

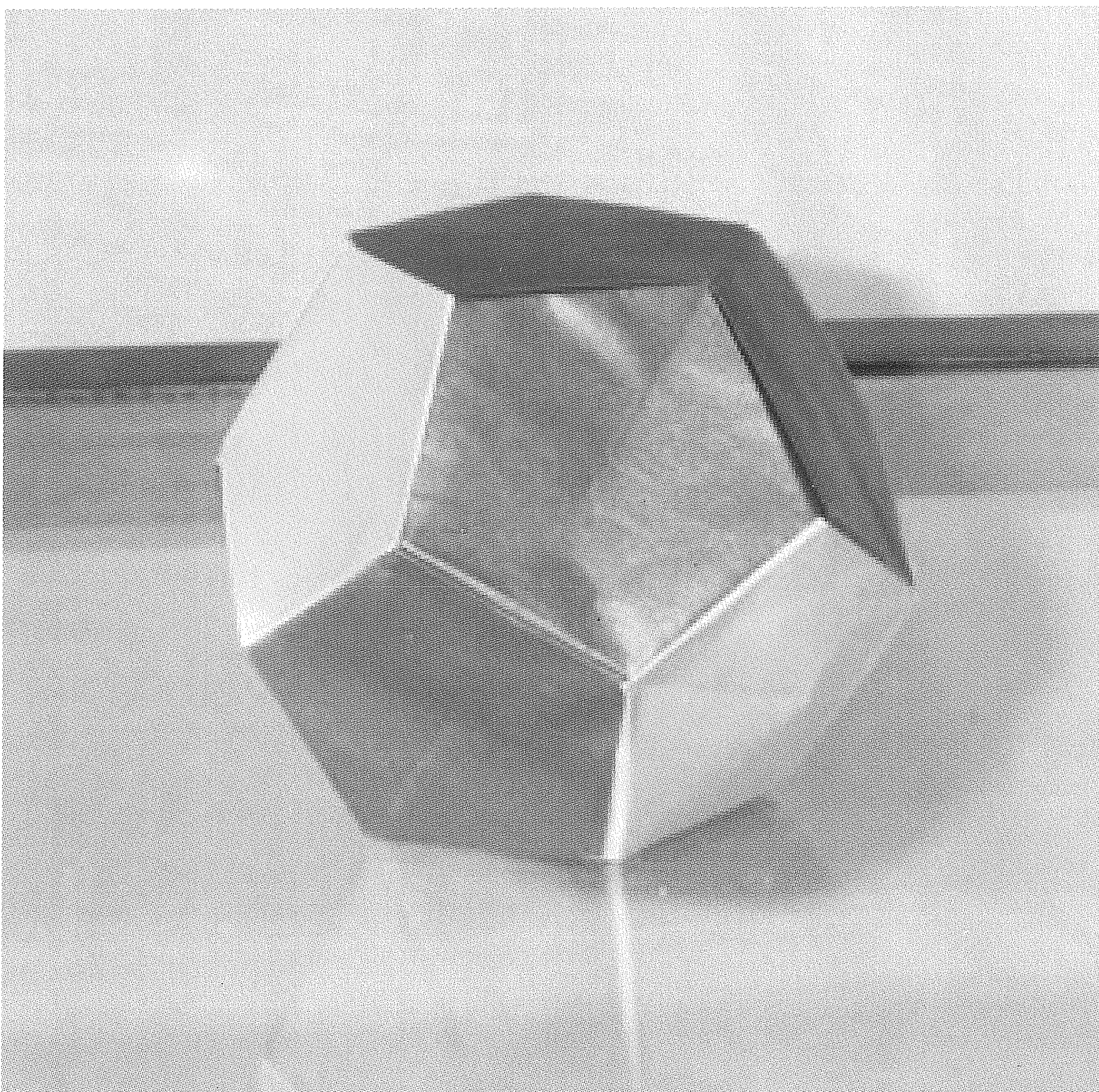
ODPISANO

2004

Letnik 51

6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana.
Telefon: (01) 4766 553, 4232 460, 2512 005. **Telefaks:** (01) 2517 281. **Elektronska pošta:** Zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** <http://zaloznistvo.dmfa.si/omf/> **Transakcijski račun:** 03100–1000018787. **Devizna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana. **SWIFT:** SKBASI2X. **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Irena Drevenšek Olenik (urednica za fiziko), Marko Zgonik, Nada Razpet (vesti), Pavle Saksida (nove knjige), Vladimir Bensa (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško stavila Monika Testen.
Natisnila Tiskarna RAZVEDRILO v nakladi 1450 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 5.000 SIT, za študente 2.500 SIT. Naročnina za ustanove je 8.000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane stane 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

© 2004 DMFA Slovenije – 1588

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželeno velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

USMERJANJE SPOROČIL V GRAFIH

JANEZ ŽEROVNIK

Fakulteta za strojništvo
Univerza v Mariboru

Math. Subj. Class. (2000): 05C15, 05C85, 05C90, 68R10

Teorija grafov je eno od področij matematike, ki je v zadnjih desetletjih med najbolj živahnimi. Nedvomno gre to v veliki meri tudi na račun široke uporabnosti. Tu si bomo ogledali uporabo pri modeliranju usmerjanja sporočil v komunikacijskih ali računalniških mrežah. Popolno usmerjanje v grafu je množica poti med vsemi pari vozlišč. Usmerjanje je optimalno, če so vse poti najkrajše. Že dolgo je znano, da v Cayleyjevih grafih vedno obstaja enakomerno optimalno popolno usmerjanje, nekaj časa pa je bila odprta domneva, da trditev velja tudi za po vozliščih tranzitivne grafe. Videli bomo, da je protiprimer za to domnevo graf dodekaedra.

ROUTING IN GRAPHS

Graph theory has been a very popular branch of mathematics in the last decades, in great part due to a large number of various applications. Here we give an example of application in computer and communication networks. Some basic notions and well known results related to message routing are sketched. A counterexample to the uniform shortest path routing conjecture for vertex-transitive graphs is explained.

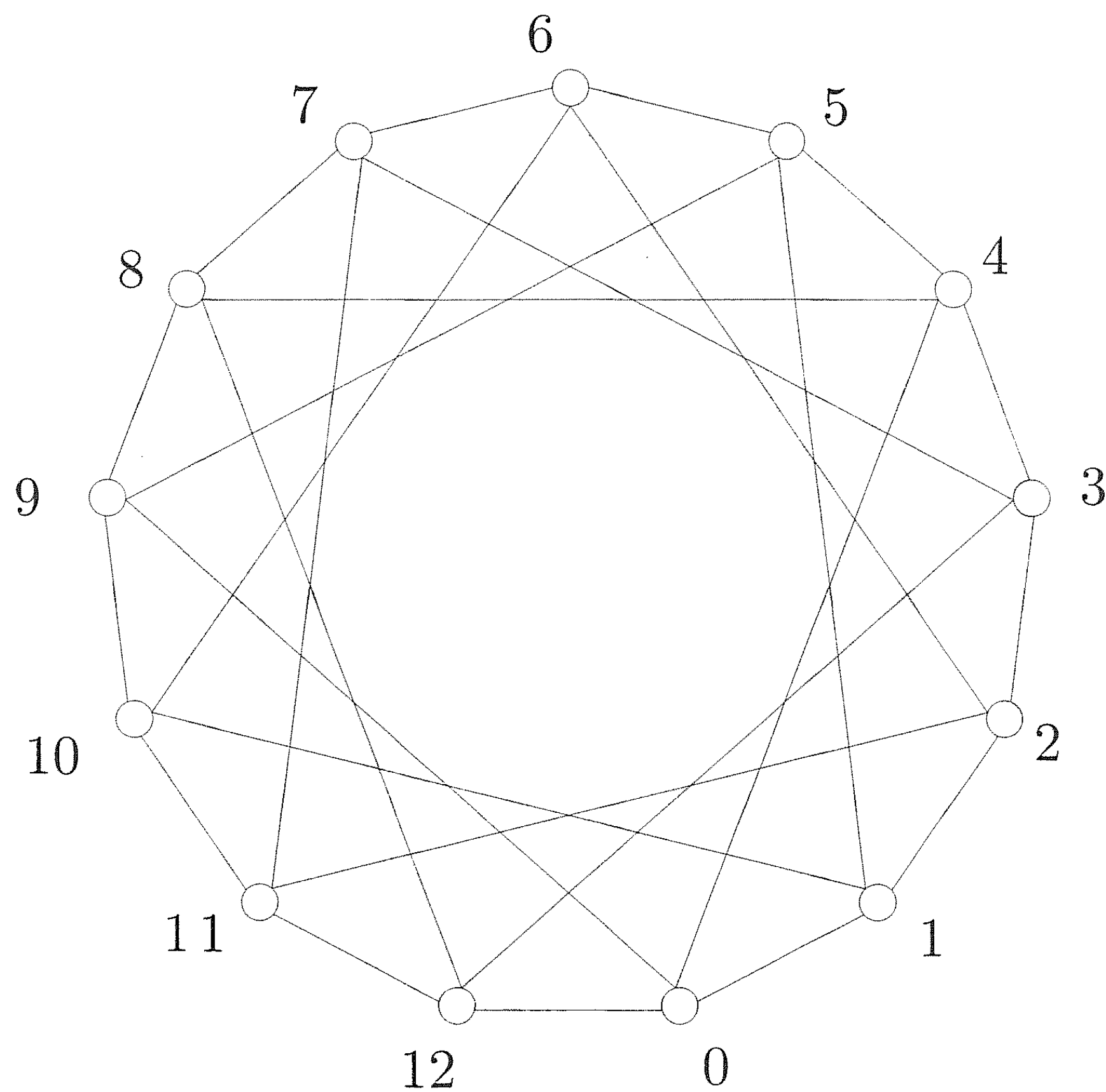
Teorija grafov sodi med najbolj živahna področja sodobne matematike, gotovo tudi zaradi aplikacij na mnogih področjih, na primer v računalništvu, operacijskih raziskavah, družboslovju in kemiji (veliko primerov najdemo v [8]). Tu bomo predstavili primer uporabe teorije grafov v računalniških in bolj splošno, v komunikacijskih mrežah.

Graf je kombinatorični objekt, določen z urejenim parom množic $G = (V, E)$. Elemente množice V imenujemo *vozlišča* (ali *točke*) grafa, elementi množice $E \subseteq V \times V$ pa so *povezave*. Vozlišči u in v sta *sosednji*, če sta povezani s povezavo. Formalno to zapišemo z $(u, v) \in E$, kadar se omejimo na enostavne neusmerjene grafe, pa ponavadi zapis poenostavimo v $uv \in E$.

Cayleyjevi grafi so grafi, ki jih dobimo z naslednjo konstrukcijo. Naj bo $\mathcal{G}$ grupa z enoto e in $S \subseteq \mathcal{G}$ množica elementov grupe, za katero velja $e \notin S$. Naj bo $\bar{S}$ minimalna množica z lastnostma $S \subseteq \bar{S}$ in $x \in \bar{S} \Rightarrow x^{-1} \in \bar{S}$. Cayleyjev graf, prirejen grupi $\mathcal{G}$ in množici S , je graf, katerega vozlišča so elementi grupe, vozlišči g in h pa sta povezani, kadar je $gh^{-1} \in \bar{S}$. Isti grupi lahko z izbiro različnih množic S priredimo različne Cayleyjeve grafe. Cayleyjev graf je povezan natanko tedaj, ko S generira grupo. Tako na

primer za krožne grafe velja, da so povezani natanko tedaj, ko je največji skupni delitelj množice $n \cup S$ enak 1.

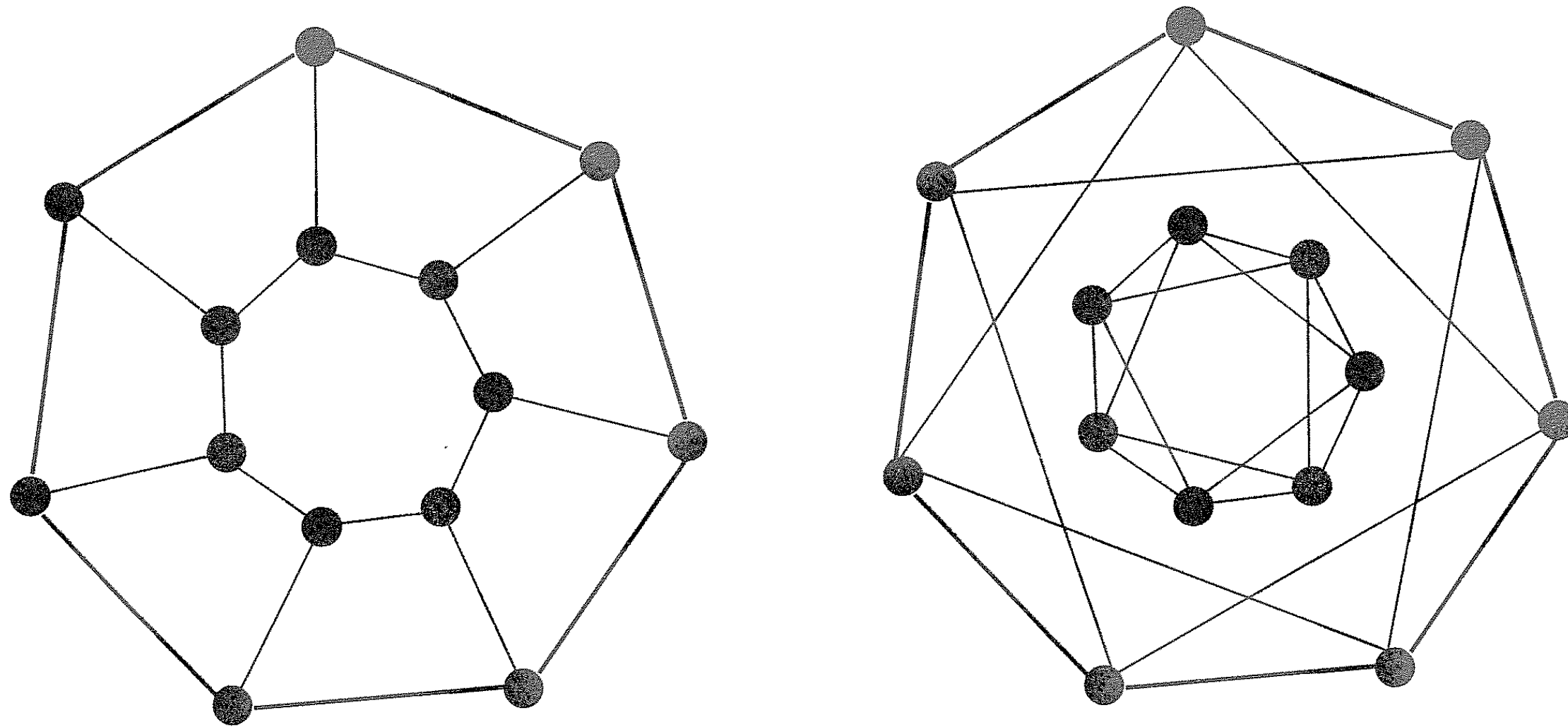
Oglejmo si dva primera. Ciklični grupi $\mathbb{Z}_{13}$, katere elementi so števila $0, 1, \dots, 12$, operacija pa seštevanje po modulu 13, in množici $S = \{1, 4\}$ prirejen Cayleyjev graf je graf na sliki 1, ki ga označimo z $G(13, \{1, 4\})$. Cayleyjeve grafe cikličnih grup imenujemo *krožni grafi*.



