

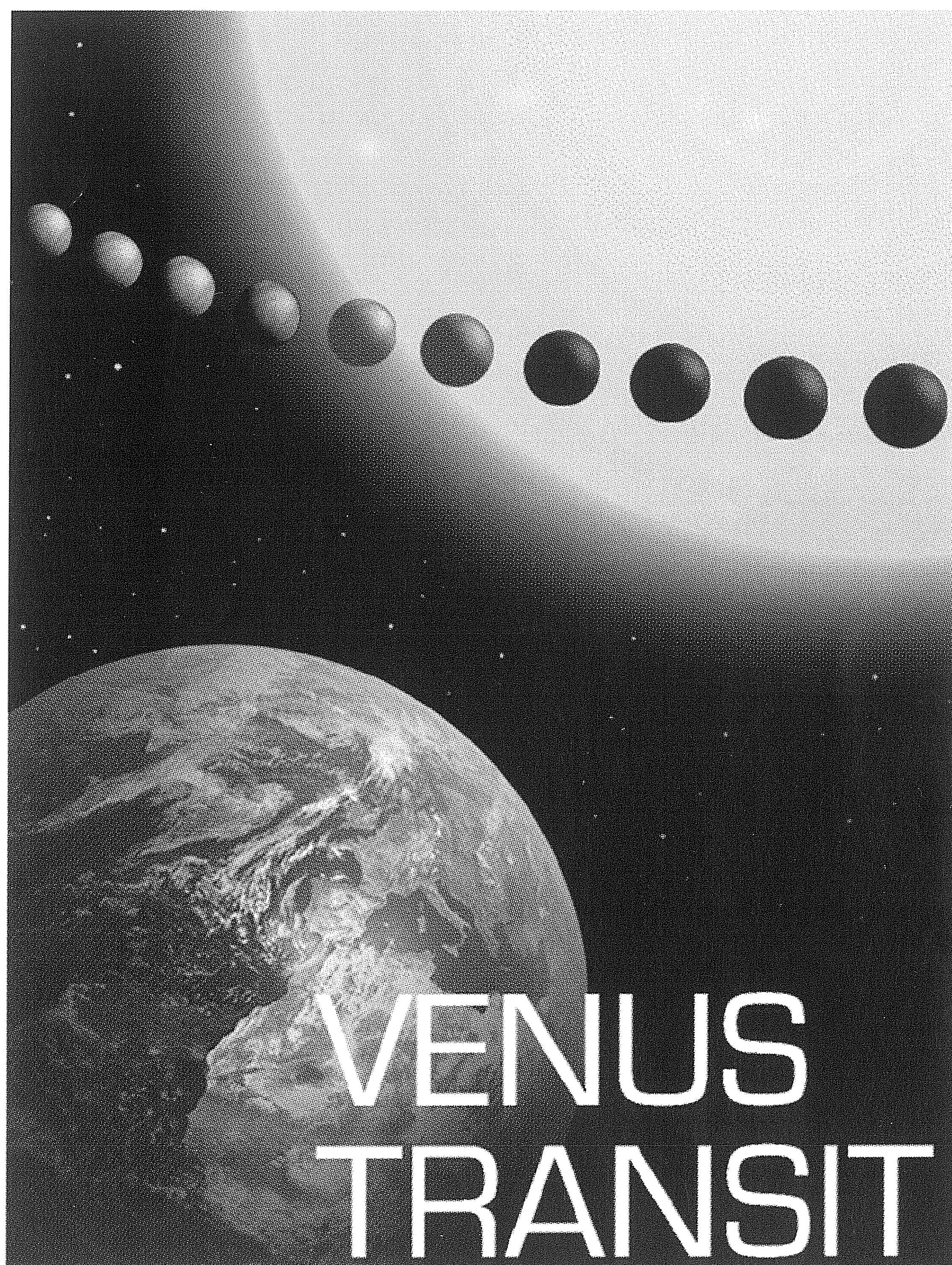
ODPISANJE

2004

Letnik 51

2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



VENUS TRANSIT

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2004, letnik 51, številka 2, strani 33–64

Naslov uredništva: DMFA-založništvo, Jadranska ul. 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana.
Spletna stran: <http://www.fmf.uni-lj.si/~zaloznistvo/omf/> **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460. **Telefaks:** (01) 2517281. **Transakcijski račun:** 03100–1000018787. **Devizna nakazila:** SKB banka d. d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana. **SWIFT:** SKBASI2X. **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Nada Razpet (novice), Pavle Saksida (nove knjige), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič. Natisnjeno v Tiskarni KURIR v nakladi 1450 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 5000 SIT, za študente 2500 SIT. Naročnina za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 1.000 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

© 2004 DMFA Slovenije – 1566

Poštšina plačana na pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov T_EX oziroma L^AT_EX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

LUSTERNIK-SCHNIRELMANNOVA KATEGORIJA

PETAR PAVEŠIĆ

Math. Subj. Class.(2000) 55M30

Predstavili bomo osnovne pojme in rezultate o Lusternik-Schnirelmannovi kategoriji topološkega prostora.

LUSTERNIK-SCHNIRELMANN CATEGORY

We will describe some basic facts about the Lusternik-Schnirelmann category of a topological space.

