi, ki bi jo z zunanjo silo $F = F_0$ obremenili na stisk, bi se dolžina zmanjšala na polovico, $l/l_0 = \frac{1}{2}$. Prizma, ki bi jo z enako veliko silo obremenili na nateg, $F = -F_0$, pa bi se pretrgala, $l/l_0 \rightarrow \infty$. Pri veliko manjši zunanji sili, $|F| \ll F_0$, je relativna sprememba dolžine: $(l - l_0)/l_0 = -F/(F_0 + F) \approx -F/F_0 = -F/(ES)$. Pri tem je E prožnostni modul in S prečni presek prizme. Young je potemtakem natezno trdnost izenačil z obratno vrednostjo prožnostnega modula. Premislek je razširil tudi na kapljevine, le da je pri njih prožnostni modul nadomestil s stisljivostjo χ , torej $(l - l_0)/l_0 = -\chi F/S$. Po tedanjih podatkih

bi se zaradi lastne teže pretrgal stolpec vode z višino $h = 2,29 \cdot 10^5$ m, čemur ustreza stisljivost $\chi = 1/(F_0/S) = 1/(\rho gh) = 4,45 \cdot 10^{-10} \text{ (N/m}^2\text{)}^{-1}$.

Young je vpeljal površinsko napetost in za vodo nameril $0,075 \text{ N/m}$. O površinski napetosti je razpravljal tudi Pierre Simon de Laplace. Young se je osredotočil na plast pod gladino vode z debelino dosega sil med molekulami. Ugotovil je, da naj bi bila površinska napetost enaka tretjini ploskovne gostote kohezije, pomnožene z debelino te plasti: $\gamma = \frac{1}{3}(F_0/S)d = \frac{1}{3}d/\chi$. Z navedenima podatkom je dobil za doseg:

$$3\chi\gamma = 0,1 \text{ nm} . \quad (1)$$

Molekule je imel še za precej manjše. Sklepal je, da je povprečna razdalja med molekulama v nasičeni vodni pari, ki se utekočinja, enaka dosegu molekulskih sil. Površinsko napetost je izmeril pri temperaturi $15,6^\circ\text{C}$, zato je za razmerje med gostoto nasičene pare pri tej temperaturi in gostoto vode upošteval $1/60000$ (prava vrednost je $1/72000$) in ocenil premer molekule z $0,1 \text{ nm}/60000^{1/3} \approx 0,1 \text{ nm}/40$. Zavedal se je slabosti, da je ocena odvisna od temperature, ker je od nje odvisna gostota nasičene pare.

Velikost molekul je ocenil tudi John James Waterston v članku *O kapilarnosti in njeni zvezi z latentno toploto*¹ [3]. V površinski napetosti je videl ploskovno gostoto molekulskih sil in v izparilni toploti prostorninske enote njihovo prostorninsko gostoto. Youngov doseg molekulskih sil je brez pomisleka izenačil s povprečno razdaljo med molekulama in tega s premerom molekule. Dobil ga je kot kubični koren iz prostornine, ki odpade na eno molekulo:

$$d = \frac{6\gamma}{\rho q_i} . \quad (2)$$

Za premer molekule vode je navedel $0,117 \text{ nm}$ in za premer molekule alkohola $0,174 \text{ nm}$.

Youngovo delo ni zbudilo pozornosti, včasih ga celo pripišejo Laplaceu. Na novo ga je odkril lord Rayleigh leta 1890 in Youngovo zvezo $\gamma = \frac{1}{3}d/\chi$ popravil v $\gamma = \frac{3}{20}d/\chi$. Opozoril je, da je A. Dupré leta 1864 natezno trdnost kapljevine $1/\chi$ izenačil z izparilno toploto prostorninske enote ρq_i .

Mimogrede omenimo, da bi z malo več sreče lahko prvi velikost molekul ocenil Benjamin Franklin. Leta 1773 je raziskoval pojav, da tanka plast olja na vodni gladini pomiri valove. Ugotovil je, da čajna žlička olja pokrije

¹Waterston je leta 1845 londonski Kraljevi družbi predložil članek *O fiziki snovi, ki jih sestavljajo proste in prožne molekule v stanju gibanja*, v katerem je postregel z nekaterimi rezultati, ki so za več desetletij prehiteli Clausiusovo in Maxwellovo kinetično teorijo. Naslednje leto je smel družbi o tem predavati, članka pa niso objavili, ampak so ga odložili v arhiv neobjavljenih del. Tam ga je našel lord Rayleigh leta 1890 in ga objavil.

približno 2000 m^2 jezerske gladine. Iz tega bi za debelino plasti zlahka dobil $4 \text{ cm}^3 / (2000 \text{ m}^2) = 2 \text{ nm}$, kar bi bila dobra ocena za premer velike molekule olja.

Ne Youngovi ne drugim omenjenim ocenam, kolikor so bile objavljene, niso zaupali. Veliko bolje so sprejeli precej bolj zapleteno oceno Josepha Loschmidta iz leta 1865. Izhajala je iz napovedi kinetične teorije za viskoznost plina in ocene za razmerje gostot plina in kapljevine. Zadnja je bila tvegana, ker tedaj še niso utekočinili zraka in niso poznali gostote kapljevinskega kisika. Za premer molekule v zraku je navedel preveliko oceno $0,6 \text{ nm}$.

Od nekdanjega raziskovanja se obrnimo k današnjemu poučevanju. Zagotovimo, da lahko dobimo vodno paro iz vode na dva načina: razpršimo jo do molekul ali izparimo. V prvem primeru opravimo delo proti površinski napetosti, v drugem dovedemo izparilno toploto. Vzemimo, da je N molekul v prostornini V z maso $m = \rho V$ in ima molekula površino $6d^2$ in prostornino d^3 kocke. Dovedeno delo $6d^2 N \gamma$ izenačimo z dovedeno toploto $\rho d^3 N q_i$, pa dobimo oceno (2). V njej se pojavijo same makroskopske količine. Tudi če bi molekule obravnavali kot kroglice s premerom d , bi dobili enak rezultat, če bi privzeli, da izpolnijo vso prostornino.

Lahko izhajamo tudi iz mikroskopske slike [4]. V notranjosti kapljevine je vsaka molekula vezana na šest neposrednih sosednjih molekul. Medtem je na gladini kapljevine molekula z enakimi vezmi vezana samo na pet molekul. Če je vezavna energija para molekul w , ima molekula v pari za $\frac{1}{6}w$ večjo energijo kot v kapljevini. Tako dobimo za premer oceno (2), če upoštevamo, da vezavna energija w ustreza izparilni toploti, preračunani na molekulo. Oceno lahko poskusimo izboljšati, če upoštevamo, da je molekula v kapljevini vezana še z 12 bolj oddaljenimi molekulami, na gladini pa z enakimi vezmi le z 8 od njih. Toda te vezi so šibkejšje od vezi z neposrednimi sosedami.

Prejšnjemu izvajanju je mogoče ugovarjati, ker moramo namesto izparilne toplote q_i upoštevati ustrezno spremembo notranje energije pri izparjevanju, $W_n/m = q_i - p\Delta V/m = q_i - pV/m = q_i - RT/M$ [5]. Pri tem smo zanemarili začetno prostornino kapljevine in spremembo prostornine izenačili s prostornino nastale pare. To da za premer molekule oceno

$$d = \frac{6\gamma}{\rho(q_i - RT/M)}. \quad (3)$$

Po Einsteinovem opozorilu [1] moramo upoštevati spremembo energije na ploskovno enoto $\gamma - T\partial\gamma/\partial T$ namesto dovedenega dela na ploskovno enoto γ . Tako smo dosledno uporabili zakon o ohranitvi energije in energijo, ki je potrebna za nastanek nove površine, izenačili s spremembo energije pri

Prve ocene velikosti molekul

izparevanju. Tako dobimo za premer molekule oceno

$$d = \frac{6[\gamma - T(\partial\gamma/\partial T)]}{\rho(q_i - RT/M)} \quad (4)$$

	M [kg]	q_i [MJ/kg]	ρ [kg/m ³]	T [K]	γ [mN/m]	$-\partial\gamma/\partial T$ [mN/(m·K)]
H ₂	2,016	0,445	70,8	20,28	1,92	0,18
H ₂ O	18,011	2,257	958	373,16	58,9	0,19
Ne	20,180	0,0848	1204	27,07	4,83	0,35
N ₂	28,014	0,1988	807	77,35	8,78	0,22
Ar	39,948	0,1610	1396	87,29	10,75	0,85

Tabela 1. Makroskopski podatki, ki jih potrebujemo za oceno velikosti molekul. Uporabili smo podatke iz *A Physicist's Desk Reference*, American Institute of Physics, New York 1989 in *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press, Boca Raton 1999.

	d (2)	d (4)	d „izmerjen“
H ₂	0,36 nm	1,31 nm	0,15 nm
H ₂ O	0,16	0,39	0,32
Ne	0,28	0,97	0,31
N ₂	0,32	1,09	0,22
Ar	0,29	2,56	0,36

Tabela 2. Ocena za velikosti molekul po enačbah (2) in (4) ter „izmerjene velikosti“, dobljene iz kinetične teorije plinov.

Enačba (2) ali (3) da boljše ocene kot enačba (4)! V iskanju vzroka za to se zavemo, da kroglaste molekule v kapljevini izpolnijo večjo prostornino. Če bi bile kroglice naložene v kubičnem ali heksagonalnem gostem skladu, bi bila njihova prostornina $3\sqrt{2}/\pi$ -krat večja. Kapljevino si pogosto predstavljamo kot gosti sklad, v katerem nekaj molekul manjka in se nastale vrzeli gibljejo kot molekule v plinu. Če pa odvezamemo vsako osmo molekulo, je prostornina kapljevine $(3\sqrt{2}/\pi)8/7$ -krat večja. Toda tudi s faktorjem $7\pi/(24\sqrt{2}) = 0,65$ bi ostala ocena za premer molekul v splošnem prevelika. Po tem sklepamo, da med površinsko napetostjo in premerom molekul ni preproste zveze. Razmere na gladini kapljevine so zapletene, gostota se ne spremeni skokovito, ampak zvezno preide od kapljevine do pare [6]. Youngova ocena dá pravo velikostno stopnjo „po naključju“. Kaže, da so to vedeli ali vsaj slutili, ko te ocene niso sprejeli, kot so druge. Tudi dandanes je bolje, če se pri poučevanju ne opremo na Youngovo oceno in na

ocene te vrste. Vendar naletimo na učitelje in pisce učbenikov, ki uporabijo dvomljive izpeljave, če so le dovolj preproste. Večina pa misli, da se z nobeno preprostostjo ne bi mogla odkupiti za goljufijo. Posebno za bodoče učitelje fizike pa utegne biti poučno, če razkrijemo ozadje spornih ocen in izpeljav.

