IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

ODPISANO

2004
Letnik 51
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2004, letnik 51, številka 3, strani 65–96

Naslov uredništva: DMFA-založništvo, Jadranska ul. 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana. **Spletna stran**: http://www.fmf.uni-lj.si/~zaloznistvo/omf/ **Telefon**: (01) 4766 553, 4232 460. **Telefaks**: (01) 2517281. **Transakcijski račun:** 03100–1000018787. **Devizna nakazila:** SKB banka d. d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana. **SWIFT:** SKBASI2X. **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Nada Razpet (novice), Pavle Saksida (nove knjige), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič. Natisnjeno v Tiskarni KURIR v nakladi 1450 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 5000 SIT, za študente 2500 SIT. Naročnina za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

© 2004 DMFA Slovenije – 1576

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

NUMERIČNO REŠEVANJE HIPERBOLIČNEGA KVADRATNEGA PROBLEMA LASTNIH VREDNOSTI

BOR PLESTENJAK

Math. Subj. Class. (2000): 65F15, 15A18, 15A69

Predstavljen je kvadratni problem lastnih vrednosti. Opisana je numerična metoda za reševanje tridiagonalnega hiperboličnega kvadratnega problema lastnih vrednosti. Metoda uporablja inercijo, Laguerrovo metodo in strategijo deli-in-vladaj.

NUMERICAL SOLUTION OF THE HYPERBOLIC QUADRATIC EIGENVALUE PROBLEM

We give an overview of the quadratic eigenvalue problem. A numerical method for the solution of the tridiagonal hyperbolic quadratic eigenvalue problem is presented. The method uses the inertia, Laguerre's method, and the strategy of divide-and-conquer.

1. Uvod

Dan je kvadratni matrični polinom

$$Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K,$$

kjer so M, C in K realne $n \times n$ matrike. Pri *kvadratnem problemu lastnih vrednosti* iščemo tak skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ in tak neničelni vektor $x \in \mathbb{C}^n$, da je

$$Q(\lambda)x = 0. \tag{1}$$

V tem primeru je λ *lastna vrednost*, x pa *desni lastni vektor*. Neničelni vektor $y \in \mathbb{C}^n$, pri katerem je $y^*Q(\lambda) = 0$, je *levi lastni vektor*. V nadaljevanju bomo kvadratni problem lastnih vrednosti (1) označevali kar s Q.

Kvadratni problem lastnih vrednosti Q je *regularen*, če karakteristični polinom

$$p(\lambda) = \det Q(\lambda)$$

ni identično enak nič. Stopnja karakterističnega polinoma je kvečjemu $2n$. Njegove ničle so končne lastne vrednosti Q, ki jih tedaj, ko je stopnja polinoma p manjša od $2n$, po dogovoru dopolnimo z neskončnimi lastnimi vrednostmi. Neskončne lastne vrednosti Q ustrezajo ničelnim lastnim vrednostim kvadratnega problema lastnih vrednosti $\lambda^2 Q(1/\lambda) = \lambda^2 K + \lambda C + M$. Opazimo lahko, da se neskončne lastne vrednosti pojavijo le tedaj, ko je matrika M singularna.

Regularni kvadratni problem lastnih vrednosti ima tako $2n$ lastnih vrednosti (končnih ali neskončnih). Vsaki lastni vrednosti pripada vsaj en levi in vsaj en desni normiran lastni vektor. Drugače kot pri standardnem

problemu lastnih vrednosti $Ax = \lambda x$ in posplošenim problemu lastnih vrednosti $Ax = \lambda Bx$ lastni vektorji praviloma niso linearno neodvisni, saj več kot n vektorjev pač ne more biti linearno neodvisnih.

Tako kot pri standardnem problemu lastnih vrednosti je tudi tu *algebrajska večkratnost* lastne vrednosti enaka večkratnosti ničle karakterističnega polinoma, *geometrijska večkratnost* pa je število linearno neodvisnih lastnih vektorjev. Če ima algebrajsko večkratnost ena, je lastna vrednost *enostavna*, če pa je algebrajska večkratnost enaka geometrijski, je lastna vrednost *polenostavna*.

Da so zadeve lahko precej drugačne kot pri standardnem in posplošenem problemu lastnih vrednosti, kaže naslednji zgled, povzet iz [9].

Če vzamemo

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

potem je $\det Q(\lambda) = -6\lambda^5 + 11\lambda^4 - 12\lambda^3 + 12\lambda^2 - 6\lambda + 1$ in problem je regularen. Lastni pari so

k	1	2	3	4	5	6
λ_k	$1/3$	$1/2$	1	i	$-i$	∞
x_k	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Pet lastnih vrednosti je končnih, ena pa neskončna. Opazimo, da imata različni lastni vrednosti lahko isti lastni vektor, kar pri standardnem in posplošenem lastnem problemu seveda ni možno.

Standardni postopek za numerično reševanje kvadratnega problema lastnih vrednosti je *linearizacija*, kjer problem prevedemo na posplošeni problem lastnih vrednosti reda $2n$. Možnih linearizacij je več, za zgled pa vzemimo

$$\begin{bmatrix} 0 & N \\ -K & -C \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}, \tag{2}$$

kjer je N poljubna nesingularna matrika. Hitro lahko preverimo, da je λ, x lastni par kvadratnega problema lastnih vrednosti (1) natanko tedaj, ko je λ, $[\, x^T \quad \lambda x^T \,]^T$ lastni par za (2).

Če vzamemo $N = I$ in je M nesingularna, potem lahko (2) prevedemo na reševanje standardnega lastnega problema za matriko

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}. \tag{3}$$

S tem, ko se znebimo posplošenega problema lastnih vrednosti, lahko izgubimo kakšne uporabne lastnosti problema, kot je npr. simetričnost. Če pri simetričnem kvadratnem problemu lastnih vrednosti, kjer so matrike M, C in K simetrične, izberemo $N = -K$, potem sta v (2) obe matriki simetrični, pri (3) pa simetrije ni več.

Čeprav imamo za reševanje standardnega in posplošenega problema lastnih vrednosti na voljo obratno stabilne algoritme, nam to še ne zagotavlja stabilnega reševanja kvadratnega problema lastnih vrednosti prek linearizacije. Za stabilnost potrebujemo metodo, ki bi reševala originalni problem brez linearizacije. Primer takšnega algoritma za poseben primer kvadratnega problema lastnih vrednosti bomo predstavili v nadaljevanju.

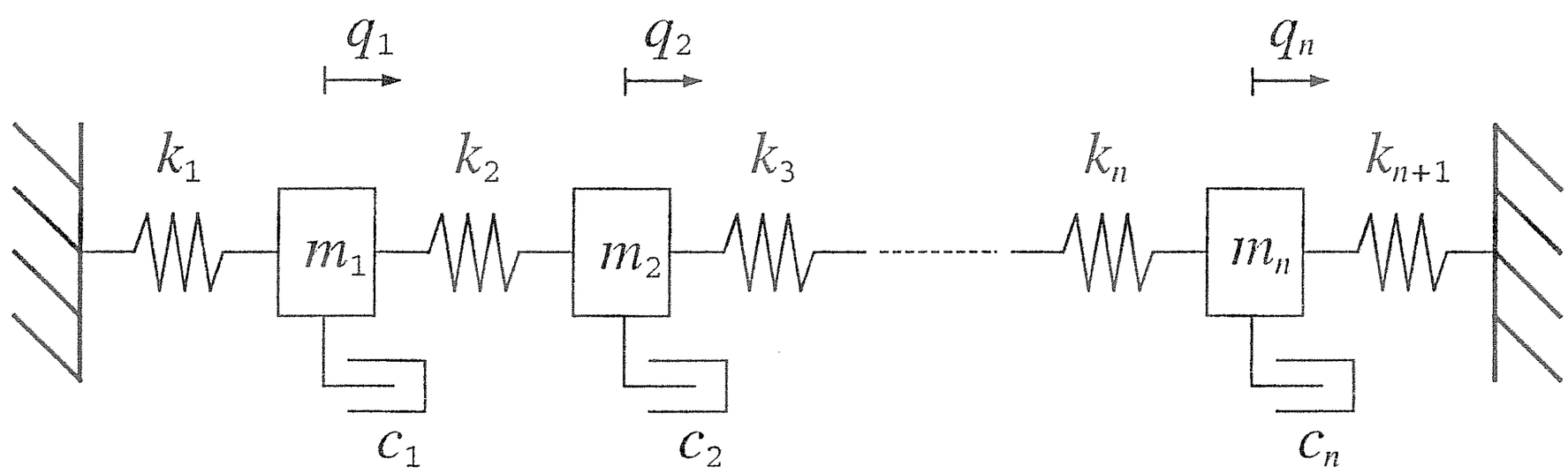
Več o kvadratnem problemu lastnih vrednosti in o tem, kako ga numerično rešiti, najdemo v obsežni literaturi, omenimo le izvrsten pregledni članek, ki sta ga napisala Tisseur in Meerbergen [9].

2. Uporaba

S kvadratnim problemom lastnih vrednosti se srečamo na številnih področjih. Ena izmed najpogostejših uporab je reševanje linearne diferencialne enačbe drugega reda

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t), \tag{4}$$

kjer so M, C in K matrike reda n, $q(t)$ in $f(t)$ pa vektorja dolžine n. Ta enačba nastopa npr. pri mehanskem nihanju, pri linearnih vezjih v elektrotehniki, v akustiki in drugje [9].



Slika 1. Dušen sistem mas in vzmeti. Masa i-tega telesa je m_i, k_i označuje konstanto i-te vzmeti, c_i konstanto i-tega dušilca, q_i pa odmik i-tega telesa od ravnovesne lege.

Za zgled vzemimo nihanje dušenega sistema mas in vzmeti na sliki 1, kjer predpostavimo še, da na i-to telo deluje sila f_i. Če predpostavimo $q_0 = q_{n+1} = 0$, potem iz Newtonovega zakona dobimo enačbe

$$m_i\ddot{q}_i(t) = -k_i\left(q_i(t) - q_{i-1}(t)\right) - k_{i+1}\left(q_i(t) - q_{i+1}(t)\right) - c_i\dot{q}_i(t) + f_i(t),$$

$i = 1, \ldots, n$, iz katerih sestavimo (4), kjer je

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ -k_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -k_n \\ & & -k_n & k_n + k_{n+1} \end{bmatrix}.$$

M je masna matrika, C matrika dušenja, K pa togostna matrika. V nadaljevanju bomo pokazali, kako je rešitev diferencialne enačbe (4) povezana z rešitvijo kvadratnega problema lastnih vrednosti (1).

Kadar so vse lastne vrednosti (1) različne, lahko splošno rešitev homogene diferencialne enačbe

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0, \tag{5}$$

ki jo dobimo iz (4), ko je $f = 0$, zapišemo v obliki

$$q(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k e^{\lambda_k t} x_k,$$

kjer so $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$ poljubne konstante in $x_1, \ldots, x_{2n}$ ustrezni lastni vektorji. Pri večkratnih lastnih vrednostih se rešitev zapiše s pomočjo Jordanovih trojic, ki jih tu ne bomo obravnavali, najdemo pa jih lahko npr. v [9].

Če obstaja lastna vrednost s pozitivnim realnim delom, potem velja $\lim_{t\to\infty} \|q(t)\| = \infty$ in pravimo, da je homogena enačba (5) *nestabilna*. Če za lastne vrednosti velja $\mathrm{Re}(\lambda_k) < 0$ za $k = 1, \ldots, 2n$, potem je homogena enačba *stabilna* in velja $\lim_{t\to\infty} \|q(t)\| = 0$. Poznamo tudi *šibko stabilnost*, kjer zahtevamo, da velja $\mathrm{Re}(\lambda_k) \leq 0$ za $k = 1, \ldots, 2n$, vse lastne vrednosti, za katere je $\mathrm{Re}(\lambda_k) = 0$, pa so polenostavne. Pri šibki stabilnosti ostane rešitev homogene enačbe po normi omejena, ko gre t proti ∞.

Splošna rešitev diferencialne enačbe (4) je enaka vsoti splošne rešitve homogene enačbe (5) in partikularne rešitve. Denimo, da je $f(t) = e^{i\omega_0 t} f_0$, kar npr. pri mehanskem nihanju na sliki 1 pomeni, da gre za vsiljeno nihanje s frekvenco ω_0. Če so vse lastne vrednosti različne in se $i\omega_0$ razlikuje od vseh lastnih vrednosti, potem je partikularna rešitev $p(t)$ diferencialne enačbe (4) podana s predpisom

$$p(t) = e^{i\omega_0 t} \sum_{k=1}^{2n} \frac{y_k^* f_0}{i\omega_0 - \lambda_k} x_k, \tag{6}$$

kjer so $y_1, \ldots, y_{2n}$ ustrezni levi lastni vektorji. Če se vsiljena frekvenca približa eni izmed lastnih frekvenc, lahko člen $\frac{y_k^* f_0}{i\omega_0 - \lambda_k}$ postane poljubno velik, če je le $y_k^* f_0 \neq 0$. Tedaj pravimo, da se pojavi resonanca.

Če imamo splošno funkcijo f oziroma prim večkratne lastne vrednosti lahko partikularno rešitev zapišemo v integralski obliki, ki jo najdemo v [4, 9].

3. Hiperbolični problem

V nadaljevanju se bomo omejili na poseben razred kvadratnih problemov lastnih vrednosti, kjer so matrike M, C in K simetrične, M je pozitivno definitna in za vsak neničelni vektor x velja

$$(x^T C x)^2 > 4(x^T M x)(x^T K x). \tag{7}$$

To je *hiperbolični* kvadratni problem lastnih vrednosti. Kadar je še dodatno K pozitivno definitna, C pa pozitivno semidefinitna matrika, imamo *nadkritično dušeni* kvadratni problem lastnih vrednosti.

Če vzamemo poljubni neničelni vektor x, potem je $x^T Q(\lambda) x = 0$ kvadratna enačba za λ, ki ima zaradi (7) dve enostavni realni rešitvi. Označimo ju z

$$\rho_\pm(x) = \frac{-c(x) \pm \sqrt{c(x)^2 - 4m(x)k(x)}}{2m(x)}, \tag{8}$$

kjer je $m(x) = x^T M x$, $c(x) = x^T C x$ in $k(x) = x^T K x$. To je posplošitev Rayleighovega kvocienta za kvadratni problem lastnih vrednosti. Kadar je x lastni vektor, je vsaj ena rešitev kvadratne enačbe (8) lastna vrednost.

Hiperbolični kvadratni problem lastnih vrednosti ima $2n$ realnih lastnih vrednosti in lastnih vektorjev, vse lastne vrednosti pa so polenostavne. Med n največjimi (*primarnimi*) lastnimi vrednostmi in n najmanjšimi (*sekundarnimi*) lastnimi vrednostmi je strog razmik. Primarnim lastnim vrednostim pripada n linearno neodvisnih lastnih vektorjev in enako velja za sekundarne lastne vrednosti.