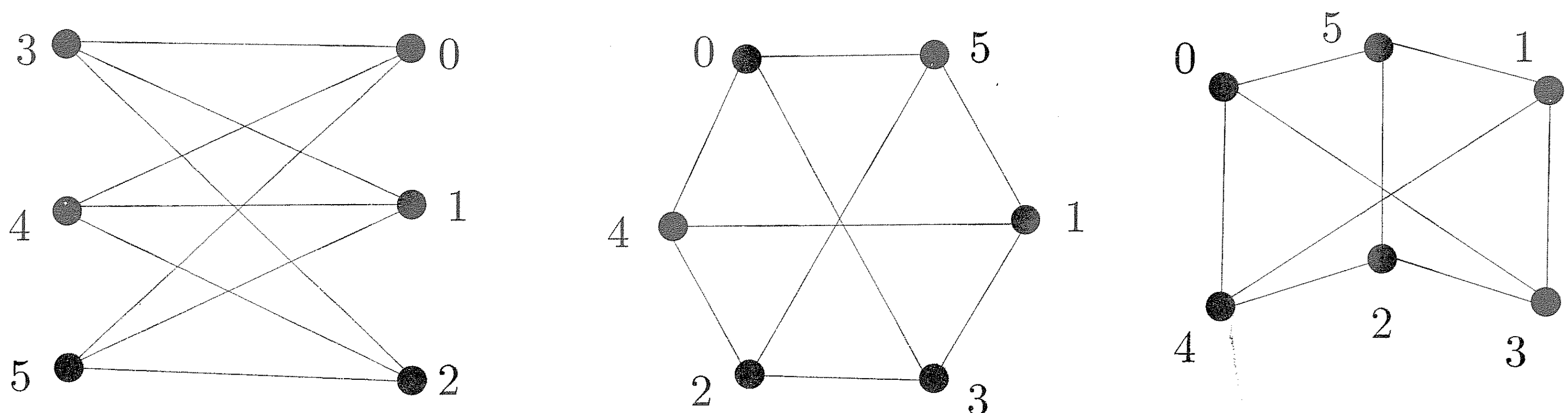
Slika 1. Krožni graf $G(13, \{1, 4\})$

Simetrije pravilnega n -kotnika so rotacije (za večkratnike kota $2\pi/n$) in zrcaljenja. Grupi simetrij rečemo diedrska grupa D_n . Diedrski grupi D_7 , kjer za množico S vzamemo zrcaljenje in rotacijo za kot $2\pi/7$, pripada Cayleyjev graf na sliki 2 levo, na desni pa je Cayleyjev graf, kjer sta v S rotaciji za kot $2\pi/7$ in za kot $4\pi/7$. V drugem primeru dobimo nepovezan Cayleyjev graf, saj rotaciji ne generirata grupe.

Bijektivno preslikavo med množicama vozlišč $V(G)$ in $V(H)$, ki ohranja sosednost in nesosednost, imenujemo *izomorfizem* grafov. (Bolj formalno: bijekcija f je izomorfizem, če velja: $uv \in E(G) \iff f(u)f(v) \in E(H)$.) Z $G \simeq H$ na kratko zapišemo, da sta grafa G in H izomorfna. Kadar v teoriji grafov ne ločimo med izomorfnimi grafi, rečemo, da obravnavamo neoznačene grafe. Ni težko videti, da so si grafi na sliki 3 paroma izomorfni. Ali drugače povedano, na sliki 3 so tri risbe istega (neoznačenega) grafa, ki ga imenujemo poln dvodelen graf $K_{3,3}$.

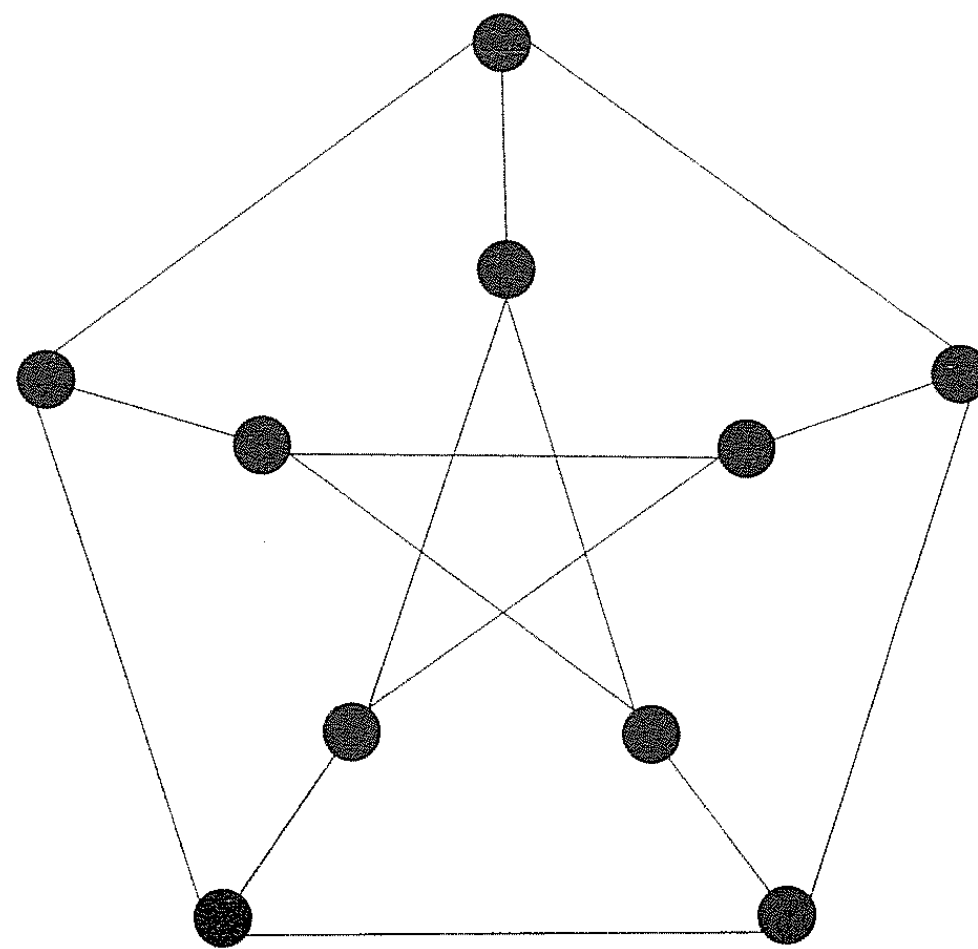

 Slika 2. Dva Cayleyjeva grafa diedrske grupe D_7

Automorfizem je izomorfizem grafa nase. Vozlišči sta si *podobni*, če obstaja avtomorfizem, ki eno preslika v drugo. Graf, v katerem so si vsa vozlišča paroma podobna, je *po vozliščih tranzitiven* (ali *po točkah tranzitiven*).


 Slika 3. Poln dvodelen graf $K_{3,3}$

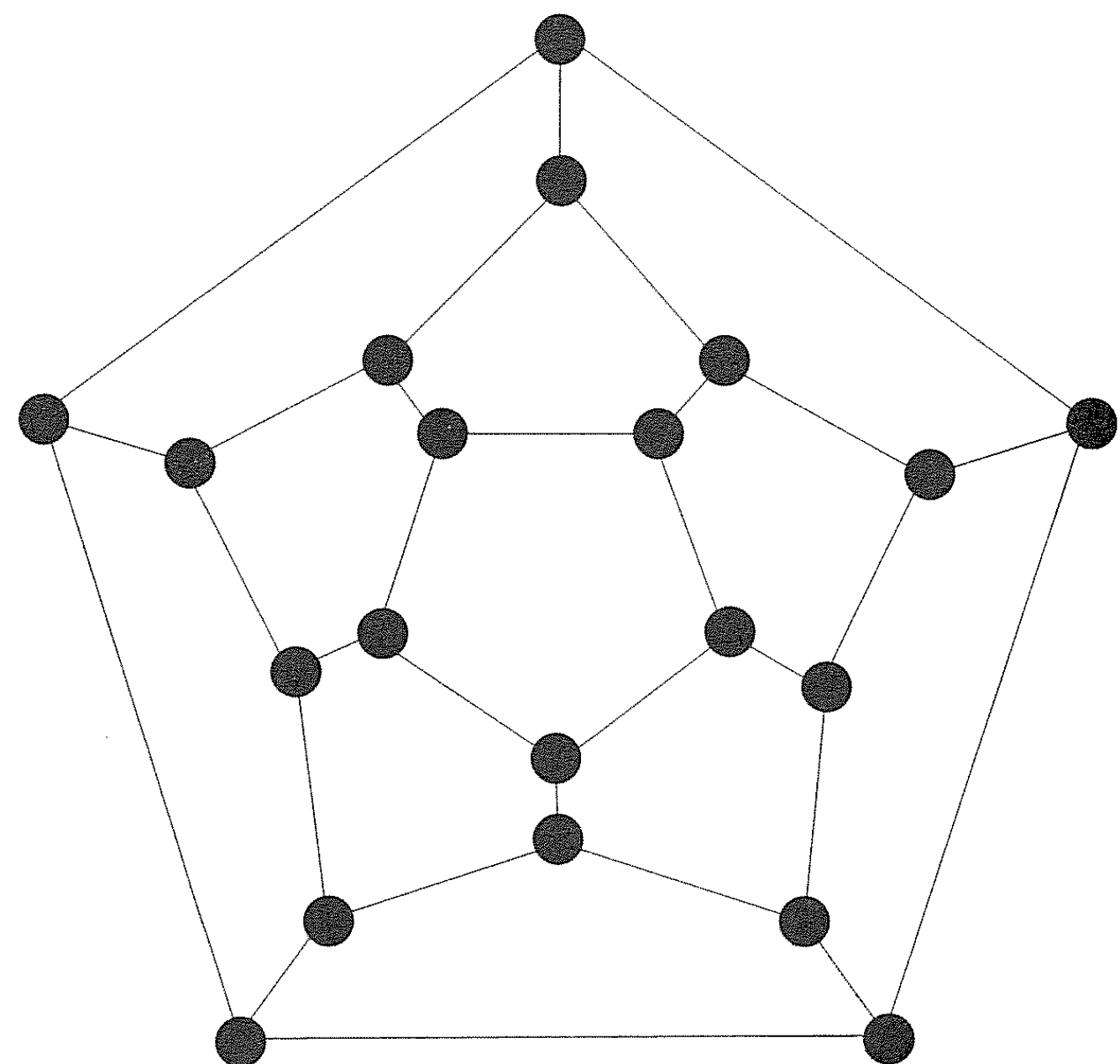
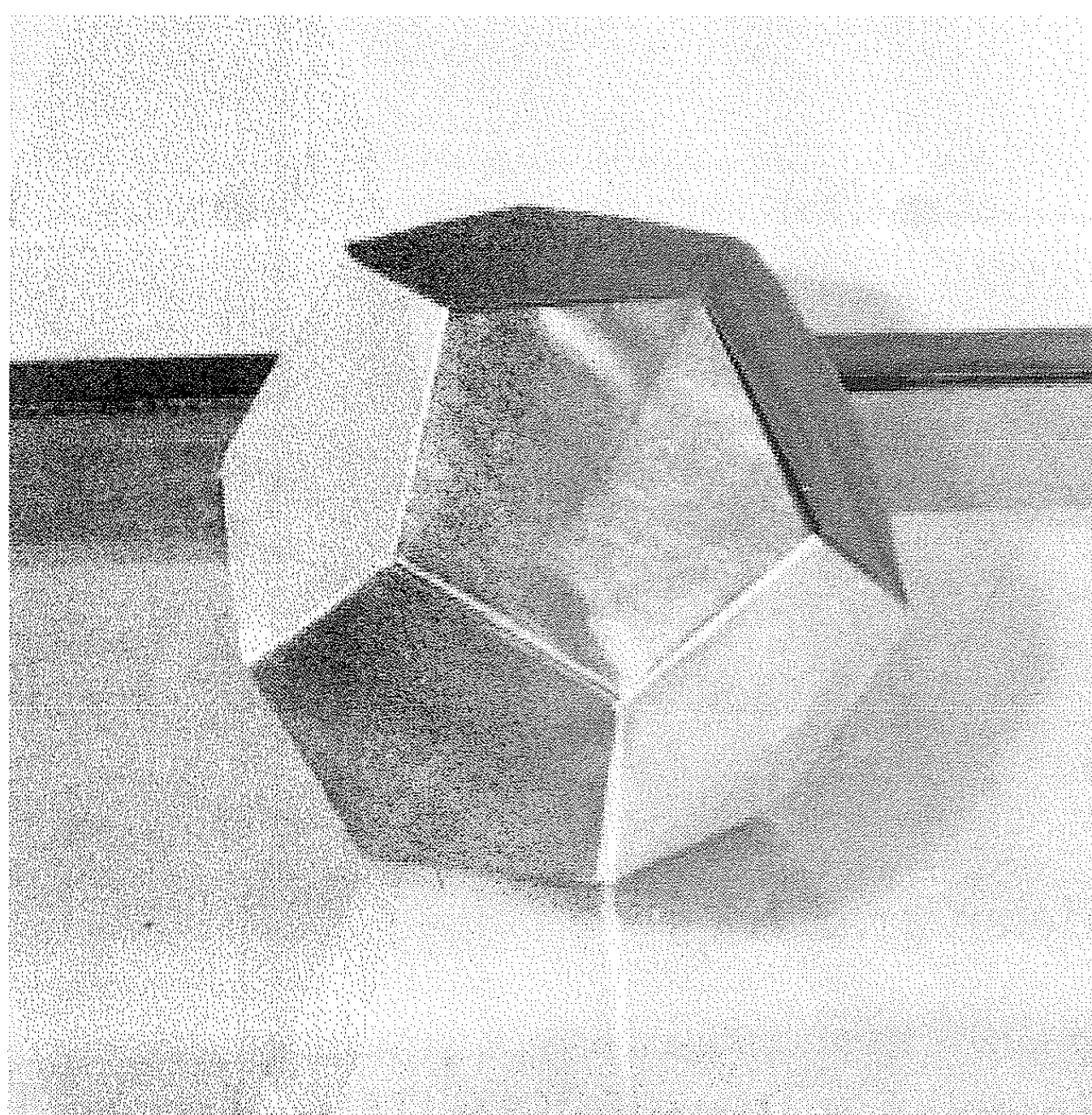
Posplošeni Petersenov graf $P(n, k)$ je graf z $2n$ vozlišči $V = \{u_i, v_i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ in povezavami $E = \{u_i v_i, u_i u_{i+1}, v_i v_{i+k} \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$, kjer smo s $+$ označili seštevanje po modulu n . $P(5, 2)$ je znani Petersenov graf, $P(10, 2)$ pa je graf dodekaedra. Graf dodekaedra dobimo, če projiciramo oglišča in robove pravilnega dodekaedra na ravnino spodnjega lica (glej sliko 5). Na sliki 7 je še malo drugačna risba grafa $P(10, 2)$, ki jo bomo uporabili kasneje.

Za primer pokažimo, da je Petersenov graf $P(5, 2)$ po vozliščih tranzitiven. Vzemimo risbo Petersenovega grafa na sliki 4. Če risbo zavrtimo za večkratnike kota $2\pi/5$, vidimo, da so si vsa vozlišča na zunanem ciklu podobna. Tudi notranja vozlišča so si paroma podobna. Podobnost zunanega vozlišča z notranjim preberemo s slike 6, kjer sta narisani dve risbi grafa, oznake vozlišč pa povedo, s katerim avtomorfizmom smo preslikali eno ko-

Slika 4. Petersenov graf $P(5, 2)$

pijo v drugo. Preslikava je avtomorfizem, torej so zunanja vozlišča podobna notranjim in Petersenov graf je po vozliščih tranzitiven.

Vsi Cayleyjevi grafi so po točkah tranzitivni, obratno pa ni res. Primera sta Petersenov graf in graf dodekaedra.