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Ob Einsteinovem prvem članku*, Obzornik mat. fiz. **51** (2004), str. 171–175.
- [2] Th. Young, *Miscellaneous Works. Johnson Reprint Volume 9*, Johnson, New York 1972.
- [3] G. D. Scott, I. G. MacDonald, *Young's estimate of the size of molecules*, Am. J. Phys. **33** (1965) 163; E. A. Mason, *Estimate of molecular sizes and Avogadro's number from surface tension*, Am. J. Phys. **34** (1966) 1193; A. P. French, *Earliest estimates of molecular size*, Am. J. Phys. **35** (1967) 162; S. G. Brush, *The Kind of Motion We Call Heat*, Vol. 1, North Holland, Amsterdam 1976, str. 142.
- [4] V. F. Weisskopf, *Search for simplicity*, Am. J. Phys. **53** (1985) 19.
- [5] V. F. Weisskopf, *Search for simplicity: The size of molecules revisited*, Am. J. Phys. **53** (1985) 618.
- [6] M. V. Berry, *The molecular mechanism of surface tension*, Phys. Educ. **6** (1971) 79; R. C. Brown, *The surface tension of liquids*, Contemp. Phys. **15** (1974) 301; S. Ono, S. Kondo, *Molecular theory of surface tension in liquids*, *Handbuch der Physik*, Vol. 10, *Struktur der Flüssigkeiten*, S. Függe (ur.), Springer, Berlin 1960.

VESTI

SONČNI MRK 2006

Dne 29. marca 2006 bo popoln sončni mrk, ki bo viden od Brazilije in Gane do Kazahstana. Najprikladnejše bo opazovanje v Turčiji (okrog 13. ure po lokalnem času). V okviru DMFA nameravamo organizirati ogled sončnega mrka. Obenem si bomo ogledali še razne zanimivosti Turčije. Potovanje, ki bo trajalo teden dni (od nedelje do nedelje), pripravljamo v sodelovanju z agencijo TRUD (polet Brnik–Carigrad–Brnik, po Turčiji avtobus).

Če se zanimate za to zanimivo potovanje, se oglasite po elektronski pošti (Mitja.Rosina@ijs.si). Okvirno, neobvezujoče sporočilo bi mi prišlo prav čim prej, da se lotim priprav in da vas dam v adresar. Za odločitev pa bo seveda čas prihodnjo jesen.

Mnogo informacij najdete na internetu, recimo na naslovu:

<http://newton.physics.metu.edu.tr/aat/TSE2006/TSE2006.html>

Lepe slike prejšnjih sončnih mrkov so tudi v Spiki (npr. v oktobrski številki 1999).

Pridružite se nam!

Mitja Rosina

GRUBERJEV MAGNET

STANISLAV JUŽNIČ

Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko
Univerza v Ljubljani

PACS: 91.25.-r

Ob 200-letnici Gruberjeve smrti predstavljamo njegovo poročilo o vplivu potresa na magnet. Gruberjeve meritve primerjamo s poskusi Humboldta in drugih sodobnikov.

GRUBER'S MAGNET

Gabriel Gruber's report about the influence of earthquake on magnetism is presented. Gruber's opinion is compared with the experiments of Humboldt and other contemporaries.

Pred dvesto leti je umrl Slovenec Gabrijel Gruber (1740–1805), profesor eksperimentalne mehanike v Ljubljani ter profesor eksperimentalne fizike v Polocku in Sankt Peterburgu. Ljubljčanani se ga seveda spomnijo predvsem ob Gruberjevem prekopu in Gruberjevi palači. Kakšni pa so bili Gruberjevi dosežki v fiziki?

Gruberjev oče je bil premožen dunajski orožar slovenskega rodu [1, 2, 3]. Gruber je veljal za učenca Boškovičevega sodelavca, slovitega dunajskega profesorja Karla Scherfferja (1716–1783). Zorel je v prvi generaciji jezuitov, vzgojenih v duhu nove Boškovičeve fizike. Leta 1768 je Gruber kot profesor eksperimentalne mehanike prišel v Ljubljano, kjer je poučeval poldrugo desetletje. Po težavah z gradnjo prekopa je sredi januarja 1785 čez Dunaj in Varšavo na skrivaj odpotoval v belorusko mesto Mogilev in tam leta 1785/1786 prevzel katedro za mehaniko. Od 1786 do 1800 je bil profesor matematike, fizike in arhitekture v beloruskem mestu Polock. Obenem je poučeval risanje, mehaniko, balistiko, pirotehniko, vojno in civilno arhitekturo, zadnje leto pa še eksperimentalno fiziko. V Polocku je postavil fizikalno-matematični muzej, kemijski laboratorij, knjižnico, galerijo slik in gledališko dvorano z bogatim okrasjem, ki jo je sam okrasil s freskami. Leta 1788 je načrtoval in gradil jezuitski kolegij v Polocku. Junija 1799 je ob obisku v Sankt Peterburgu predstavil svoje izume v prostorih Akademije, med njimi škarje za striženje tankega sukna in vodne črpalke. 10. 11. 1800 je postal prvi rektor novega jezuitskega kolegija carja Pavla I. v Sankt Peterburgu in tam poučeval eksperimentalno fiziko.



Slika 1. Gabrijel Gruber v profilu (portret Cretineau Joly)

Že Robert Boyle, Robert Hooke, Athanasius Kircher, Edmund Halley in Immanuel Kant so ob lizbonskem potresu leta 1755 poročali o vplivih potresa na magnetizem. Kircher je opisal podmorske vulkane in podzemne povezave med oddaljenimi deželami. Benjamin Franklin je po analogiji z bliskom razvil teorijo o električni naravi potresa. Zamislil si je ozračje iz mešanice plinov, ki tiščijo iz notranjosti Zemlje proti površju in pod zemljo zbirajo električni naboj, podobno kot v atmosferi. Ker je blisk razmagnetil kompas, je Franklin nekaj podobnega pričakoval tudi od potresa. Francoski župnik Pierre Bertholon (1742–1800) je zato za preprečevanje potresov in vulkanov v zemljo zabadal palice podobne strelovodom. Španski kralj je pisno pohvalil Bertholona, vendar njegovega izuma niso nikoli na veliko razglašali; strelovod je bil pač mnogo bolj obetaven.

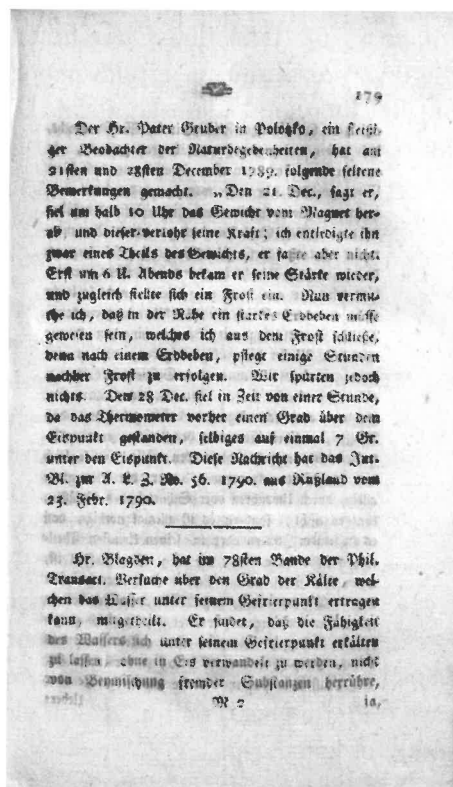
Spremembe zemeljskega magnetizma so zanimale tudi Gruberja. Preučeval je zemljevide zemeljskega magnetnega polja Američana Johna Chur-

chmana (1753–1805) [5]. Churchman je kot ruski akademik veliko objavljajl v Sankt Peterburgu in je tako neposredno vplival na Gruberjeve meritve v Polocku, kjer so akademsko glasilo iz prestolnice seveda podrobno prebirali. Churchman je podatke o variacijah kompasa na različnih točkah Zemlje vrisal v zemljevid in sestavil atlas magnetnih deklinacij. Oba načrta je opremil z razlago in ju objavil v Filadelfiji leta 1790 in v Londonu štiri leta pozneje; rabila naj bi boljši orientaciji na morju.

Raziskovanje sprememb magnetizma Zemlje je bilo v Gruberjevem času pomembno zaradi povezave z določanjem zemljepisne lege med plovbo na odprtem morju. Gruber je v svojem glasilu, ki ga je izdajal v Polocku, in v znameniti reviji Johanna Heinricha Voigta (1751–1823) objavil poročilo o meritvah magnetizma, potresa in temperature [4]. Voigt je v letih 1786 do 1799 je urejal *Magazin für das Neueste aus der Physik und Naturgeschichte*, ki ga je utemeljil Ludwig Christian Lichtenberg (1742–1799). Izdal je snopiče od 6 do 12, kjer je med drugim objavil številne razprave Gruberjevega nasprotnika Baltazarja Hacqueta. Od leta 1797 do 1806 je Voigt v Jeni izdal dvanaest snopičev podobne revije z rahlo spremenjenim naslovom *Magazin für das Neueste Zustand der Naturkunde*. V njih je objavljajl razprave o matematiki, ognju, zraku, elektriki, magnetizmu, optiki, kometih in zgodovini koledarja.

Gruber je leta 1790 Voigtu poročal o svojih opazovanjih vpliva potresa na magnet v Polocku. Dne 21. 12. 1789 se je po pol deseti uri zjutraj začela zmanjševati sila magneta, ki je končno izgubil svojo moč; Gruber ga ni mogel ponovno niti delno namagnetiti. Komaj ob šesti uri zvečer je magnet znova pridobil magnetno silo. Istočasno je Gruber v prostoru, kjer je delal meritve, občutil mrz. Domneval je, da je moral biti v bližini močan potres; saj naj bi le-temu običajno naslednjo uro sledil mrz. Vendar o kakem potresu v bližini ni mogel najti nobenih uporabnih poročil. Podobno nihanje temperature se je ponovilo teden dni pozneje, ko je 28. 12. 1789 kazal termometer najprej celo uro eno stopinjo nad lediščem, nato pa naenkrat sedem stopinj pod lediščem.

Gruber je v drugih objavljenih razpravah uporabljal stopinje Francoza Renéja Antoineja Ferchaulta de Réaumurja (1683–1757), prvič opisane leta 1730, ki so jih uporabljali tudi Hacquet in drugi ljubljanski raziskovalci. Novejše stopinje Šveda Andersa Celsiusa (1701–1744) iz leta 1742 so prevladale v naših deželah šele pozneje. Med obema sistemoma merjenja temperature je veljala zveza: $0^{\circ}\text{R} = 0^{\circ}\text{C}$ in $1^{\circ}\text{R} = 1,25^{\circ}\text{C}$. Gruber ni poročal o napravi, s katero je izmeril silo magneta pred razmagnetenjem in po njem; verjetno



Slika 2. Naslovna stran revije (levo), v kateri je Voigt objavil Gruberjevo poročilo, in stran z Gruberjevim poročilom v reviji (desno) [4].

je uporabil torzijsko nihalo, s katerim se je nekaj let prej v Parizu proslavil Charles Augustin de Coulomb (1736–1806).