Pri nadkritično dušenem problemu so vse lastne vrednosti negativne. Pri mehanskem nihanju na sliki 1 to pomeni, da se brez vsiljenega nihanja ($f = 0$) telesa, izmaknjena iz ravnovesne lege, vrnejo nazaj v ravnovesno lego, pri tem pa nobeno telo ne zaniha.

Ker so lastne vrednosti realne, jih lahko uredimo po velikosti, da velja

$$\lambda_{2n} \leq \cdots \leq \lambda_{n+1} < \lambda_n \leq \cdots \leq \lambda_1.$$

Primarne lastne vrednosti so $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, sekundarne pa $\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{2n}$. Za lastne vrednosti hiperboličnega kvadratnega problema velja naslednji izrek

o minimaksu, ki je posplošitev znanega Courant-Fischerjevega izreka o minimaksu za simetrične matrike [2].

Izrek 3.1 (Duffin, [3]). *Za $i = 1, \ldots, n$ velja*

$$\lambda_i = \max_{\substack{S \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=i}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \rho_+(x) = \min_{\substack{R \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(R)=n-i+1}} \max_{\substack{x \in R \\ x \neq 0}} \rho_+(x),$$

$$\lambda_{n+i} = \max_{\substack{S \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(S)=i}} \min_{\substack{x \in S \\ x \neq 0}} \rho_-(x) = \min_{\substack{R \subset \mathbb{R}^n \\ \dim(R)=n-i+1}} \max_{\substack{x \in R \\ x \neq 0}} \rho_-(x).$$

Pomembno lastnost hiperboličnega problema, ki nam bo prav prišla v nadaljevanju, opisuje naslednji izrek.

Izrek 3.2 (Markus, [7, izrek 31.3]). *Simetrični kvadratni problem lastnih vrednosti Q je hiperboličen natanko tedaj, ko obstaja tako realno število γ, da je $Q(\gamma)$ negativno definitna matrika.*

Za γ iz izreka 3.2 očitno velja $\max_{x \neq 0} \rho_-(x) < \gamma < \min_{x \neq 0} \rho_+(x)$ oziroma $\lambda_{n+1} < \gamma < \lambda_n$.

4. Inercija

Denimo, da imamo tridiagonalni hiperbolični kvadratni problem lastnih vrednosti, kar pomeni, da so matrike M, C in K tridiagonalne. Zgled za tovrstni problem je npr. mehansko nihanje iz drugega razdelka.

Za simetrično matriko A je *inercija* trojica $(\nu(A), \zeta(A), \pi(A))$, kjer je $\nu(A)$ število negativnih lastnih vrednosti, $\zeta(A)$ število lastnih vrednosti, ki so enake 0, $\pi(A)$ pa število pozitivnih lastnih vrednosti matrike A. Če je A tridiagonalna matrika, potem za izračun inercije obstaja stabilen in učinkovit algoritem, ki temelji na LDL^T razcepu in Sylvestrovem izreku o inerciji, najdemo ga npr. v [2]. Ko imamo učinkovit način za izračun inercije, lahko za izračun lastnih vrednosti uporabimo bisekcijo.

Podoben postopek lahko razvijemo za tridiagonalni hiperbolični kvadratni problem lastnih vrednosti. Uporabili bomo izrek 3.2 o obstoju takega γ, da je $Q(\gamma)$ negativno definitna matrika, in pokazali povezavo med inercijo $Q(\lambda)$ in številom lastnih vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti Q, ki so večje oziroma manjše od λ.

Izrek 4.3. *Naj bo Q hiperbolični kvadratni problem lastnih vrednosti in naj bo* $\det Q(\lambda_0) \neq 0$.

1. *Če je $\lambda_0 \leq \gamma$, potem je število negativnih lastnih vrednosti matrike $Q(\lambda_0)$ enako številu lastnih vrednosti Q, ki so manjše od λ_0.*

2. *Če je $\lambda_0 \geq \gamma$, potem je število negativnih lastnih vrednosti matrike $Q(\lambda_0)$ enako številu lastnih vrednosti Q, ki so večje od λ_0.*

Dokaz. Pri vsakem $\lambda \in \mathbb{R}$ je $Q(\lambda)$ simetrična matrika z n realnimi lastnimi vrednostmi

$$\mu_n(\lambda) \leq \mu_{n-1}(\lambda) \leq \cdots \leq \mu_1(\lambda). \tag{9}$$

μ_i so zvezne funkcije λ za $i = 1, \ldots, n$. Zaradi (9) se krivulje μ_i lahko le dotikajo, ne morejo pa se prepletati.

Očitno je λ_1 s-kratna lastna vrednost (1) natanko tedaj, ko ima $Q(\lambda_1)$ s-kratno lastno vrednost 0 oziroma $\mu_i(\lambda_1) = \ldots = \mu_{i+s-1}(\lambda_1) = 0$ pri nekem i. Ker je $Q(\gamma)$ negativno definitna matrika, pri $\lambda = \gamma$ za vse i velja $\mu_i(\lambda) < 0$, ko pa gre λ proti ∞ ali $-\infty$, postanejo vse lastne vrednosti $Q(\lambda)$ strogo pozitivne, saj je

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \frac{1}{\lambda^2} Q(\lambda) = M,$$

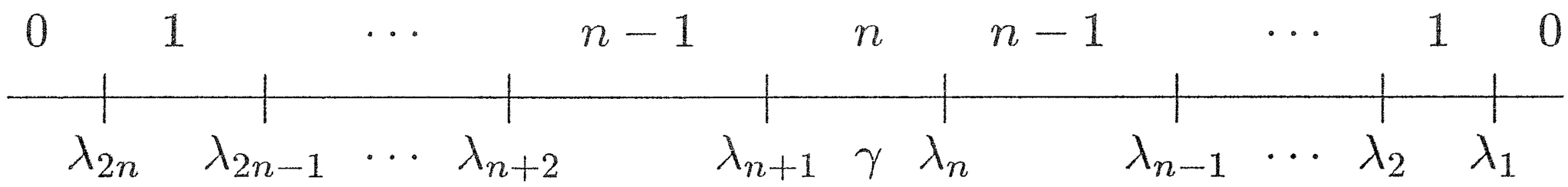
matrika M pa je pozitivno definitna.

Zaradi tega vsaka krivulja μ_i vsaj dvakrat seka os x, enkrat levo in enkrat desno od γ. Ker je krivulj n, lastnih vrednosti kvadratnega problema Q pa $2n$, sledi, da vsaka krivulja μ_i natanko dvakrat zavzame vrednost 0.

Ko gre λ od $-\infty$ do γ, je število lastnih vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti Q, ki so manjše od λ, enako številu negativnih lastnih vrednosti $Q(\lambda)$. Podobno na intervalu med γ in ∞ velja, da je število lastnih vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti Q, ki so večje od λ, enako številu negativnih lastnih vrednosti $Q(\lambda)$. ■

Opomba: Izrek 4.3 je posplošitev izreka, ki ga je Sapagovene [8] izpeljal za poseben primer hiperboličnega problema, kjer je M pozitivno, K pa negativno definitna matrika.

Slika 2 prikazuje, kako je število negativnih lastnih vrednosti matrike $Q(\lambda)$ odvisno od λ. Pri lastnih vrednostih $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ kvadratnega problema lastnih vrednosti Q pride do preskoka števila negativnih lastnih vrednosti $Q(\lambda)$ in to lahko uporabimo za preprost algoritem, ki s pomočjo bisekcije izračuna izbrano lastno vrednost.



Slika 2. Pri lastnih vrednostih kvadratnega problema lastnih vrednosti Q pride do preskoka števila negativnih lastnih vrednosti matrike $Q(\lambda)$.

Označimo z $\nu(\lambda_0)$ število negativnih lastnih vrednosti $Q(\lambda_0)$. Denimo, da iščemo primarno lastno vrednost in da imamo začetni interval $[a, b] \subset$

(γ, ∞), za katerega velja $\nu(a) \geq k$ in $\nu(b) < k$. Potem lahko z naslednjim algoritmom izračunamo λ_k.

Algoritem. Iz danih $n \times n$ simetričnih tridiagonalnih matrik M, C in K in začetnega intervala $[a, b]$ izračuna lastno vrednost λ_k tridiagonalnega hiperboličnega problema lastnih vrednosti.

dokler $|b - a| > \epsilon$
  $c = (a + b)/2$
  če $\nu(c) \geq k$
    $a = c$
  sicer
    $b = c$
  konec če
konec dokler

Algoritem lahko enostavno popravimo tako, da je uporaben tudi za sekundarne lastne vrednosti. Seveda lahko algoritem uporabimo tudi tedaj, ko matrike M, C in K niso tridiagonalne, le časovna zahtevnost računanja je v tem primeru večja.

5. Laguerrova metoda

Bisekcija je sicer zelo robustna metoda, ki nas vedno pripelje do rešitve, a konvergira zelo počasi. Kadar nas zanimajo vse lastne vrednosti, raje uporabimo Laguerrovo metodo. Laguerrova iteracija za $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$ se glasi

$$L_{\pm}(x) = x + \frac{2n}{\left(\frac{-p'(x)}{p(x)} \pm \sqrt{(2n-1)\left((2n-1)\left(\frac{-p'(x)}{p(x)}\right)^2 - 2n\frac{p''(x)}{p(x)}\right)}\right)}. \tag{10}$$

Iz začetnega približka x dobimo dva približka, ki ju označimo z $L_-(x)$ in $L_+(x)$. Če si predstavljamo, da sta v neskončnosti pozitivni in negativni krak realne osi povezana, potem za $x \neq \lambda_i$, $i = 1, \ldots, 2n$, velja, da $L_-(x)$ leži med x in najbližjo manjšo lastno vrednostjo, $L_+(x)$ pa med x in najbližjo večjo lastno vrednostjo. Za $x \in (\lambda_{i+1}, \lambda_i)$ tako velja

$$\lambda_{i+1} < L_-(x) < x < L_+(x) < \lambda_i.$$

Laguerrova metoda ima naslednje lepe lastnosti, ki jih najdemo npr. v [1,10]:

- Konvergenca v bližini enostavne ničle je kubična, v bližini večkratne ničle pa linearna.

- Če ima polinom same realne ničle, potem imamo globalno konvergenco, kar pomeni, da za vsak začetni približek x_0 zaporedje $x_{r+1} = L_+(x_r)$ monotono konvergira proti najmanjši ničli polinoma, ki je večja ali enaka x_0. Podobno zaporedje $x_{r+1} = L_-(x_r)$ monotono konvergira proti največji ničli polinoma, ki je manjša ali enaka x_0. Tu si spet predstavljamo, da sta v neskončnosti pozitivni in negativni krak realne osi povezana.

Za Laguerrovo metodo potrebujemo ekonomičen in stabilen izračun vrednosti $p(\lambda)$, $p'(\lambda)$ in $p''(\lambda)$, kjer je $p(\lambda) = \det Q(\lambda)$. Naj bo

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

kjer je $a_i = a_i(\lambda)$ in $b_i = b_i(\lambda)$. Naj bo $p_k(\lambda)$ determinanta vodilne $k \times k$ podmatrike $Q(\lambda)$ za $k = 1, \ldots, n$. Ker je matrika $Q(\lambda)$ tridiagonalna, lahko hitro izpeljemo naslednje tričlenske rekurzivne formule, kjer smo zaradi preglednosti povsod opustili argument λ.

$$\begin{aligned} &p_0 = 1,\ p_1 = a_1, \\ &p_{r+1} = a_{r+1}p_r - b_r^2 p_{r-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &p_0' = 0,\ p_1' = a_1', \\ &p_{r+1}' = a_{r+1}'p_r + a_{r+1}p_r' - 2b_r b_r' p_{r-1} - b_r^2 p_{r-1}'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &p_0'' = 0,\ p_1'' = a_1'', \\ &p_{r+1}'' = a_{r+1}''p_r + 2a_{r+1}'p_r' + a_{r+1}p_r'' - 2(b_r')^2 p_{r-1} - \\ &\qquad - 2b_r b_r'' p_{r-1} - 4b_r b_r' p_{r-1}' - b_r^2 p_{r-1}''. \end{aligned}$$

Pri računanju vrednosti funkcij p, p' in p'' po zgornjih formulah lahko pride do težav s prekoračitvijo ali podkoračitvijo obsega [6], zato je pravilna pot izpeljava rekurzivnih formul za p'/p in p''/p, to pa sta ravno količini, ki ju potrebujemo v formuli (10). Podrobnosti bomo izpustili, izpeljava pa poteka podobno kot v [6].

6. Deli-in-vladaj

Sedaj bomo poskrbeli še za dobre začetne približke. Do njih pridemo rekurzivno z uporabo principa deli-in-vladaj. Problem razdelimo na dva manjša kvadratna problema lastnih vrednosti, potem pa združene lastne

vrednosti obeh manjših problemov uporabimo kot začetne približke za lastne vrednosti originalnega problema. Algoritem, ki ga bomo predstavili v tem razdelku, je posplošitev algoritma za simetrični tridiagonalni problem lastnih vrednosti, ki sta ga razvila Li in Zeng [6].

Izberemo $m \approx n/2$ in postavimo b_m na 0. Dobimo

$$Q_0(\lambda) = \begin{bmatrix} Q_1(\lambda) & 0 \\ 0 & Q_2(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Matriki $Q_0(\lambda)$ in $Q(\lambda)$ se malo razlikujeta, saj smo spremenili le dva elementa, zato pričakujemo, da se tudi lastne vrednosti kvadratnih problemov lastnih vrednosti Q_0 in Q malo razlikujejo.

Q_1 in Q_2 sta manjša hiperbolična kvadratna problema lastnih vrednosti, lastne vrednosti Q_0 pa so unija lastnih vrednosti Q_1 in Q_2. Označimo urejene lastne vrednosti Q_0 z $\widetilde{\lambda}_{2n} \leq \cdots \leq \widetilde{\lambda}_1$. To bodo naši začetni približki za lastne vrednosti Q.

Definirajmo kvadratni problem lastnih vrednosti $Q(t)$ z matriko

$$Q(t, \lambda) = tQ(\lambda) + (1-t)Q_0(\lambda).$$

Če so lastne vrednosti $Q(t)$ realne za $t \in [0,1]$, potem lahko pokažemo, da se lastne vrednosti Q_0 in Q prepletajo. Podoben izrek sta Li in Li [5, trditev 2.1] pokazala za simetrični tridiagonalni problem lastnih vrednosti.