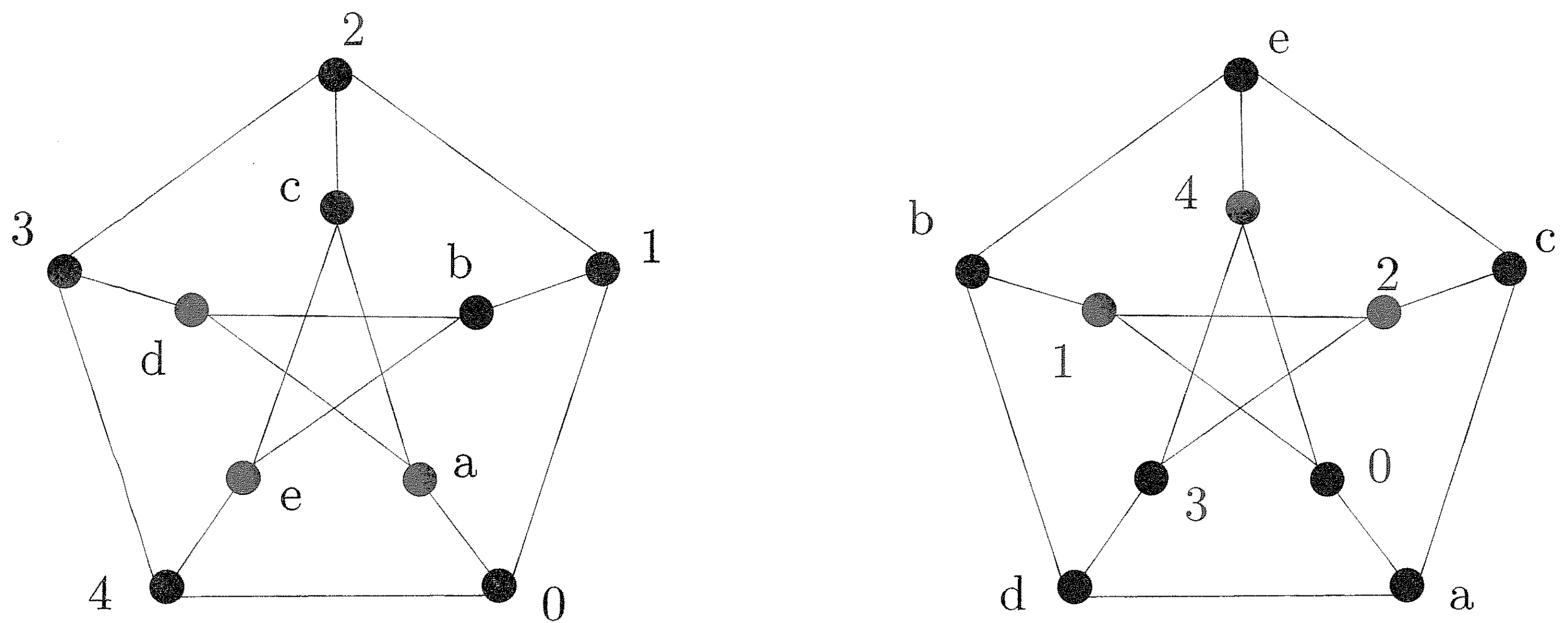
Slika 5. Dodekaeder [10] in graf dodekaedra

Naj bo $P = v_0, v_1, \dots, v_k$ pot v grafu G . Vozlišča $v_1, \dots, v_{k-1}$ so *notranja* vozlišča poti P , *začetek* v_0 in *konec* v_k pa sta *krajišči* poti P . Razdaljo $d(u, v)$ med vozliščema u in v definiramo kot dolžino najkrajše poti med njima. Če ni nobene poti med u in v , zapišemo $d(u, v) = \infty$. V *povezanem* grafu so razdalje med vsemi pari vozlišč nenegativna cela števila.

(Popolno) usmerjanje v G je množica

$$R = \{P_{uv} \mid (u, v) \in V \times V, u \neq v\},$$

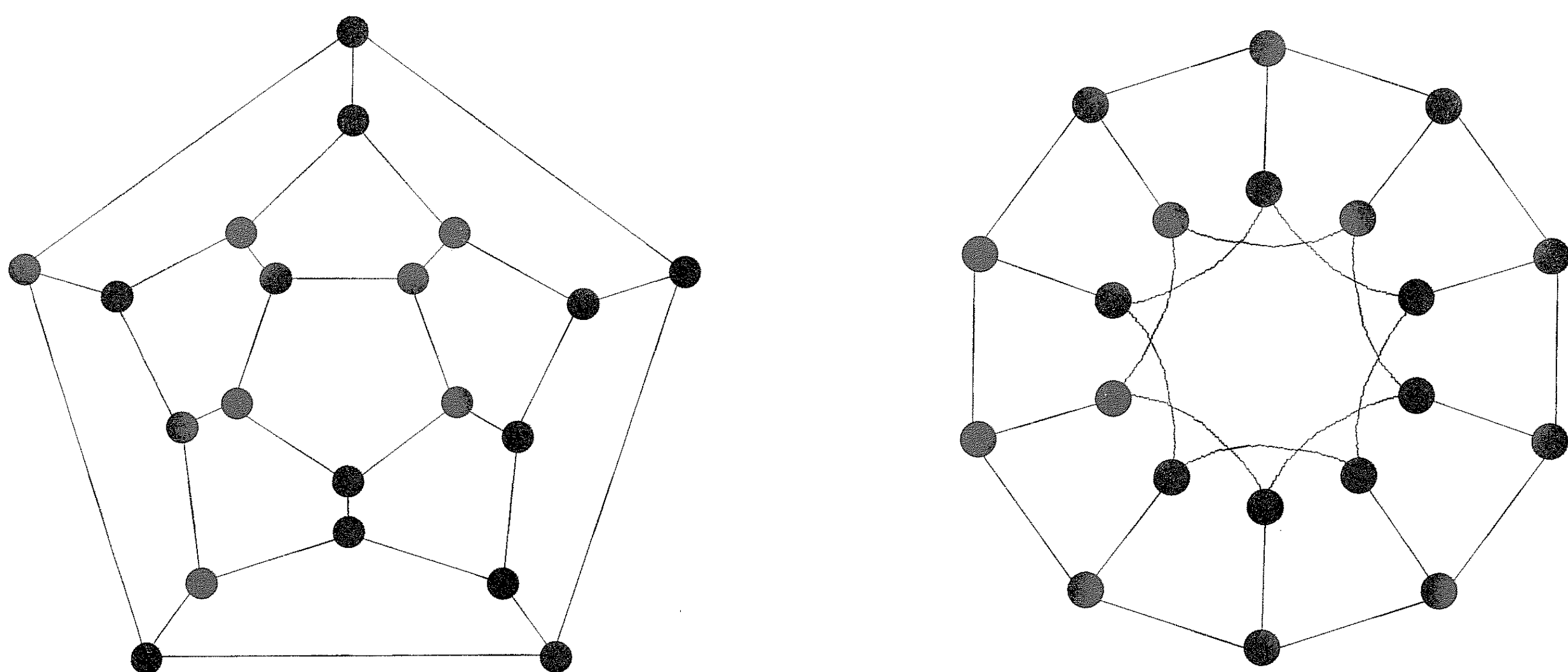
v kateri je $|V|(|V| - 1)$ poti G , kjer smo s P_{uv} označili pot med vozliščema u



Slika 6. Avtomorfizem Petersenovega grafa

in v . (Poti P_{uv} in P_{vu} sta lahko različni.) Za razliko od popolnega usmerjanja imenujemo množico poti, ki ne povezuje vseh (urejenih) parov vozlišč, *delno usmerjanje*. Trivialen primer delnega usmerjanja je množica z eno potjo, pogosto obravnavan primer je usmerjanje od enega vira do vseh drugih, zanimiv poseben primer pa je *permutacijsko usmerjanje*, pri katerem vsako vozlišče pošlje eno sporočilo in je vsako vozlišče naslovnik natanko enega sporočila.

Vsako delno usmerjanje je podmnožica nekega popolnega usmerjanja. Usmerjanje R je *optimalno usmerjanje*, če so vse poti v R najkrajše poti.


 Slika 7. Dve risbi grafa dodekaedra $P(10, 2)$

Pri izbranem (delnem) usmerjanju R lahko vsakemu vozlišču w priredimo *obremenitev* $\xi(R, w)$, ki je po definiciji število poti iz R , ki gredo skozi vozlišče w (z drugimi besedami, za katere je w notranje vozlišče poti). Z $\xi(R)$

označimo maksimalno obremenitev vozlišča,

$$\xi(R) = \max \{ \xi(R, w) \mid w \in V \}.$$

Komunikacijska obremenitev $\xi(G)$ grafa G je minimum $\xi(R)$ po vseh popolnih usmerjanjih R na G

$$\xi(G) = \min \{ \xi(R) \mid R \text{ popolno usmerjanje} \}.$$

Komunikacijsko obremenitev so v tej obliki prvič podrobneje obravnavali v [1], zanimiv pa utegne biti tudi pregledni članek [4]. Če na dva načina preštejemo vsa prečkanja notranjih vozlišč v notranjih vozliščih poti popolnega optimalnega usmerjanja R , vidimo, da je

$$\sum_{w \in V} \xi(G, w) = \sum_u \sum_{v \neq u} (d(u, v) - 1).$$

Ker je $\xi(G)$ po definiciji maksimum, je zagotovo večji ali enak povprečni vrednosti na vozliščih, torej:

Trditev 1. *Naj bo G povezan graf z n vozlišči. Potem je*

$$\xi(G) \geq \frac{1}{n} \sum_u \sum_{v \neq u} (d(u, v) - 1).$$

Enakost velja natanko tedaj, ko na G obstaja optimalno popolno usmerjanje, pri katerem so obremenitve vseh vozlišč enake.

Usmerjanje, pri katerem velja gornja enakost, imenujemo *enakomerno optimalno popolno usmerjanje*. Ni se težko prepričati, da velja:

Izrek 2. *Vsak povezan Cayleyjev graf ima enakomerno popolno usmerjanje. [4]*

Dokaz. Izberimo si poljubno vozlišče v Cayleyjevega grafa in delno usmerjanje R_v s potmi P_{vx} , $x \in V$, $x \neq v$. Definirajmo pot med vozliščema u in w tako, da pot med v in $w \cdot v^{-1} \cdot u$ premaknemo z avtomorfizmom $f_u: x \mapsto x \cdot u^{-1} \cdot v$ v pot med $u \cdot (u^{-1} \cdot v) = v$ in $w \cdot v^{-1} \cdot u \cdot (u^{-1} \cdot v) = w$. S tako definiranimi potmi dopolnimo delno usmerjanje do popolnega usmerjanja R . Izberimo si poljubno vozlišče x . Vse slike x z avtomorfizmi f_u so različne in torej zavzamejo vse vrednosti iz V . Torej prispevek enak $\xi(x, R_v)$ nastopa v vsotah $\xi(w, R)$ za vse $w \in V$ in zato je vsota obremenitev pri usmerjanju R za vsa vozlišča enaka. ■

Spomnimo se, da v po vozliščih tranzitivnem grafu lahko vsako vozlišče z avtomorfizmom preslikamo v katerokoli drugo. Zaradi te simetrije se zdi smiselna domneva, da imajo tudi vsi po vozliščih tranzitivni grafi enakomerno optimalno popolno usmerjanje [5, 4].

Naravna družina grafov, na kateri je smiselno domnevo take vrste preveriti, so posplošeni Petersenovi grafi. Znano je, da je $P(n, k)$ po točkah tranzitiven natanko tedaj, ko je $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$ ali $(n, k) = (10, 2)$ [2]. Vemo tudi, da imajo vsi Petersenovi grafi $P(n, k)$ s $k^2 \equiv \pm 1 \pmod{n}$ enakomerno optimalno popolno usmerjanje [3]. Med posplošenimi Peterse novimi grafi torej ostane kot edini kandidat za protiprimer samo še izjemni graf dodekaedra, na katerem pa domneva zares odpove!

Izrek 3. *Graf dodekaedra nima enakomernega optimalnega popolnega usmerjanja.* [7]

Dokaz (Shim in Širan). Razdelimo vozlišča $V = V_Z \cup V_N$, narisana na sliki 8, na vozlišča zunanega cikla V_Z in notranja vozlišča V_N .

Privzemimo, da izrek ne velja, torej da obstaja enakomerno popolno optimalno usmerjanje $R = \{P_{uv} \mid (u, v) \in V \times V, u \neq v\}$. Z $R_z \subseteq R$ označimo delno usmerjanje iz z do vseh drugih vozlišč, $R_z = \{P_{zv} \mid v \in V, v \neq z\}$. Za poljubno delno usmerjanje $R' \subseteq R$ definirajmo *diferenco* $\Delta(R')$ takole:

$$\Delta(R') = \sum_{x \in V_Z} \xi(R', x) - \sum_{y \in V_N} \xi(R', y).$$

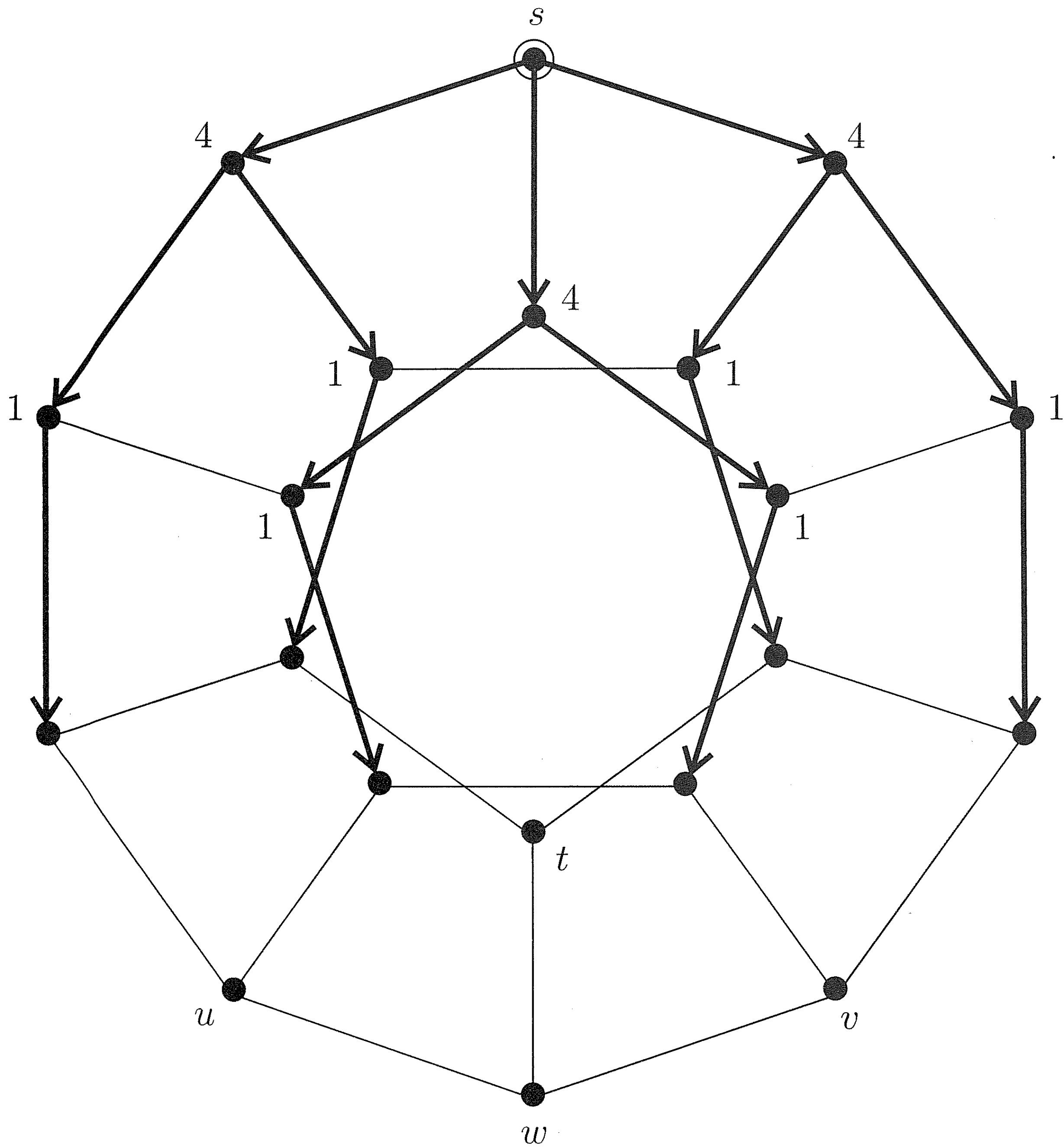
Ker smo predpostavili, da je enakomerno popolno optimalno usmerjanje, velja $\Delta(R) = 0$. Zaradi $R = \bigcup_{z \in V} R_z$ pa velja

$$\Delta(R) = \sum_{z \in V} \Delta(R_z) = \sum_{x \in V_Z} \Delta(R_x) + \sum_{y \in V_N} \Delta(R_y) = 0. \quad (1)$$

Izberimo si vozlišče $s \in V_Z$ in za $3 \leq i \leq 5$ z $R_s^i \subseteq R_s$ označimo delno usmerjanje, v katerem so poti dolžine vsaj dva in manj kot i . Ker so v obravnavanih usmerjanjih samo najkrajše poti, ugotovimo, da je usmerjanje R_s^3 enolično določeno ne glede na v začetku izbrano usmerjanje R .