Gruberjev sodobnik baron Alexander Humboldt (1769–1859) je prvi na sistematičen način raziskal povezave med potresi in magneti. Na svojih popotovanjih se je ukvarjal s spremembami inklinacije kompasa, da bi z ustreznimi zemljevidi, ki jih je vedno znova dopolnjeval, lažje določil zemljepisni položaj ladje. 4. 11. 1799 je potres v južnoameriškem mestu Cumani vplival na magnetno iglo. Pred prihodom v mesto je Humboldt na velikem kompasu Jean-Charlesa viteza Borde (1733–1799) izmeril povprečno inklinacijo $43,65^\circ$. Tri dni po potresu je nameril le še $42,75^\circ$; vendar ni opazil popolnega razmagnetjenja, o kakršnem je poročal Gruber. Naslednje leto se je znova vrnil v Cumani in to pot nameril inklinacijo $42,80^\circ$, skoraj toliko kot pri zadnji meritvi; medtem pa je magnetna sila ostala nespremenjena. Igla kompasa je nihala 229-krat na minuto, medtem ko je v Parizu nihala

celo 245-krat in v Madridu 240-krat. Podobne meritve je opravil skupaj z Gay-Lussacom še leta 1805 in 1806 v Milanu, Franciji, Švici in Nemčiji. Leta 1805 je pri Vezuvu opazoval spreminjanje magnetne sile zaradi bližine vroče lave.

Humboldt se je več kot Gruber ukvarjal s fizikalnim ozadjem pojava. Domneval je, da bi sunek potresa lahko v bližini epicentra spremenil položaje molekul železa, kobalta in niklja v zemeljski notranjosti in s tem vplival na lokalne magnetne lastnosti. Utegnil bi celo zamenjati pola magnetov, kot je trdil Franklin v enem od svojih pisem. Šlavni göttingenski fizik Georg Christoph Lichtenberg je Humboldt priporočal o možnih spremembah magnetnih osi Zemlje med velikimi katastrofami v preteklosti. Hkrati je Francoz René Just Haüy (1743–1822) dokazal, da toplota zmanjšuje moč magnetov, kar je potrjevalo Gruberjeve meritve.

Tako Gruber kot Humboldt sta menila, da potresi, vulkani in drugi podzemni pojavi iz velikih globin lahko vplivajo na magnetizem, ki ga opazujemo na površju Zemlje; vendar sta pogosto prišla do protislovnih ugotovitev. Tako se denimo Humboldt ni posrečilo izmeriti nenadnih sprememb magnetizma med potresi v Kordiljerah, v Quitu in ob obalah Peruja [6].

O vplivih potresov na magnetizem vemo danes precej več kot v Gruberjevih časih, čeprav še zdaleč ne vsega. Potrese spremljajo variacije magnetnega polja Zemlje ultranizkih frekvenc, ki jih seizmologi merijo že desetletja. Z njimi povezani elektromagnetni valovi lahko povzročijo lokalne, včasih le začasne spremembe magnetizma oddaljenih magnetov, ki jih je verjetno opazil Gruber.

LITERATURA

- [1] M. Inglot, *La Compagnia di Gesù nell'impero Russo (1772–1820) e la sua parte nella restaurazione generale della Compagnia*, Editrice Pontificia Università Gregoriana, Rim 1997, str. 98–99, 256, 287.
- [2] M. Inglot, *Gabriel Gruber, S. J. (1740–1805): Nel bicentario della sua elezione a Generale della Compagnia di Gesù*, Archivum Historicum Societatis Iesu **71**, 142 (2002), str. 357.
- [3] J. Poplatek, J. Paszenda, *Ślownik Jezuitów artystów*, Wydawnictwo Apostolstwa Modlitwy, Krakov 1972, str. 120.
- [4] G. Gruber, *Gruber in Polosko*, Mag. Neueste Phys. Naturgesch. **13**, 7. zvezek, 1. del (1790), str. 179.
- [5] T. Gruber, *Ueber Churchman's System magnetischer Abweichungen*, Abhandlungen der Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften und Künste, 1786.
- [6] F. W. H. A. Humboldt, *Relation historique du Voyage aux Régions équinoxiales du Nouveau Continent*, Paris 1814–1825, ponatis: Brockhaus, Stuttgart 1970, 1. del: str. 102, 256, 259, 513–517, 2. del: str. 4, 13, 27.

INTERPOLACIJSKE METODE ZA REŠEVANJE NELINEARNE ENAČBE

JOŽE PETRIŠIČ

Fakulteta za strojništvo
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 65H05

V članku navajamo nekaj razredov iteracijskih formul za približno računanje korena nelinearne enačbe $f(x) = 0$.

INTERPOLATION METHODS FOR THE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATION

In the article we present a few classes of iterative formulas for approximate computation of a root of a nonlinear equation $f(x) = 0$.

1. Uvod

Nelinearne enačbe

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

so redko analitično rešljive. Zato je numerično računanje korenov nelinearne enačbe (1) ena temeljnih in najstarejših nalog, ki jih obravnava klasična numerična analiza [9]. Običajno priredimo enačbi (1) funkcijo $y = f(x)$ in iščemo numerični približek ničle realne funkcije f realnega argumenta, računamo torej tako število $\alpha \in \mathbb{R}$, da je $f(\alpha) = 0$. Predpostavimo, da je funkcija f zvezna in dovoljkrat zvezno odvedljiva in da je v okolici ničle $f'(x) \neq 0$. Metode za računanje numeričnega približka ničle funkcije so navadno iterativne.

Poglavje o reševanju nelinearnih enačb je obvezni del učbenikov numerične analize ali numeričnih metod. V vseh so opisane bisekcijska metoda, navadna iteracija, tangentna metoda in sekantna metoda. Obsežnejša dela iz numerične matematike v okviru uporabne matematike navajajo še Mullerjevo metodo, Aitkenovo pospešitev konvergence pri navadni iteraciji oziroma Steffensenovo metodo [3, 6, 7]. V zbirkah računalniških programov s področja numeričnih metod pa računajo približek korena enačbe pogosto po Dekker-Brentovi metodi [6]. Avtorja je vspodbudilo k pisanju tega prispevka dejstvo, da je znanih veliko zanimivih numeričnih metod za reševanje nelinearne enačbe, ki pa so redko omenjene [3, 8, 2]. V članku bomo pokazali, kako je mogoče izpeljati več iteracijskih metod s pomočjo interpolacijskih

polinomov, ki imajo hitro konvergenco na račun komplicirane formule za računanje boljšega približka.

Pri iteracijskih metodah za numerično reševanje nelinearne enačbe generiramo takšno zaporedje

$$x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, \quad (2)$$

da zanj velja

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \alpha. \quad (3)$$

Konvergenco iteracije opišemo z naslednjo definicijo:

Definicija 1. Zaporedje x_i , ki ga izračunamo z numerično metodo, je konvergentno k α z redom p , če obstaja pozitivna konstanta C , da velja

$$\frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|^p} \leq C \quad (4)$$

za vsak $i \geq i_0$ in je i_0 primerno veliko celo število. Tedaj pravimo, da je metoda reda p , $p \geq 1$. Če je $p = 1$, govorimo o linearni konvergenци, v tem primeru mora biti $C < 1$. Če je $p > 1$, je konvergenca zaporedja superlinearna. Če pa je $p = 2$, pravimo, da metoda kvadratično konvergira.

Newtonova metoda je kvadratično konvergentna, konvergenca sekantne metode pa je superlinearna z redom $p = 1.62$. Pri iteracijskih formulah bomo navedli red, ki ga bralec večinoma najde izpeljanega v monografiji [8] o reševanju nelinearnih enačb.

Zaporedje (2) računamo s pomočjo iteracijske formule (IF), ki ima obliko

$$x_{i+1} = \Phi(x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}; x_{i-k-1}, \dots, x_{i-n}), \quad (5)$$

kjer računamo novo informacijo pri $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-k}$, pri $x_{i-k-1}, \dots, x_{i-n}$ pa uporabimo informacijo, ki smo jo izračunali na prejšnjih korakih. Zato imenujemo IF (5) večtočkovno IF s spominom. Tangentna metoda spada v razred enotočkovnih IF brez spomina, sekantna metoda pa v razred enotočkovnih IF z enim spominom. IF s spominom lahko uporabimo šele, ko imamo izračunanih vsaj prvih $n - k$ približkov.

IF tipa (5) je povezana z enačbo (1). V njej nastopajo funkcijske vrednosti in vrednosti odvodov. Če lahko zanemarimo čas izračuna same formule, je njen izračun odvisen od števila funkcijskih vrednosti in odvodov, ki jih moramo izračunati na vsakem koraku. Če je le mogoče, uporabimo že izračunane vrednosti s prejšnjih korakov.

Definicija 2. Število vseh funkcijskih vrednosti in vseh odvodov, ki jih moramo na vsakem koraku iteracije izračunati na novo, bomo označili z d in imenovali zahtevnost IF.

Tangentna metoda ima zahtevnost 2, sekantna pa 1.

Numerična metoda za reševanje enačbe (1) bo tem boljša, čim manj funkcijskih vrednosti ali odvodov bo treba izračunati za dosego predpisane natančnosti korena.

Definicija 3. Kvocient med redom IF p in zahtevnostjo d bomo označili z E in imenovali učinkovitost IF.

Učinkovitost IF je primerna mera za porabo računalniškega časa. Če IF visokega reda zahteva veliko izračunov funkcijskih vrednosti ali njenih odvodov, je lahko časovno potratnejša od IF nizkega reda z majhno zahtevnostjo. Tangentna metoda ima učinkovitost $E = 1$, pri sekantni metodi pa je učinkovitost $E = 1.62$.

Za enotočkovne IF $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ veljajo naslednje lastnosti:

Lastnost 1. Naj bo $\Phi(x)$ odvedljiva funkcija z zveznim p -tim odvodom v okolici korena α . Označimo $e_i = x_i - \alpha$. Potem je IF reda p natanko tedaj, ko je

$$\Phi(\alpha) = \alpha; \quad \Phi^{(j)}(\alpha) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p-1; \quad \Phi^{(p)}(\alpha) \neq 0$$

in velja

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^p} = \frac{\Phi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

O tem se lahko prepričamo, če razvijemo Φ v Taylorjevo vrsto okoli $x = \alpha$ in dobimo

$$x_{i+1} = \Phi(x_i) = \alpha + \sum_{j=1}^{p-1} \frac{\Phi^{(j)}(\alpha)}{j!} (x_i - \alpha)^j + \frac{\Phi^{(p)}(\eta)}{p!} (x_i - \alpha)^p$$

za neki η med x_i in α . Iz lastnosti IF neposredno sledi

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_{i+1} - \alpha}{(x_i - \alpha)^p} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Phi^{(p)}(\eta)}{p!} = \frac{\Phi^{(p)}(\alpha)}{p!}.$$

Konvergenca zaporedja približkov h korenu bo tem hitrejša, čim manjša bo vrednost $\frac{\Phi^{(p)}(\alpha)}{p!}$.

Lastnost 2. Naj ima IF $\Phi_1(x)$ red p_1 in IF $\Phi_2(x)$ red p_2 . Potem je IF, ki jo dobimo s komponiranjem $\Phi_2(\Phi_1(x))$, reda $p_1 p_2$.

Če komponiramo tangentno metodo samo s seboj, dobimo IF četrtega reda, ki ima zahtevnost štiri in zato učinkovitost 1.

Lastnost 3. Učinkovitost poljubne IF reda p je kvečjemu 1, $E \leq 1$. Obstaja IF poljubnega reda p z učinkovitostjo $E = 1$. Takšna IF je vedno eksplicitno odvisna od najmanj prvih $p - 1$ odvodov funkcije f .