Izrek 6.4. *Označimo lastne vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti $Q(t)$ z $\lambda_{2n}(t) \leq \cdots \leq \lambda_1(t)$. Za vsako lastno krivuljo $\lambda_i(t)$ velja, da je na intervalu $[0,1]$ ali strogo monotona ali pa enaka konstanti.*

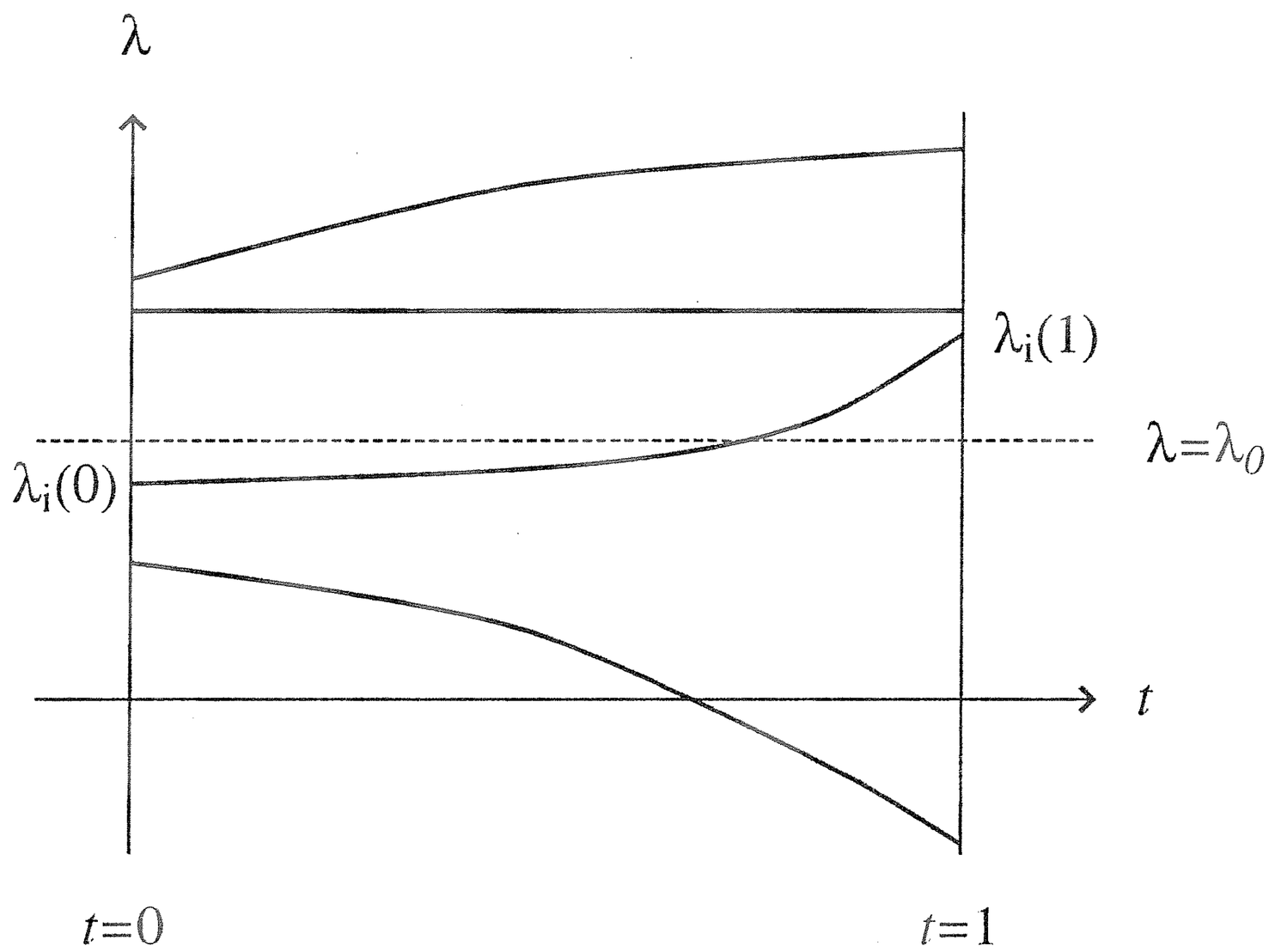
Dokaz. Iz konstrukcije Q_0 in iz rekurzivne formule za determinanto tridiagonalne simetrične matrike iz prejšnjega razdelka je razvidno, da lahko determinanto $Q(t, \lambda)$ zapišemo v obliki

$$p(t, \lambda) = \det Q(t, \lambda) = p_1(\lambda) + t^2 p_2(\lambda),$$

kjer sta p_1 in p_2 polinoma stopnje $2n$. Če za izbrani λ_0 velja $p_2(\lambda_0) \neq 0$, potem ima enačba $p(t, \lambda_0) = 0$ največ eno rešitev na $[0,1]$. Zaradi tega so vse lastne krivulje $\lambda_i(t)$ monotone na $[0,1]$.

Če je $p_2(\lambda_0) = 0$, potem je λ_0 lastna vrednost Q_0. Potem imamo tedaj, ko je tudi $p_1(\lambda_0) = 0$, konstantno lastno krivuljo $\lambda_i(t) = \lambda_0$. Kadar pa krivulja $\lambda_i(t)$ ni konstantna, je zaradi zgornjih ugotovitev strogo monotona. ■

Če so vse lastne vrednosti Q_0 paroma različne, se krivulje $\lambda_i(t)$ tako ne sekajo na $[0,1)$, saj so po eni strani ali konstantne ali pa strogo monotone,



Slika 3. Krivulje $\lambda_i(t)$ se ne sekajo na $[0,1)$, vsaka krivulja $\lambda_i(t)$ je ali konstantna ali strogo monotona, navzgor je omejena z $\lambda_{i-1}(1)$, navzdol pa z $\lambda_{i+1}(1)$.

po drugi strani pa krivulje na $(0,1)$ ne morejo sekati vrednosti $\lambda_i(0)$ in $\lambda_i(1)$. Situacija je prikazana na sliki 3.

Sedaj lahko pokažemo naslednji izrek o prepletanju lastnih vrednosti Q_0 in Q. Podoben izrek sta za simetrični tridiagonalni problem lastnih vrednosti pokazala Li in Zeng [6, izrek 3.1].

Izrek 6.5. *Naj bodo vse lastne vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti $Q(t)$ realne za $t \in [0,1]$ in naj bodo*

$$\widetilde{\lambda}_{2n} \leq \cdots \leq \widetilde{\lambda}_1$$

lastne vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti Q_0,

$$\lambda_{2n} \leq \cdots \leq \lambda_1$$

pa lastne vrednosti kvadratnega problema lastnih vrednosti Q. Potem velja:
(a) $\lambda_{2n} \leq \widetilde{\lambda}_{2n}$ *in* $\widetilde{\lambda}_1 \leq \lambda_1$,
(b) $\lambda_{i+1} \leq \widetilde{\lambda}_i \leq \lambda_{i-1}$ *za* $i = 2, \ldots, n-1$ *in* $i = n+2, \ldots, 2n-1$,
(c) $\widetilde{\lambda}_{n+1} \leq \lambda_{n+1} < \lambda_n \leq \widetilde{\lambda}_n$.

Dokaz. Matriki $Q_1(\lambda)$ in $Q_2(\lambda)$ sta glavni podmatriki $Q(\lambda)$, zato so po izreku 3.1 lastne vrednosti kvadratnih problemov lastnih vrednosti Q_1 in Q_2 vse manjše od λ_1 in večje od λ_{2n}. Ker pa so lastne vrednosti Q_0 unija lastnih vrednosti Q_1 in Q_2, od tod sledi točka a). Na podoben način pokažemo točko c).

Točka b) sledi iz izreka 6.4, ki pravi, da λ_i in $\widetilde{\lambda}_i$ povezuje monotona lastna krivulja $\lambda_i(t)$, zanjo pa vemo, da je navzgor in navzdol omejena z λ_{i-1} oziroma λ_{i+1}. ■

Ker velja $\lambda_{i+1} \leq \widetilde{\lambda}_i \leq \lambda_{i-1}$, lahko vedno vzamemo $\widetilde{\lambda}_i$ kot začetni približek za λ_i. Iz vrednosti $\nu(Q(\widetilde{\lambda}_i))$ lahko razberemo, ali je $\lambda_i \geq \widetilde{\lambda}_i$ ali $\widetilde{\lambda}_i \geq \lambda_i$, in se potem odločimo za uporabo zaporedja L_+ ali L_-. Laguerrova metoda potem monotono skonvergira proti lastni vrednosti λ_i.

V grobem lahko postopek za računanje lastnih vrednosti tridiagonalnega hiperboličnega kvadratnega problema lastnih vrednosti z Laguerrovo metodo strnemo v naslednjem algoritmu.

Algoritem. Iz danih simetričnih tridiagonalnih matrik M, C in K reda n izračuna lastne vrednosti $\lambda_{2n} \leq \cdots \leq \lambda_1$ tridiagonalnega hiperboličnega kvadratnega problema lastnih vrednosti Q.

Korak 1. Če je $n = 1$, reši kvadratno enačbo $\lambda^2 M + \lambda C + K = 0$ in končaj.

Korak 2. Sicer, naj bo $m = \lfloor n/2 \rfloor$. Naj bodo M_1, C_1 in K_1 vodilne $m \times m$, M_2, C_2 in K_2 pa zadnje $(n-m) \times (n-m)$ podmatrike M, C in K.

Korak 3. Poišči lastne vrednosti tridiagonalnega hiperboličnega kvadratnega problema lastnih vrednosti $\lambda^2 M_i + \lambda C_i + K_i$ za $i = 1, 2$.

Korak 4. Združi rešitve iz koraka 3 in jih uredi v $\widetilde{\lambda}_{2n} \leq \cdots \leq \widetilde{\lambda}_1$.

Korak 5. Lastne vrednosti iz koraka 4 uporabi kot začetne približke za Laguerrovo metodo:

za $i = 1, \ldots, 2n$
  $x_0 = \widetilde{\lambda}_i$, $k = 0$
  ponavljaj
    če $(i \leq n$ in $\nu(\widetilde{\lambda}_i) \geq i)$ ali $(i \geq n+1$ in $\nu(\widetilde{\lambda}_i) \leq 2n - i)$
      $x_{k+1} = L_+(x_k)$
    sicer
      $x_{k+1} = L_-(x_k)$
    konec če
    $k = k + 1$
  dokler ni $|x_k - x_{k-1}| \leq \epsilon$
  $\lambda_i = x_k$
konec za

Opombe:

- Metoda je rekurzivna, saj v koraku 3 za računanje lastnih vrednosti manjšega problema spet uporabimo isti algoritem.
- Opazimo, da algoritem spominja na metodo deli-in-vladaj za računanje lastnih vrednosti simetrične tridiagonalne matrike [2].

- Za lažjo predstavitev nismo obravnavali večkratnih lastnih vrednosti. To in še druge podrobnosti lahko najdemo v [6].

7. Numerični primer

Za zgled uporabe algoritma iz prejšnjega razdelka vzemimo dušen sistem mas in vzmeti iz razdelka 2. Naj bo $n = 4$, mase vseh teles naj bodo 1, konstanti prvih dveh dušilcev naj bosta 2, zadnjih dveh pa 3. Konstanti prve in zadnje vzmeti naj bosta 0.2, drugih pa 0.1. Tako dobimo

$$M = I, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.1 & & \\ -0.1 & 0.2 & -0.1 & \\ & -0.1 & 0.2 & -0.1 \\ & & -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

Poglejmo, kako deluje zadnji korak v algoritmu, kjer uporabimo Laguerrovo metodo. Začetni približki v zadnjem koraku so unije lastnih vrednosti kvadratnih problemov lastnih vrednosti, ki ju dobimo, če problem razdelimo na dva dela velikosti 2×2. Dobimo

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}_1 &= -0.04679547, & \widetilde{\lambda}_5 &= -1.79887208, \\ \widetilde{\lambda}_2 &= -0.07166633, & \widetilde{\lambda}_6 &= -1.92625628, \\ \widetilde{\lambda}_3 &= -0.12588334, & \widetilde{\lambda}_7 &= -2.87411666, \\ \widetilde{\lambda}_4 &= -0.20112792, & \widetilde{\lambda}_8 &= -2.95320453. \end{aligned}$$

To uporabimo kot začetne približke za Laguerrovo metodo. Če uporabimo kot pogoj za konvergenco 10^{-15}, dobimo naslednje rezultate. Zgornji indeksi v oklepajih pomenijo število korakov, ki jih je potrebovala Laguerrova metoda z začetnim približkom $\widetilde{\lambda}_i$, da je skonvergirala k lastni vrednosti λ_i z natančnostjo 10^{-15}.

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(3)} &= -0.02329968, & \lambda_5^{(4)} &= -1.79797231, \\ \lambda_2^{(3)} &= -0.08620822, & \lambda_6^{(4)} &= -1.92625301, \\ \lambda_3^{(3)} &= -0.13102707, & \lambda_7^{(4)} &= -2.87448331, \\ \lambda_4^{(3)} &= -0.20672298, & \lambda_8^{(5)} &= -2.95403341. \end{aligned}$$

Preverimo lahko, da res velja prepletanje iz izreka 6.5. Opazimo tudi, da so $\widetilde{\lambda}_i$ zelo dobri približki za lastne vrednosti λ_i. Pri večjih matrikah je to še bolj izrazito in v končnem koraku algoritma potrebujemo povprečno še manj korakov Laguerrove metode kot v zgornjem zgledu.

LITERATURA

[1] Z. Bohte, *Numerično reševanje nelinearnih enačb*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1993.

[2] J. W. Demmel, *Applied numerical linear algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997 (slovenska izdaja: E. Zakrajšek, *Uporabna numerična linearna algebra*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2000).

[3] R. J. Duffin, *A minimax theory for overdamped networks*, J. Rational Mech. Anal. **4** (1955), 221–233.

[4] P. Lancaster, *Lambda-matrices and vibrating systems*, Pergamon Press, Oxford, 1966.

[5] K. Li in T. Y. Li, *An algorithm for symmetric tridiagonal eigenproblems: Divide and conquer with homotopy continuation*, SIAM J. Sci. Comput. **14** (1993), 735–751.

[6] T. Y. Li in Z. Zeng, *Laguerre's iteration in solving the symmetric tridiagonal eigenproblem – revisited*, SIAM J. Sci. Comput. **15** (1994), 1145–1173.

[7] A. S. Markus, *Introduction to the spectral theory of polynomial operator pencils*, Amer. Math. Soc., Providence, 1988.

[8] D. Sapagovene, *The Sturm sequence for a nonlinear algebraic eigenvalue problem*, Upravlenija I sekcija VYP **16** (1976), 87–95.

[9] F. Tisseur in K. Meerbergen, *The quadratic eigenvalue problem*, SIAM Review **43** (2001), 235–286.

[10] J. Wilkinson, *Algebraic eigenvalue problem*, Oxford University Press, Oxford, 1965.

VESTI

ZOISOVI PRIZNANJI ZA ZNANSTVENORAZISKOVALNO DELO MATEMATIKU IN FIZIKU

V prostorih Narodnega muzeja v Ljubljani so bile 25. novembra 2003 podeljene Zoisove nagrade in priznanja za znanstvenoraziskovalno delo. Priznanji sta prejela tudi 2 znanstvenika, ki raziskujeta v matematiki oziroma fiziki.