Na sliki 8 so označene obremenitve vozlišč, inducirane z delnim usmerjanjem R_s^3 (poti usmerjanja R_s^3 so narisane bolj krepko). Diferenca R_s^3 je

$$\Delta(R_s^3) = \sum_{x \in V_Z} \xi(R_s^3, x) - \sum_{y \in V_N} \xi(R_s^3, y) = 10 - 8 = 2.$$



Slika 8. Delno usmerjanje R_s^3 s potmi dolžine največ 3

Oglejmo si zdaj поблиže vozlišča t , u in v , ki so na razdalji 4 od s . S slike 8 vidimo, da imamo za izbiro poti $P_{st} \in R_s^4 \subset R$ samo dve možnosti, in vsaka od njiju ima, če jo obravnavamo kot delno usmerjanje, diferenco -1 . Odtod sledi $\Delta(P_{st}) = -1$. Za pot $P_{su} \in R$ dolžine 4 imamo spet samo dve možnosti, tokrat ima ena izbira diferenco $+3$, druga pa -3 . Torej $\Delta(P_{su}) = \pm 3$. Zaradi simetrije velja enako za vozlišče v , torej $\Delta(P_{sv}) = \pm 3$. Ne glede na to, katera od najkrajših poti se zares pojavi v $R_s^4 \subset R$, imamo

$$\Delta(R_s^4) = \Delta(R_s^3) + \Delta(P_{st}) + \Delta(P_{su}) + \Delta(P_{sv}) = 2 - 1 \pm 3 \pm 3,$$

torej $\Delta(R_s^4) \in \{-5, 1, 7\}$.

Ostalo je samo še vozlišče w , ki je na razdalji 5 od s . Katerakoli $P_{sw} \in R_s^5 \subset R$ gre prek vozlišča t ali (brez škode za splošnost nadaljnjega sklepanja) prek u . V prvem primeru dobimo dve najkrajši poti med s in w , obe z

diferenco -2 . V drugem primeru imamo spet dve različni izbiri, tokrat z diferencama 4 in -2 . Zato je $\Delta(P_{sw}) \in \{-2, 4\}$ in

$$\Delta(R_s) = \Delta(R_s^5) = \Delta(R_s^4) + \Delta(P_{sw}) \in \{-7, -1, 5, 11\}.$$

Za poljubno vozlišče $x \in V_Z$ torej velja

$$\Delta(R_x) \equiv -1 \pmod{6} \quad \text{za vsak } x \in V_Z. \quad (2)$$

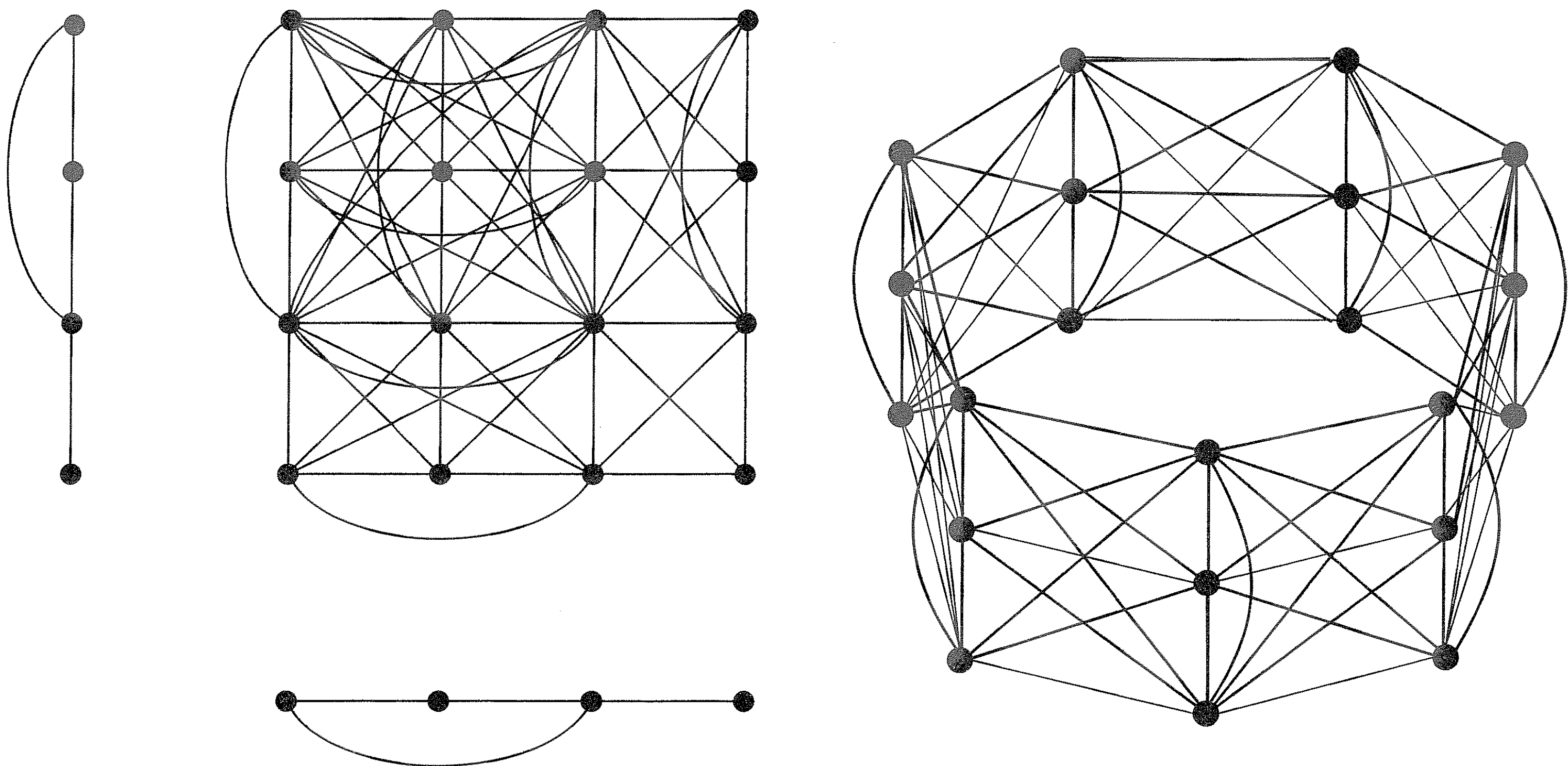
S podobnim premislekom lahko preverimo, da za vozlišče $y \in V_N$ velja

$$\Delta(R_y) = -1 \quad \text{za vsak } y \in V_N. \quad (3)$$

Iz enačb (1), (2) in (3) dobimo

$$0 = \Delta(R) = \sum_{x \in V_Z} \Delta(R_x) + \sum_{y \in V_N} \Delta(R_y) \equiv -20 \pmod{6},$$

kar je protislovje. ■



Slika 9. Krepka produkta $H \boxtimes H$ in $C_7 \boxtimes K_3$

Neskončno družino protiprimerov lahko konstruiramo s preprosto konstrukcijo:

Izrek 4. *Naj bo $q \not\equiv 0 \pmod{3}$. Krepki produkti $K_q \boxtimes P(10, 2)$ so po vozliščih tranzitivni grafi in nimajo enakomernega optimalnega popolnega usmerjanja.*

Krepki produkt $G \boxtimes H$ grafov G in H je graf z množico vozlišč $V(G) \times V(H)$. Vozlišči (g_1, h_1) in (g_2, h_2) sta povezani v $G \boxtimes H$, če je $g_1g_2 \in E(G)$ in $h_1 = h_2$, ali če je $g_1 = g_2$ in $h_1h_2 \in E(H)$, ali če je $g_1g_2 \in E(G)$ in $h_1h_2 \in E(H)$. Dva primera sta na sliki 9 (v prvem primeru sta narisana tudi faktorja, graf, ki smo ga označili s H). O produktih grafov glej [6], posebej o kartezičnih produktih pa tudi [9].

Ni se težko prepričati, da je krepki produkt po vozliščih tranzitivnih grafov po vozliščih tranzitiven.

Ideja dokaza izreka 4 temelji na ugotovitvi, da se vsaka najkrajša pot v $K_q \boxtimes P(10, 2)$ med (g_1, h_1) in (g_2, h_2) preslika v pot iste dolžine med $(0, h_1)$ in $(0, h_2)$, ki hkrati tudi ustreza najkrajši poti v faktorju $P(10, 2)$. Podrobnosti tu opuščamo [7].

LITERATURA

- [1] F. Chung, E. Coffman, M. Reiman in B. Simon, *On the capacity and vertex-forwarding index of communication networks*, IEEE Trans. Inform. Theory **33** (1987), 224–232.
- [2] R. Frucht, J. E. Graver in M. E. Watkins, *The groups of generalized Petersen graphs*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **70** (1971), 211–218.
- [3] G. Gaulyacq, *On quasi-Cayley graphs*, Discrete Applied Math. **77** (1997), 43–58.
- [4] M.-C. Heydemann, *Cayley graphs and interconnection networks*, v: *Graph symmetry* (ur. G. Hahn in G. Sabidussi), Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1997, 167–224.
- [5] M.-C. Heydemann, J.-C. Meyer in D. Sotteau, *On forwarding indices of networks*, Discrete Applied Math. **23** (1989), 103–123.
- [6] W. Imrich in S. Klavžar, *Product Graphs, structure and recognition*, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [7] S. Shim, J. Širan in J. Žerovnik, *A counterexample to the uniform shortest path routing conjecture for vertex-transitive graphs*, Discrete Applied Math. **119** (2002), 281–286.
- [8] R. Wilson in M. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma 63, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1997.
- [9] J. Žerovnik, *O kartezičnem produktu grafov*, Obzornik mat. fiz. **42** (1995), 8–16.
- [10] *Dodecahedron*, <http://mathworld.wolfram.com/Dodecahedron.html>
Model na sliki 5 je delo Emily Herrstrom.

OB EINSTEINOVEM PRVEM ČLANKU

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.65.+g

Ob svetovnem letu fizike 2005 v počastitev stoletnice Einsteinovega „čudovitega leta“ se spomnimo Einsteinovega prvega objavljenega članka. Čeprav članek o površinski napetosti ne vsebuje pomembnih sklepov, daje slutiti delovni slog, ki je Einsteina kmalu pripeljal do velikih uspehov.

CONCERNING EINSTEIN'S FIRST PAPER

On the occasion of the World Year of Physics 2005 celebrating the hundredth anniversary of Einstein's *annus mirabilis* Einstein's first published paper is considered. Although the paper on surface tension does not contain important conclusions it may offer an inkling of the working style which in turn led Einstein to great success.

Leta 1900 je Albert Einstein pri enaindvajsetih letih diplomiral iz matematike in fizike na državni tehniški visoki šoli ETH v Zürichu in si zaman prizadeval, da bi dobil mesto asistenta. V decembru je poslal rokopis svojega prvega članka uredništvu *Annalen der Physik*. Članek *Sklepi na podlagi površinske napetosti* je izšel naslednjega marca [1].

Anali so bili najpomembnejša nemška fizikalna revija. Petdeset let pred tem, ko je urednikoval Johann Christian Poggendorf, je sprejemala članke s teoretičnimi zamislimi le, če so jih neposredno podprli z merjenji pri poskusih. Tako so leta 1841 odklonili tudi rokopis Roberta Juliusa Mayerja in šest let pozneje rokopis Hermanna Helmholtza o energijskem zakonu. Po tem svarilnem zgledu se je spremenila usmeritev uredništva, v katerem sta sodelovala med drugimi Conrad Wilhelm Röntgen in Max Planck. Objavljali so tudi teoretične članke, v katerih zamisli niso neposredno podprli z izidi poskusov. Zaradi tega je Einstein v Analih brez težav objavil vse svoje začetne članke in večino poznejših.

Na začetku članka je Einstein opozoril, da delo $dA = \gamma dP$, ki ga opravimo, ko pri konstantni temperaturi reverzibilno povečamo površino ravne gladine za dP , ni enako spremembi notranje energije površja kapljevine [1]. Če bi bilo tako, bi površinska napetost γ ne bila odvisna od temperature, kar nasprotuje ugotovitvam pri merjenju. Spremembo notranje energije in spremembo entropije ob povečanju površine zapišimo v obliki:

$$dW_n = dA + dQ = \gamma dP + (C_P P dT + q dP) \quad \text{in} \quad dS = \frac{dQ}{T} = \frac{C_P P dT + q dP}{T}.$$

$C_P = P^{-1}(\partial Q/\partial T)_P$ je na enoto površine preračunana toplotna kapaciteta pri konstantni površini in $q = (\partial Q/\partial P)_T$ pri konstantni temperaturi dovedena toplota, ko površino povečamo za enoto. Notranja energija in entropija sta enolični funkciji stanja in zapisana diferenciala sta totalna. Zato velja

$$\left(\frac{\partial W_n}{\partial P}\right)_T = \gamma + q, \quad \left(\frac{\partial W_n}{\partial T}\right)_P = C_P P \quad \text{in} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = \frac{q}{T}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{C_P P}{T}$$

in sta mešana parcialna odvoda enaka:

$$\frac{\partial^2 W_n}{\partial P \partial T} = \frac{\partial(\gamma + q)}{\partial T} = \frac{\partial(C_P P)}{\partial P} \quad \text{in} \quad \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial T} = \frac{\partial(q/T)}{\partial T} = \frac{\partial(C_P P/T)}{\partial P}.$$

Iz prve enačbe sledi $C_P = \partial(\gamma + q)/\partial T$ in iz druge $T^{-1}\partial q/\partial T - q/T^2 = C_P/T$ ali $C_P = \partial q/\partial T - q/T$, tako da je $q = -T\partial\gamma/\partial T$.

Merjenja so pokazala, da je v dobrem približku površinsko napetost mogoče opisati s padajočo linearno funkcijo temperature. V tem primeru je $\partial^2\gamma/\partial T^2 = 0$ in $C_P = \partial\gamma/\partial T + \partial q/\partial T = 0$. Povečanje notranje energije $dW_n = (\gamma + q)dP$, ki spremlja povečanje površine, potemtakem ni odvisno od temperature. Dovedemo torej toploto $dQ = qdP = -T(\partial\gamma/\partial T)dP$, ko dovedemo delo $dA = \gamma dP$.

Zaradi $C_P = 0$ je spremembo površine mogoče povezati s spremembo potencialne energije. Količina $\gamma - T\partial\gamma/\partial T$ (notranja energija ploščinske enote gladine) pri konstantni temperaturi bolje opiše ravno gladino kapljevine kot površinska napetost γ pri vrelišču, ki so jo uporabljali dotlej. Količina ni odvisna od temperature in razporeditev molekul v gladini se ne spreminja, če se ne oziramo na temperaturno raztezanje.

Potencialno energijo dveh molekul po zgledu gravitacijske potencialne energije $W_p = -\mathcal{G}m_1m_2/r$ vpeljimo kot $W_p = -c_1c_2\varphi(r)$, ne da bi poznali funkcijo $\varphi(r)$.¹ Za množico N enakih molekul vsoti nadomestimo z integraloma, če privzamemo, da so molekule v kapljevini enakomerno porazdeljene

$$\begin{aligned} W_p &= -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N c_\alpha c_\beta \varphi(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|) = -\frac{1}{2} c^2 \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \varphi(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|) = \\ &= -\frac{1}{2} n^2 c^2 \iint d^3r_\alpha d^3r_\beta \varphi(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|) = \\ &= -\frac{1}{2} n^2 \left(\sum_i c_i \right)^2 \iint d^3r_\alpha d^3r_\beta \varphi(|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|). \end{aligned}$$

¹Danes pogosto uporabimo *Lennard-Jonesov potencial* $W_p = -4\varepsilon [(D/r)^{12} - (D/r)^6]$ s konstantama, odvisnima od vrste molekul; za atoma argona je na primer $D = 0,341$ nm in $\varepsilon = 0,0103$ eV.