Lusternik-Schnirelmannova kategorija topološkega prostora X je najmanjše število odprtih podmnožic, ki jih lahko znotraj X zvezno stisnemo v točko in katerih unija je cel X . Ta pojem sta leta 1934 vpeljala L. Lusternik in L. Schnirelmann v svojem delu [9], posvečenem globalnemu variacijskemu računu, natančneje vprašanju obstoja kritičnih točk gladkih realnih funkcij ter geodetk na gladkih mnogoterostih. Pokazala sta, da ima gladka funkcija na mnogoterosti M vsaj toliko kritičnih točk, kolikor znaša kategorija prostora. Ker pa je Lusternik-Schnirelmannova kategorija (na kratko LS-kategorija) homotopsko invariantna in ker se je sčasoma izkazalo, da meri nekakšno homotopsko nilpotentnost prostorov, je postala pomemben objekt raziskovanja v homotopski teoriji.

Skoraj trideset let je bila eno osrednjih vprašanj teorije Ganejeve domneve, da se kategorija prostora poveča natanko za ena, če ga pomnožimo s sfero. Zanimanje za LS-kategorijo med algebraskimi topologi je v dobri meri sledilo usodi te na videz preproste domneve: usihalo je, kadar je reševanje stagniralo, naraščalo pa ob vsakem novem napredku. Tako ukvarjanje z LS-kategorijo vztrajno narašča v zadnjih petnajstih letih, ko sta najprej B. Jessup [8] in K. Hess [5] dokazala pomemben posebni primer Ganejeve domneve ter ko je leta 1998 N. Iwase [6] povzročil precejšnje presenečenje z dokazom, da domneva v splošnem ne velja. Čeprav je bila domneva ovržena, je povezanost Iwasejeve konstrukcije z lokalizacijo, homotopskimi grupami sfer in nekaterimi drugimi bazičnimi konstrukcijami v homotopski teoriji, povrh pa dejstvo, da domneva ,skoraj' velja, odprlo celo vrsto pomembnih vprašanj in naredilo iz LS-kategorije eno najbolj vročih raziskovalnih področij algebrajske topologije.

V članku bomo najprej podali definicijo LS-kategorije ter izpeljali njene osnovne lastnosti. Ogledali si bomo še nekaj alternativnih definicij, opisali metode za računanje in izpeljali zvezo s homotopsko nilpotentnostjo. Nekaj malega bomo povedali tudi o Ganejevi domnevi, predvsem bomo skušali

pojasniti, zakaj je smiselna. Na koncu bomo opisali še klasično povezavo med LS-kategorijo in kritičnimi točkami gladkih preslikav.

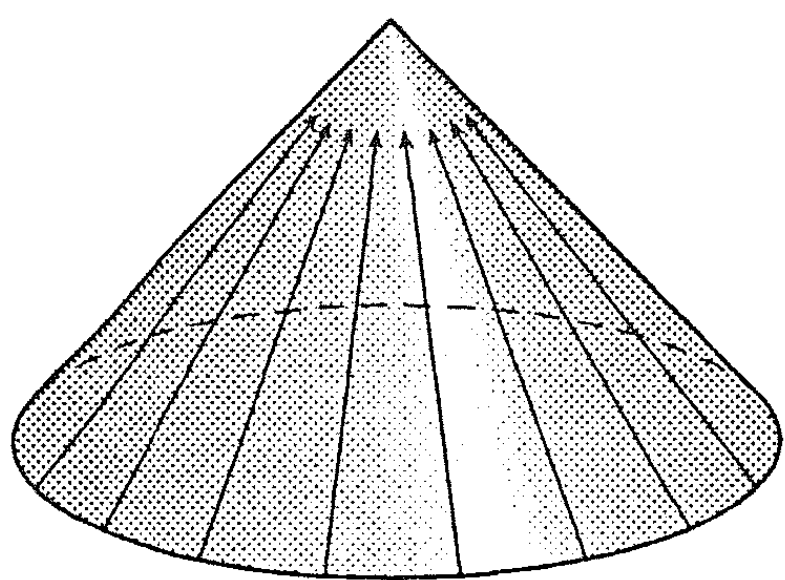
1. Definicija in osnovne lastnosti

Za podmnožico A topološkega prostora X pravimo, da je *kategorična*, če je A kontraktibilna v X , tj. če obstaja homotopija $H_t: A \rightarrow X$, $t \in [0, 1]$, pri kateri je H_0 inkluzija A v X , medtem ko je $H_1(A) = \{*\}$. Pri tem ne zahtevamo, da je A sam v sebi kontraktibilen, lahko je celo nepovezan. Na primer, krožnica je kategorična podmnožica kroga, čeprav sama ni kontraktibilna. Opazimo, da je podmnožica kategorične množice tudi sama kategorična, kar za kontraktibilne množice ne velja. Pokritje prostora X je *kategorično*, če je sestavljeno iz kategoričnih podmnožic X .