Prof. dr. Tomaž Košir, ki je prejel Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke na področju matematike, je izredni profesor na Oddelku za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in je eden najvidnejših slovenskih raziskovalcev na področju algebre. Svoje najodmevnejše rezultate je dosegel na področju večparametričnih problemov lastnih vrednosti. Njegovi izvirni rezultati na tem področju so vodili v razvoj novih numeričnih metod za reševanje aplikativnih problemov.

Znanstveni opus profesorja Koširja v zadnjih sedmih letih obsega 15 del v uglednih mednarodnih matematičnih revijah, med katerimi po kakovosti posebej izstopa devet razprav. V dveh od teh del je z uporabo tehnike koalgeber rešil dva problema, ki sta ju v šestdesetih letih prejšnjega stoletja postavila ugledna raziskovalca, profesorja Frederick V. Atkinson in Chandler Davis. Profesor Košir je imel v tem obdobju dvajset vabljenih predavanj na mednarodnih znanstvenih srečanjih in uglednih tujih univerzah, v letu 2000/01 pa je kot gostujoči profesor predaval na univerzah v ZDA in Kanadi. Njegovo znanstveno delo pomeni pomemben prispevek matematiki in njeni uporabi.

Prof. dr. Janez Bonča, ki je prejel Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke na področju fizike trdne snovi, je izredni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in višji znanstveni sodelavec na Institutu Jožef Stefan v Ljubljani.

Večina nagrajenčevih del je posvečena uporabi novih numeričnih metod za raziskave kvantnomehanskih sistemov več delcev v trdni snovi. Kot prvi pri nas je vpeljal metodo kvantnega Monte Carla in jo nadgradil. Z njo je omogočil obravnavo v imaginarnem času in bistveno izboljšal napovedi dinamike kvantnih sistemov. Uporabil jo je pri obravnavi spinske korelacije v periodičnem Andersonovem modelu in pri pojavu črtastih struktur naboja v Hubbardovem modelu. Skupaj s sodelavci je z omenjeno metodo raziskal obstoj feromagnetnih struktur v sistemih z močnimi korelacijami, kar je pripeljalo do odkritja novega mikroskopskega mehanizma za feromagnetizem. Razložil je nenavadno visoke temperature prehoda v feromagnetno stanje v sistemih, ki vsebujejo prehodne elemente.

Pri obravnavi neelastičnih elektronskih procesov in polaronskih stanj je profesor Bonča vpeljal nov prijem s preslikavo problema več delcev na problem variacijskega računa za en delec v veliki bazi, ki se rešuje numerično z metodo točne diagonalizacije. Ta prijem je uporabil za obravnavo tuneliranja elektronov, sklopljenih s fononi skozi nanostrukture, ter za splošne sisteme močno sklopljenih elektronov in fononov. Za primer dveh elektronov, sklopljenih z optičnimi fononi, je razvil analitično perturbacijsko metodo v limiti močnih sklopitev in napovedal zmanjšanje efektivne bipolarne mase, obstoj bipolarona z večjim radijem ter izpeljal efektivni Hamiltonov operator.

Dela profesorja Janeza Bonče prinašajo nove ideje in metode v teorijo trdne snovi in so pomemben prispevek v zakladnico svetovnega znanja.

Na osnovi uradnih utemeljitev priredil:
Roman Drnovšek

VABILO

V OMF, letnik 49, št. 2, str. 62–63, in na internetni domači strani DMFA `http://www.dmfa.si/` je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge za letošnja društvena priznanja pošljete do **30. septembra 2004** na naslov:
DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost,
1000 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 2964.

Predlogi naj bodo vsestransko utemeljeni, da bodo omogočili komisiji tehtno presojo in pravično odločitev.

Predsednik DMFA Slovenije
Peter Petek

MIHAEL PETERNEL, PRVI RAVNATELJ LJUBLJANSKE REALKE

MARKO RAZPET

Math. Subj. Class. (2000): 01A70

Predstavljeno je življenje in delo Mihaela Peternela v spomin njegove 195-letnice rojstva in 120-letnice smrti.

MIHAEL PETERNEL, THE FIRST PRINCIPAL IN THE HIGH SCHOOL OF LJUBLJANA

The life and work of Mihael Peternel in memory of the 195th anniversary of his birth and the 120th anniversary of his death are presented.

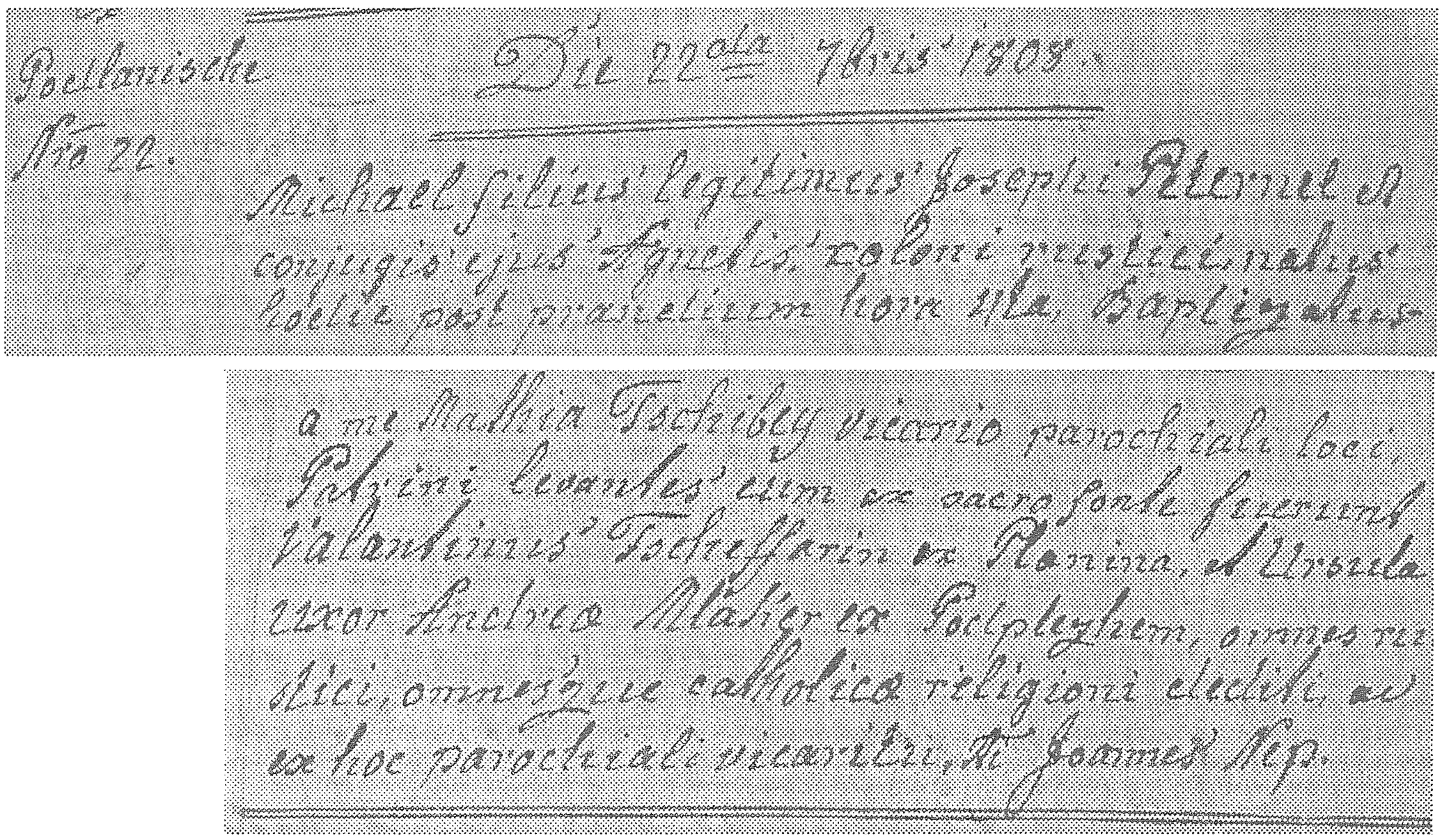
Uvod

Mihael Peternel
(1808–1884)

V akademskem letu 1968/69 smo bruci, študenti matematike, še imeli nekatera predavanja in vaje v univerzitetni zgradbi na Kongresnem trgu. Tudi matematična knjižnica je bila takrat še tam. Ko smo se med urami selili z enega konca Ljubljane na drugega, smo za univerzitetno zgradbo, pod veliko zbornično dvorano, v kateri potekajo slavnostne seje in kjer podeljujejo tudi akademske nazive, torej med Vegovo in Gosposko ulico, opazili uličico z zelo skromnim številom hišnih številk, in sicer Peternelovo ulico. Priimek Peternel me je takoj spomnil na domače kraje. Na Cerkljanskem in Škofjeloškem je namreč to precej pogost priimek, ki ga srečujemo v oblikah Peternel in Peternelj. Ko sem bil v okviru mednarodnega programa Tempus leta 1993 nekaj tednov gost na matematičnem oddelku na Univerzi v Bayreuthu, torej v Wagnerjevem mestu na Bavarskem, sem tam srečal matematika, ki pa se je pisal Peternell. Morda imajo Peternelji, Peterneli in Peternelli nekje v davnini skupnega prednika, kar ne bi bilo nič čudnega, saj so brižinski (freisinški) škofje imeli veliko posesti na Škofjeloškem. Nisem pa kot bruc niti pomislil, da bi utegnil Peternel, ki ima ulico sredi Ljubljane, biti doma v vasi, ki je sosednja moji rojstni. Doma, v osnovni šoli in na gimnaziji v Idriji pa nam o tem tudi niso nič govorili.

Leta 1996 smo v Cerknem imeli strokovno srečanje matematičnih pedagogov v čast cerkljanskemu rojaku matematiku Francu Močniku, ki je najbolj znan po svojih številnih matematičnih učbenikih. V svojem prispevku [3] je kolega Milan Hladnik omenil tudi Mihaela Peternela. Ko mi je priskrbel kopijo Binderjevega članka [1] (v nemščini), v katerem sem prebral, da je doma v Podlaniščah, dandanes v občini Cerkno, in ko mi je moja nekdanja

profesorica zgodovine Anica Štucinova, rojena Cerkljanka, omenila, da je Peternel naše gore list, sem se začel zanj bolj zanimati. Ugotovil sem, da je o njem veliko zapisanega, predvsem po zaslugi profesorice Slavice Pavličeve v [4,5], in da je omenjeni Binderjev članek pravzaprav edini, ki izčrpno in iz prve roke piše o Peternelu. Sklenil sem, da malo pogledam naokoli po krajih, kjer je služboval, da obiščem sorodnike, ki sem jih poznal že v svojih otroških letih, in da zberem pisna Peternelova dela. Ugotovil sem, da spomin na Peternela med preprostim ljudstvom še živi, in prišel do spoznanja, da si v svojem rojstnem kraju zasluži vsaj skromno spominsko ploščo. Rahlo sporen je bil le še dan Peternelovega rojstva. Kot kaže, je Binder pomotoma zapisal 22. november, kar so potem povzemali drugi avtorji. V seznamu učnega osebja ljubljanske realke in na Peternelovem spomeniku na Navju lepo piše 22. september. Ta podatek smo preverili v knjigi rojstev v Škofijskem arhivu v Ljubljani in ga s tem potrdili.



Zapis v Knjigi rojstev, ki jo hrani Nadškofijski arhiv v Ljubljani.
Prevod latinskega teksta se glasi:
Podlanišče, 22. septembra 1808.
Mihael, zakonski sin Jožefa Peternela in njegove žene Neže, kmeta najemnika, rojen danes po kosilu ob 4. uri, krščen od mene, Matije Čibeja, vikarja tukajšnje župnije. Botra, dvigajoča njega iz svetega izvira, sta Valentin Čeferin iz Planine in Urša, žena Andreja Mlakarja iz Podpleč in obenem iz tega župnijskega vikariata sv. Janeza Nepomuka, oba kmeta in vdana katoliški veri.

Ob pomoči cerkljanskega župana in državnega svetnika g. Jurija Kavčiča, prijatelja Štefana Rutarja, dobrega poznavalca cerkljanskih starožitnosti, nekdanjega sošolca Edvarda Dežele, ki se spozna na spominske plošče, nesebičnih domačinov in drugih smo v razmeroma kratkem času pripravili vse

potrebno, da smo Mihaelu Peternelu prav na njegov rojstni dan, 22. septembra 2003, odkrili spominsko ploščo na hiši Podlanišče 15. Najlepša hvala vsem, ki so se za to dejanje zares potrudili. Naneslo je, da se je to zgodilo točno en dan po enem od številnih slovenskih referendumov. Slovesnosti, ki je potekala v prelepem sončnem vremenu, se je udeležilo okoli sto ljudi od blizu in daleč. Hiše ni težko najti, saj mimo nje pelje dobro vzdrževana hribovska cesta s prelaza Kladje (787 m) proti Stari Oselici. Cesta se na Trebiji priključi oni po Poljanski dolini.

Življenje in delo Mihaela Peternela

Duhovnik, profesor, naravoslovec, polihistor, politehnik, samouk Mihael Peternel se je rodil 22. septembra 1808 na kmetiji, ki se ji po domače reče Na Lanišah in je nekoč spadala k Podjelovemu Brdu in s tem pod Kranjsko, sedaj pa k Podlaniščam v občini Cerkno. Podjelovo Brdo obstaja tudi še dandanes, le da je bilo nekoč precej večje naselje, ki se je razdelilo na Podlanišče in današnje Podjelovo Brdo. Med obema vojnama pa je vmes potekala rapalska meja, ki je ločevala Podlanišče na italijanski od Podjelovega Brda na jugoslovanski strani. V cerkvenem oziru je kraj Peternelovega rojstva takrat spadal k Novi Oselici, kar velja še danes.

O Mihaelovem očetu Jožefu je malo znanega, pač pa vemo, da je Jožefov oče Blaž prekupčeval s platnom vse tja do Trsta. Ime kmetije Na Lanišah priča, da so na njej med drugim pridelovali in najbrž tudi predelovali lan. Za Mihaelovo mater Nežo imamo osnovne podatke, saj ji je sin dal vzidati spominsko ploščo v zid cerkve v Novi Oselici. Mama Neža je bila preverjeno doma v Gorjah pod Poreznom, in sicer pr' Frencietu. Ta hiša je pod spomeniškim varstvom.