Zgornja lastnost se pogosto imenuje osnovni izrek o enotočkovni IF. Učinkovitejše ($E > 1$) IF so lahko le IF s spominom, to je takšne, ki uporabijo informacijo, ki smo jo pridobili v prejšnjem koraku.

2. Newtonova oblika interpolacijskega polinoma

Naj bo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dovoljkrat zvezno odvedljiva funkcija, o kateri poznamo samo nekaj funkcijskih vrednosti $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$, kjer so x_i vse med seboj različne vrednosti. Iščemo polinom $P_n(x)$ stopnje n , ki naj bo takšen, da velja

$$P_n(x_i) = f(x_i).$$

Pravimo mu interpolacijski polinom. Za približek ničle funkcije $f(x)$ bomo vzeli ničlo interpolacijskega polinoma.

Interpolacijski polinom iščemo s pomočjo Newtonovega nastavka

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + c_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Koeficienti c_k so enolično določeni s točkami (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, k$ in velja

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k], \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Izraz

$$f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] = \frac{f[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}] - f[x_{i_0}, x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}]}{[x_{i_k} - x_{i_0}]}$$

imenujemo k -ta deljena diferenca, ki ustreza točkam $(x_{i_0}, f_{i_0}), \dots, (x_{i_k}, f_{i_k})$.

Na primer

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1] &= \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}, \quad f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}, \\ f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}, \dots \end{aligned}$$

kjer je $f[x_i] = f_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$

Interpolacijski polinom lahko konstruiramo tudi tedaj, ko imamo v vsaki interpolacijski točki (x_i, f_i) , $i = 0, 1, \dots, n$ predpisanih še prvih m_i odvodov $f_i^{(1)}, \dots, f_i^{(m_i)}$.

Premislek opremo na definicijo odvoda. Izberimo sosednji točki (x_i, f_i) in (x_{i+1}, f_{i+1}) , $x_{i+1} = x_i + h$, in izvedimo limitni proces

$$f[x_i, x_i] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f[x_i + h] - f[x_i]}{x_i + h - x_i} = f'(x_i).$$

Podobno je l -ta deljena diferenca, ko gredo vsi $x_{i+1}, \dots, x_{i+l}$ proti x_i , enaka

$$f[x_i, \dots, x_i] = \frac{1}{l!} f^{(l)}(x_i).$$

Zato lahko postopek za računanje koeficientov Newtonovega interpolacijskega polinoma (NIP) za primer, ko imamo v i -ti interpolacijski točki (x_i, f_i) predpisanih še prvih m_i odvodov $f_i^{(1)}, \dots, f_i^{(m_i)}$, razširimo takole: Vsako točko upoštevamo pri računanju deljenih diferenc natanko $(m_i + 1)$ -krat. Če dobimo za r -to deljeno diferenco, $r \leq m_i$, ki izhaja iz teh $m_i + 1$ točk, nedoločen izraz, ga nadomestimo z $\frac{1}{r!} f^{(r)}(x_i)$. Sicer ostane postopek računanja koeficientov NIP nespremenjen. Dobimo interpolacijski polinom stopnje $N = m_0 + m_1 + \dots + m_n + n$. Včasih imenujejo pravkar opisani postopek Hermit-Birkoffova interpolacija. Za interpolacijsko napako velja ocena

$$f(x) - P_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} \Omega_{N+1}(x),$$

kjer je $\Omega_{N+1}(x) = (x - x_0)^{m_0+1} (x - x_1)^{m_1+1} \dots (x - x_n)^{m_n+1}$ in $\min\{x, x_i\} < \xi < \max\{x, x_i\}$.

Izberimo $m_0 = 2$ in $m_1 = 1$. Koeficiente NIP računamo po računski shemi, podani v tabeli 1.

x_0	$f_0 = c_0$	$f'_0 = c_1$	$\frac{1}{2}f''_0 = c_2$	$f[x_0, x_0, x_0, x_1] = c_3$	$f[x_0, x_0, x_0, x_1, x_1] = c_4$
x_0	f_0	f'_0	$f[x_0, x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$	
x_0	f_0	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_1]$		
x_1	f_1	f'_1			
x_1	f_1				

Tabela 1. Računanje koeficientov NIP pri Hermit-Birkoffovi interpolaciji

Interpolacijski polinom je

$$P_4(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + c_4(x - x_0)^3(x - x_1).$$

Očitno so interpolacijski pogoji izpolnjeni: $P_4(x_0) = f(x_0)$, $P'_4(x_0) = f'(x_0)$, $P''_4(x_0) = f''(x_0)$, $P_4(x_1) = f(x_1)$, $P'_4(x_1) = f'(x_1)$.

3. Generiranje iteracijskih formul

Predpostavimo, da smo izračunali $n + 1$ približkov ničle, x_k , $k = i, i - 1, \dots, i - n$. Za vsak približek x_k smo izračunali funkcijsko vrednost in m_k zaporednih odvodov. Novi približek x_{i+1} lahko izračunamo tako, da položimo skozi točke $(x_k, f(x_k))$, $k = i, i - 1, \dots, i - n$, interpolacijski polinom, ki ima za vsak x_k vsaj m_k odvodov enakih odvodom funkcije f . Nato izračunamo ničlo interpolacijskega polinoma, ki je približek x_{i+1} ničle funkcije f .

Interpolacijski polinom bomo konstruirali v obliki NIP tako, da upoštevamo vse izračunane približke ničle, $n = i$. Ker imamo pri x_k poleg funkcijske vrednosti znanih še m_k odvodov $f^{(l)}(x_k) = f_k^{(l)}$, $l = 1, \dots, m_k$, je treba v računsko shemo za računanje koeficientov NIP zapisati funkcijsko vrednost $f_k = f(x_k)$ $(m_k + 1)$ -krat. Ko računamo elemente računske sheme in bi morali deliti z nič, deljenja ne izvedemo, ampak postavimo na ustrezno mesto s primernim faktorjem pomnožen odvod primernege reda. Del modificirane računske sheme je dan v tabeli 2. Število vrstic je $\mu = m_0 + \dots + m_i + i + 1$ in $\kappa = m_0 + \dots + m_{k-1} + k + 1$.

x_0	$f_0 = f_{0,0}$	$f'_0 = f_{0,1}$	$\frac{1}{2}f''_0 = f_{0,2}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_0	$f_0 = f_{1,0}$	$f'_0 = f_{1,1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_0	$f_0 = f_{2,0}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	$f_k = f_{\kappa,0}$	$f'_k = f_{\kappa,1}$	$\frac{1}{2}f''_k = f_{\kappa,2}$	$\dots$	$\frac{1}{m_k!}f_k^{(m_k)} = f_{\kappa,m_k}$	$\dots$
x_k	$f_k = f_{\kappa+1,0}$	$f'_k = f_{\kappa+1,1}$	$\frac{1}{2}f''_k = f_{\kappa+1,2}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	$f_k = f_{\kappa+m_k,0}$	$f_{\kappa+m_k,1}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\dots$	$\dots$	$f_{\mu-1,1}$				
x_i	$y_i = f_{\mu,0}$					

Tabela 2. Računanje koeficientov NIP s predpisanimi odvodi v interpolacijskih točkah

Če izračunamo linearni NIP ($n = 0$, $m_0 = 1$), lahko izpeljemo tangentno metodo. Z linearnim NIP ($n = 1$, $m_0 = m_1 = 0$) dobimo sekantno metodo. Od manj znanih metod lahko izpeljemo Mullerjevo metodo [8, 3], ($n = 2$, $m_0 = m_1 = m_2 = 0$), kjer pa že naletimo na težave. Kvadratni polinom ima namreč dva korena, ki sta celo lahko kompleksna. Mullerjeva metoda ima red $p = 1.84$. Na vsakem koraku moramo izračunati na novo eno funkcijsko vrednost, zato ima učinkovitost $E = 1.84$.

Ker hitro naletimo na NIP visoke stopnje, je predlagana metoda računanja novega približka x_{i+1} ničle funkcije f širše neuporabna. Ničle NIP moramo računati iterativno in povrh so lahko kompleksne. Polinom ima lahko veliko realnih ničel. Katero bomo izbrali za naslednji približek ničle?

Uporabimo idejo inverzne interpolacije. Teoretično lahko iz zveze $y = f(x)$ izrazimo x in dobimo enakovredno zvezo $x = F(y)$, kjer smo s F označili inverzno funkcijo k funkciji f . Očitno je $\alpha = F(0)$. Zato lahko dobimo naslednji približek ničle x_{i+1} kot vrednost NIP za inverzno funkcijo $F(y)$ pri $y = 0$. Tabelo funkcije F lahko dobimo tako, da upoštevamo, da je y_k argument in x_k vrednost inverzne funkcije F . Na srečo se l -ti odvod inverzne funkcije F analitično izraža s prvimi l odvodi funkcije f . Formule za prve tri odvode inverzne funkcije so:

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad F''(y) = -\frac{f''(x)}{f'(x)^3}, \quad F'''(y) = \frac{3f''(x)^2 - f'(x)f'''(x)}{f'(x)^5}. \quad (6)$$

Izrazi za višje odvode inverzne funkcije so nekoliko bolj komplicirani.

Če imamo danih m_k , $k = 0, \dots, i$, odvodov funkcije f , lahko dobimo računsko shemo za računanje koeficientov NIP tabelirane inverzne funkcije (y_k, x_k) , $k = 0, \dots, i$ tako, da v računski shemi (tabela 2) zamenjamo prvi in drugi stolpec, odvode $f^{(l)}$ pa zamenjamo z odvodi inverzne funkcije $F^{(l)}$, ki jih izračunamo po formulah (6).

4. Enotočkovne iteracijske formule brez spomina

Enotočkovno IF brez spomina dobimo tako, da uporabimo računsko shemo iz tabele 1 in postavimo $i = 0$. Na vsakem koraku iteracije izračunamo funkcijsko vrednost in m odvodov. Koeficiente NIP izračunamo po računski shemi v tabeli 3. Dobimo interpolacijski polinom

$$P_m(y) = x_i + (y - y_i)F'(y_i) + \frac{1}{2}(y - y_i)^2 F''(y_i) + \frac{1}{6}(y - y_i)^3 F'''(y_i) + \dots \quad (7)$$

Če uporabimo Taylorjevo formulo, vidimo, da je

$$F(y) = P_m(y) + \frac{1}{(m+1)!} F^{(m+1)}(\eta)(y - y_i)^{m+1}, \quad y < \eta < y_i, \quad (8)$$

in ker je $\alpha = F(0)$, je boljši približek korena $x_{i+1} = P_m(0)$ in $y_i = f(x_i)$, velja

$$\alpha - x_{i+1} = \frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)!} F^{(m+1)}(\eta) f(x_i)^{m+1}, \quad 0 < \eta < f(x_i). \quad (9)$$

Interpolacijske metode za reševanje nelinearne enačbe

y_i	$x_i = f_{0,0}$	$F'_i = f_{0,1}$	$\frac{1}{2}F''_i = f_{0,2}$	$\frac{1}{6}F'''_i = f_{0,3}$	$\dots$
y_i	$x_i = f_{1,0}$	$F'_i = f_{1,1}$	$\frac{1}{2}F''_i = f_{1,2}$	$\dots$	
y_i	$x_i = f_{2,0}$	$F'_i = f_{2,1}$	$\dots$		
y_i	$x_i = f_{3,0}$	$\dots$			
$\dots$	$\dots$				

Tabela 3. Računanje koeficientov NIP za enotočkovno IF brez spomina

Če upoštevamo formule (6), dobimo v primeru linearne interpolacije iteracijsko formulo tangentne metode

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \quad (10)$$

Če izberemo kvadratno interpolacijo, dobimo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{f(x_i)^2 f''(x_i)}{2f'(x_i)^3}. \quad (11)$$

Iteracijska formula (11) je reda $p = 3$.