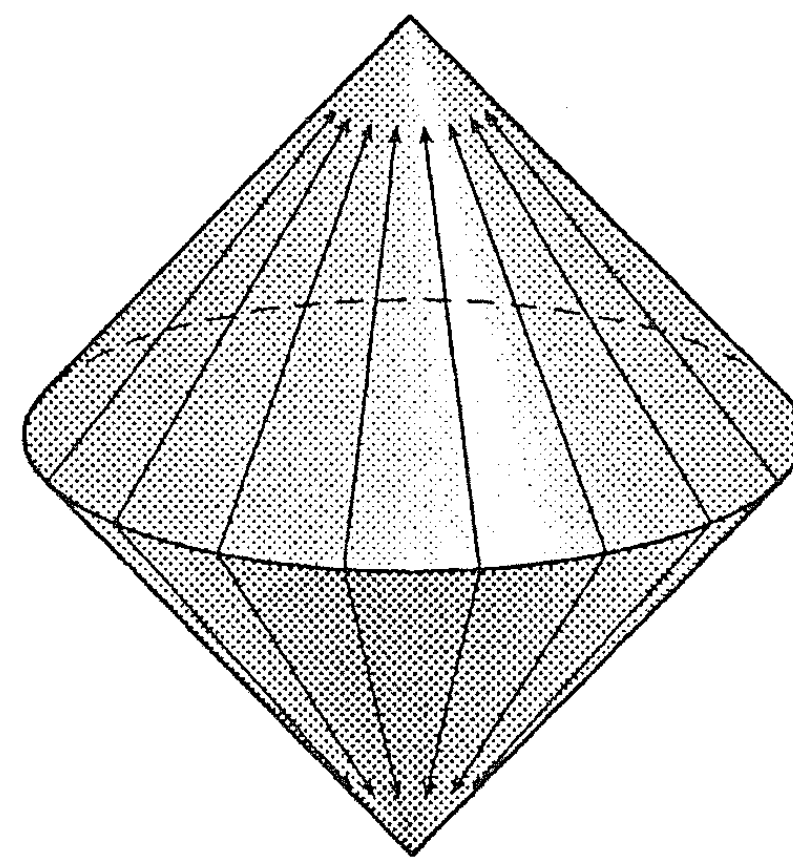
Lusternik-Schnirelmannova kategorija (ali LS-kategorija) $\text{cat}(X)$, prostora X definiramo kot najmanjše celo število $k \geq 0$, za katero obstaja odprto kategorično pokritje X s k elementi. Če X nima nobenega končnega odprtega kategoričnega pokritja, pravimo, da je njena kategorija neskončna.

Primer 1.

- i. $\text{cat}(X) = 1$ natanko takrat, ko je X kontraktibilen, tj. ko obstaja homotopija $H_t: X \rightarrow X$, pri kateri je H_0 identična, H_1 pa konstantna preslikava.
- ii. $\text{cat}(\Sigma X) \leq 2$, saj suspenzijo ΣX prostora X (dobljeno iz prizme $X \times I$, ki ji obe bazi $X \times 0$ in $X \times 1$ stisnemo v točko) lahko pokrijemo z dvema stožcema, ki sta kontraktibilna (glej sliko 1).



Stožec je kontraktibilen



Suspenzija je unija dveh stožcev

Slika 1

- iii. $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) \leq n+1$. Res, projektivni prostor $\mathbb{R}P^n$ ima standardno odprto pokritje $\{A_0, \dots, A_n\}$, kjer je

$$A_i = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}.$$

Ker so vsi A_i v resnici primerki $\mathbb{R}^n$, vloženi v projektivnem prostoru, torej kontraktibilni, je opisano pokritje kategorično.

S povsem enakim premislekom izpeljemo tudi oceni za kompleksne in kvaternionske projektivne prostore: $\text{cat}(\mathbb{C}P^n) \leq n+1$ in $\text{cat}(\mathbb{H}P^n) \leq n+1$.

■

Definicijo kategorije lahko relativiziramo na podprostore: za $A \subseteq X$ definiramo $\text{cat}_X(A)$, *Lusternik-Schnirelmannovo kategorijo podprostora A glede na X* : to je najmanjši k , za katerega obstaja odprto pokritje za A z množicami, ki so kategorične v X . Vsaka množica, ki je kategorična v A , je kategorična tudi v X , zato je $\text{cat}_X(A) \leq \text{cat}(A)$ in $\text{cat}_X(X) = \text{cat}(X)$.

Še nekoliko splošneje, za $A \subseteq X$ pravimo, da je *kategoričen glede na preslikavo $f: X \rightarrow Y$* , če je zožitev $f|_A$ homotopna trivialni preslikavi. Kategorija $\text{cat}(f)$ preslikave $f: X \rightarrow Y$ je najmanjši k , za katerega obstaja odprto pokritje X s k množicami, ki so kategorične glede na f . Očitno je $\text{cat}(X) = \text{cat}(\text{id}_X)$ in $\text{cat}_X(A) = \text{cat}(i)$, kjer za i vzamemo inkluzijo A v X .

Občasno bomo kak rezultat lažje izpeljali ali pa bolj naravno izrazili z uporabo omenjenih posplošitev, a bo naš glavni cilj vendarle izračun $\text{cat}(X)$. Oglejmo si zdaj osnovne lastnosti LS-kategorije. Dokazali jih bomo za kategorijo preslikave, vendar bomo, zaradi preglednosti, povedali tudi, kaj pomenijo za kategorijo prostora.