$n = N/V$ je gostota molekul. Pri gravitaciji maso molekule dobimo kot vsoto mas atomov in po tem zgledu koeficient za molekulo iz različnih atomov v kapljevini sestavimo kot $c = \sum_i c_i$, če c_i zadeva atom elementa i v molekuli.

Dodatno gostoto energije na ploščinsko enoto v ravni gladini kapljevine dobimo z integriranjem, pri katerem vektor $\mathbf{r}_\alpha$ obide vse točke pod ploščinsko enoto gladine, vektor $\mathbf{r}_\beta$ pa vse točke te gladine. Tako pridemo do zveze

$$K'n^2 \left(\sum_i c_i \right)^2 = \gamma - T \frac{\partial \gamma}{\partial T},$$

v kateri smo integral, ki je za vse snovi enak, in morebitne konstantne koeficiente z enotami združili v K' . S podatki za vodik, ogljik in kisik dobimo koeficiente $\sqrt{K'}c_H = -1,6$, $\sqrt{K'}c_C = 55,0$ in $\sqrt{K'}c_O = 46,8$. Z njimi izračunamo vsoto $\sqrt{K'}c_i$ za nekaj spojin teh elementov in jo primerjamo z izmerjeno vrednostjo. Za ocetno kislino, na primer, da račun 197, merjenje pa 193. Ujemanje za drugih 16 snovi je podobno. V naslednjem koraku vključimo v razpravo še 24 spojin s klorom, bromom in jodom. Pri njih je ujemanje slabše, na primer za bromobenzen izračunamo 474, izmerimo pa 411.

Poskusimo še neposredno primerjati napovedi po zapisanih enačbah z izidi merjenj. Najprej izračunajmo spremembo notranje energije, ko izparimo maso m do vrelišča segrete kapljevine $\Delta W_{ni} = m(q_i - RT/M)$. Koren iz nje delimo z izračunano vrednostjo $\sqrt{K'} \sum_i c_i$ in dobimo za mol kvocient, ki ima za nekaj snovi povprečno vrednost 5,13.

Nato obravnavajmo stiskanje kapljevine. Spremembo notranje energije sestavimo iz dovedene toplote $dQ = dX + C_p dT$ in dovedenega dela $dA = -pdV = -p[(\partial V/\partial T)_p dT + (\partial V/\partial p)_T dp] = -pV(\beta dT - \chi dp)$. Pri tem je X toplota, ki jo pri konstantni temperaturi sistem izmenja s toplotnim rezervoarjem zaradi spremembe tlaka. Zopet upoštevamo, da sta notranja energija in entropija enolični funkciji stanja in sta mešana parcialna odvoda enaka. Iz enačb

$$\frac{\partial(X + pV\chi)}{\partial T} = \frac{\partial(C_p - pV\beta)}{\partial p} \quad \text{in} \quad \frac{\partial(X/T)}{\partial T} = \frac{\partial(C_p/T)}{\partial p}$$

izhaja zveza

$$X = \left(\frac{\partial Q}{\partial p} \right)_T = -TV\beta,$$

če vzamemo, da sta razteznost β in stisljivost χ neodvisni od temperature in tlaka. Če se ob izparitvi pri vrelišču skupna kinetična energija

molekul ne spremeni, je X enak spremembi skupne potencialne energije molekul $dW_p = (\partial W_p / \partial V)_T \cdot (\partial V / \partial p)_T dp = -(\partial W_p / \partial V) \chi V dp$, torej velja $T\beta/\chi = n^2 K' (\sum_i c_i)^2$. Z izmerjenimi podatki dobimo za mol kvocient, ki ima za nekaj snovi povprečno vrednost 5,57 – dokaj blizu 5,13.² Kvocienta zadevata različna pojava, a se kljub temu zadovoljivo ujemata.

Nazadnje je Einstein sklepal, da je osnovna zamisel prestala preizkus in zatrdil, da „vsakemu atomu ustreza privlačno polje, ki je neodvisno od temperature in od tega, kako je atom kemijsko vezan z drugimi atomi“. Končal je z mislijo, da konstante c_i v splošnem naraščajo z naraščajočo atomsko maso, toda ne vedno in ne sorazmerno. Zato na vprašanje, ali je sile med molekulami mogoče opisati podobno kot gravitacijo, za zdaj ne moremo dati trdnega odgovora. Tega je mogoče pričakovati samo po nadaljnjih raziskavah. Zdaj vemo, da so konstantne c_i vodile v slepo ulico.

Sledili smo glavnemu toku Einsteinovih misli, le tu in tam smo kako podrobnost izpustili, dodali pojasnilo in spremenili oznako ali enoto. Pri presoji vsebine kaže upoštevati, da je članek napisal enaindvajsetletnik na začetku svoje strokovne poti. Sprva je bil Einstein na članek ponosen in je njegov ponatisk poslal nekaterim profesorjem in prijateljem. Po „čudovitem letu“ pa ga je ocenil veliko slabše. Tako je leta 1907 fiziku, ki ga je prosil za ponatiske, poslal „vse objave razen prvih dveh malovrednih člankov“ [2]. Po mnenju A. Paisa je iz članka preživela samo enačba $\partial \mathcal{C}_p / \partial P = -T (\partial^2 \gamma / \partial T^2)_{p,P}$. Ob tem je pripomnil, kako je bilo za Einsteina značilno, da se je po potrebi zlahka odrekel svojih zamisli, ki so se mu prej zdele posrečene. Tudi o svojih člankih iz let 1903 in 1904, v katerih je „ponovno odkril vse bistvene elemente statistične mehanike“, je izjavil, da jih ne bi objavil, če bi poznal delo J. W. Gibbsa.

Na drugi strani pa lahko v prvem članku vidimo stopnico, ki je Einsteina pripeljala do članka *O gibanju suspendiranih delcev v mirujočih tekočinah, ki ga zahteva molekularno-kinetična teorija toplote* in doktorskega dela *Nova določitev velikosti molekul* v „čudovitem letu“. Odločilno je bilo tudi to, da se je na eni strani prenehal ukvarjati z mikroskopsko razlago površinske napetosti in na drugi z osnovami statistične mehanike. Ne pri prvi ne pri drugih dolgo časa ni bilo pravega preboja. Namesto tega se je lotil konkretnih nalog, ki so bile tedaj v ospredju pozornosti, in jih rešil. Pri tem mu je koristilo, da je obvladal orodje statistične mehanike in da je iskal „dejstva, ki pričajo o obstoju atomov z določeno velikostjo“.

²Snovi pri tej primerjavi se razlikujejo od snovi pri prejšnji primerjavi. Morda Einstein ni imel na voljo podatkov, da bi izračunal oba kvocienta za iste snovi. Še dandanes ni lahko priti do vseh potrebnih podatkov.

LITERATURA

- [1] A. Einstein, *Folgerungen aus den Kapillaritätserscheinungen*, Ann. d. Physik 4 (1901) 513; *Conclusions drawn from the phenomena of capillarity*, *The Collected Papers of Albert Einstein*, Vol. 2, *The Swiss Years: Writings, 1900–1909*, J. Stachel (ur.), Princeton University Press, Princeton, N. J. 1989, str. 1.
- [2] A. Pais, *‘Subtle is the Lord.’ The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, Oxford 1982.

VESTI

Vabilo na januarski seminar DMFA

Vabimo vas na seminar **Stoletje fizike – najpomembnejša odkritja**, ki bo potekal na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani, Jadranska ulica 19.

Program seminarja:

Petek, 28. januarja 2005

8.45–9.15	registracija
9.15–10.00	Jurij Bajc: Svetovno leto fizike
10.15–12.00	Anže Slosar: Od klasične do relativistične mehanike
12.15–14.00	Igor Poberaj: Laserji in njihova uporaba
14.00–15.00	kosilo
15.15–17.00	Tomaž Podobnik: Osnovni delci
17.15–19.00	Anton Ramšak: Od polprevodnikov do superprevodnikov

Sobota, 29. januarja 2005

8.15–10.00	Denis Arčon: Nanotehnologija
10.15–12.00	Primož Ziherl: Biološke strukture pod rentgenskim žarometom
12.00–13.00	kosilo
13.15–16.00	Gorazd Planinšič: Nekaj demonstracijskih poskusov k obravnavi moderne fizike v srednji šoli

Na domači strani DMFA (<http://www.dmfa.si/>) so objavljeni povzetki predavanj. Pohitite s prijavi, skrajni rok je 11. januar 2005! Prijavite se na spletni strani DMFA.

Koordinatorja seminarja:
Žiga Šmit in Denis Arčon

S spodnjo nalogo oživljamo rubriko *Vprašanja in odgovori*, ki je zamrla pred ducati leti. V rubriki bomo objavljali vprašanja, naloge in probleme, v eni od naslednjih števil pa odgovore oziroma rešitve zastavljenih nalog in problemov. Objavili bomo tudi dobro napisane rešitve bralcev, ki se bodo bistveno razlikovale od rešitve, ki jo je predložil avtor naloge. Zato vse vabimo k sodelovanju tako pri reševanju nalog kot pri zastavljanju vprašanj, zanimivih za čim širši krog bralcev.

Roman Drnovšek
odgovorni urednik

122. NETRIVIALNA RACIONALNA REŠITEV DIOFANTSKE ENAČBE

Diofantska enačba

$$\left[9\alpha^2(x+y)^2 - (x-y)^2\right] \left[\alpha^2(xy+1)^2 - (xy-1)^2\right] = 16\alpha^2x^2y^2 \quad (1)$$

vsebuje tri spremenljivke: x , y , in α . Pri poljubnem α je izpolnjena, če je $x = y = 0$ (trivialna rešitev). Dokaži, da obstaja netrivialna racionalna rešitev, če racionalno število α zadošča pogoju:

Izraz $(9\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 1) + 16$ je kvadrat racionalnega števila.

Pripomba 1. Od kod ta tako komplicirana diofantska enačba? Povezana je s problemom iskanja Heronovih trikotnikov, ki imajo vsaj dve racionalni težiščnici.

Heronov trikotnik imenujemo trikotnik z racionalnimi stranicami in racionalno ploščino. Kako pridemo do takih trikotnikov? Izberimo si poljubna pozitivna racionalna števila k , x in y tako, da je $xy < 1$. Oglejmo si trikotnik s stranicami

$$a = kx(1 + y^2), \quad b = ky(1 + x^2), \quad c = k(x + y)(1 - xy). \quad (2)$$

Račun pokaže, da je njegova ploščina

$$p = k^2xy(x + y)(1 - xy),$$

torej hkrati s števili k , x , y racionalna. Zato je trikotnik s stranicami (2) Heronov. Vsak Heronov trikotnik dobimo s primerno izbiro racionalnih števil

k , x in y (glej [1], str. 3–4). Ker so pri danih x in y trikotniki (2) za različne vrednosti faktorja k med seboj podobni, smemo privzeti, da je $k = 1$.

Težiščnico t_a , ki sega od središča stranice a do nasprotnega oglišča, dobimo iz formule

$$4t_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2.$$

Posebej za trikotnik s stranicami (2) imamo ($k = 1$)

$$4t_a^2 = [xy(2x + y) - (x + 2y)]^2 + 4x^2y^2. \quad (3)$$

Če med seboj zamenjamo x in y , preideta stranici a in b druga v drugo, stranica c pa ostane ista. Zato pridemo do težiščnice t_b tako, da v (3) zamenjamo x in y , torej

$$4t_b^2 = [xy(x + 2y) - (2x + y)]^2 + 4x^2y^2. \quad (3^*)$$

Iz (3) in (3*) dobimo

$$4t_a^2 - 4t_b^2 = 3(x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1). \quad (4)$$

Postavimo zdaj

$$2t_a + 2t_b = u. \quad (5)$$

Iz (4) in (5) izračunamo

$$2t_a = \frac{u^2 + 3(x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1)}{2u}, \quad 2t_b = \frac{u^2 - 3(x^2 - y^2)(x^2y^2 - 1)}{2u}. \quad (6)$$

Če vstavimo dobljeni izraz za $2t_a$ v enačbo (3), pridemo po nekoliko dolgovезnem računanju do enačbe

$$\left[u^2 - 9(x + y)^2(xy - 1)^2 \right] \left[u^2 - (x - y)^2(xy + 1)^2 \right] = 16u^2x^2y^2. \quad (7)$$

To je algebraična enačba dvanajste stopnje, v vsaki od spremenljivk x in y pa osme stopnje. Če sta težiščnici t_a in t_b racionalni, je racionalen tudi izraz (5), se pravi u . Racionalna števila u , x , y torej zadoščajo enačbi (7).

Denimo zdaj, da je u , x , y taka racionalna rešitev enačbe (7), pri kateri so vse neznanke pozitivne in je $xy < 1$. V pripadajočem Heronovem trikotniku (2) se težiščnici t_a in t_b izražata s formulama (6) in sta zato racionalni. Tako smo ugotovili: Vsakemu Heronovemu trikotniku z dvema racionalnima težiščnicama pripada trojka pozitivnih racionalnih števil u , x , y , ki zadošča enačbi (7), in narobe, vsaki pozitivni racionalni rešitvi u , x , y , pri kateri je $xy < 1$, pripada Heronov trikotnik z dvema racionalnima težiščnicama.

Če namesto u uvedemo novo spremenljivko α , ki je z u povezana takole:

$$u = 3\alpha(x + y)(xy + 1),$$

preide enačba (7) v

$$\left[9\alpha^2(x + y)^2 - (x - y)^2\right] \left[\alpha^2(xy + 1)^2 - (xy - 1)^2\right] = 16\alpha^2x^2y^2,$$

se pravi, v našo dano enačbo (1). Pri tem računu upoštevamo, da sta v trikotniku (2) števili x in y pozitivni in zato smemo enačbo krajšati s faktorjem $(x + y)^2(xy + 1)^2$.

Enačba (1) je desete stopnje, v vsaki izmed spremenljivk α , x , y pa četrte in je zato preprostejša kakor enačba (7). Obe enačbi se dasta zapisati z elementarnima simetričnima polinomoma $x + y$ in xy . Pri tem nastopa vsota $x + y$ v (1) samo v kvadratu, v (7) pa v četrti potenci.

Pripomba 2. Če je $\alpha = 0$, izhaja iz enačbe (1), da je tedaj bodisi $xy = 1$, bodisi $x = y$. V prvem primeru je ustrezeni trikotnik (2) izrojen (stranica c je enaka 0), v drugem enakokrak. V enakokrakem Heronovem trikotniku je ena in samo ena težiščnica racionalna, namreč višina na osnovnico.

LITERATURA

- [1] I. Vidav, *Heronovi trikotniki in diofantske enačbe*, Obzornik mat. fiz. **38** (1991), str. 1–7.

Ivan Vidav

NOVE KNJIGE

Michael Monastyrsky: Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals, A K Peters, Wellesley, Massachusetts 1998, 160 str.

Kanadski matematik John Charles Fields (1863–1932) je leta 1924 vodil organizacijo Mednarodnega matematičnega kongresa v Torontu. Tu so prvič govorili o mednarodni nagradi – medalji za izjemne matematične dosežke. Fields je bil glavni zagovornik te ideje, vendar je do uresničitve preteklo še dvanajst let. Za kongres v Zürichu osem let kasneje je Fields pripravil osnutek pravil in medalje. Malo pred kongresom je Fields zbolel in v oporoki večino premoženja zapustil skladu za nagrado. Leta 1932 so se na kongresu dogovorili, naj nagrada spodbuja nadaljnje delo, zato naj jo podeljujejo sorazmerno mladim matematikom. V naslednjih letih se je tako izoblikovala starostna meja 40 let za kandidate.

Fieldsove medalje podeljujejo vsaka štiri leta na Mednarodnem matematičnem kongresu. Prvi dve sta leta 1936 dobila Jesse Douglas in Lars Ahlfors. Leta 1950 sta naslednji medalji prejela Laurent Schwartz in Atle Selberg. Od takrat vsaka štiri leta razdelijo dve do štiri medalje. Leta 2002 sta v Pekingu nagrado prejela Laurent Lafforgue (Institut des Hautes Études Scientifiques v Bures-sur-Yvette, Francija) in Vladimir Vojevodski (Voevodsky) (Institute for Advanced Study v Princetonu, ZDA).