Če upoštevamo, da je blizu ničle $\frac{f(x_i)f''(x_i)}{2f'(x_i)^2}$ majhna vrednost, dobimo iz zgornje formule znano Halleyjevo IF

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i) - \frac{f''(x_i)f(x_i)}{2f'(x_i)}}. \quad (12)$$

Končno lahko zapišemo še IF četrtega reda

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} - \frac{f(x_i)^2 f''(x_i)}{2f'(x_i)^3} - \frac{3f(x_i)^3 f''(x)^2 - f(x_i)^3 f'(x) f'''(x)}{6f'(x)^5}. \quad (13)$$

Če upoštevamo zahtevnost zgornjih IF, vidimo, da je njihova učinkovitost 1.

Kot vidimo, lahko vedno izpeljemo enotočkovno IF poljubnega reda, vendar je njena učinkovitost kvečjemu 1. Enotočkovna IF reda p namreč vedno vsebuje vsaj $p-1$ odvodov. Ker je učinkovitost enotočkovnih IF kvečjemu 1, jih nima smisla komponirati med seboj, saj lahko dobimo še manj učinkovite IF.

5. Enotočkovne iteracijske formule s spominom

V prejšnjem razdelku smo ugotovili, da med enotočkovnimi IF ne moremo najti zelo učinkovitih. Pričakujemo lahko, da bodo IF s spominom bolj učinkovite, saj lahko poleg informacij pri približku x_i uporabimo že znane

informacije pri $x_{i-1}, x_{i-2}, \dots, x_{i-n}$. Kako izpeljemo IF s spominom, smo opisali v tretjem razdelku. Izbiramo lahko število točk n , ki jih upoštevamo v IF, $n \geq 1$. Za vsak približek x_{i-k} , $k = 0, \dots, n$ si lahko izberemo še število odvodov m_k , ki jih upoštevamo v IF.

Izberimo najbolj preprost primer $n = 1$, $m_0 = 0$, $m_1 = 0$. Inverzna interpolacija

$$\begin{array}{c|c|c} y_i & x_i = f_{0,0} & f_{0,1} \\ \hline y_{i-1} & x_{i-1} = f_{1,0} & \end{array}$$

nam da linearni interpolacijski polinom

$$P(y) = x_i + (y - y_i) \frac{x_{i-1} - x_i}{y_{i-1} - y_i}. \quad (14)$$

Ker je $x_{i+1} = P(0)$, nam da linearna inverzna interpolacija sekantno metodo,

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_{i-1} - x_i}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}, \quad (15)$$

ki ima red konvergence 1.62 in učinkovitost $E = \frac{p}{m_0+1} = 1.62$.

Tritočkovno IF dobimo pri $n = 2$, $m_0 = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = 0$. Koeficiente interpolacijskega polinoma inverzne funkcije dobimo takole:

$$\begin{array}{c|c|c|c} y_i & x_i = f_{0,0} & f_{0,1} & f_{0,2} \\ \hline y_{i-1} & x_{i-1} = f_{1,0} & f_{1,1} & \\ y_{i-2} & x_{i-2} = f_{2,0} & & \end{array}$$

in IF je

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)f_{0,1} + f(x_i)f(x_{i-1})f_{0,2}, \quad (16)$$

ki ima red 1.84, zahtevnost 1 in zato učinkovitost 1.84.

Nesmiselno bi bilo, da bi spreminjali zahtevnost IF med njeno uporabo. Zato predpostavimo, da moramo na vsakem koraku iteracije izračunati funkcijsko vrednost $f(x_i)$ in m odvodov funkcije f pri x_i . Zahtevnost iteracijske formule je na vsakem koraku $d = m + 1$. Nov približek naj bo vrednost interpolacijskega polinoma $P_{n,d}(0)$, ki je položen skozi vseh $n + 1$ že izračunanih približkov $(y_i = f(x_i), x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ in ima v vsaki točki $(f(x_i), x_i)$ m zaporednih odvodov enakih kot inverzna funkcija $x = F(y)$. IF ima torej obliko

$$x_{i+1} = P_{n,d}(0). \quad (17)$$

Ker je $\alpha = F(0)$, sledi neposredno iz interpolacijske napake

$$\alpha - x_{i+1} = \frac{(-1)^r}{(r)!} F^{(r)}(\eta) \prod_{i=0}^n f(x_i)^{m+1}, \quad 0 < \eta < f(x_i), \quad (18)$$

kjer je $r = d(n + 1)$ število informacij, ki vstopa v IF (17). Desno stran lahko ocenimo in sledi:

Lastnost 4. Naj bodo vsi približki korena v zadosti majhni okolici Ω korena α in naj bosta na tej okolici prvi odvod funkcije $f'(x) \neq 0$ in r -ti odvod inverzne funkcije zvezen. Naj bo $P_{n,d}$ interpolacijski polinom za $x = F(y) = f^{-1}(y)$ v točkah $y_i, y_{i-1}, \dots, y_{i-n}$ in naj ima v teh točkah prvih $d - 1$ odvodov enakih kot f^{-1} . Če sta $(f^{-1})'$ in $F^{(r)}$ primerno omejena, je novi približek v isti okolici Ω in $(x_i - \alpha) \rightarrow 0$. Iteracijska formula (17) je reda p . Red p je pozitivni koren enačbe [8]

$$t^{n+1} - d \sum_{j=0}^n t^j = 0. \quad (19)$$

Po Descartesovem pravilu ima enačba (19) en sam pozitivni realni koren p in ga je mogoče oceniti takole: $d < p < d + 1$. IF (15) sekantne metode je s spominom, $n = 1$, v kateri ne nastopa odvod, $d = 1$. Če izberemo dvotočkovno IF s spominom, $n = 1$, in pri vsakem približku izračunamo funkcijsko vrednost in odvod, $d = 2$, je njen red pozitivni koren enačbe $t^2 - 2t - 2 = 0$, torej $p = 1 + \sqrt{3} \approx 2.73$, in učinkovitost takšne IF je $E \approx 1.37$. Formule (6) omogočajo računanje z IF s spominom zahtevnosti do $d = 4$. Izberimo tritočkovno IF, $n = 2$ in $d = 4$. Če izračunamo pozitivni koren enačbe $t^3 - 4(t^2 + t + 1) = 0$, dobimo red $p \approx 4.97$ in učinkovitost $E = 1.24$. Z večanjem spomina se učinkovitost IF zmanjšuje. Če upoštevamo še kompleksnost IF z veliko spomina in ocenimo, da potrebujemo za njen izračun vsaj toliko računskih operacij kot za eno funkcijsko vrednost, pade učinkovitost IF pod 1.

6. Večtočkovne iteracijske formule

Za izpeljavo večtočkovnih iteracijskih formul imamo več metod. Pokazali bomo postopek, ki je podoben izpeljavi formul metod Runge-Kutta za numerično reševanje diferencialnih enačb. Predpostavimo, da imamo znan približek rešitve x_i . V okolici približka x_i lahko razvijemo funkcijo $f(x)$ v Taylorjevo vrsto. Novi približek je koren ustreznega Taylorjevega polinoma $P_n(x)$, za katerega velja $P_n^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i)$, $l = 0, 1, \dots, n$. Tako smo ravnali pri izpeljavi enotočkovne iteracijske formule. Sedaj pa namesto v obliki Taylorjevega polinoma iščemo interpolacijsko funkcijo z nastavkom

$$G(x) = f(x) - (x - x_i) \sum_{k=1}^m \alpha_k f'(x_i + \beta_k(x - x_i)) \quad (20)$$

in zahtevamo, da morajo biti izbrani koeficienti α_k in β_k , $k = 1, \dots, m$ tako, da bosta v točki x_i imela originalna funkcija $f(x)$ in interpolacijska $G(x)$ čim več enakih odvodov, $G^{(l)}(x_i) = f^{(l)}(x_i)$, $l = 1, \dots, n$. Z odvajanjem po x in vstavljanjem $x = x_i$ dobimo sistem enačb za koeficiente

$$l \sum_{k=1}^m \alpha_k \beta_k^{(l-1)} = 1, \quad l = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Če izberemo $m = n = 2$, $\beta_1 = 0$ in $\beta_2 = \frac{1}{2}$, sta $\alpha_1 = 0$ in $\alpha_2 = 1$ ter dobimo interpolacijsko funkcijo

$$G(x) = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i + \frac{1}{2}(x - x_i)). \quad (22)$$

Za boljši približek x_{i+1} izberemo ničlo interpolacijske funkcije, to je koren enačbe $0 = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i + \frac{1}{2}(x - x_i))$. Za x_{i+1} velja zveza

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i))}. \quad (23)$$

Če na desni v zgornji formuli ocenimo $x_{i+1} - x_i$ po tangentni metodi, dobimo večtočkovno iteracijsko formulo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i - \frac{1}{2} \frac{f(x_i)}{f'(x_i)})}. \quad (24)$$

Pokazati se da, da je tretjega reda [8]. Za njen izračun potrebujemo eno funkcijsko vrednost in dve vrednosti odvoda. Torej ima učinkovitost 1. Novi približek x_{i+1} je presečišče osi x in premice skozi točko $(x_i, f(x_i))$, ki ima smerni koeficient enak smernemu koeficientu tangente na funkcijo $y = f(x)$ pri $x_i - \frac{1}{2} \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Če pa izberemo $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, dobimo interpolacijsko funkcijo

$$G(x) = f(x_i) + \frac{1}{2}(x - x_i)(f'(x_i) + f'(x_i + (x - x_i))). \quad (25)$$

Če ravnamo podobno kot pri izpeljavi IF (24), dobimo IF oblike

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2f(x_i)}{f'(x_i) + f'(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)})}, \quad (26)$$

ki je posplošitev tangentne metode, tako da je odvod zamenjan s povprečjem odvodov pri x_i in pri $x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

Zgoraj izpeljane interpolacijske funkcije seveda veljajo tudi za inverzno funkcijo. Zapišimo zvezo (25) za inverzno funkcijo $x = F(y)$ in dobimo

$$G(y) = F(y_i) + \frac{1}{2}(y - y_i)(F'(y_i) + F'(y)). \quad (27)$$

Ker je $x_{i+1} = G(0)$, dobimo zvezo

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{2}f(x_i) \left(\frac{1}{f'(x_i)} + \frac{1}{f'(\alpha)} \right). \quad (28)$$

Če ocenimo $f'(\alpha)$ s $f' \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right)$, dobimo IF oblike

$$x_{i+1} = x_i - \frac{1}{2}f(x_i) \left(\frac{1}{f'(x_i)} + \frac{1}{f' \left(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right)} \right), \quad (29)$$

ki je zopet tretjega reda [8]. IF je mogoče geometrijsko interpretirati takole: Točka P naj razpolovi daljico s krajiščema $(x_i, f(x_i))$ in $(x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, 0)$. Novi približek x_{i+1} je presečišče osi x in premice skozi točko P , vzporedne s tangento na funkcijo $y = f(x)$ pri $x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$.