Mihael je obiskoval glavno šolo v Idriji med letoma 1818 in 1821. Nato se je šolal v Gorici v letih 1821 in 1822, v Celovcu do leta 1823 in v Ljubljani do leta 1829. Filozofijo je študiral na liceju v Ljubljani od leta 1829 do 1831, nato pa teologijo do leta 1835, prav tako v Ljubljani. V duhovnika je bil posvečen leta 1835. Opravljal je dušno pastirstvo na Dobrovi pri Ljubljani leta 1835, nato v Moravčah do 1839, v Poljanah nad Škofjo Loko do 1843, v Šmartnem pod Šmarno goro v letih 1843–1850 in v Vodicah do 1852. Leta 1851 je opravil učiteljski izpit.

Na predlog cerkljanskega rojaka matematika Franca Močnika (1814–1892), takratnega šolskega svetnika in nadzornika ljudskih šol v Ljubljani, je bil Peternel imenovan za prvega ravnatelja na novo ustanovljene trirazredne ljubljanske realke. To funkcijo je opravljal med letoma 1852 in 1860. Nadomestil ga je Rudolf Schnedar (1828–1862), profesor za opisno geometrijo in strojništvo na realki v Brnu na Moravskem. Na realki je Peternel tudi sam poučeval, in sicer religijo, prirodoslovje, fiziko in kemijo. Njegove

pedagoške sposobnosti so bile zavidanja vredne, saj je, kot piše Binder, tako dobro naučil svoje dijake, da tisti, ki so se takrat vpisali na zagrebško politehniko, tam pri študiju praktično niso imeli nikakršnih težav. Vse do konca prve svetovne vojne je bil Peternel prvi in edini slovenski ravnatelj na realki, kajti za njim so to mesto zasedali tujci. Bil je predčasno upokojen leta 1874. Vse življenje je bil skromen, je pa do svojih zadnjih dni spremljal njemu dosegljivo strokovno naravoslovno literaturo. Umrl je po hujši bolezni v Ljubljani, 6. avgusta 1884. Pokopan je bil na Navju v Ljubljani, kjer spomenik njemu v čast še stoji. Spomenik sem našel potem, ko mi je prišla v roke knjiga [6].

Pripomnimo, da je Močnika za študij matematike navdušil takrat priznani matematik Leopold Karl Schulz von Strassnitzki (1803–1853) iz Krakowa, po poljsko Strasznicki, ki je med letoma 1827 in 1834 predaval matematiko na ljubljanskem liceju. Strassnitzkega, ki je zelo cenil oba, Močnika in Peternela, tu pa tam najdemo omenjenega na seznamu rekordov glede izračunanih decimalk števila π. Po dolgem času je namreč leta 1844 Johann Martin Zacharias Dase (1824–1861) z 200 točnimi decimalkami tega znamenitega števila posekal stari Vegov rekord s 136 točnimi decimalkami. Dase, pišejo tudi Dahse, ki sploh ni bil akademsko matematično izobražen, je slovel kot čudežni otrok v hitrem računanju in število π mu je uspelo izračunati v nekaj tednih s številskimi vrstami in formulo, ki jo je izpeljal Strassnitzki:

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}.$$

Menda je tudi sam Gauss uporabljal Zachariasovo računsko nadarjenost. Tiste čase so število π računali z znano vrsto

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots, \quad |x| \leq 1\,,$$

ki jo je odkril škotski matematik James Gregory (1638–1675). Formula Strassnitzkega je že na prvi pogled ugodna za računanje, ker v njej nastopajo sami preprosti ulomki: $1/2, 1/5 = 2/10, 1/8 = (1/2)^3$.

Mihael Peternel je bil zelo dober učitelj, praktik in samouk. Njegova dela nam izpričujejo tudi izredno skrb za lepo domačo besedo. Praktično ni področja v takratnem naravoslovju, na katero se ne bi spoznal. Bil je učenec in asistent znanega profesorja fizike Janeza Kersnika (1783–1850), deda pisatelja Janka Kersnika (1852–1897). Po Kersniku je postal profesor fizike v Ljubljani češki Nemec Heinrich Mitteis (1821–1879), ki je bil tudi ravnatelj realke leta 1862. Mitteis je pogosto predaval izbrani druščini o elektriki. V razpravi po nekem njegovem predavanju leta 1856 je Peternel opozoril na povezave med električnimi pojavi v strelovodu in meteorologijo.

Leta 1843 je Peternel pripravljal poljansko mladino na Sončev mrk, ki je bil 21. decembra 1843 viden v naših krajih. V Šmartnem pod Šmarno goro je opazoval razelektritvene pojave ob nevihtah (korona, Elijev ogenj, Elmov ogenj). V Vodicah je sam izdelal Bainov telegraf, ki ga je izumil Škot Alexander Bain (1811–1877), s čimer se je povezal s kolegom v Zapogah. Ker se je oblastem zdelo njegovo početje nevarno, so mu prepovedali namestitev vodov. Dobro je obvladal tudi fiziko in za njen kvalitetni pouk je sam izdelal številna učila. Rad je opazoval zvezdno nebo. Vojvodino Kranjsko je opisal tako dobro, da so bila njegova besedila na samem cesarskem Dunaju za vzor zemljepisnih predstavitev krajev, pokrajin in ljudi. Za toponim *Oselica* je bil Peternel mnenja, da pride od glagola *oseliti*, ker so pač ljudje *oselili*, to je poselili hribovje okoli obeh Oselic. Eni namreč ime izpeljujejo iz besede *oslica*, ker imajo tamkajšnji hribi obliko hrbta te živali. Tako piše tudi avtor popotnega dnevnika Paolo Santonino, ki je tam skozi potoval daljnega leta 1486, 6 let pred odkritjem Amerike.

Skupaj s Francem Močnikom je Peternel sodeloval pri izdaji Vegovih logaritmovnikov. Z vsem srcem se je ukvarjal tudi s slovenskim botaničnim, kemijskim, geometrijskim in drugim strokovnim izrazoslovjem. Peternel je tudi dal za Slovence pomembno pobudo, da se svetovno znanemu matematiku slovenskega rodu Juriju Vegi (1754–1802), čigar 200-letnice smrti smo se spominjali leta 2002 in čigar 250-letnico rojstva leta 2004, postavi primeren spomenik.

Kot zanimivost navedimo, kako bi danes imenovali nekatere kemijske elemente, če bi obveljal Peternelov predlog v delu *Imena, znamnja in lastnosti kemiških pervin*:

ogljik	ogljec
kisik	kislec
dušik	trohnelec
vodik	vodenec
kalij	pepelin, kalin
natrij	solin, natrin

V svojo hribovito domovino je prinesel prve gomolje georgin ali dalij, ki so doma v Mehiki, in to okrasno rastlino naturaliziral na naših tleh. Bil je tudi odličen svetovalec in načrtovalec pri gradnji hiš, skednjev, kozolcev in hlevov ter mestne razsvetljave.

Do današnjih dni so se zaradi burnih dogodkov na Cerkljanskem v 20. stoletju (spremembe meja, menjavanje oblasti, občinske ureditve) ohranili le redki Peternelovi osebni predmeti: uteži za tehtanje volne in dlake v klobučarstvu, tolkalo, daljnogled ter konjsko sedlo. Nekateri od teh predmetov so za nedoločen čas na ogled v muzeju v Cerknem, kjer je od lani Peternel tudi lepo predstavljen.

Peternel je podaril cerkvi sv. Janeza Nepomuka v Novi Oselici tudi lep kelih s pateno vred. Kelih, izdelek v 19. stoletju uveljavljenega pasarja in srebrarja Matevža Schreinerja (1812–1883), ima vgravirano darilno besedilo: *Sto. Joanni Nepomuceno in Nova Oselica Michaël Peternel sacerdos 1879.* Na kelihu, ki ga uporabljajo le ob največjih bogoslužnih slovesnostih, so upodobljeni nadangel sv. Mihael, sv. Janez Nepomuk in sv. Jožef z Jezuščkom. Med 16. septembrom 1999 in 27. februarjem 2000 je bila v Narodni galeriji v Ljubljani razstava, na kateri je bilo na ogled tudi pet Schreinerjevih izdelkov (gl. [7]).

V zvezi s Peternelovim projektiranjem omenimo tudi spomeniško varovano Pirhovo hišo (po domače pr' Pirhu, danes Straža 3) na Mlakah ob sedanji cesti Tolmin–Idrija in domačo rojstno hišo Podlanišče 15, ki je bila na njegova pozna leta predelana. Kasnejši gospodarji so jo do današnjih dni še večkrat popravljali in predelovali.

Kaj pravzaprav povezuje kmetijo Na Lanišah in Pirhove na Mlakah? Nekoč se je laniška Marija, Mihaelova sestra (roj. 1815), poročila z Jernejem Pirihom na Mlakah, na Lanišah pa je Mihaelova generacija ostala brez potomstva. Da kmetija ne bi propadla, je bil Jernejev prvorojeni Pirhov sin Janez (roj. 1833) že kot otrok določen za laniškega gospodarja. Ustno izročilo pravi, da so ga tja gor prinesli na hrbtu, v košu. Od takrat je na Lanišah priimek Pirih, ne pa Peternel. Vzgajali so ga stari starši in je res postal laniški gospodar, ki je tudi popolnoma predelal hišo (1872/73), in sicer po omenjenem Mihaelovem načrtu, ki je bil narejen za Pirhovo hišo na Mlakah.

Pomembnejša Peternelova pisna dela

Vsa Peternelova spodaj našteta dela so izhajala ob koncu šolskega leta v letnih poročilih ljubljanske realke (naslov publikacije: Jahresbericht der kais.-kön. (selbstständigen, vollständigen) Unterrealschule in Laibach veröffentlicht am Schlusse des Schuljahres) v času njegovega ravnateljevanja.

1. Schule und Leben insbesondere Realschule und gewerbliches Leben. 1858, 1859.

2. Andeutungen wie und wem die Realschule zu beachten und zu benützen sei, insbesondere in unserem Vaterland Krain. 1857.

3. Geographische Skizze des Herzogthums Krain. 1855, 1856.

4. Imena, znamnja in lastnosti kemiških pervin. 1862.

5. Georg Freiherr von Vega, Ritter des militär. Maria-Teresien Ordens, Oberst-Lieutenant des 4. k. k. Feldartellerie-Regiments, Landstand des Herzogtums Krain, Mitglied der gelehrten Gesellschaften zu Göttingen, zu Mainz, zu Erfurt, zu Prag und zu Berlin. Biografische Skitze. Zum

Andenken seines hundertsten Geburts- und seines zwei und fünfzigsten Sterbejahres. 1854.

In še spletni naslov:

`http://www2.arnes.si/~supmrazp/peternel/peternel.htm`

LITERATURA

[1] J. J. Binder, *Geschichte der k. k. Staats-Oberrealschule in Laibach.* Festschrift zur Feier der 50jährigen Bestandes verfasst von-. Hrsg. von Direktion, Kleinmayr & Bamberg, Ljubljana 1902.

[2] C. Černec (urednica), *Jubilejni zbornik*, Srednja šola za elektrotehniko in računalništvo, Ljubljana 1994.

[3] M. Hladnik, *Franc Močnik kot šolski svetnik in nadzornik*, Po stopinjah dr. Franca Močnika, Strokovno srečanje matematičnih pedagogov, Cerkno, Založba Bogataj, Idrija 1996 (uredil M. Razpet).

[4] S. Pavlič, *Mihael Peternel – duhovnik, učitelj in naravoslovec*, Loški razgledi vol. 48, Škofja Loka 2001.

[5] S. Pavlič, *Sto znamenitih osebnosti v šolstvu na Slovenskem*, Prešernova družba, Ljubljana 2000.

[6] M. Piškur, S. Žitko, *Ljubljansko Navje*, DZS, Ljubljana 1997.

[7] M. Simoniti, *Zakladi slovenskih cerkva: zlatarska umetnost in obrt*, Narodna galerija, Ljubljana 1999.

[8] P. Šišma, *Matematika na německé technice v Brně*, Prometheus, Praga 2002.

[9] A. Štucin, osebni zapiski.

VESTI

Kratke novice

Tretji hrvaški matematični kongres bo v Splitu od 16. do 18. junija 2004 [1].

Četrti evropski matematični kongres (4ECM) bo v Stockholmu, Švedska, od 27. junija do 2. julija 2004 [2]. Namen kongresa je osvetliti pomembnost matematike na drugih znanstvenih področjih – v fiziki, biologiji, kemiji, informatiki in računalništvu. Novost so predavanja na temo *Znanost*, posvečena najvažnejšim aspektom matematike v znanosti in tehnologiji. Govorniki bodo: Richard R. Ernst (ETH, Švica, Nobelova nagrada za kemijo 1991), Gerard 't Hooft (Univerza v Utrechtu, Nizozemska, Nobelova nagrada za fiziko 1999), Walter Kohn (Kalifornijska univerza v Santi Barbari, ZDA, Nobelova nagrada za kemijo 1998), Martin Nowak (Oddelek za matematiko univerze Harvard v ZDA) in George Oster (Oddelek za molekularno in celično biologijo Kalifornijske univerze v Berkeleyu, ZDA).

Deseti mednarodni kongres o matematičnem izobraževanju (ICME 10) bo od 4. do 11. julija 2004 v Kopenhagnu, Danska [3].

Naslednji mednarodni matematični kongres (ICM 2006) bo v Madridu, Španija, od 22. do 30. avgusta 2006.

Mednarodna matematična zveza (IMU) je začela izdajati elektronski bilten IMU-net s pomembnimi novicami iz matematičnega sveta. Na naslovu [4] lahko brezplačno naročite pošiljanje po elektronski pošti (kliknite na gumb Subscribe na dnu strani).

Leto 2005 bo svetovno leto fizike (the World Year of Physics (WYP) [5]). Iniciativo sta podprla Evropska fizikalna zveza (EPS) in UNESCO.

Evropsko matematično društvo (EMS) je konec leta 2003 objavilo rezultate tekmovanja za najboljši članek o matematiki za širšo publiko. Nagrade so šle na Portugalsko, v Belgijo in v Bolgarijo. Nagrajena dela si lahko ogledate na spletnem naslovu [6]. Eden od člankov pa je bil objavljen tudi v decembrski (50.) številki revije Newsletter of the EMS.

LITERATURA

[1] http://www.pmfst.hr/congress/
[2] http://www.math.kth.se/4ecm
[3] http://www.ICME-10.dk
[4] http://www.mathunion.org/IMU-Net
[5] http://www.wyp2005.org/
[6] http://www.mat.dtu.dk/people/V.L.Hansen/rpa/resultartcomp.html

Peter Legiša

POPRAVEK

V zadnji številki Obzornika jo je zagodel tiskarski škrat. Do številnih napak je prišlo v seznamu literature na straneh 61 in 62, kjer je bil v OMF za rusko cirilico uporabljen nepopoln nabor znakov. Avtorju članka Borisu Lavriču se zaradi tega opravičujemo.

Navedimo tista dela iz seznama, kjer so se pojavile napake:

[1] В. Г. Болтянский, *Задача об освещении границы выпуклого тела*, Изв. Молд. фил. АН СССР (1960), 10 (76), 77–84.