Ruski matematik M. Monastyrsky z Inštituta za teoretično in eksperimentalno fiziko v Moskvi je že leta 1989 objavil članek o Fieldsovih nagradah v reviji Istoriko-matematičeskie isledovanija. Dve leti kasneje je ta prispevek razširil v knjigo v ruščini. Angleška verzija, ki jo predstavljamo tu, je popravljena in razširjena predvsem z biografskimi podatki o J. C. Fieldsu.

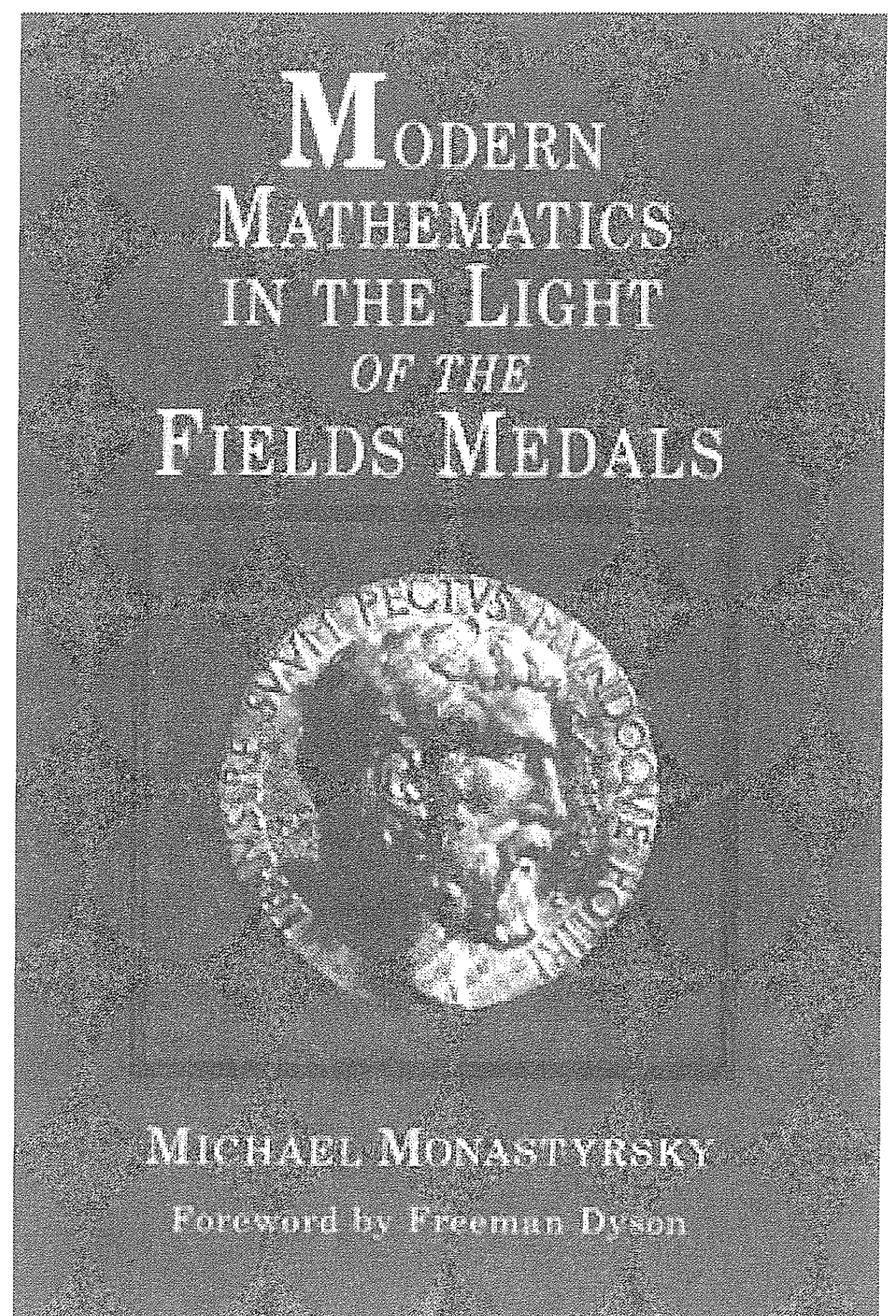
Lepo napisana in berljiva knjižica razloži dosežke Fieldsovih nagrajencev. Njihovi dosežki so predstavljeni po posameznih matematičnih disciplinah. Naslovi poglavij so: Topologija, Kompleksna analiza, Algebraična geometrija, Teorija števil, Algebra, Razno, Matematična logika. V dveh dodatkih obravnava še nagrade v letih 1990 in 1994. Za tako predstavitev je bilo potrebno ogromno znanje. Seveda je običajnemu smrtniku praktično nemogoče razumeti vse, kar je napisano v tej knjižici. Vseeno je predstavitev taka, da dobimo vsaj občutek dogajanja v konici matematičnega raziskovanja.

Leta 1990 je nagrado dobil matematični fizik Edward Witten. Kot pravi Monastyrsky:

Čeprav Wittenov glavni članek ne zadošča matematičnim zahtevam po strogem dokazovanju, veliko število briljantnih idej, hipotez in rezultatov, ki jih vsebuje, več kot odtehta ta greh.

Zanimivo je, da se kar nekaj nagrajencev v svojih delih vrača k lahko razumljivim problemom, kot je aproksimacija iracionalnih števil z racionalnimi.

Knjižica se ne izogne žalostnemu in destruktivnemu dogajanju v sovjetski matematični srenji, ki je onemogočilo odličnim matematikom, da bi



prejeli priznanje za svoje dosežke. Opisano pa je tudi obsežno in uspešno raziskovalno delo Fieldsovih nagrajencev po prejemu medalje. To kaže, da je bil prvotni namen te prestižne nagrade več kot dosežen.

Peter Legiša

Egon Zakrajšek: Matematično modeliranje, DMFA–založništvo, Ljubljana 2004, 260 strani.

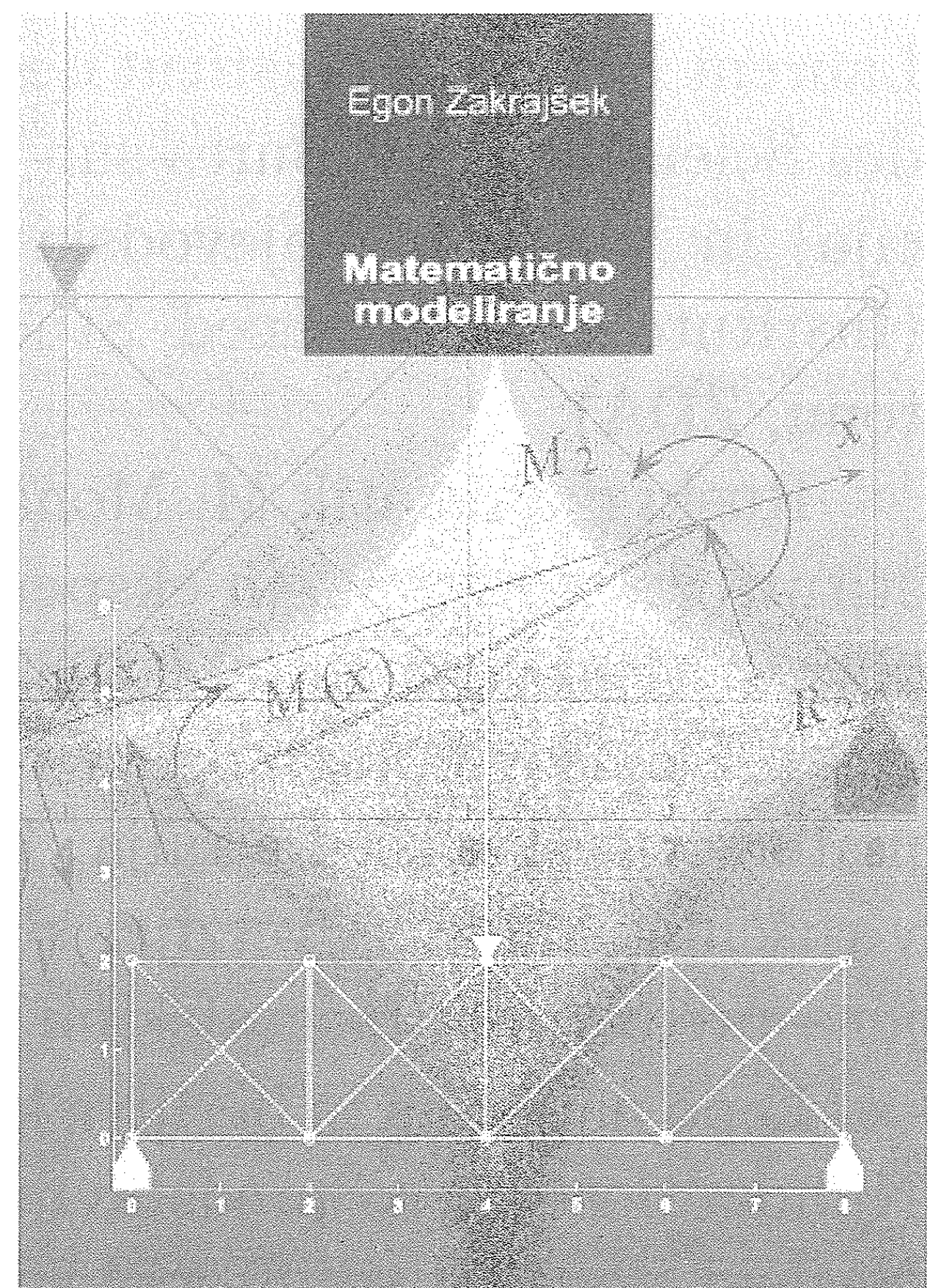
Učbenika, ki pokriva snov matematičnega modeliranja, gotovo ni lahko napisati. Poglavitni problem je izbor snovi, ki naj bi jo podajal. Področje je namreč tako široko, da se le stežka odločimo, katero temo bomo podrobneje opisali, še težje pa, katero izpuštili. Torej ne preseneča dejstvo, da v slovenščini takega učbenika do sedaj še nismo imeli.

Sedaj žal že pokojni prof. Egon Zakrajšek je imel dovolj znanja in volje, da ga je napisal. Tik pred oddajo v strokovni pregled je njegove končne zamisli za vedno pretrgala usodna bolezen. Kljub nedokončani obliki bi bilo nedopustno, da rokopis ne bi

doživel izdaje, zato je DMFA–založništvo svoj dolg izpolnilo letos spomladi.

Delo *Matematično modeliranje* še vedno ni klasični učbenik modeliranja, čeprav pokriva tudi snov istoimenskega predmeta, ki ga je prof. Zakrajšek predaval študentom praktične matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko v letih od 1998 do 2002. Med drugim je to tudi kratek priročnik za pisanje besedil v $\text{\LaTeX}$ -u in uporabo sistema Matlab. Avtor se je namreč še kako zavedal, da brez natančnega pisnega poročila, podkrepljenega z numeričnimi izračuni, modeliranje ni vredno počenega groša. Oglejmo si na kratko, kaj učbenik (kljub vsemu mu bomo nadedli to oznako) sestavlja.

Začne se z opisom programa $\text{\LaTeX}$, s kratkimi navodili za začetnika in zbranimi najpomembnejšimi ukazi, predvsem za pisanje matematičnih besedil. Sledi poglavje o sistemu Matlab, ki ga je avtor vedno znova priporočal in trmasto vztrajal, da je edino pravo okolje za numerične izračune. Sam sicer uvodoma zapiše, da je poglavje bolj reklama za ta sistem, vendar je že iz obsega razdelka razvidno, da ni tako, zato v njem najdeta veliko informacij tako začetnik kot izkušeni uporabnik. Sledita dve klasični poglavji modeliranja, optimizacija in variacijski račun. Avtor ponovi osnovne postopke



za iskanje (vezanih) ekstremov skalarnih polj, nato podrobno reši problem diskretne verižnice, klasične naloge matematičnega modeliranja.

V poglavju o variacijskem računu spoznamo nepogrešljive Euler-Lagrangeeve enačbe in njihovo uporabo na modelih nihanja paličja, rotirajoče osi, upogiba enostavnega nosilca in oblike rotirajoče vrvi. Sledi zahtevnejše poglavje o torziji, kjer se loti torzije nekaterih posebnih teles. V razdelku o statistiki spoznamo predvsem test χ^2 in nekaj osnov nepristranskega ocenjevanja. Treba je priznati, da se ravno tu najbolj čuti, da piscu žal ni uspelo v popolnosti izpiliti dela. Nekateri ideje ostanejo brez podrobno izdelanih zaključkov. Poglavje o kombinatorični optimizaciji je le pregled tipičnih nalog, s katerimi se to področje ukvarja.

Učbenik se nadaljuje z znanim problemom linearnega programiranja. Literature s tega področja je ogromno, zato naj omenimo le dve manj znani temi, revidirano simpleksno metodo in kombinatorično obliko linearnega programiranja. Sledi opis žaganja, ki je posebna naloga linearnega programiranja, a zahteva dovolj posebnih prijemov, da ji je avtor namenil posebno poglavje. Logično nadaljevanje je razdelek o teoriji dualnosti, katerega jedro je izrek o dualnosti.

Delo se nadaljuje z algebraično teorijo grafov, z nekaj standardnimi poglavji, na primer tranzitivna ovojnica, omrežje, cikli in kocikli... Tu avtor pripravi potrebne pojme za zadnje poglavje z angleškim naslovom Out of Kilter. Opiše postopek za reševanje linearnega programa, do katerega pridemo pri iskanju tokov, ki v nekem omrežju z danimi dotoki zadoščajo prvemu Kirchhoffovemu zakonu. Pri tem se bistveno uporabijo lastnosti incidenčne matrike, zato klasični način linearnega programiranja ni primeren. Naj omenimo, da je ravno v to poglavje vgrajenih nekaj dragocenih profesorjevih izkušenj z večletnega neakademskega dela v tujini.

Vsako poglavje se konča znaborom nalog, kar daje delu obliko učbenika. Nekateri so le dopolnitev manjkajočih korakov v dokazih, druge pa so resne naloge matematičnega modeliranja, ki zahtevajo uporabo računalnika in numeričnih postopkov. Nastale so na podlagi projektov, ki so jih študenti reševali namesto pisnega izpita. Čeprav je učbenik namenjen študentom praktične matematike, ki se izvaja na visoki strokovni smeri, je v njem dovolj trdih orehov ne samo za univerzitetno smer, pač pa tudi za izkušene matematike.

V učbeniku vsekakor pogrešamo poglavja o parcialnih diferencialnih enačbah, ki so jedro večine problemov pri modeliranju. Če bi bil prof. Zakrajšek še med nami, bi že zaradi tega gotovo napisal njegovo nadaljevanje.

45. MEDNARODNA MATEMATIČNA OLIMPIJADA

45. mednarodna matematična olimpijada je potekala od 4. do 18. julija 2004 v Atenah, Grčija. Povabljenih je bilo 87 držav, prvič Mozambik in Savdska Arabija, ker pa se Gvatemala in Tadžikistan olimpijade nista mogla udeležiti, je bilo dejanskih udeleženk 85.

Slovensko ekipo so sestavljali: Matjaž Berčič, 2. letnik Gimnazije Škofja Loka (mentor Marko Špolad); David Gajser, 2. letnik II. gimnazije Maribor (mentorica Tatjana Simonič); Peter Lendero, 2. letnik ŠC Velenje – Splošna in strokovna gimnazija (mentorica Sonja France); Gašper Zadnik, 2. letnik Gimnazije Vič (mentorica Hanka Lebič); dvojčka Kris in Nik Stopar, 4. letnik SŠ Veno Pilon, Ajdovščina (mentor Matjaž Trošt).

Ekipo je vodila Irena Majcen, študentka Fakultete za matematiko in fiziko, član mednarodne tekmovalne komisije je bil dr. Gregor Dolinar s Fakultete za elektrotehniko, opazovalec pa dr. Andrej Bauer s Fakultete za matematiko in fiziko. Udeležbo na olimpijadi sta finančno omogočili *Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport* ter *DMFA Slovenije*.