- Naj bo $\{A_i\}$ odprto pokritje za X in naj bo $f: X \rightarrow Y$ poljubna preslikava. Tedaj je $\text{cat}(f) \leq \sum_i \text{cat}(f|_{A_i})$. Posebej je $\text{cat}(A \cup B) \leq \text{cat}(A) + \text{cat}(B)$. To lastnost imenujemo *subaditivnost* LS-kategorije.
- Za preslikavi $f: X \rightarrow Y$ in $g: Y \rightarrow Z$ velja $\text{cat}(g \circ f) \leq \min\{\text{cat}(f), \text{cat}(g)\}$. Res, odprto pokritje za X , ki je kategorično glede na f , je kategorično tudi glede na $g \circ f$, zato je $\text{cat}(g \circ f) \leq \text{cat}(f)$. Če pa je $\{A_i\}$ odprto pokritje za Y , ki je kategorično glede na g , potem je $\{f^{-1}(A_i)\}$ odprto pokritje za X , kategorično glede na $g \circ f$ in je $\text{cat}(g \circ f) \leq \text{cat}(g)$. Posebej je $\text{cat}(f) = \text{cat}(\text{id}_Y \circ f) \leq \text{cat}(\text{id}_Y) = \text{cat}(Y)$ in $\text{cat}(f) = \text{cat}(f \circ \text{id}_X) \leq \text{cat}(X)$, torej je $\text{cat}(f) \leq \min\{\text{cat}(X), \text{cat}(Y)\}$.
- Če sta preslikavi f in g homotopni, potem je $\text{cat}(f) = \text{cat}(g)$. Jasno, saj je pokritje, ki je kategorično glede na f , kategorično tudi glede na g in obratno.

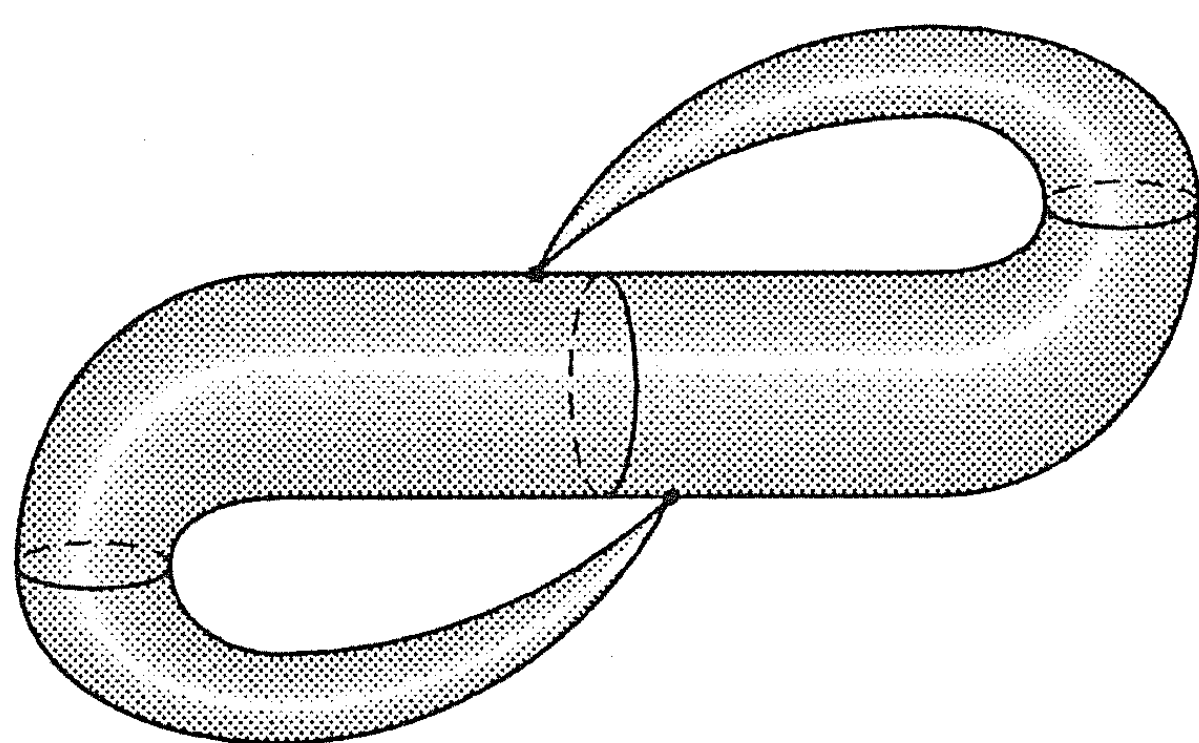
Če obstajata preslikavi $r: X \rightarrow Y$ in $i: Y \rightarrow X$, da je $r \circ i \simeq \text{id}_Y$, potem pravimo, da je Y *homotopski retrakt* X (oz. da X *dominira* Y). V tem primeru je $\text{cat}(Y) = \text{cat}(\text{id}_Y) = \text{cat}(r \circ i) \leq \min\{\text{cat}(r), \text{cat}(i)\} \leq \text{cat } X$. Posebej, če sta X in Y homotopsko ekvivalentna, potem drug drugega dominirata, torej je $\text{cat}(X) = \text{cat}(Y)$, kar pomeni, da je LS-kategorija homotopska invarianta.