[2] В. Болтянский, *О разбиении плоских фигур на части меньшего диаметра*, Colloq. Math. **21** (1970), 253–263.

[23] Л. А. Люстерник, Л. Г. Шнирельман, *Топологические методы в вариационных задачах*, МГУ, Иссл. ин-т матем. мех., Москва, 1930.

[24] В. В. Макеев, *Об аффиных образах ромбододекаэдра, описанных вокруг трехмерного выпуклого тела в* $\mathbb{R}^3$, Зап. науч. сем. ПОМИ 246 (1997), 191–195.

[30] А. М. Раигородский, *Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств*, Усп. Мат. Наук **56**, 1 (2001), 107–146.

[31] А. С. Рислинг, *Проблема Борсука в трехмерных пространствах постоянной кривизны*, Укр. геом. сб. **11** (1971), 78–83.

INTERFERENČNI POSKUSI Z VELIKIMI MOLEKULAMI

JANEZ STRNAD

PACS 03.65.Ta

Interferenčni poskusi s curki molekul z vse večjo maso zbujajo zanimanje že zaradi prehoda iz kvantnega opisa v klasičnega. Pri interferenčnih poskusih te vrste uporabijo premišljene eksperimentalne prijeme.

INTERFERENCE EXPERIMENTS WITH LARGE MOLECULES

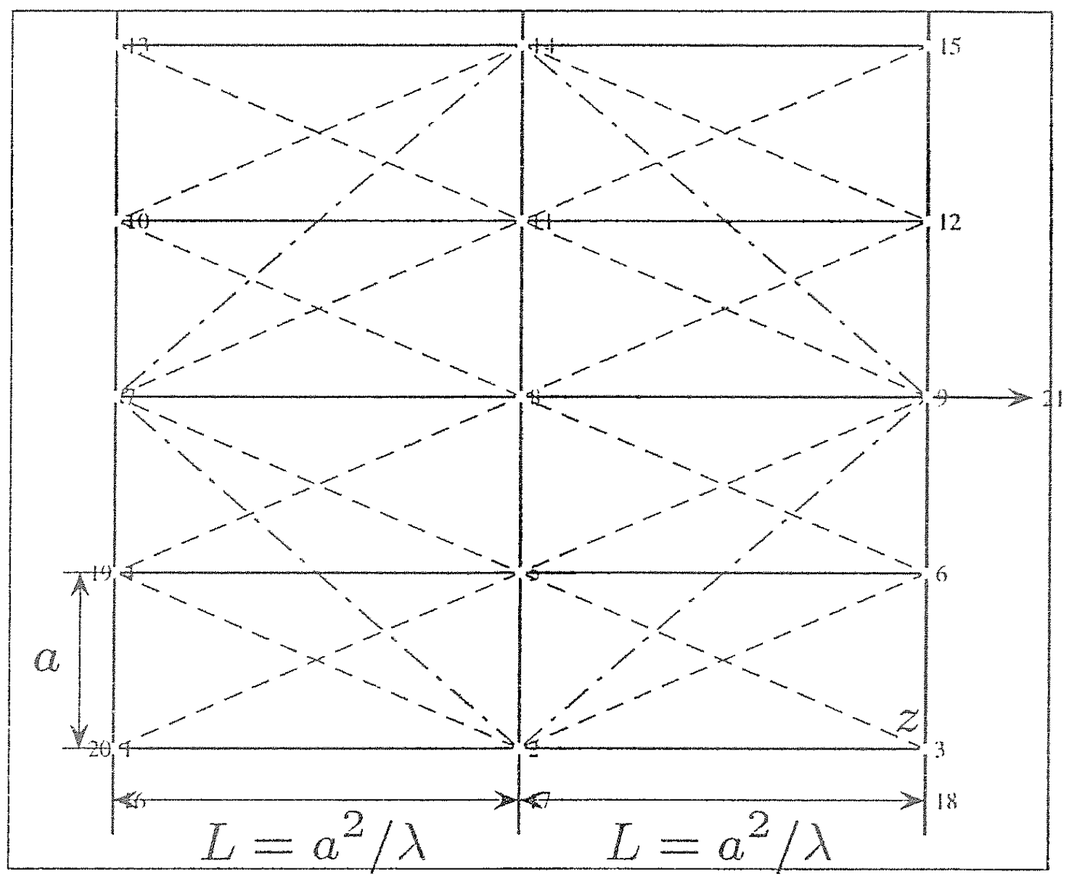
Interference experiments with beams of molecules with greater and greater mass attract attention owing to the transition from the quantum-mechanical description to the classical one. In interference experiments with massive molecules sophisticated experimental techniques are used.

Potem ko je uspešno izvedla interferenčni poskus z molekulami fulerena C_{60} [1], se je raziskovalna skupina A. Zeilingerja na inštitutu za eksperimentalno fiziko dunajske univerze lotila še večjih molekul. Poskusi te vrste se zdijo zanimivi zaradi vprašanja, kako njihov opis v kvantni mehaniki preide v opis klasičnih poskusov z delci, pri katerih ni interference. Kaže, da med enimi in drugimi poskusi ni ostre meje.

Molekula z maso 1600 u ima pri hitrosti 100 m/s de Broglievo valovno dolžino $\lambda_B = h/(mv) = 0{,}0025$ nm. Pri mrežici z mrežno konstanto $a = 1000$ nm se tedaj prvi interferenčni vrh pojavi pod kotom $\lambda_B/a = 2{,}5 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{2}''$, ki mu v razdalji 1 m ustreza odklon 2,5 μm. Zaradi tega pri interferenčnih poskusih z velikimi molekulami iščejo nove prijeme. Zapisane zveze veljajo pri Fraunhoferjevem načinu opazovanja. Pri tem k interferenčni sliki prispevajo delna valovanja iz tako oddaljenih izvirov, da jih lahko vzamemo za vzporedna. Veliko večino interferenčnih poskusov s curki delcev in vse, ki smo jih opisali, so naredili na ta način.

Pri zelo majhni valovni dolžini pa postane pripravnejši Fresnelov način opazovanja. Pri tem delni curki ne izvirajo iz velike oddaljenosti in jih ne moremo vzeti za vzporedne. Okvirno si razmere oglejmo pri preprostem zamišljenem poskusu. Iz ozkega črtastega izvira izhaja valovanje, ki zadene mrežico z zelo ozkimi vzporednimi režami v razmiku a. Delni curki interferirajo na drugem zaslonu, ki je v enaki oddaljenosti L od zaslona z režami, kot je ta od ravnine izvira. Naj izvir in ena od rež ležita na osi z (slika 1). Razlika poti delnih curkov od izvira do točke na drugem zaslonu na osi z skozi režo v oddaljenost $\mathcal{N}a$ od osi z in režo na osi z je:

$$2[(L^2 + \mathcal{N}^2 a^2)^{1/2} - L] = 2(L + \tfrac{1}{2}\mathcal{N}^2 \tfrac{a^2}{L} - L) = \mathcal{N}^2 \tfrac{a^2}{L}\,. \qquad (1)$$



Slika 1. Pri Talbotovem pojavu z uklonom in interferenco na drugi uklonski mrežici nastane slika prve uklonske mrežice z mrežno konstanto a na drugem zaslonu, če je razmik enak $L = a^2/\lambda$. Delni curki z λ daljšo potjo so narisani z daljšimi črtkami, delna curka s 4λ daljšo potjo pa s krajšimi črtkami. Razpravo o tem vsebuje na primer članek P. Latimer, R. F. Crouse, *Talbot effect reinterpreted*, Appl. Optics **31** (1992) 80.

Pri tem smo vzeli, da so prečne razsežnosti zelo majhne v primeri z razmikom zaslonov, $a/L \ll 1$. Delna valovanja se ojačijo, če je razlika poti enaka celoštevilskemu večkratniku valovne dolžine:

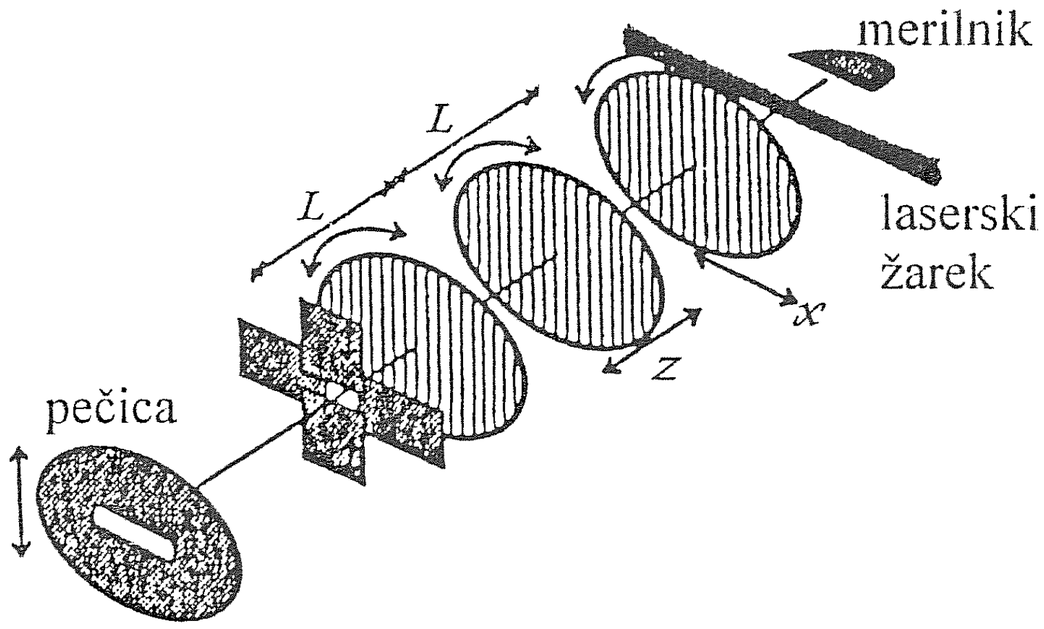
$$\mathcal{N}^2 \frac{a^2}{L} = N\lambda\,. \tag{2}$$

Rešitev te enačbe za poljuben $\mathcal{N}$ in najmanjši mogoči $N = \mathcal{N}^2$ je $L = a^2/\lambda$.

Namesto enega ozkega črtastega predmeta si mislimo več črtastih predmetov v razmikih a ali kar uklonsko mrežico, ki jo v pravokotni smeri osvetlimo s curkom enobarvne svetlobe. V tem primeru na drugem zaslonu z interferenco nastane slika prve uklonske mrežice. Na to osnovno zamisel je leta 1836 prišel Henry Fox Talbot. Pojav je podrobneje pojasnil za zvok in izpeljal zapisano enačbo lord Rayleigh leta 1881. Pozneje so s Fourierovo transformacijo pokazali, da se raven predmet s periodično zgradbo, na primer uklonska mrežica, pri Talbotovem pogoju $L = a^2/\lambda$ preslika z interferenco [2].

Interferometer s tremi enakimi vzporednimi uklonskimi mrežicami v razmiku $L = a^2/\lambda$, imenovan po Talbotu in Lauu, ima precej prednosti, ki se pokažejo pri interferenčnih poskusih z molekulami z veliko maso. Druga mrežica preslika prvo v ravnino tretje. Za tretjo mrežico postavimo merilnik in s premikanjem te mrežice v njeni ravnini pravokotno na reže otipamo interferenčno sliko. Pri tem je razmik med sosednjima interferenčnima progama sorazmeren s kvadratnim korenom iz valovne dolžine in razdalje, medtem ko je pri Fraunhoferjevem načinu opazovanja sorazmeren z valovno dolžino. Talbot-Lauov interferometer je pripraven za velike molekule z zelo majhno de Broglievo valovno dolžino λ_B.

Opisani način opazovanja je dunajska skupina najprej preizkusila z molekulami fulerena C_{70} [3], ki nimajo znatno večje mase od molekul fulerena C_{60} pri prejšnjem poskusu. Curek molekul so dobili s sublimacijo v pečici s

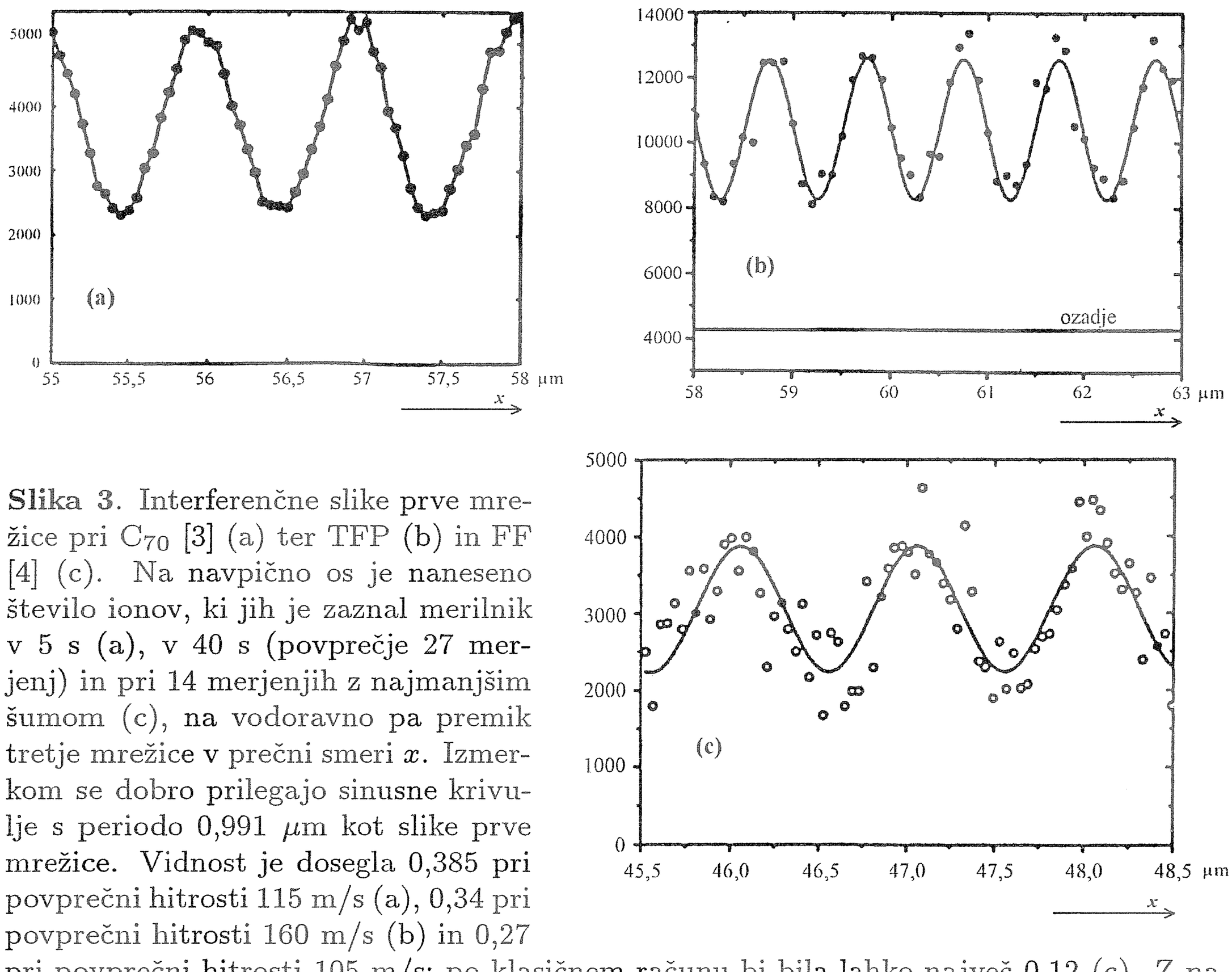


Slika 2. Talbot-Lauov interferometer sestavljajo tri uklonske mrežice iz zlata z mrežno konstanto $a = 0{,}991$ μm in z uporabno ploščino s premerom po 1,6 cm. Srednja vodoravna reža z višino 0,25 mm je v oddaljenosti 138 cm od izstopne reže pečice in 12 cm za njo je prva mrežica. Mrežice so v razmiku po $L = 22$ cm pri fulerenu C_{70} [3] in TFP ter $L = 38$ cm pri FF [4]. V prvem primeru so zaznavali ione, ki so nastali zaradi obsevanja z laserskim curkom in v drugem zaradi obstreljevanja z elektroni.