Člani tekmovalne komisije, med njimi Gregor Dolinar, so v Delfiju izbrali šest nalog, tekmovalci pa so jih reševali 12. in 13. julija v Atenah. Medtem ko so spremljevalci ocenjevali njihove izdelke, so se dijaki družili med sabo in si ogledovali znamenitosti Grčije.

Kljub temu da smo imeli mlado ekipo, so bili dijaki odlični: **Gašper Zadnik** in **Nik Stopar** sta osvojila **bronasti medalji**, **Kris Stopar** in **Matjaž Berčič** pa sta dobila **pohvali**.

Gregor Dolinar

35. MEDNARODNA FIZIKALNA OLIMPIJADA

35. mednarodna fizikalna olimpijada je potekala od 15. do 23. julija 2004 v Pohangu, Južna Koreja.

Člani slovenske olimpijske ekipe so bili izbrani na **izbirnem tekmovanju** za olimpijsko ekipo 14. maja 2004 na *Fakulteti za matematiko in fiziko, Oddelek za fiziko*. Tekmovanja se je udeležilo 11 najboljših tekmovalcev iz III. skupine z državnega tekmovanja. V ekipo so se uvrstili: Simon Čopar,

Gimnazija Litija (mentor Damjan Štrus); Klemen Žiberna, II. gimnazija Maribor (mentor Gorazd Žiberna); Peter Jakopič, Gimnazija Želimlje (mentor Peter Šlajpah); Klemen Blokar, Gimnazija Šentvid Ljubljana (mentor Goran Mitrovič) in Simon Jesenko, Gimnazija Škofja Loka (mentor Jože Polajnar).

Strokovni vodji ekipe in člana mednarodne komisije sta bila Jure Bajc s *Pedagoške fakultete v Ljubljani* in Ciril Dominko, *DMFA Slovenije*. Udeležbo na olimpijadi sta finančno omogočili *Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport* in *DMFA Slovenije*.

Ekipa je imela petdnevne **priprave** konec junija in v začetku julija na Oddelku za fiziko FMF. Pri pripravi tekmovalcev smo sodelovali člani *DMFA Slovenije*, *Pedagoške fakultete v Ljubljani*, *Instituta Jožef Stefan* ter bivši tekmovalci, sedaj študenti fizike. Ker so se pri tekmovalcih pokazale večje vrzeli v teoretičnem znanju, predpisanem v katalogu za fizikalno olimpijado, smo večino časa med pripravami posvetili temu. Eksperimentalnemu delu je bil namenjen manjši del priprav.

Na olimpijadi je sodelovalo 331 tekmovalcev iz 71 držav. Dve državi sta sodelovali kot opazovalki.

Bronasti medalji sta v naši ekipi osvojila **Klemen Žiberna** in **Simon Čopar**, **pohvalo** pa **Peter Jakopič**. Osvojena priznanja nas na neuradni lestvici držav uvrščajo točno na sredino. Izkazalo se je, da nam je v teoretičnem delu tekmovanja manjkalo nekaj matematičnega znanja (ni krivda tekmovalcev), ta primanjkljaj pa smo nadomestili v eksperimentalnem delu, ki je bil relativno zelo uspešen.

Ciril Dominko



Srečno 2005!

Vsem članom DMFA ter ostalim ljubiteljem matematike in fizike želimo vesele božično-novoletne praznike in veliko zanimivih trenutkov v prihajajočem svetovnem letu fizike 2005.

Uredništvo Obzornika

Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2003*

Pedagoška fakulteta Univerze v Mariboru

Univerzitetni študij

Matematika

95. Tina Hojnik	Deseti Hilbertov problem
96. Janja Jerebic	Krepka izometrična dimenzija grafov
97. Blaž Knep	Konvergenca mrež in topologija
98. Matjaž Kovše	Nepopolnost formalne aritmetike
99. Jasna Kramar	Osnove teorije čakajočih vrst
100. Andrejka Kraner	Absolutno nenormalna števila
101. Sabina Kumer	Aditivne baze celih števil
102. Natalija Kurenčič	Pascalov izrek
103. Srečko Lampret	Problem cesarja Konstantina
104. Blanka Lubej	Thomsenova enakost
105. Urška Osvald	Funkcije, ki ohranjajo matrike
106. Lilijana Petek	Thue-jevo število ciklov
107. Mojca Premuš	Iterativne metode reševanja sistemov linearnih enačb
108. Mateja Prešern	Rogers-Ramanujanovi identiteti
109. Barbara Salcman	Enolični razvoji v necelih bazah
110. Tanja Sedar	Permutacije z omejitvami
111. Bernarda Slodnjak	Izogonalna in Cevova transformacija
112. Ksenija Smogavec	Novi pristop k dokazu Fagnanovega izreka
113. Petra Šuman	Perronov izrek
114. Andreja Trstenjak	Lucas-Carmichaelova funkcija λ

Fizika

21. Jelka Godec	Uporaba kompleksne algebre in analize v fiziki
22. Aljoša Kancler	Študij faznega prehoda med nematično in smektično A fazo v ograjeni geometriji poroznega stekla CPG
23. Jure Pražnikar	Ciljne funkcije pri določevanju 3-dimenzionalnih struktur makromolekul

Matematika in fizika

130. Ljubo Gričnik	Povprečna vrednost in standardna deviacija pri radioaktivnem razpadu
131. Simon Hozjan	Zvezde in vesolje
132. Boštjan Ketiš	Računalniško podprto merjenje z Geiger-Müllerjevo cevjo
133. Melita Podgoršek	Hamiltonovi grafi
134. Jasmina Žel	Uklon in interferenca
135. Petra Žibert	Merilniki hitrosti v cestnem prometu

*Seznam diplomantov iz leta 2002 je bil objavljen v Obzorniku za matematiko in fiziko **51** (2004) 1.

Matematika in proizvodno tehnična vzgoja

- | | |
|-----------------------|---|
| 39. Martina Bobič | Analiza in ocena programskih izhodišč za načrtovanje, planiranje in vrednotenje tehničnih interesnih dejavnosti v Sloveniji in prikaz sistema regulacije teh dejavnosti |
| 40. Nataša Budna | Preštevanje označenih dreves |
| 41. Tomaž Grobelnik | Hladilni sistemi za hlajenje računalniškega procesorja |
| 42. Renata Kovačič | Generiranje elementarnih kombinatoričnih objektov |
| 43. Brigita Kramaršek | Aproksimacija realnih števil z vsotami egipčanskih ulomkov |
| 44. Katja Mejač | O-notacija |
| 45. Darja Sever | Hipocikloide |

Proizvodno tehnična vzgoja in fizika

- | | |
|----------------------|---|
| 26. Boris Bubik | E-učbenik |
| 27. Sašo Gnilšek | E-izobraževanje |
| 28. Marjan Gradišnik | Tehnika in tehnologija v teoriji in praksi v okviru učnega načrta za 6. razred |
| 29. Matej Kotnik | Tehnično-tehnološke dejavnosti kot možnost za izdelavo uporabnih učil za študijske programe s področja naravoslovja |
| 30. Martin Medun | Analiza fizikalnih raziskovalnih dni v Sloveniji |
| 31. Ivan Pišek | Opazovanje Sonca |
| 32. Petra Rogan | Uporaba sevanj v terapevtske namene |
| 33. Mitja Šket | Jedrska energija |

Pedagogika in matematika

- | | |
|------------------|------------------------------------|
| 1. Mateja Holc | Binomski koeficienti |
| 2. Pavlina Šepul | Bernoullijeva števila |
| 3. Vanja Šmid | Spiekerjeva in Fuhrmanova krožnica |

Biologija in matematika

- | | |
|--------------------|--|
| 10. Valerija Anžel | Miquelovi trikotniki |
| 11. Alojzija Mušič | Fermatovi točki trikotnika in Lesterjev izrek |
| 12. Alenka Repnik | Diferenčne enačbe |
| 13. Nina Šajna | Vpliv naravno povečane koncentracije CO ₂ na rastlinsko biomaso vlažnega travnika |

Matematika in slovenski jezik s književnostjo

- | | |
|------------------|----------------------------|
| 1. Ines Potočnik | Napoleon-Barlottijev izrek |
|------------------|----------------------------|

Nemški jezik s književnostjo in matematika

- | | |
|-------------------|---|
| 2. Katja Javornik | Frühling, Sommer, Herbst und Winter in deutschen und slovenischen Sprichwörtern unter interkulturellen Aspekten |
|-------------------|---|

Podiplomski študij

Magistrski študij – matematika

- | | |
|----------------------|-------------------------------|
| 15. Mihaela Koštomaj | $L(2, 1)$ -označitve grafov |
| 16. Janko Marovt | Avtomorfizmi efektnih algeber |
| 17. Tanja Veber | Kubične krivulje trikotnika |

Magistrski študij – fizika

- | | |
|------------------|--|
| 2. David Haložan | Interakcije med naelektrenimi koloidnimi delci v elektrolitski raztopini |
|------------------|--|

Doktorati – matematika

- | | |
|--------------------|----------------------------------|
| 8. Matej Mencinger | Stabilnost kvadratičnih sistemov |
|--------------------|----------------------------------|

Pedagoška fakulteta Univerze v Ljubljani**Univerzitetni študij
Matematika in fizika**

- | | |
|---------------------------------|--|
| 207. Simona Vampelj | Reševanje sistemov linearnih enačb s pomočjo grafov |
| 208. Katja Faleskini | Indijska matematika |
| 209. Jasna Gnjezda | Vpeta drevesa v grafu |
| 210. Biserka Kampošek | Ravninske simetrije |
| 211. Andreja Andreja
Gostiša | O metodah določevanja položaja plovila |
| 212. Klavdija Kutnar | Delannoyjeva števila |
| 213. Andreja Poljanec | Optične preslikave |
| 214. Gorazd Lah | Model Fanove ravnine na torusu |
| 215. Tadeja Zorč Čarga | Kompleksna števila |
| 216. Martina Petrovič | Matematični modeli populacij |
| 217. Maja Maze | Kletke in konfiguracije |
| 218. Robert Buček | Klasične grupe |
| 219. Petra Polutnik | Uspešnost učencev pri nacionalnem preizkusu znanja iz matematike |

Matematika in računalništvo

- | | |
|-----------------------|---|
| 8. Katja Kastelic | Intranet v izobraževanju |
| 9. Meta Kirn | Struktura grafov in lastni vektorji matrik |
| 10. Izidor Gabrijel | Računalniški virusi |
| 11. Marta Mestnik | Uporaba interneta pri pouku v osnovni šoli |
| 12. Gregor Anželj | Implementacija spletnega iskalnika izobraževalnih programov |
| 13. Nataša Bavčar | Uporaba izobraževanja na daljavo pri poučevanju matematike |
| 14. Andrejka Peternel | Sodelovalno učenje pri pouku računalništva in matematike |
| 15. Aleš Videnšek | Spletni informacijski sistem za izmenjavo učnih gradiv |
| 16. Jožica Stenšak | Interaktivni spletni učbenik za delo z grafi |
| 17. Boštjan Frelih | Krepko regularni grafi |
| 18. Melita Kastelic | Primer kvadratne optimizacije |

Matematika in tehnika

- | | |
|------------------------|---|
| 107. Metka Pinoza | Načrtovalne naloge z neoznačenim ravnilom in projektivna geometrija |
| 108. Maja Lebar | Kontekst v učbenikih matematike za poklicne šole |
| 109. Andrej Novljan | Tlakovanja ravnine |
| 110. Vesna Kobal | Upoštevanje poklicne usmeritve dijakov pri poučevanju matematike |
| 111. Dominika Rotovnik | Računanje na prste |

Seznam diplomantov ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2003

114. Marko Zanjko	Konstrukcija pravilnega sedemkotnika
112. Veronika Zajc	Pouk tehnične vzgoje v obliki projektnega učnega dela „od ideje do izdelka“ v devetletni osnovni šoli
113. Apolonija Selan	Preštevanje s Pólyeovo teorijo
115. Mira Novak	Realistični pristop pri poučevanju ulomkov
116. Klavdija Kranjec	Arhimed in število π
117. Saša Sašić	Fraktali in kvadratna funkcija
118. Mateja Zadobovšek	Islamski prispevki v matematiki
119. Damijan Košir	Celični avtomat: igra življenja
120. Jure Kramar	Drugačna pot do znanja. Priprava in uporaba računalniške tehnologije za projektno učenje modela BJ
121. Sonja Mišič	Odkrivanje matematike ob izdelavi logaritemskega računalja v osnovni šoli

Fizika in tehnika

33. Andrej Podpečan	Toplota in notranja energija pri pouku fizike v devetletni osnovni šoli
34. Simon Kurinčič	Demonstracija valovanja na gladini vode
35. Andrej Rous	Prototip robotske roke kot učilo pri izbirnem predmetu – robotika v tehniki
36. Petja Pompe Kreže	Delovanje elektronskih čutilnikov v avtomobilu
37. Borut Fajfar	Mikrokrmilniki za začetnike
38. Aleš Cimprič	Infrardeči prenos podatkov
39. Saša Kožuh	Letalsko modelarstvo v osnovni šoli

Kemija in fizika

28. Dragica Banović	Uspešnost srednješolcev na Preglovem tekmovanju iz znanja kemije v šolskem letu 2000/2001
29. Miha Furlan	Uganke in paradoksi v kvantni mehaniki
30. Matjuša Mihelčič	Laboratorijske vaje iz osnov elektrotehnike v poklicnem izobraževanju
31. Veronika Babič	Temperaturna odvisnost električne prevodnosti razredčenih vodnih raztopin NiSO_4
32. Matej Erjavec	Volumske lastnosti mikroemulzij Tween 40/Imwitor-voda-izopropilmiristat

Izredni študij

9. Marija Ahčin	Pomen zbirk matematičnih nalog v učnem procesu
10. Olga Drole	Potres – šolski projekt pri pouku fizike
11. Tea Gustinčič	Kartezični koordinatni sistem v osnovni šoli
12. Jurij Marussig	Uporaba ultrazvočnega slednika pri pouku fizike v osnovni šoli
13. Andreja Modic	Radioaktivni plin radon
14. Tatjana Ponikvar Lazič	Uporaba matematičnih orodij pri pouku fizike v osnovni šoli
15. Irena Sikirica	Projektno učno delo: sončna energija
16. Neva Slavec	Žepno računalno
17. Klavdija Štrucl	Sodelovalno učenje pri pouku fizike
18. Marija Turk	Sodelovalno učenje in obravnavanje energije v OŠ
19. Vanja Vogrin	Cikloidne krivulje

Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

Visokošolski strokovni študij

Praktična matematika

16. Voranc Kutnik	Generiranje permutacij
17. Rok Carli	Predstavitev in uporaba debelih krivulj
18. Adriana Jančič	Računanje obresti in programski jezik ZIM
19. Ivan Gaberšek	Usmerjanje in razmeščanje vozil v kontejnerskem terminalu
20. Matjaž Lipovšek	Diskretna Fourierova transformacija
21. Gabrijela Jereb	Programski jezik Visual basic za aplikacije pri pripravi publikacij statističnega urada
22. Martina Janežič	Barvanje povezav v zaporedno-vzporednih grafih

Fizikalna merilna tehnika

7. Urška Bogataj	Vzpostavitev prenosa časa z najmanjšo merilno negotovostjo za časovno sinhronizacijo
8. Bojan Žagar	Interferenca med etalom in plinomerom pri merjenju plinomer
9. Marko Viršek	UVVIS in IR spektroskopija nanostrukturiranih materialov $\text{MoS}_2\text{I}_{1/3}$
10. Nina Ostojić	Študij vpliva citaloprama na fluidnost celične membrane z metodo elektronske paramagnetne resonance
11. Vladimir Požonec	Raziskava oblike in velikosti detekcijske in vzbujevalne tuljave pri JKR spektru
12. Peter Košir	Krajevna odvisnost detekcije posameznih fotonov z večanodno ploščato fotopomnoževalko
13. Simon Sukljan	Razvoj in izdelava katodne tiskanine z vgrajeno zakasnilno linijo za večžično proporcionalno komoro
14. Peter Krkoč	Kalibracija in uporaba spektroskopskega elipsometra
15. Mateja Radkovič	Temperaturno polje pri varjenju s konstantno hitrostjo
16. Iztok Kirar	Kotna kompenzacija LCD svetlobnih preklopnikov