2. Alternativne definicije

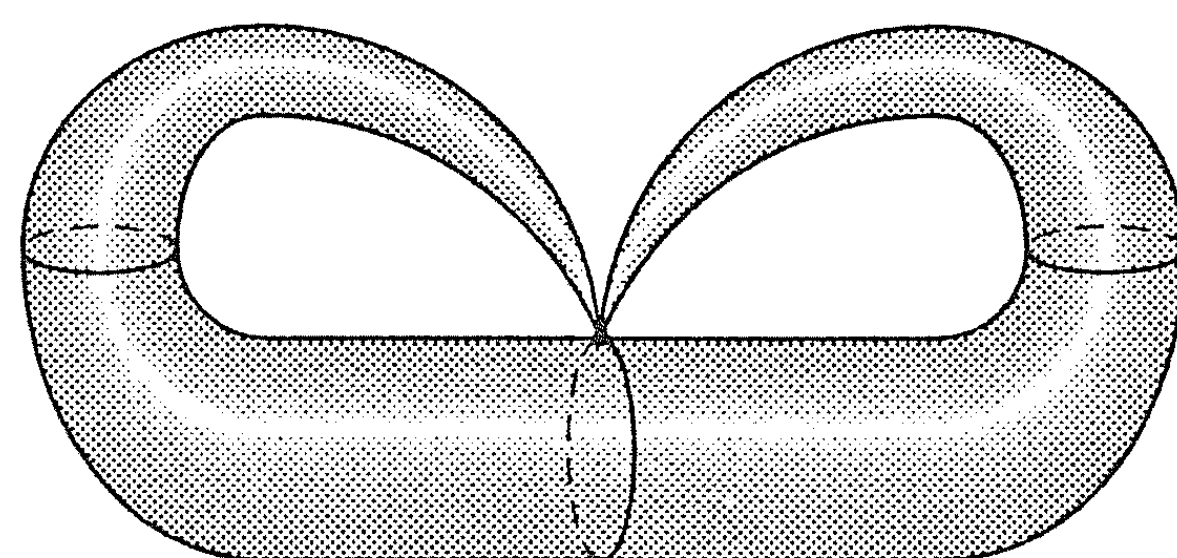
V tem razdelku bomo predstavili nekaj možnih variant pri definiciji LS-kategorije. Ob ustreznih privzetkih o prostoru X so te definicije ekvivalentne, za splošne X pa se lahko razlikujejo. Izbira primerne definicije je odvisna od problema, s katerim se ukvarjamo, obenem pa implicitno opredeljuje, o katerem razredu prostorov govorimo.

Eno prvih vprašanj, ki se nam zastavijo ob definiciji LS-kategorije, je, zakaj zahtevamo, da so členi pokritja kontraktibilni v celém prostoru in ne le v sebi. Celo pri vseh primerih, ki smo jih srečali v prvem razdelku, so bila pokritja sestavljena kar iz kontraktibilnih množic. Odgovor je preprost, čeravno nekoliko presenetljiv: ‚definicija‘ s pokritji, katerih člani so kontraktibilni, ni homotopsko invariantna, kot se bomo prepričali ob naslednjem zanimivem zgledu R. Foxa [2].

Primer 2. Naj bo X kvocientni prostor sfere S^2 , dobljen z identifikacijo štirih točk po parih. S slike 2 je razvidno, da X lahko pokrijemo z dvema kontraktibilnima množicama.



prostor X



prostor Y

Slika 2

Naj bo Y kvocientni prostor sfere S^2 , dobljen z identifikacijo treh točk. Prostora X in Y sta očitno homotopsko ekvivalentna, saj je Y homeomorfen prostoru, ki ga dobimo, če v X stisnemo lok med dvema ‚vrhoma‘ v točko, stiskanje kontraktibilne množice v točko pa ne vpliva na homotopski tip. Malo poskušanja nas že skoraj prepriča, da prostora Y ni mogoče pokriti z dvema kontraktibilnima množicama, a je dokaz vseeno dokaj zapleten.

Označimo s $q: S^2 \rightarrow Y$ identifikacijsko preslikavo in s $t \in Y$ trojno točko ter privzemimo, da je $Y = A \cup B$, kjer sta A in B kontraktibilna. Denimo, da je $t \in A$: tedaj $\bar{A} := q^{-1}(A)$ tvorijo natanko tri povezane komponente, ki so vse kontraktibilne. Res, če bi bilo komponent več, potem A ne bi bil povezan (in toliko manj kontraktibilen), saj pri identifikaciji treh točk združimo največ tri komponente iz $\bar{A}$. Če pa bi jih bilo manj, bi obstajala v $\bar{A}$ pot med dvema praslikama trojne točke in bi zato v A imeli nekontraktibilno

krožnico. Sledi, da je A v bistvu šop treh komponent $\overline{A}$, in ker je A kontraktibilen, morajo biti tudi vse tri komponente $\overline{A}$ kontraktibilne.