7. Brentova metoda

Izpeljali smo množico IF za reševanje nelinearne enačbe, ki so vse lokalno konvergentne in odprte. Če ni začetni približek zadosti blizu korena, lahko konvergirajo počasi ali celo divergirajo. Za praktično računanje mora biti numerična metoda globalno konvergentna in zaprta, to je takšna, da zaporedni približki ne morejo iz predpisanega intervala. Takšni metodi sta bisekcija in regula falsi. Uspešno so združene bisekcijska metoda, linearna (15) in kvadratna interpolacija (16) v Brentovi metodi. Metoda je tako robustna, da je vgrajena v večino programskih produktov za reševanje nelinearne enačbe. Je zaprta in linearno konvergentna, čeprav v praksi večinoma dosega kvadratno konvergenco. Razvijala jo je skupina matematikov van Wijngaarden, Dekker in drugi v poznih šestdesetih letih prejšnjega stoletja. Končno obliko ji je dal Brent v članku, objavljenem leta 1973 [1]. Namesto po formuli (16) izračuna novi približek po nekoliko predelanih, numerično stabilnejših formulah [6]. Začetna približka a in b moramo izbrati tako, da leži koren α v intervalu, ki je omejen z a in b , $f_a = f(a)$ in $f_b = f(b)$ ter mora biti $f_a f_b < 0$. Algoritem zahteva, da je b najboljši približek. Algoritem uvede še približek c in v vseh korakih mora biti koren vedno med b in c , biti mora $f(c)f(b) < 0$. Naj bo predpisana dopustna relativna napaka ε . Algoritem se začne tako, da postavi $c = b$, $f_c = f_b$ in nato se ponavljajo naslednji koraki:

1. Če je $f_b f_c > 0$, postavi $c = a$ in $f_c = f_a$.
2. Če je $|f_c| < |f_b|$, izvede zamenjavo $a = b$, $b = c$, $c = a$, $f_a = f_b$, $f_b = f_c$, $f_c = f_a$. Tako doseže, da je $|f_b| < |f_c|$ in hkrati sta a in c enaka.
3. Izračuna dopustno absolutno napako $\delta = 2\varepsilon \max\{|b|, 1\}$. Če je $|\frac{c-b}{2}| \leq \delta$ ali je $f_b = 0$, se iteracija prekine in algoritem vrne b kot približek korena.
4. Izračuna novi približek $x_b = \frac{c+b}{2}$ po bisekciji in x_i po linearni ali kvadratni inverzni interpolaciji.
 - (a) Če sta a in b različna, $|a - b| > \delta$, in je $|f_b| \leq |f_a|$, izračuna boljši približek z inverzno interpolacijo po naslednjih korakih, sicer nadaljuje na koraku 5.
 - i. Če sta a in c enaka, izračuna boljši približek x_i po sekantni metodi.
 - ii. Če so vsi trije tekoči približki a , b , c različni med seboj, izračuna boljši približek x_i po kvadratni inverzni interpolaciji.
 - (b) Če se x_i loči od b za manj, kot je dopustna napaka, je x_i zanesljivo v bližini korena izračunan ob pogoju superlinearne konvergence, zato upravičeno pričakuje koren v intervalu $\left[b, b + \delta \frac{|c-b|}{c-b}\right]$ in postavi $x_i = b + \delta \frac{|c-b|}{c-b}$.
 - (c) Če je približek x_i v intervalu $\left[b, \frac{3c+b}{4}\right]$, ga sprejme in postavi $x_b = x_i$, sicer ga zavrže.
5. Tekoči najboljši približek shrani v a , $a = b$, $f_a = f_b$ in novega shrani v b , $b = x_b$ in $f_b = f(x_b)$.

Če se algoritem prekine v l -ti iteraciji, vidimo, da je bilo treba izračunati $l + 1$ funkcijskih vrednosti.

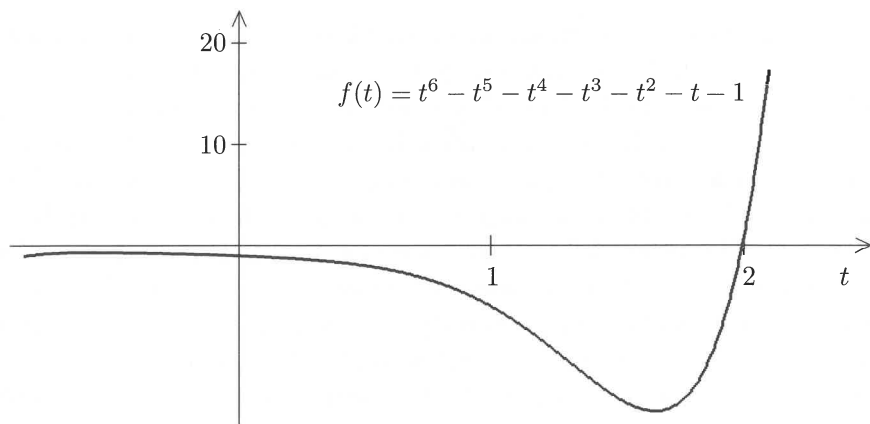
Brentova metoda je vedno konvergentna, navadno konvergira superlinearo. Bralec jo lahko najde lepo sprogramirano v znani zbirki računalniških programov [6]. Sicer pa jo uporabljajo za reševanje enačb komercialno dostopni paketi MATLAB, NUMERICAL RECIPES, IMSL, ...

8. Nekaj numeričnih poskusov

Če želimo izračunati red konvergence iteracijske metode za $n = 6$ in $d = 1$, enačba (19), moramo rešiti algebrasko enačbo

$$t^7 - t^6 - t^5 - t^4 - t^3 - t^2 - t - 1 = 0. \quad (30)$$

Koren je $p = 1.9919641966050$.



Slika 1. Graf polinoma v okolici ničle

Polinom na levi v enačbi (30) je lahko neugoden za uporabo iteracijskih metod. Če izhajamo iz znane ocene, da leži koren enačbe p med d in $d + 1$, torej med 1 in 2, vidimo, da je v tem intervalu tudi lokalni ekstrem polinoma, kar pomeni, da so vrednosti polinoma lahko pri novem približku večje od vrednosti polinoma pri prejšnjem približku, kar zavira konvergenco.

Definicija 4. Število vseh funkcijskih vrednosti in vseh odvodov, ki jih moramo izračunati, da bi izračunali koren na predpisano natančnost ϵ , bomo označili z D in imenovali število zahtevanih informacij. V naših testih smo izbrali $\epsilon = 10^{-15}$.

Enačbo (30) smo rešili po Brentovi metodi pri začetnih približkih $a = 1$ in $b = 2$. Za izračun korena p smo uporabili 9 funkcijskih vrednosti, $D = 9$. Pet približkov je bilo izračunanih po sekantni metodi in dva po kvadratni inverzni interpolaciji.

Če rešujemo isto enačbo po tangentni metodi (10) pri začetnem približku $x_0 = 1$, potrebujemo za doseg predpisane natančnosti 22 korakov. Koren izračunamo za ceno 22 funkcijskih vrednosti in prav toliko odvodov, torej $D = 44$. Če pa začnemo iteracijo z začetnim približkom $x_0 = 2$, izračunamo koren v petih korakih, $D = 10$, kar je primerljivo z Brentovo metodo.

Opozoriti želimo na korak 4.(a) Brentovega algoritma. Potek algoritma ni prav nič odvisen od metode, kako izračunamo približek x_i . Zato lahko x_i izračunamo po katerikoli metodi iz katerihkoli prejšnjih približkov ob upoštevanju funkcijskih vrednosti in odvodov. Enačbo (30) smo rešili po Brentovi metodi pri začetnih približkih $a = 1$ in $b = 2$ in v koraku 4.(a) uporabili tangentno metodo. Koren smo izračunali v petih korakih za ceno šest funk-

cijskih vrednosti in pet vrednosti odvodov. Če pa uporabimo na koraku 4.(a) samo sekantno metodo, ima algoritem število zahtevanih informacij $D = 12$.

Če rešujemo enačbo (30) po iteracijskih formulah (11) pri začetnem približku $x_0 = 1$, potrebujemo za izračun korena 16 korakov, $D = 48$, če pa izberemo začetni približek $x_0 = 2$, izračunamo koren v treh korakih, $D = 9$. Če pa jo vgradimo v Brentov algoritem, izračunamo koren tudi v treh korakih, $D = 11$. Halleyjeva IF (12) pri začetnem približku $x_0 = 1$ ima število zahtevanih informacij $D = 87$, sicer pa ima isto zahtevnost kot IF (11).

Če rešujemo enačbo (30) po iteracijskih formulah (13) pri začetnem približku $x_0 = 1$, potrebujemo za izračun korena 35 korakov, $D = 140$, če pa izberemo začetni približek $x_0 = 2$, izračunamo koren v treh korakih, $D = 12$. Če pa jo vgradimo v Brentov algoritem, izračunamo koren tudi v treh korakih, $D = 14$.

Če rešujemo enačbo (30) po iteracijskih formulah s spominom, na primer po sekantni metodi (15) pri začetnih približkih $x_0 = 1$ in $x_1 = 2$, potrebujemo za izračun korena p osem korakov, $D = 10$.

Rešimo enačbo (30) po IF s spominom (17), $d = 1$, $n = 1, 2, \dots$, kjer upoštevamo vse znane funkcijske vrednosti. Presenečeni ugotovimo, da pri začetnih približkih $x_0 = 1$ in $x_1 = 2$ metoda divergira. Če interval zožimo vsaj za 20 %, pa konvergira. Če jo vgradimo v Brentovo metodo, izračunamo koren po desetih korakih, $D = 12$.

Končno rešimo enačbo (30) še po dvotočkovni IF (24). Pri začetnem približku $x_0 = 1$ metoda zelo počasi konvergira. Koren izračunamo v osemtridesetih korakih, $D = 114$. Če pa izberemo $x_0 = 2$, dobimo koren v treh korakih, $D = 9$. Če jo vgradimo v Brentovo metodo, izračunamo koren po osmih korakih, $D = 26$.

LITERATURA

- [1] R. Brent, *Algorithms for Minimization Without Derivatives*, Prentice-Hall, Engelwood Cliffs, NJ, New York, 1973.
- [2] Z. Bohte, *Numerično reševanje nelinearnih enačb*, v Matematika-fizika, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1993.
- [3] G. Engeln-Müllges, *Numerik-Algorithmen*, 8. Auflage, VDI Verlag, 1996.
- [4] W. Gautschi, *Numerical Analysis*, Birkhäuser, 1997.
- [5] J. Petrišič, *Interpolacija*, Fakulteta za strojništvo, Ljubljana, 1999.
- [6] W. H. Press, *Numerical recipes in fortran*, Cambridge, University Press, 1992.
- [7] A. Quarteroni et al., *Numerical Mathematics*, Springer-Verlag, 2000.
- [8] J. F. Traub, *Iterative Methods for the solution of equations*, Prentice-Hall, 1964.
- [9] E. Zakrajšek, *Uvod v numerične metode*, v Matematični rokopisi, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 2000.