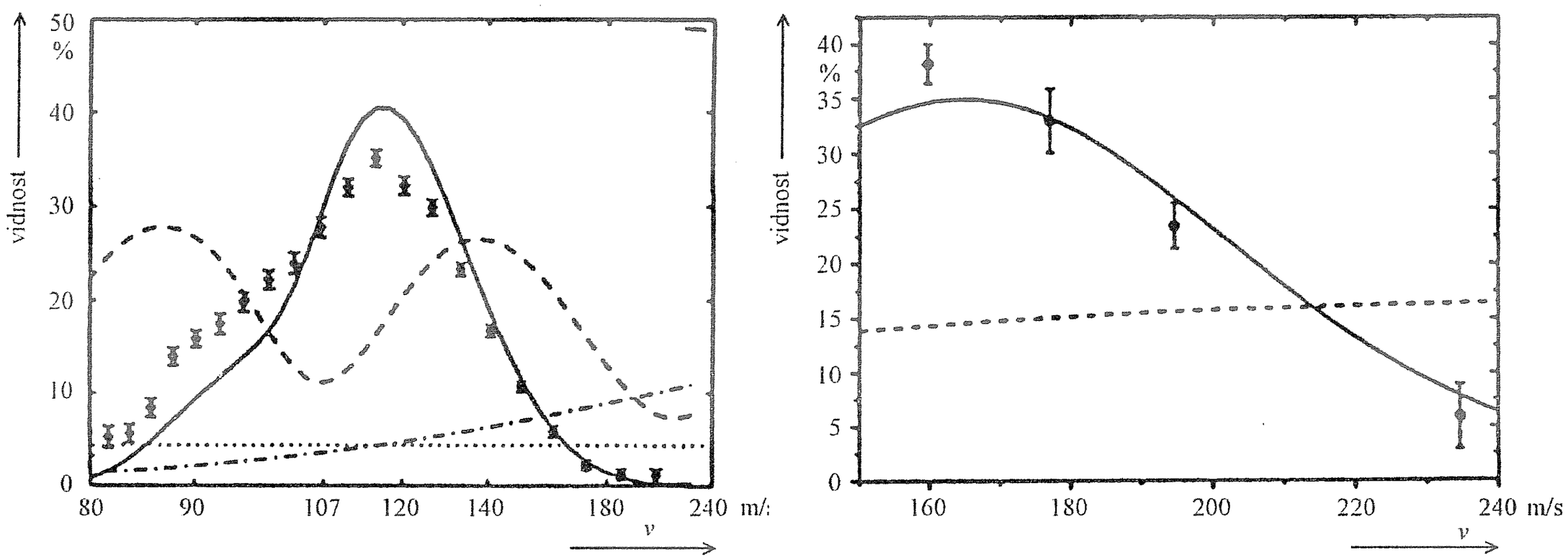
temperaturo 650 °C. Iz vodoravne reže v njej so v vodoravni smeri izhajale molekule s povprečno hitrostjo 200 m/s. Tlak preostalega plina v posodi je meril $3 \cdot 10^{-8}$ milibara, tako da niso motili trki molekul v curku z molekulami preostalega plina. Curek molekul sta določili dodatna vodoravna reža in vstopna reža merilnika. Višino druge vodoravne reže so uravnavali piezoelektrično in tako z izbiro parabolične tirnice v težnostnem polju vplivali na povprečno hitrost in s tem na de Broglievo valovno dolžino. Curek je pravokotno padel na tri mrežice Talbot-Lauovega interferometra (slika 2). Mrežice iz zlata z mrežno konstanto 991 nm in širino rež po 476 nm so postavili v razmiku $L = 22$ cm. Molekule so zaznavali kot pri prejšnjem poskusu tako, da je za tretjo mrežico močan vodoravni laserski curek ioniziral molekule fulerena po vsej širini interferenčne slike. Merilnik je zaznaval tok ionov, ko so tretjo mrežico piezoelektrično premikali v vodoravni smeri. V interferenčni sliki so opazili vrsto vrhov in dolin v razmiku a pri vidnosti 0,385 (slika 3a). Vidnost vpeljemo kot $(j_{\text{maks}} - j_{\text{min}})/(j_{\text{maks}} + j_{\text{min}})$, če sta j_{maks} in j_{min} gostoti toka molekul v interferenčnem vrhu in v interferenčni dolini.

Posebej so se prepričali, da je šlo za interferenčno sliko in ne za Moiréjev vzorec, ki bi nastal, ker bi reže prepustile molekule kot glavnik točkasta telesa. Merili so vidnost, ko so spreminjali povprečno hitrost molekul, in ugotovili, da se njen potek ujema s kvantnomehaničnim računom, ne s klasičnim (slika 4a). Pri tem so upoštevali, da delujejo deli mrežice na molekule, ki gredo skozi reže, z van der Waalsovimi silami.

Potem ko so preizkusili novi merilni način z molekulami, s katerimi so že imeli nekaj izkušenj, so uporabili dve drugi vrsti molekul [4]. Prva je bila biološko pomembna molekula tetrafenilporfirina $C_{44}H_{30}N_4$ z maso 614 u. Kot barvni center je vgrajena v molekulo klorofila in hemoglobina. Vsebuje štiri nagnjene fenilne obroče, pripete na porfirinsko jedro. Izbrali so jo, ker je ploščata – ima sedemkrat večjo širino kot debelino. Druga je bila zelo velika molekula fluoriranega fulerena $C_{60}F_{48}$ z maso 1632 u. V njej iz žogaste fulerenske osnove štrlijo atomi fluora. To je za zdaj molekula z



Slika 3. Interferenčne slike prve mrežice pri C_{70} [3] (a) ter TFP (b) in FF [4] (c). Na navpično os je naneseno število ionov, ki jih je zaznal merilnik v 5 s (a), v 40 s (povprečje 27 merjenj) in pri 14 merjenjih z najmanjšim šumom (c), na vodoravno pa premik tretje mrežice v prečni smeri x. Izmerkom se dobro prilegajo sinusne krivulje s periodo 0,991 μm kot slike prve mrežice. Vidnost je dosegla 0,385 pri povprečni hitrosti 115 m/s (a), 0,34 pri povprečni hitrosti 160 m/s (b) in 0,27 pri povprečni hitrosti 105 m/s; po klasičnem računu bi bila lahko največ 0,12 (c). Z navedenimi podatki dobimo za periodo $a = \sqrt{L\lambda_B} = \sqrt{Lh/mv}$ po vrsti 0,953 nm, 945 nm in 0,940 nm, kar se ne razlikuje znatno od mrežne konstante 991 nm.



Slika 4. Vidnost v odvisnosti od povprečne hitrosti molekul fulerena C_{70} (a) [3] in TFP (b) [4]. Točke kažejo izmerke, krivulji (1) rezultat kvantnega računa, krivulji (2) rezultat klasičnega računa, oboje z van der Waalsovimi silami. Krivulji (3) in (4) zadevata kvantni in klasični račun brez van der Waalsovih sil.

največjo maso, s katero je uspel interferenčni poskus.

Curek molekul so kot pri prejšnjem poskusu dobili s sublimacijo v pečici,

iz katere je curek skozi vodoravno režo vstopil v vakuumsko posodo s tlakom $2 \cdot 10^{-8}$ milibara. Tetrafenilporfirin (TPF) je imel pri temperaturi 963 °C nasičeni parni tlak 46 Pa in fluorirani fuleren (FF) pri temperaturi 833 °C nasičeni parni tlak 2,3 Pa. S spreminjanjem višine srednje vodoravne reže so za TPF izbrali $\Delta v/v_0 \approx 0{,}4$ pri povprečni hitrosti $v_0 = 160$ m/s in za FF $\Delta v/v_0 \approx 0{,}2$ pri $v_0 = 105$ m/s. Hitrost so merili s časom preleta.

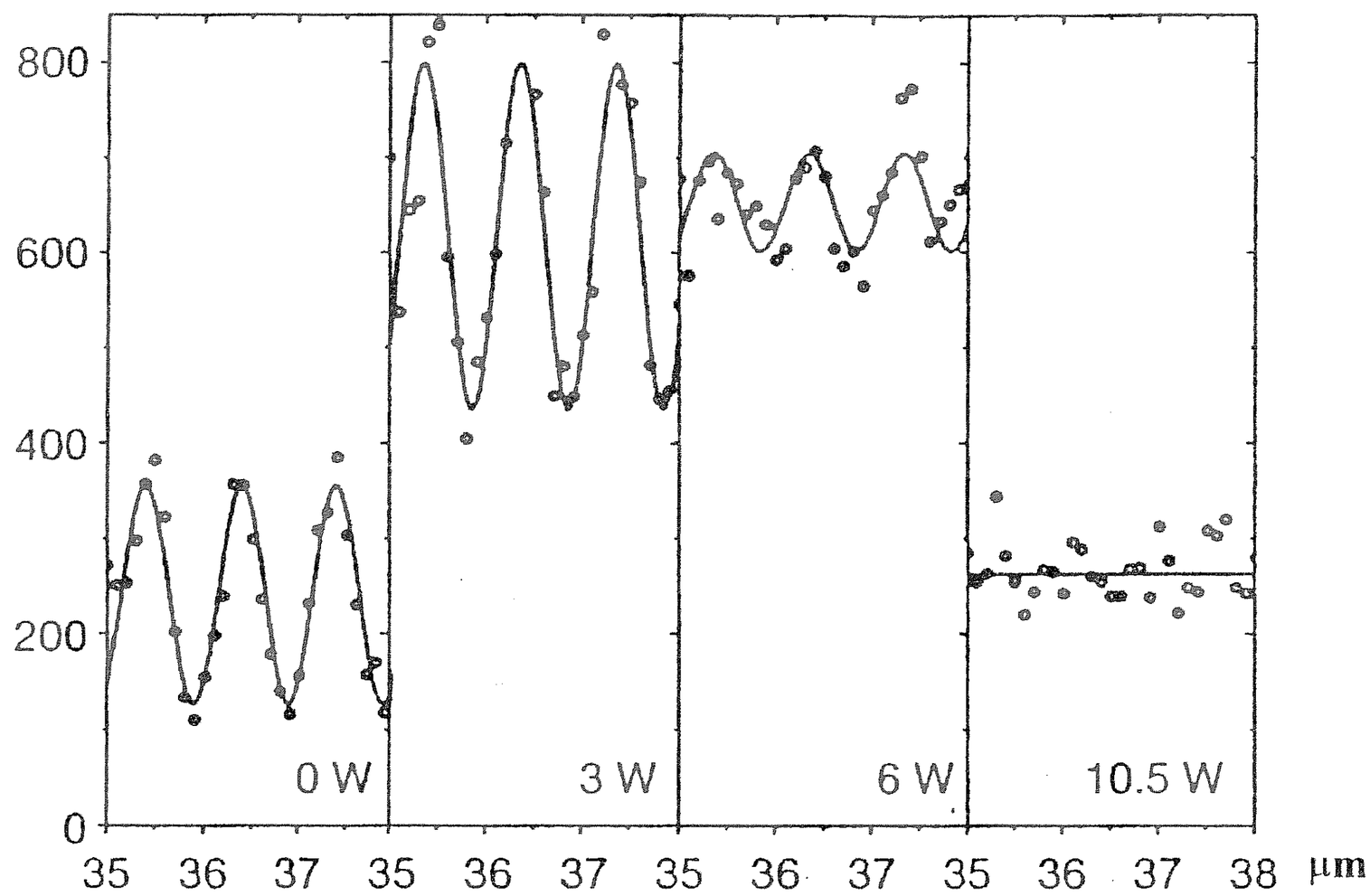
Uporabili so opisani Talbot-Lauov interferometer. Pri TPF so izbrali $L = 22$ cm in pri FF $L = 38$ cm. Zaznavanje molekul po ionizaciji z laserskim curkom pa se ni obneslo. Molekule so ionizirali s curkom elektronov in nastale ione preiskali z masnim spektrometrom, ki je zaznaval samo ione določene vrste, ne pa ionov preostalega plina.

Zanimalo jih je, ali zgradba molekule zaradi van der Waalsovih sil z deli mrežic vpliva na interferenčno sliko. Proti temu govori spoznanje, da se v klasičnem približku molekule okoli lastnih osi vrtijo s frekvenco z velikostno stopnjo 10^{13} s^{-1}. Niso opazili, da bi oblika molekule vplivala na interferenčno sliko (sliki 3b, c). Na interferenčno sliko tudi ni vplivalo to, da so molekule v različnih nihajnih in vrtilnih stanjih in se razlikujejo tudi po izotopski sestavi. De Broglieva valovna dolžina je odvisna le od mase molekule in hitrosti gibanja njenega težišča. Znano je, da se interferenčna slika ne spremeni, če gostoto toka molekul ali gostoto energijskega toka v valovanju tako zmanjšamo, da je v povprečju v interferometru manj kot ena molekula ali manj kot en foton. Potemtakem lahko rečemo, da molekula ali foton interferira vselej sam s seboj. Tudi pri TFP so merili vidnost v odvisnosti od srednje hitrosti in ugotovili, da se največja vidnost ujema s kvantnim računom, ne s klasičnim (slika 4b).