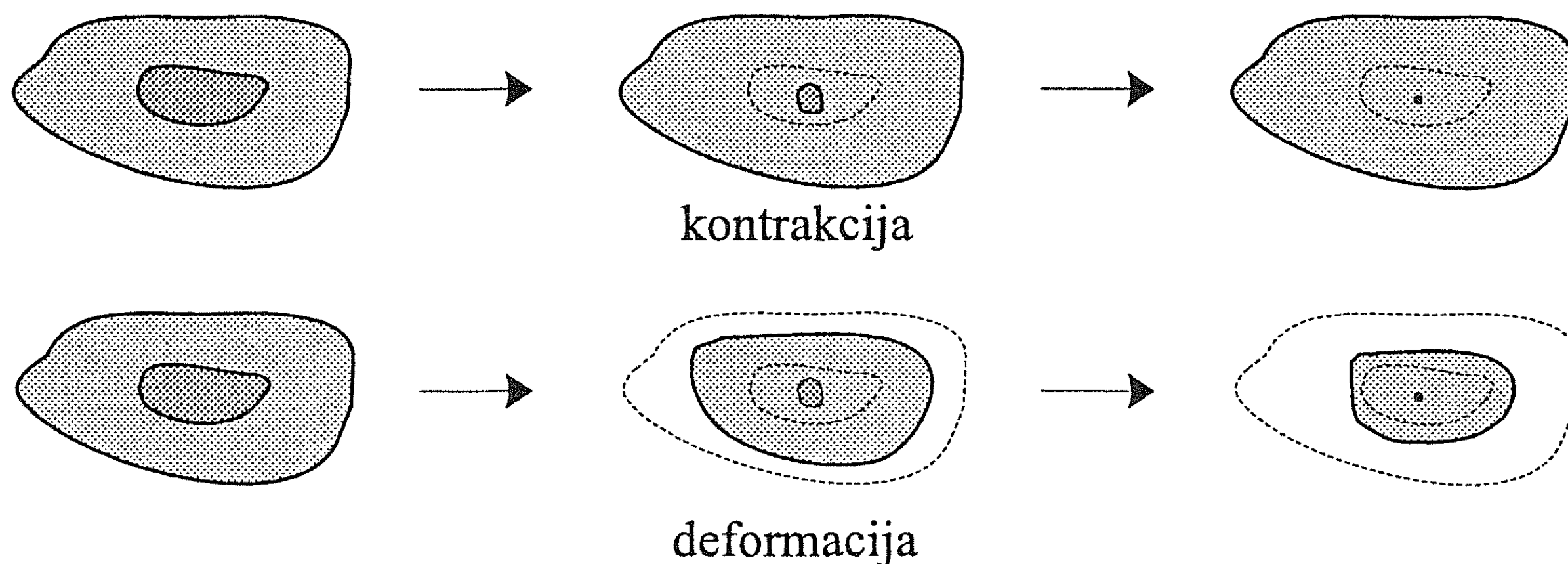
V nadaljevanju ločimo dve možnosti za B . Če $t \notin B$, potem je $B \approx \overline{B} =: q^{-1}(B)$. Vendar pa $\overline{B}$ ni kontraktibilen, saj v $S^2 - \overline{A} \subseteq \overline{B}$ obstaja sklenjena krivulja, ki loči eno izmed točk v $q^{-1}(t)$ od preostalih dveh in torej ni kontraktibilna v $\overline{B}$, kar je v nasprotju s privzetki. Če pa je $t \in B$, potem je tudi $\overline{B}$ unija treh kontraktibilnih komponent. Ena od teh vsebuje povezano množico $S^2 - \overline{A}$, v tej pa obstaja sklenjena krivulja, ki loči preostali dve točki iz $q^{-1}(t)$ in torej ni kontraktibilna v $\overline{B}$. ■

Opomba 3. Zgornjemu primeru navkljub pa je mogoče kategorijo prostora oceniti tudi s kontraktibilnimi množicami. T. Ganea je v [3] vpeljal *krepko kategorijo* prostora, $\text{Cat}(X)$. To je najmanjše naravno število k , pri katerem obstaja pokritje s k kontraktibilnimi množicami nekega prostoru X homotopsko ekvivalentnega CW-kompleksa. Homotopska invariantnost krepke kategorije je torej vgrajena kar v definicijo. Obenem pa je krepka kategorija zelo dobra ocena za LS-kategorijo: F. Takens je v [10] pokazal, da velja $\text{cat}(X) \leq \text{Cat}(X) \leq \text{cat}(X) + 1$. ■

V literaturi se pojavljajo tudi druge variante definicije LS-kategorije. Že prvotna definicija Lusternika in Schnirelmanna je zahtevala zaprta kategorična pokritja, definicijo z odprtimi pokritji je šele nekaj let kasneje vpeljal Fox. Znano je, da v normalnih prostorih za vsako končno odprto pokritje obstaja finejše zaprto pokritje, zato lahko odprta kategorična pokritja nadomestimo z zaprtimi. V prostorih, ki so absolutni okoliški retrakti (npr. mnogoterosti, poliedri, CW-kompleksi), v katerih je vsaka zaprta podmnožica retrakt kake svoje odprte okolice, pa lahko vsako zaprto kategorično pokritje nadomestimo z odprtim. Zato lahko na geometričnih prostorih, ki so obenem normalni in absolutni okoliški retrakti, kot so mnogoterosti in CW-kompleksi, kategorijo ekvivalentno definiramo bodisi z odprtimi ali z zaprtimi kategoričnimi pokritji.