STROKOVNO SREČANJE IN OBČNI ZBOR DMFA SLOVENIJE

Kar se slabo začne, se navadno dobro konča, bi lahko rekli za letošnje srečanje. Začelo se je z izbiro kraja. Odločili smo se za Cerkno in upali, da bo vse v redu, saj nismo vedeli, koliko udeležencev bo prišlo. Vreme se je po obilnem deževju umirilo, cesta se je še popravljala, vendar se je do 12. novembra prijavilo za strokovno srečanje 150 udeležencev, za 4. konferenco fizikov, ki je prav tako potekala v petek, pa 140. Nekoliko nas je skrbelo glede zmogljivosti v hotelu, toda potem se je izkazalo, da obstajata še dva prostora in da se bo dalo z dobro voljo prebroditi tudi gnečo pri kosilu in večerji. Delavci v hotelu so se izkazali in vse je potekalo zelo umirjeno.

Predavanja in povzetki predavanj s strokovnega srečanja so bili objavljeni v Biltenu in tudi na domači strani društva. Naj naštejem le sodelujoče. V petek, 12. 11. 2004, so profesorji fizike prisluhnili: Jožku Battestinu, Borisu Khamu, Janu Makaroviču, Mariji Pavčnik, Gorazdu Planinšiču, Marijanu Prosénu, Nadi Razpet, Barbari Rovšek, Janezu Strnadu in Nataši Vaupotič ter Juretu Bajcu, ki je predstavil verižni eksperiment.

Matematikom so predavali: Stane Arh, Claudio Battelli, Maja Rakun Beber, Jana Draksler, Darjo Felda, Stanislav Južnič, Marija Kavkler, Jan Makarovič, Zlatan Magajna, Marko Razpet, Nada Razpet, Milena Strnad, Lucija Željko in Matjaž Željko.

Večer je popestril ponovni zagon verižnega eksperimenta, ki so ga sestavili študenti Fakultete za matematiko in fiziko ter Pedagoške fakultete v Ljubljani. Po napornem dnevu so se nekateri udeleženci po večerji še veselo zavrteli ob glasbi.

V soboto, 13. novembra, so udeleženci najprej pogledali posnetke verižnega eksperimenta in se seznanili z dejavnostmi v letu fizike 2005, nato smo še enkrat videli verižni eksperiment v živo in nadaljevali z vabljenima predavanjema dveh prejemnikov Zoisovih priznanj za leto 2003: Janeza Bonče in Tomaža Koširja.

Pred občnim zborom smo položili cvetje k spomeniku dr. Franca Močnika in nato pričeli z občnim zborom. Vodil ga je Anton Suhadolc, v delovnem predsedstvu pa so bili še: Andrej Likar, Stane Pirnat in zapisnikar Janez Krušič. Nova častna člana društva sta postala Peter Vencelj in Karel Šmigoc. Društvena priznanja pa so prejeli: Rajko Đudarić, Mirjana Sancin, Marko Razpet in Renato Vouk. Matjaž Željko je pripravil kratko

obvestilo o spremembah pravilnikov o tekmovanjih (objavljene so na domači strani DMFA). Novi predsednik društva je postal Zvonko Trontelj, predsednik nacionalnega komiteja za matematiko Tomaž Pisanski, dolgoletno delo Aleksandra Potočnika pa je prevzela Klavdija Mlinšek.

Zahvaljujem se vsem, ki so pomagali pri organizaciji in izvedbi strokovnega srečanja in občnega zbora. Posebna zahvala gre tudi Petru Legiši in Aleksandru Potočniku za dolgoletno uspešno delo v UO društva.

Nada Razpet

NOVA ČASTNA ČLANA DMFA

Nova častna člana društva matematikov fizikov in astronomov Slovenije sta postala: prof. dr. Peter Vencelj in mag. Karel Šmigoc.

Peter Vencelj se je rodil 28. maja 1939 v Stražišču pri Kranju. Po maturi leta 1958 se je vpisal na tehnično fiziko na Univerzi v Ljubljani in diplomiral leta 1963. Po odsluženi vojaški obveznosti je bil pet let zaposlen v razvojnih oddelkih Iskre. Leta 1969 je bil izvoljen v naziv asistenta za mehaniko na naravoslovno-matematičnem oddelku Fakultete za naravoslovje in tehnologijo. Magistriral je s področja fizike snovi, doktoriral na področju mehanike tekočin in turbinskih strojev. Po osmih letih asistentstva je bil izvoljen najprej za predavatelja, nato za docenta, kasneje za izrednega in nato za rednega profesorja za mehaniko in tehnično matematiko. Organiziral in vodil je podiplomski študij iz mehanike na Oddelku za matematiko in mehaniko Univerze v Ljubljani.

Opravljal je vrsto dolžnosti na oddelku. Na FNT je bil več let predsednik izvršilnega odbora, na Univerzi pa član več odborov univerzitetnega sveta. Tako se je neprestano srečaval s problemi visokega šolstva v Sloveniji in se boril za drugačen položaj univerze v slovenski družbi. Kot predsednik odbora za usmerjeno izobraževanje si je prizadeval, v okviru možnega, za omilitev reformskih in političnih posledic na slovensko šolstvo.

Pedagoško je delal na področju mehanike, na dodiplomskem in podiplomskem študiju. Raziskoval je probleme nihanj v elastičnih sistemih, dinamiko tekočin in turbulenco. Zanimali so ga interdisciplinarni problemi od športa do ekologije. Na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko je bil več let predstojnik oddelka za mehaniko, sodeloval je s Turboinštitutom, pa tudi z nekaterimi delovnimi organizacijami, kot so Litostroj, Sava, Iskra.

Ob demokratičnih spremembah leta 1990 je prevzel v prvi slovenski vladi nalogo ministra za šolstvo in šport. Leta 1993 je postal državni sekretar v Ministrstvu za zunanje zadeve, pristojen za Slovence zunaj slovenske države.

Ves čas opravljanja državnih dolžnosti je opravljal tudi učiteljske naloge na FNT. Upokožil se je marca 1998.

Član DMFA Slovenije je že od vpisa na študij fizike v letu 1958. Ko je prišel na Univerzo leta 1968, se je pogosto ukvarjal z reševanjem različnih težav in problemov društva, še posebno materialne in finančne narave. Pri opravljanju različnih javnih dolžnosti je iskal možnosti za rešitve društvenih težav in potreb. Med drugim je bil vrsto let eden od skrbnikov Plemljevega doma na Bledu, kjer mu je uspelo, v dogovoru z ministrstvom za šolstvo, temeljito prenoviti stavbo in vrt in urediti lastništvo tako, da je celotna imovina v lasti DMFA. Peter Vencelj ostaja član komisije za Plemljev dom še naprej.

Karel Šmigoc je po diplomu na Oddelku za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani jeseni 1966 začel poučevati matematiko in fiziko na Osnovni šoli Šmarje pri Jelšah in tam učil do upokojitve lani jeseni. Magistriral je leta 1981 v Zagrebu. Petnajst let je bil svetovalec za fiziko Zavoda Republike Slovenije za šolstvo. Leta 1979 je bil habilitiran za višjega predavatelja na Pedagoški fakulteti Univerze v Mariboru za predmet Začetno naravoslovje. Aktiven je v DMFA in GIREP-u (International Research Group for Physics Education). Objavil je večje število člankov v revijah Presek, Fizika v šoli, Acta Pharmaceutica in Periodicum biologorum.

Veliko in uspešno se je ukvarjal z nadarjenimi učenci. Pripravljal jih je na tekmovanja iz matematike, fizike in logike. Bil je mentor številnim skupinam učencev pri raziskovalnih nalogah. Skupaj s kolegi je organiziral veliko področnih tekmovanj. Med dobitniki zlatih Vegovih priznanj smo zadnjih 20 let vedno našli učence Karla Šmigoca. Ravno tako so bili njegovi učenci redno prejemniki srebrnih in zlatih Stefanovih priznanj. Vrsto let je delal tudi v komisijah za ocenjevanje matematičnih in fizikalnih raziskovalnih nalog celjskih srednjih šol. V reviji Presek ni samo objavljajl člankov, ves čas jo je tudi aktivno uporabljal pri pouku, zato v Šmarju nismo občutili upada naročnikov.

Kot svetovalec za fiziko je Karel Šmigoc s predavanji in demonstracijami poskusov delal pri študijskih skupinah učiteljev fizike za osnovne in srednje šole. V okviru projekta Tempus je izpeljal 15 delavnic (Zvok in glasba) in dva daljša seminarja. Pri projektu Eden je za učitelje osnovnih in srednjih šol vodil več pedagoških delavnic na temo Biomehanika človeškega telesa. Od leta 1998 je vodil projekt učiteljev fizike celjskega področja Moji uspešni poskusi.

Že od študentskih časov naprej je Karel Šmigoc aktiven član DMFA. Bil je med ustanovitelji celjske podružnice DMFA. Prejel je priznanje DMFA Slovenije za svoje delo z mladimi. Občina Šmarje pri Jelšah ga je nagradila

trikrat, leta 1999 je prejel nagrado Republike Slovenije za življenjsko delo v vzgoji in izobraževanju.

Karel Šmigoc je med sedanjimi in nekdanjimi učenci, kolegi učitelji in v širši javnosti cenjena in spoštovana osebnost. Nikoli ne graja ali kritizira, z lastnim zgledom spodbuja k aktivnosti. S svojim umirjenim vedenjem in skromnostjo je zgled mnogim profesorjem matematike in fizike.

Jožica Dolenšek, Peter Petek, Stane Pirnat in Nada Razpet

DRUŠTVENA PRIZNANJA ZA LETO 2004

Društvena priznanja za leto 2004 so prejeli: Rajko Đudarić, Mirjana Sancin, dr. Marko Razpet in Renato Vouk.

Rajko Đudarić poučuje na III. OŠ v Celju že 14 let. Pred tem je 12 let delal kot vzgojitelj v dijaškem domu. Nekaj let je poučeval samo matematiko, kasneje tudi fiziko in računalništvo in ima licenco za poučevanje astronomije ter naziv svetovalec.

Vseskozi išče nove poti poučevanja. Načrtoval in izdelal je številne didaktične pripomočke, na primer učne domine, računalniški program za pisanje in oblikovanje interaktivnih nalog, zbirke grafoskopskih prosojnic.

Z njegovim prihodom na III. OŠ v Celju so se začela tudi redna šolska tekmovanja iz fizike, matematike in logike, kjer so z njegovo pomočjo in pomočjo njegovih kolegov učenci napredovali iz šolskih na regijska in državna tekmovanja. Pri večini regijskih tekmovanj je sodeloval tudi v tekmovalnih komisijah. Dvakrat je organiziral tudi regijsko tekmovanje za srebrno Stefanovo priznanje.

Vsa leta dela na OŠ je aktivno sodeloval pri mladinskem raziskovalnem delu. Bil je mentor pri 19 raziskovalnih nalogah, večinoma iz matematike in naravoslovja.