Univerzitetni študij

Matematika – pedagoška smer

557. Barbara Gramc	Fulereni z grafi
558. Alenka Bračič	Asimptotska ocena integralov
559. Patricija Matovina	Skalarni Riemann-Hilbertov problem
560. Valentina Ločniškar	Geometrija in topologija vesolja
561. Slavica Volčanjšek	Aproksimacija pravilnega večkotnika s prepogibanjem papirnatega traku
562. Tatjana Tomaš	Pouk geometrije v gimnazijah v Sloveniji skozi zgodovino
563. Andreja Jelovčan	Odnos do števil skozi zgodovino
564. Vojko Žagar	Spojna geometrija
565. Mateja Vengar	Ciklični Haarovi grafi
566. Nataša Jerman	Linearni ohranjevalci komutativnosti
567. Kristina Kovačič	Uporaba matematike v jezikoslovju
568. Anja Stražar	Posebne točke trikotnika in kubične krivulje
569. Aljoša Brlogar	Internetna zbirka matematičnih nalog za gimnazije

Seznam diplomantov ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2003

570. Jerneja Kučina	Cayley-Hamiltonov izrek
571. Jana Mahnič	Stožnice v projektivni ravnini
572. Aljoša Peperko	Preureditveno invariantni Banachovi funkcijski prostori
573. Tinka Majaron	Matematika glasbenih lestvic
574. Alenka Kolenc	Descartesovi položaji sfer v evklidskem prostoru
575. Suzana Stopar	Diferencialnim podobne linearne enačbe
576. Matej Ožek	Iskanje lastnih vrednosti realne nesimetrične matrike z realno homotopijo

Matematika – uporabna smer

609. Boris Horvat	Naključna barvanja grafov
610. David Čreslovník	O valčkih
611. Romana Stare	Metoda Monte Carlo za numerično integriranje
612. Tina Šijanec	Pravična delitev torte
613. Srečko Maksimović	Učinkovita aritmetika v prašteviliških obsekih
614. Tanja Selar	Gauss-Kronrodove kvadraturene formule
615. Nataša Ravnik	Redukcije kubičnih konfiguracij
616. Martin Milanič	Minimizacija pasovnosti grafa s pomočjo širokih vložitev
617. Bakir Toskić	Lanczosove metode
618. Vanja Nastran	Baze binarnih končnih obsegov
619. Andrej Perne	Diferencialno-algebrske enačbe in metoda kolokacije
620. Matjaž Urbanek	Prekrižna števila grafa
621. Jure Meh	O cikličnih barvanjih ravninskih in projektivnih grafov
622. Mojca Ješe	Graviranje na površje telesa
623. Danijela Tomič	Urejanje nizov
624. Martin Pečar	Nekateri problemi prepoznavanja vzorcev
625. Dušan Žeželj	Kratek stik v grafu
626. Igor Odar	Kvadratno vezan problem najmanjših kvadratov in kvadratno vezana kvadratna forma
627. Vida Primožič	Problem umetnostne galerije za ortogonalne poligone

Matematika – teoretična smer

87. Martin Jesenko	Kornova neenakost
88. Tomaž Kosem	Neenakosti med normami hermitskih matrik
89. Tadej Starčič	Delovanje grup in Lusternik-Schnirelmannova kategorija
90. Kristijan Cafuta	Skrčeni Burnsideov problem za praštevilske koeficiente

Fizika – pedagoška smer

154. Sebastjan Zamuda	Določanje parametrov zvezd iz spektrov misije GAIA
155. Jože Povšin	Poskusi z bližnjo infrardečo svetlobo
156. Aleš Razinger	Pretakanje tekočin po ceveh
157. Marko Budiša	Uporaba GPS pri pouku fizike
158. Gregor Humar	Razširjanje svetlobe v nehomogenih sredstvih

Fizika

845. Asja Kranjc	Odpravljanje popačitve zaradi kemijskega premika pri slikanju z magnetno resonanco
846. Gorazd Lampič	Parametri spektralne črte CIV pri različnih tipih aktivnih galaktičnih jeder

847. Martin Zadnik Viskozno obtekanje ovire v omejenem toku
 848. Bojan Dolinar Rekonstrukcija razpadov $B^0 \rightarrow D^- \pi^+$ in $B^0 \rightarrow D^0 \alpha_1^+$ z detektorjem Belle
 849. Matjaž Ličer Raziskava lokaliziranih stanj vrzeli v dopirani DNK s fotoinducirano infrardečo in ramansko spektroskopijo
 850. Jurij Pahor Merjenje makroskopskih električnih transportnih lastnosti $\text{MoS}_2\text{I}_{1/3}$ nanomaterialov
 851. Jan Šorli Modeliranje germanijevega detektorja z metodo Monte Carlo
 852. Uroš Kostić Računanje orbit svetlobe v polju črne luknje
 853. Marko Žerdin Klasična in kvantna dinamika trodelčnega idealnega plina v eni dimenziji
 854. Matjaž Zemljič Termoelektrični koeficienti v enodimenzionalnem Hubbardovem modelu
 855. Boštjan Bogataj Fazni prehodi v mezoskopskem superprevodniku kvadratne geometrije
 856. Katarina Roškar Spektroskopija natrija in kalija medzvezdnega prostora
 857. Gregor Resman Soobstoj in dinamika domenske stene in defektnih linij v nematski fazi
 858. Andrej Vrečko Optično negativne dvolomne kompenzacijske plasti za preklopnike
 859. Marko Uplaznik Meritve vzdolžne električne prevodnosti $\text{Mo}_6\text{S}_4\text{I}_4$ nanožičk z uporabo elektronske nanolitografije
 860. Andrej Strojnik Kalibracija polprevodniškega dozimetra za uporabo pri in vivo meritvah v radioterapiji
 861. Anže Koselj Urejanje tekočega kristala na nanostrukturiranih površinah
 862. Blaž Kmetec Časovno ločljiva sunkovna taraherenčna spektroskopija
 863. Jernej Kamenik Iskanje signalov nove fizike v redkem razpadu $B_c^- \rightarrow D_s^- \bar{K}^0$
 864. Irena Dolenc Določanje aktivnosti ^{90}Sr z detekcijo fotonov Čerenkova, izsevanih v aerogelu
 865. Borut Levart Statistično modeliranje in napovedovanje kaotičnih procesov
 866. Robert Rozman Nestabilnost absorpcijskih valov pri laserski obdelavi materialov
 867. Borut Tone Oblak Poenostavljen kolektivni model mezona pi
 868. Mitja Majerle Umerjanje linearnega pospeševalnika Philips SL-75/5 za potrebe 3D načrtovanja v radioterapiji
 869. Matej Kapus Absolutna meritev koncentracije ogljikovega monoksida v zunanem zraku z metodo infrardeče absorbcije

Meteorologija

83. Matjaž Česen Simulacija valov na jezeru hladnega zraka z modelom MM5
 84. Jure Cedilnik Ugotavljanje skladnosti rezultatov diagnostičnih simulacij, vgnezenih v reanalize ECMWF z meritvami
 85. Rok Glavač-Šah Semi-Lagrangeova difuzijska shema v modelu Aladin

Podiplomski študij

Magistrski študij matematike – izobraževalna smer

27. Alojz Grahor Kolobarji kvocientov
 28. Erik Schlegel Pollardova ρ -metoda

Magistrski študij matematike – raziskovalna smer

- | | |
|---------------------|---|
| 121. Alen Orbanič | Upodobitev grafov in paličja v ravnini |
| 122. Nika Novak | Integralski operatorji |
| 123. Tadej Novak | Uporaba Berlekamp-Masseyevega algoritma v kriptografiji in teoriji kodiranja |
| 124. Barbara Boldin | Deterministični modeli širjenja nalezljivih bolezni v heterogenih populacijah |

Magistrski študij fizike

- | | |
|------------------|--|
| 191. Vesna Ročak | Osmotski tlak v krogelno-celičnem modelu DNK |
|------------------|--|

Magistrski študij fizike – jedrska tehnika

- | | |
|--------------------|--|
| 33. Jure Simčič | Postavitev žarkovne cevi in eksperimentalne celice za meritve s protonskim mikrožarkom |
| 34. Peter Vidmar | Model širjenja požara ob prometni nesreči v bližini jedrske elektrarne |
| 35. Robert Bergant | Numerične simulacije turbulentnega prenosa toplote ob ravni steni v tekočinah pri različnih Prandtlovih številih |

Doktorati – matematika

- | | |
|-------------------------------|--|
| 73. Janez Bernik | Polgrupne posplošitve Brauerjevega izreka |
| 74. Bojan Kuzma | Aditivni ohranjevalci na podstavku |
| 75. Marjan Jerman | Urejena koherentnost |
| 76. Barbara Drinovec Drnovšek | Pravi holomorfni diski v Steinovih mnogoterostih |

Doktorati – fizika

- | | |
|-----------------------|---|
| 260. Alan Gregorovič | Determination of local structure in relaxors with nuclear magnetic resonance |
| 261. Miran Kokol | Optimizacija števila nevronov pri empiričnem modeliranju fizikalnih zakonov z nevronskimi mrežami |
| 262. Griša Močnik | Optotermične metode za raziskovanje vzorcev z visoko absorpcijo in v prisotnosti motečega sipanja |
| 263. Alenka Razpet | Spektrometrija odrinjenih ionov z merjenjem časa preleta |
| 264. Jure Zupan | Chiral corrections in electroweak processes with heavy mesons |
| 265. Andrej Gorišek | Cross section measurement of D^0 and D^{*+} meson production in inelastic collisions of 920 GeV protons with nuclei |
| 266. Tomaž Rejec | Transport properties of strongly correlated nanoscopic systems |
| 267. Matjaž Kobal | Dvojna ionizacija lupine K atomov Mg in Si pri trkih z ioni |
| 268. Daniel Svenšek | Blackflow-effected reorientation dynamics in liquid crystals |
| 269. Matej Praprotnik | Nova simplektična metoda za simulacijo molekulske dinamike |
| 270. Rok Petkovšek | Urejenost in dinamika s polimerom stabiliziranih feroelektričnih tekočih kristalov |
| 271. Marjetka Conradi | Fazni prehodi in dinamika v plasteh polarnih tekočih kristalov s prostimi površinami |

Doktorati – jedrska tehnika

272. Boštjan Končar Model of forced convective subcooled boiling at low pressure conditions
273. Gregor Omahen Določitev efektivne globine radionukleida ^{137}Cs v zemlji na podlagi meritve in situ

Letno kazalo

Obzornik za matematiko in fiziko 51 (2004)
številke 1–6, strani 1–192

Članki — Articles

Tekočekristalni elastomeri — Liquid-Crystalline Elastomers (Miha Ravnik)	1–13
Lusternik-Schnirelmannova kategorija — Lusternik-Schnirelmann Category (Petar Pavešić)	33–50
Borsukov problem — Borsuk's Problem (Boris Lavrič)	51–62
Numerično reševanje hiperboličnega kvadratnega problema lastnih vrednosti — Numerical Solution of the Hyperbolic Quadratic Eigenvalue Problem (Bor Plestenjak)	65–78
Mihael Peternel, prvi ravnatelj ljubljanske realke — Mihael Peternel, the First Principal in the High School of Ljubljana (Marko Razpet)	80–86
Interferenčni poskusi z velikimi molekulami — Interference Experiments with Large Molecules (Janez Strnad)	88–93
Incidenčne strukture, grafi in volitve v parlament EU — Incidence Structures, Graphs and the EU Parliament Elections (Tomaž Pisanski in Arjana Žitnik)	97–103
Posplošeni latinski kvadrati — Generalized Latin Squares (Matjaž Konvalinka)	104–112
Gödlov prvi izrek o nepolnosti — On Gödel First Incompleteness Theorem (Vítězslav Švejdar, prevedel Marko Petkovšek)	113–121
Novi Millikanov poskus — The New Millikan Experiment (Janez Strnad)	122–126
Reed-Solomonove kode — Reed-Solomon Codes (Aleksandar Jurišić in Arjana Žitnik)	129–143
Numerična analiza perkolacijskega praga prevodnosti v kermetih — Numerical Analysis of Percolation Threshold in Cermets (Milan Ambrožič)	144–158
Usmerjanje sporočil v grafih — Routing in Graphs (Janez Žerovnik) ..	161–170
Ob Einsteinovem prvem članku — Concerning Einstein's First Paper (Janez Strnad)	171–175

Vprašanja in odgovori — Questions & answers

122. Netrivialna racionalna rešitev diofantske enačbe (Ivan Vidav) ...	176–178
--	---------

Nove knjige — New books

Hallerstein – kitajski astronom iz Mengša (Rudolf Podgornik)	63–64
Naše nebo 2004, astronomske efemeride (Simon Vidrih)	94
Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals (Peter Legiša)	178–180
Matematično modeliranje (Emil Žagar)	180–181

Vesti — News

Nova častna člana DMFA Slovenije (Martin Čopič, Norma Mankoč Borštnik, Nada Razpet, Zvonko Trontelj in Slobodan Žumer)	14–18
Dobitniki priznanj DMFA Slovenije (Nada Razpet)	18–21
Strokovno srečanje in 55. občni zbor DMFA Slovenije (Nada Razpet)	21–24
Profesor Peter Gosar – osemdesetletnik (Peter Prelovšek in Raša Pirc)	24–26
Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2002	26–III
Prehod Venere čez Sončevo ploskev (Sonja Jejčič, Andrej Čadež in Tomaž Zwitter)	VII
Zoisovi priznanji za znanstvenoraziskovalno delo matematiku in fiziku (Roman Drnovšek)	78–79
Vabilo (Peter Petek)	79
Kratke novice (Peter Legiša)	86–87
Strokovno srečanje in 56. občni zbor društva (Peter Petek)	95
Svetovno leto fizike 2005 (Jure Bajc)	96
Društveni seminar iz matematike (Nada Razpet)	96–XI
Novi člani društva v letu 2003 (Vladimir Bensa)	121
Sir Michael F. Atiyah in Isadore M. Singer – dobitnika Abelove nagrade za leto 2004 (Pavle Saksida)	127–XV
Vabilo na strokovno srečanje, 4. konferenco fizikov v osnovnih raziskavah in 56. občni zbor (Peter Petek in Igor Muševič)	159–XIX
Vabilo (Žiga Šmit in Denis Arčon)	XIX
Vabilo na januarski seminar DMFA (Žiga Šmit in Denis Arčon)	175
45. mednarodna matematična olimpijada (Gregor Dolinar)	182
35. mednarodna fizikalna olimpijada (Ciril Dominko)	182–183
Srečno 2005!	183
Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2003	184–192

<http://zaloznistvo.dmfa.si/omf/>



VSEBINA

ODPIŠANO

Članki	Strani
Usmerjanje sporočil v grafih, Janez Žerovnik	161-170
Ob Einsteinovem prvem članku, Janez Strnad	171-175
Vprašanja in odgovori	
122. Netrivialna racionalna rešitev diofantske enačbe, Ivan Vidav ...	176-178
Nove knjige	
Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals, Peter Legiša	178-180
Matematično modeliranje, Emil Žagar	180-181
Vesti	
Vabilo na januarski seminar DMFA, Žiga Šmit in Denis Arčon	175
45. mednarodna matematična olimpijada, Gregor Dolinar	182
35. mednarodna fizikalna olimpijada, Ciril Dominko	182-183
Srečno 2005!	183
Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplom- skega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2003	184-192
Letno kazalo	192-XXIII

CONTENTS

Articles	Pages
Routing in Graphs, Janez Žerovnik	161-170
Concerning Einstein's First Paper, Janez Strnad	171-175
Questions & answers	176-178
New books	178-181
News	175-XXIII

Na naslovnici je model dodekaedra, delo Emily Herrstrom (<http://mathworld.wolfram.com/Dodecahedron.html>). Graf dodekaedra je najmanjši znani graf, na katerem ne velja domneva o enakomernem optimalnem popolnem usmerjanju (glej članek na strani 161).