Druga sestavina definicije, ki bi jo lahko smiselno spremenili, zadeva način, kako se kategorične podmnožice stisnejo v točko. Lahko namreč zahtevamo, da se členi pokritja stisnejo v točko z deformacijo celega prostora, to je, da obstaja homotopija $H_t: X \rightarrow X$, za katero je $H_0 = \text{id}_X$ in $H_1(A) = *$. In če bi v X imeli izbrano izhodišče, bi bilo smiselno zahtevati, da v njem homotopija miruje. Obravnava vseh možnih kombinacij teh zahtev bi nas odpeljala predaleč, zato si oglejmo le naslednji rezultat.

Rekli bomo, da je $A \subseteq X$ *krepko kategorična*, če obstaja homotopija $H_t: X \rightarrow X$, pri kateri sta $H_0 = \text{id}_X$ in $H_1(A) = \{x_0\}$ za vse $t \in [0, 1]$. Taki homotopiji bomo rekli *deformacija* X , ki A stisne v točko.



Slika 3

Trditev 4. Naj bo X normalen, s potmi povezan prostor in naj ima izhodišče $x_0 \in X$ kako kontraktibilno okolico. Tedaj sta naslednji trditvi ekvivalentni.

(a) $\text{cat}(X) \leq n$;

(b) X ima zaprto pokritje z n krepko kategoričnimi množicami.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b): Naj bo $\{A_1, \dots, A_n\}$ odprto kategorično pokritje za X in naj bodo $H_i : A_i \times I \rightarrow X$ kontrakcije množic A_i v X . Zaradi povezanosti lahko privzamemo, da je $(H_i)_1(A_i) = \{x_0\}$ za vsak i (sicer bi homotopijo podaljšali za pot od točke $(H_i)_1(A_i)$ do točke x_0). Zaradi normalnosti ima X zaprto pokritje $\{F_1, \dots, F_n\}$, kjer je $F_i \subseteq A_i$. Trdimo, da so množice F_i krepko kategorične. Spet zaradi normalnosti obstajajo odprte množice V_i , za katere velja $F_i \subseteq V_i \subseteq \bar{V}_i \subseteq A_i$, in Urysohnove preslikave $r_i : (X, X - V_i, F_i) \rightarrow (I, 0, 1)$. Definirajmo $\bar{H}_i : X \times I \rightarrow X$ s formulo

$$\bar{H}_i(x, t) := \begin{cases} x & \text{za } x \in X - \bar{V}_i; \\ H_i(x, r_i(x) \cdot t) & \text{za } x \in A_i. \end{cases}$$

Na $(X - \bar{V}_i) \cap A_i$ je $r_i(x) = 0$, zato je $\bar{H}_i$ dobro definirana in zvezna. Za $x \in F_i$ pa je $r_i(x) = 1$, zato je $(\bar{H}_i)_1(F_i) = \{x_0\}$ in je $\bar{H}_i$ deformacija X , ki F_i stisne v točko.

(b) $\Rightarrow$ (a): Naj bo $\{F_1, \dots, F_n\}$ zaprto pokritje X s krepko kategoričnimi množicami, $H_i : X \times I \rightarrow X$ pripadajoče deformacije F_i v točko x_0 in U kontraktibilna okolica za x_0 . Tedaj praslike $U_i := (H_i)_1^{-1}(U)$ tvorijo odprto kategorično pokritje za X . ■

Zdaj lahko opišemo, kako je LS-kategorijo definiral G. W. Whitehead, ki je uporabil standardni prijem homotopske teorije, da se problem poskuša prevesti na ekvivalenten problem dviga ali razširitve.

Debeli šop prostora X z izhodiščem x_0 je podprostor $W^n X$ n -kratnega produkta X^n , podan z

$$W^n X := \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid \text{vsaj en } x_i = x_0\}.$$

Na primer $W^1X = \{x_0\}$, $W^2X = X \vee X$ itn.

Izrek 5. Naj bo X tak kot je v trditvi 4. Tedaj je $\text{cat}(X) \leq n$, če in samo če lahko diagonalno preslikavo $\Delta^n: X \rightarrow X^n$ deformiramo v W^nX , tj. če obstaja preslikava $f: X \rightarrow W^nX$, za katero naslednji diagram komutira do homotopije natančno.

$$\begin{array}{ccc} & W^nX & \\ & \downarrow i & \\ X & \xrightarrow[\Delta^n]{} X^n & \end{array} \quad \Delta^n \simeq i \circ f$$

Dokaz. Naj bo najprej $\{A_1, \dots, A_n\}$ zaprto pokritje X s krepko kategoričnimi množicami in naj bodo H_i ustrezne deformacije X , ki posamezne množice A_i stisnejo v točko x_0 . Preslikava $f := ((H_1)_1, \dots, (H_n)_1): X \rightarrow X^n$ je homotopna $\Delta^n = ((H_1)_0, \dots, (H_n)_0)$. Ker pa množice A_i pokrivajo X , obstaja za vsak x tak i , da je $(H_i)_1(x) = x_0$, zato je slika f vsebovana v W^nX , kar pomeni, da je $i \circ f \simeq \Delta^n$.