Zaveda se, da je treba znanje dopolnjevati, zato ga pogosto srečujemo na različnih seminarjih, kjer rad sprejema nova spoznanja in jih tudi posreduje drugim. Zadnji dve leti je uspešno vodil tudi študijsko skupino za fiziko.

Mirjana Sancin, upokojena profesorica matematike, svetovalka, je 35 let poučevala matematiko in fiziko na srednjih in visokih šolah na Obali. Pri svojem delu je vseskozi iskala nove rešitve za izboljšavo pouka matematike in fizike v srednjih in visokih šolah, imela vzorne predstavitve za mlajše kolege in bila mentorica kar nekaj kolegom začetnikom.

Po končanem študiju na Prirodoslovno-matematični fakulteti v Zagrebu je dobila zaposlitev na Gimnaziji v Piranu. Po pridobljeni habilitaciji leta 1980 je predavala vrsto let na tedanji Višji pomorski šoli v Portorožu ter v

Kopru na oddelkih Strojne fakultete in Ekonomske fakultete iz Maribora. Zavedala se je, kako pomembni sta pri poučevanju metodika in didaktika in znala je vzpodbujati samostojnost in ustvarjalnost.

Tako kot pri poučevanju je bila zavzeta tudi pri delu v DMFA – podružnici Koper, še posebej v začetnih letih. S svojim delom je vplivala na razvoj, popularizacijo ter ugled matematike in fizike na obalno-kraškem območju.

Organizirala je razna predavanja, nastope, številna tekmovanja iz matematike in fizike, bila članica ocenjevalnih komisij in organizatorica 9. zveznega tekmovanja mladih matematikov v Portorožu.

Skoraj 10 let po prihodu na Obalo je bila aktivna članica odbora kopsrke podružnice, še vedno pa rada pomaga z nasveti in predlogi.

Marko Razpet je že kot študent postal član DMFA Slovenije in bil kasneje vrsto let član upravnega odbora. Od leta 1987 se je redno udeleževal strokovnih srečanj in občnih zborov društva, pri katerem je leta 1990 začel aktivno sodelovati.

Sodeluje v uredniškem odboru Preseka, za to revijo tudi veliko piše. Njegovi članki o šahovskem kralju so bili med najbolj brani. Več prispevkov je objavil tudi v Obzorniku za matematiko in fiziko. Najbolj osebno in čustveno pa opisuje življenje in delo Mihaela Peternela, prvega ravnatelja ljubljanske realke. Razpet je bil eden od pobudnikov, da se Peternelu odkrije v njegovem rojstnem kraju spominska plošča. To se je ob 195-letnici njegovega rojstva leta 2003 tudi zgodilo.

Že vrsto let sodeluje na poletnih šolah mladih matematikov, pa tudi fizikov, na Bledu. Mladim je predstavil Fibonaccija in Descartesa, najraje pa jim je govoril o Fibonaccijevem zaporedju in zlatem rezu.

S svojimi prispevki sodeluje tudi na društvenih strokovnih srečanjih in pri stalnem strokovnem izobraževanju osnovnošolskih in srednješolskih profesorjev matematike. Za strokovno srečanje matematičnih pedagogov v Cerknem leta 1996 je pripravil prispevek o Francu Močniku. Navezava pristnih stikov s cerkljanskimi rojaki je prinesla tudi odkritje Močnikovega grba.

Posebej je njegova dejavnost vidna na področju vzgoje novih profesorjev matematike na Pedagoški fakulteti v Ljubljani, saj je bil v zadnjih 15 letih dela na tej ustanovi mentor študentom pri 85 diplomskih delih oz. nalogah in somentor pri 47 diplomskih delih. Dva njegova diplomanta sta prejela tudi fakultetno Prešernovo nagrado. Bil je mentor trem magistrantom izobraževalne smeri in somentor pri enem doktoratu. Podiplomskim študentom izobraževalne smeri matematike je dve leti tudi predaval in obenem napisal knjigi Umbralni račun in Ravninske krivulje.

V zadnjih letih se je posebej posvetil tudi proučevanju Vegovih del, zlasti o koledarju in balistiki.

Renato Vouk se je po končanem študiju na Fakulteti za strojništvo odločil za učiteljski poklic in se leta 1995 zaposlil na Srednji pomorski šoli v Portorožu, kjer še danes poučuje matematiko in fiziko. Ima naziv mentor.

Član DMFA Koper je že 11 let. Zadnja tri leta je predsednik DMFA Koper. Aktivno je sodeloval pri izdelavi spletne strani društva, razpisu štípendije za študij matematike in fizike, podpiranju mednarodnih projektov, vabljenju vseh članov k aktivnemu sodelovanju pri popularizaciji matematike in fizike za osnovne in srednje šole. Pomagal je pri organiziranju področnih in državnih tekmovanj, pripravi predavanj, nagrajevanju najboljših učencev in dijakov na državnih in mednarodnih tekmovanjih ali olimpijcev ter pri organizaciji občnega zbora DMFA Koper. S predlogi in pobudami sodeluje tudi na sejah upravnega odbora DMFA Slovenije.

Je tudi član uprave Primorske znanstvene fundacije.

Na podlagi predlogov pripravili:

Lucijana Kračun Berc in Nada Razpet

MATEMATIČNE NOVICE

Evropska matematična zveza (EMS) znova išče najboljše *članke, ki popularizirajo matematiko*, in sicer v dveh kategorijah. Prva zajema besedila, namenjena izobraženim laikom. Članek mora biti objavljen (ali sprejet v objavo) v kaki mednarodni ali specializirani reviji, rok za oddajo je 1. avgust. Druga kategorija so besedila, namenjena širši javnosti, objavljena ali sprejeta v objavo v dnevnem časopisju in podobno. Rok za oddajo je 1. januar 2006. Podrobnosti so na strežniku [1].

Knjiga *Introduction to Foliations and Lie Groupoids* [2], ki sta jo napisala Ieke Moerdijk in Janez Mrčun in jo je izdala Cambridge University Press, je dobila prijazno oceno v septembrski številki revije EMS Newsletter [3] in v reviji Bulletin of the American Mathematical Society [4], kjer ji je posvečeno kar sedem strani.

Pri isti ugledni založbi je izšla knjiga Patricka Doreiana, Vladimirja Batagelja in Anuške Ferligoj z naslovom *Generalized Blockmodeling* [5], najavljen pa je tudi izid knjige *Exploratory Network Analysis With Pajek*, ki so jo napisali Wouter De Nooy, Andrej Mrvar in Vladimir Batagelj.

Članek [6], ki so ga napisali Matej Brešar, Daniel Eremita in Tsai-Lien Wong, je bil v lanskem letu med desetimi najbolj iskanimi članki iz algebre na strežniku založbe Elsevier [7].

Ob vstopu desetih novih članic v Evropsko zvezo je skupina francoskih matematičnih društev izdala simpatično brošuro z naslovom *Maths Europe*. V njej so za vsako od petindvajsetih članic predstavili po enega znanega

matematika. Za Slovenijo je to Josip Plemelj in zapis o njem je brezhiben. Knjižica je krasen odsev francoske kulture in si jo boste lahko ogledali v ljubljanski Matematični knjižnici. V Franciji naj bi jo uporabljali pri matematičnih kvizih.

Naše društvo je sklenilo pogodbo o recipročnosti s *Španskim kraljevim matematičnim društvom – Real Sociedad Matemática Española (RSME)*. Pogodba omogoča članstvo v obeh organizacijah pod ugodnejšimi pogoji, izmenjevali pa si bomo tudi publikacije.

Pri recipročnosti z *Ameriškim matematičnim društvom (AMS)* je prišlo do spremembe. Nismo več upravičeni do izredno znižane članarine (se pravi, ne spadamo več v t. i. kategorijo S). Vsem našim članom AMS priporočam, da plačajo članarino v znesku 57 USD (t. i. *introductory rate*). Do tega smo upravičeni še v nadaljnjih štirih letih, nato pa lahko izkoristimo članarino po pogodbi o recipročnosti.

Od 19. do 23. septembra 2005 bo na Univerzi v Celovcu *Matematični kongres Avstrijskega in Nemškega matematičnega društva (ÖMG in DMV)* [8] z mednarodno udeležbo. Eden od plenarnih govornikov bo Peter Šemrl. Prijazni organizatorji (predsednik ÖMG Heinz W. Engl, rektor celovške univerze Winfried Müller in profesor Hermann Kautschitsch) so našemu društvu ponudili sodelovanje in upoštevali naše predloge. Tako bosta organizirana minisimpozija z naslovoma *Graph Theory in Geometry and Topology*, na katerih bodo sodelovali tudi naši matematiki.

Naslednji *Mednarodni matematični kongres* [9] bo leta 2006 v Madridu.

LITERATURA

- [1] *The European Mathematical Information Service*, <http://www.emis.de/>.
- [2] I. Moerdijk in J. Mrčun, *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [3] *EMS Newsletter*, <http://www.emis.de/newsletter/> (Newsletter No. 53, september 2004, str. 46).
- [4] L. Conlon, *Introduction to foliations and Lie groupoids*, by I. Moerdijk and J. Mrčun, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), str. 105–111, <http://www.ams.org/bull/2005-42-01/>.
- [5] P. Doreian, V. Batagelj in A. Ferligoj, *Generalized Blockmodeling*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.
- [6] M. Brešar, D. Eremita in Tsai-Lien Wong, *On commutators and derivations in rings*, J. Algebra **278** (2004), str. 704–724.
- [7] *Top Downloaded Articles in Algebra*, <http://www.extranet.elsevier.com/listman/math/algebra.html>.
- [8] *Mathematik 2005*, <http://oemg2005.uni-klu.ac.at/>.
- [9] *International Congress of Mathematicians MADRID 2006*, <http://www.icm2006.org/>.

Peter Legiša

OBZORNIK ZA MATEMATIKO I
LJUBLJANA, JANUAR 2006
 Letnik 52, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52

R 177/05



100002005, 1

COBI.S

ODPISANO

VSEBINA

Članki	Strani
Prve ocene velikosti molekul, Janez Strnad	2-6
Gruberjev magnet, Stanislav Južnič	7-11
Interpolacijske metode za reševanje nelinearne enačbe, Jože Petrišič .	12-26
 Vesti	
Leto 2005 – svetovno leto fizike, Zvonko Trontelj	1
Sončni mrk 2006, Mitja Rosina	6
Strokovno srečanje in občni zbor DMFA Slovenije, Nada Razpet	27-28
Nova častna člana DMFA, Jožica Dolensšek, Peter Petek, Stane Pirnat in Nada Razpet	28-30
Društvena priznanja za leto 2004, Lucijana Kračun Berc in Nada Razpet	30-32
Matematične novice, Peter Legiša	32-III

CONTENTS

Articles	Pages
First Estimates of Molecular Sizes, Janez Strnad	2-6
Gruber's Magnet, Stanislav Južnič	7-11
Interpolation Methods for the Solution of Nonlinear Equation, Jože Petrišič	12-26
 News	1-III

Na naslovnici je logotip svetovnega leta fizike 2005 in slika Alberta Einsteina, posneta okoli leta 1905. Informacije o aktivnostih v okviru svetovnega leta fizike v Sloveniji najdete na naslovu <http://www.fizika2005.net/>.