Molekula FF ima premer 2 nm, kar ni zanemarljivo v primeri s širino reže. Pri še večjih molekulah bo stoječe elektromagnetno valovanje nadomestilo trdne mrežice. Dunajska skupina je že opazovala uklon molekul fulerena C_{70} na stoječem valovanju, ki so ga naredili s pravokotnim odbojem laserskega curka na ravnem zrcalu. Ali bodo v naslednjem koraku izvedli interferenčni poskus z virusi? Kako bodo dobili curek virusov z določeno hitrostjo?

Interferenčni poskus z molekulami C_{70} so ponovili še v posebni izvedbi. V njej so neposredno zasledovali *dekoherenco*, to je vpliv okolice na kvantni sistem, če tega vpliva ne moremo podrobno nadzorovati [5]. Uporabili so enak interferometer kot pri opisanem poskusu [3]. Le dodatno so curek molekul pred prvo mrežico vodili skozi prečni laserski curek. S spreminjajem njegove moči so molekule prešle v višja nihajna stanja, ki jih je na uporabljenem energijskem pasu več kot dvesto. Tako je mogoče molekulo vzbuditi z različno energijo in tej energiji prirediti določeno temperaturo. Molekula termično, nenadzorovano, seva tem izdatneje, čim višjo temperaturo

ji priredimo. Izsevani fotoni dosežejo energijo, ki ji ustreza valovna dolžina d. Tak foton ima dovolj veliko gibalno količino, da ob odrivu znatno zmoti gibanje težišča molekule. Molekuli, ki izseva nekaj fotonov v različne smeri, se gibalna količina dovolj spremeni, da to znatno vpliva na njen odklon, in molekula ne prispeva k interferenčni sliki. Čim več je takih molekul, tem slabša postane vidnost interferenčne slike. Zato pričakujemo, da se vidnost z naraščajočo močjo dodatnega laserja slabša. To so podprli z merjenji. Vidnost se je z naraščajočo močjo laserja slabšala, kakor je napovedala teorija (slika 5).



Slika 5. Vidnost interferenčne slike pri poskusu z molekulami C_{70} s povprečno hitrostjo 190 m/s postaja zaradi dekoherence vse slabša, ko narašča moč laserja [5]. Moči laserja 0 ustreza približno temperatura 1000 K, moči laserja 10,5 W pa približno temperatura 3000 K. Pri moči 0 je vidnost 0,47, pri 3 W je 0,29, pri 6 W je 0,07 in pri 10,5 W je 0. Zaradi posebnosti končnega merilnika tok molekul z naraščajočo močjo laserja najprej naraste in potem zopet pade. Na vodoravno os je nanesen prečni premik tretje mrežice v μm, na navpično pa število preštetih delcev v 2 s. Krivulje kažejo napoved teorije.

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Nenavadni interferenčni poskusi – Interferenčni poskus z molekulami* C_{60}, Obzornik mat. fiz. **47** (2000) 53.

[2] J. T. Winthrop, C. R. Worthington, *Theory of Fresnel images. I. Plane periodic objects inmonochromatic light*, Journal of the Optical Society of America **55** (1965) 373.

[3] B. Brezger, L. Hackermüller, S. Uttenthaler, J. Petschinka, M. Ardt, A. Zeilinger, *Matter-wave interferometer for large molecules*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 100404.

[4] L. Hackermüller, S. Uttenthaler, K. Hornberger, E. Reiger, B. Brezger, A. Zeilinger, M. Arndt, *Wave nature of biomolecules and fluorofullerenes*, Phys. Rev. Lett. **91** (2003) 090408.

[5] L. Hackermüller, K. Hornberger, B. Brezger, A. Zeilinger, M. Arndt, *Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation*, Nature **427** (2004) 711.

NOVE KNJIGE

Pavla Razinger, Bojan Dintinjana, Herman Mikuž, Naše nebo 2004, astronomske efemeride, letnik 57, DMFA založništvo, Ljubljana 2003, 56 strani

Kot vsako leto je Oddelek za fiziko FMF izdal astronomske efemeride tekočega leta. Tako imajo poznavalci in ljubitelji nočnega neba na enem mestu zbrane vse najpomembnejše podatke o gibanju in vidnosti teles v našem Osončju.

Sončevi in Lunini mrki zagotovo sodijo med tudi za širšo javnost zanimivejše nebesne pojave. V knjižici najdemo datume vseh delnih/popolnih mrkov, pa tudi njihov podrobnejši opis. Med telesi v Osončju si zagotovo kot prvo zasluži pozornost Sonce. V Sončevih efemeridah so za vsak dan v letu tabelirani časi vzhoda, kulminacije in zahoda, časovna enačba, rektascenzija in deklinacija Sonca ter zvezdni čas. Za vsa leta od 1700 naprej je popisana tudi povprečna letna Sončeva dejavnost. Podobno kot za Sonce si lahko tudi za Luno preberemo, kdaj bo vsak dan v letu vzšla in zašla, kdaj bo Zemlji najbliže in kdaj najdlje ter seveda, kdaj bodo nastopile posamezne Lunine mene.

Prav vsakega še tako slabega poznavalca nočnega neba včasih zamika, da bi na nočnem nebu poiskal kakšnega izmed preostalih planetov Osončja. In nemalokrat se zgodi, da se za njim zaman ozira. V efemeridah si bo lahko prebral, kdaj planeti med letom kulminirajo, kdaj in kje so z Zemlje sploh vidni ter kako se prek leta spreminja njihov navidezni sij.

Med „lepotce" našega Osončja zagotovo sodijo kometi, ki lahko med mimohodom Sonca razvijejo čudoviti plinski in prašnati rep. Za vse komete do predvidoma 15 magnitude najdemo v efemeridah podatke o njihovih nebesnih koordinatah, podan pa je tudi njihov pričakovani navidezni sij. Morda ni odveč poudariti, da si bo večino teh kometov možno ogledati samo z dodatno astronomsko opremo, amaterskim teleskopom.

V efemeridah so popisani tudi mrki Jupitrovih „Galilejevih" satelitov, Ia, Evrope, Ganimeda in Kaliste, izrisane so tudi njihove lege glede na matični planet. Prav tako so podani časi največjih elongacij Saturnovega satelita Titana od matičnega planeta.

Na koncu knjižice najdemo koledar vseh zanimivejših nebesnih pojavov, kar nam pride zelo prav, če se nam kdaj zahoče malo pogledati v nebo in bi radi zvedeli, kaj si lahko tisto noč ogledamo.

Vse efemeride so opremljene s podrobnimi razlagami, tako da jih lažje razume tudi manj poučeni bralec. Vsekakor je knjižica koristna zbirka podatkov, potrebnih za naša opazovanja. Njen namen bo torej dosežen, če jo boste prijeli v roke in se pod njenim „vodstvom" podali pod nebesni svod.

Simon Vidrih

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi svoje članice in člane k sodelovanju na strokovnem srečanju in 56. občnem zboru, ki bosta 12. in 13. novembra 2004 v Hotelu Cerkno v Cerknem. Vodilna tema je delo z nadarjenimi učenci.

Člani društva lahko predstavijo raziskovalno delo, s katerim se ukvarjajo, zanimivosti s tega področja oziroma nove metode dela in novosti pri pouku matematike, fizike in astronomije (pripomočke, nove vsebine, zanimive eksperimente in posebne prilagoditve).

Predstavitev je možna v dveh oblikah:

- s 25- do 30-minutnim prispevkom,
- s predstavitvijo učila, pripomočka, gradiva.

Na voljo bodo grafoskop, projekcijsko platno in videoprojektor za prenos slike z računalnika. Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesti s seboj.

Prijave lahko pošljete pisno ali po elektronski pošti. Obvezno morajo vsebovati:

- naslov prispevka,
- ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen, oziroma domač naslov,
- kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12pt naj ne presega ene strani A4).

Prijave sprejemamo do **30. septembra 2004** na naslov:
Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije,
Janez Krušič, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana
ali na elektronski naslov:
Janez.Krusic@fmf.uni-lj.si. Povzetkom, ki jih boste poslali po pošti, dodajte zapis v elektronski obliki (disketo).

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora.

Obvestila o dejavnostih društva so objavljena na internetni domači strani DMFA:
`http://www.dmfa.si`

Predsednik DMFA
Peter Petek

VESTI

Svetovno leto fizike 2005

Leto 2005 je izbrano kot svetovno leto fizike. Na pobudo European Physical Society (EPS) sta predlog za izbiro leta 2005 kot leta fizike podprla tudi International Union of Pure and Applied Physics (IUPAP) in UNESCO.

V Svetovnem letu fizike 2005 bomo publiki približali vznemirljivosti narave, sodobne tehnologije in najnovejših dosežkov znanosti ter navdihnili nove generacije raziskovalcev čudovitega sveta okoli nas. Postavljeno ob bok proslavi stote obletnice „leta čudežev" Alberta Einsteina, vas bo Svetovno leto fizike začaralo in pritegnilo nase, preden se boste dobro zavedli.

V letu 2005 fiziki načrtujemo tudi v Sloveniji številne dejavnosti in prireditve, ki bodo pritegnile najširši krog ljudi. Še posebej bomo aktivnosti usmerili k mladim. Načrtujemo sodelovanje v nekaterih mednarodnih projektih, med katerimi bo verjetno najodmevnejši objem Zemlje s svetlobo, ko naj bi v noči od 18. na 19. april svetlobni signal obšel celotno Zemljo. Poleg tega bo razpisanih več mednarodnih natečajev, za fizikalno zgodbo, za plakat s fizikalno vsebino... V Sloveniji bomo organizirali več poljudnih predavanj s poudarkom tako na prisotnosti fizike v vsakdanjem življenju kot na pomembnosti fizike v najnovejših tehnoloških dosežkih in njene vpetosti v druge naravoslovne vede, na ogled bo tudi razstava fizikalnih učil. Na mestnih avtobusih bomo preko celega leta postavljali pare provokativnih fizikalnih vprašanj in odgovorov, ki bodo v ljudeh vzbudili večje zanimanje za fiziko in naravoslovje. Nenazadnje bomo organizirali tako imenovani verižni eksperiment, kjer bodo udeleženci sestavili različne mehanske naprave, ki imajo to skupno lastnost, da konec delovanja ene sproži začetek delovanja druge, tako da se celotna veriga izvede kot neprekinjen niz gibanja in prenosa energije. V tem projektu bomo verjetno sodelovali s sosednjo Hrvaško in Avstrijo ter naredili velik medijski dogodek, ki ga načrtujemo za konec šolskega leta 2004/2005.

Vabimo vas k sodelovanju z aktivnostmi na šoli in prispevki na internetu, v lokalnih medijih in podobno. Podrobnejše informacije bodo v kratkem na voljo na spletni strani `www.fizika2005.net`.

Jure Bajc

Društveni seminar iz matematike

Zadnje dni januarja, 30. in 31. 1. 2004, je v prostorih Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani, na Jadranski 21, potekal društveni seminar z naslovom *Matematika in narava* za profesorje matematike. Seminar je imel dopoldanski in popoldanski del.

V petek, 30. 1. 2004, je Zlatan Magajna predstavil koncept matematičnega modeliranja, vzroke težav v procesu modeliranja ter namen obravnave modeliranja pri pouku matematike.

Jože Malešič je obravnaval nekaj invariant vozlov in spletov ter uporabo teh invariant v kemiji in molekularni biologiji pri študiju lastnosti velikih molekul in v magnetni hidrodinamiki.

Popoldan nas je Martin Raič popeljal v svet matematične genetike. Obravnaval je porazdelitve genotipov v populaciji, govoril o časovnem spreminjanju porazdelitev genov, o naravnem izboru, mutacijah in ravnovesju.

Prvi dan seminarja je sklenil Sandi Klavžar. Govoril je o medsebojnem vplivu kombinatorike in kemije ter pokazal, kako lahko dobro sodelovanje dveh ved, kemijske in matematične, pripelje do zanimivih in tehnološko uporabnih rezultatov. Kot primer je navedel problem preštevanja izomer alkanov in drugih razredov kemijskih spojin.

V soboto je Marija Vencelj govorila o smiselno urejeni lepoti rastlin. S fotografijami je prikazala nekatere barvne vzorce, ki se pojavljajo pri rastlinah in živalih, ter nas opozorila na simetrije in rotacije pri cvetovih in listih ter povezave z nekaterimi znanimi zaporedji, kot sta na primer Fibonaccijevo in Lucasovo zaporedje.

Anja Stražar je odboj in lom svetlobe povezala z nekaterimi pojavi v naravi, kot so mavrica, polarni sij in nekateri drugi pojavi v atmosferi.

Popoldan je Nada Razpet govorila o matematičnih pojmih, ki jih lahko povežemo z opazovanjem senc. Izpeljala je nekatere povezave med lego predmeta, lego svetila in velikostjo in lego senc.

Seminar je sklenil Milan Hladnik, ki je govoril o *matematiki na vrtu* in pokazal, kako lahko preprost model gojenja enoletnih rastlin in pridobivanje njihovega semena pripelje do splošnih večrazsežnih reprodukcijskih modelov, ki upoštevajo starostno skupino populacije.

Na seminarju je bilo več kot 50 udeležencev, ki so *zdržali* do konca, kar pomeni, da so bila predavanja za profesorje zanimiva. Posebna zahvala gre vodji seminarja Milanu Hladniku, ki je skrbel za vsebinski del seminarja, in obema koordinatorjema, Lucijani Kračun in Janezu Krušiču, ki sta opravila obilico administrativnega in drugega organizacijskega dela.

Nada Razpet

OBZORNIK ZA MATEMATIKO I
LJUBLJANA, MAJ 2004
Letnik 51, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52

K 1//04
100001589,3
COB
ODPISANO

VSEBINA

Članki **Strani**

Numerično reševanje hiperboličnega kvadratnega problema lastnih vrednosti, Bor Plestenjak 65–78
Mihael Peternel, prvi ravnatelj ljubljanske realke, Marko Razpet 80–86
Interferenčni poskusi z velikimi molekulami, Janez Strnad 88–93

Nove knjige

Naše nebo 2004, Simon Vidrih 94

Vesti

Zoisovi priznanji za znanstvenoraziskovalno delo matematiku in fiziku, Roman Drnovšek 78–79
Vabilo, Peter Petek 79
Kratke novice, Peter Legiša 86–87
Strokovno srečanje in 56. občni zbor društva, Peter Petek 95
Svetovno leto fizike 2005, Jure Bajc 96
Društveni seminar iz matematike, Nada Razpet 96–III

CONTENTS

Articles **Pages**

Numerical solution of the hyperbolic quadratic eigenvalue problem, Bor Plestenjak 65–78
Mihael Peternel, the first principal in the high school of Ljubljana, Marko Razpet 80–86
Interference experiments with large molecules, Janez Strnad 88–93

New books 94

News 78–III

Na naslovnici je slika kometa C / 2002 V1 (NEAT), ki so ga odkrili 6. novembra 2002. Slika, ki sta jo na observatoriju Črni Vrh posnela in sestavila Bojan Dintinjana in Jure Skvarč, je iz knjižice Naše nebo 2004, predstavljene na strani 94.