Obratno, naj za $f: X \rightarrow W^nX$ obstaja homotopija $H: \Delta^n \simeq i \circ f$. Tedaj je $p_i \circ H: \text{id}_X \simeq p_i \circ i \circ f$. Množice $A_i := (p_i \circ i \circ f)^{-1}(x_0)$ so zaprte in pokrivajo X , saj je $W^nX = \bigcup_i p_i^{-1}(x_0)$. Povrh je $p_i \circ H$ deformacija X , ki množico A_i stisne v točko. ■

Na podlagi tega izreka lahko podamo naslednji opis: $\text{cat}(X)$ je najmanjše število n , za katero lahko diagonalno preslikavo $\Delta^n: X \rightarrow X^n$ deformiramo v W^nX . Ta definicija kategorije prostora se je izkazala kot najprimernejša za uporabo v homotopski teoriji. Videli smo, da se za dokaj splošne prostore (normalni in s potmi povezani) ujema s prvotno.

Na podlagi Whiteheadove definicije lahko elegantno karakteriziramo prostore s kategorijo 2.

Posledica 6. Za X kot v trditvi 4 je $\text{cat}(X) \leq 2$ natanko takrat, ko je X coH-prostor.

Dokaz. Po Whiteheadovi definiciji je $\text{cat}(X) \leq 2$ natanko takrat, ko obstaja preslikava $f: X \rightarrow X \vee X$, za katero komutira diagram

$$\begin{array}{ccc} & X \vee X & \\ & \downarrow i & \\ X & \xrightarrow[\Delta]{} X \times X & \end{array}$$

to pa je ravno definicija coH-strukture na prostoru X . ■

3. Ocene za kategorijo

Izračun LS-kategorije danega prostora je praviloma težek problem. Običajno si pomagamo z vrsto spodnjih in zgornjih ocen, ki so same lažje izračunljive, in poskušamo za dani prostor dobiti čim manjši interval, na katerem je njegova LS-kategorija. V tem razdelku bomo spoznali nekaj najpogostejše uporabljanih ocen za LS-kategorijo.

Geometrične ocene

Začnimo z ocenami, ki jih dobimo glede na način, kako je prostor zgrajen.

Preslikavni stožec preslikave $f: X \rightarrow Y$ je zlepek $C_f := Y \cup_f CX$. Ker je CX kontraktibilen, je $\text{cat}(C_f) \leq \text{cat}(Y) + 1$. V CW-kompleksu X je $(n+1)$ -skelet preslikavni stožec lepilne preslikave v n -skelet, zato je $\text{cat}(X^{(n+1)}) \leq \text{cat}(X^{(n)}) + 1$. Ker konstrukcijo CW-kompleksa začnemo z 0-celicami (tj. točkami) in ker poljubno diskretno množico v povezanem prostoru lahko zvezno stisnemo v točko, dobimo:

Trditev 7. *Naj ima X homotopski tip povezanega CW-kompleksa. Tedaj je $\text{cat}(X) \leq \dim(X) + 1$.*

Zahteva, da ima prostor homotopski tip CW-kompleksa, je pravzaprav odveč. Ista ocena velja, kakor hitro je X metrizable, s potmi povezan prostor in $\dim(X)$ pomeni tako imenovano krovno (ali Lebesgueovo) dimenzijo prostora – glej trditev 2.1 v [7].

Ocena LS-kategorije z dimenzijo prostora je praviloma zelo groba. Recimo, za kompleksni projektivni prostor nam da $\text{cat}(\mathbb{C}P^n) \leq 2n + 1$, medtem ko smo s preprosto konstrukcijo že pokazali, da je $\text{cat}(\mathbb{C}P^n) \leq n + 1$. Vzrok te pomanjkljivosti je na dlani: $\mathbb{C}P^n$ dopušča celično dekompozicijo, v kateri so vse celice sodorazsežne. Če pa prostor X nima k -celic, potem je $\text{cat}(X^{(k)}) = \text{cat}(X^{(k-1)})$, zato pri $\mathbb{C}P^n$ dobimo oceno, ki je (vsaj) za n previsoka.

Opisali bomo dve ‚izboljšavi‘ trditve 7.

Za poljuben prostor X vpeljemo število $\text{cl}(X)$ (‚cone-length‘ oziroma ‚cofibration-length‘): $\text{cl}(X) \leq n$, če obstaja zaporedje prostorov $X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n$, kjer je X_1 kontraktibilen, X_{k+1} je stožec neke preslikave $f_k: A_k \rightarrow X_k$ za $k = 1, \dots, n-1$, prostor X_n pa je homotopsko ekvivalenten X . Število $\text{cl}(X)$ je že po definiciji homotopska invarianta in velja

Trditev 8. *Za poljuben prostor X je $\text{cat}(X) \leq \text{cl}(X)$.*

Že na prvi pogled je $\text{cl}(X)$ natančnejša ocena za $\text{cat}(X)$ od dimenzije prostora, saj med drugim upošteva možnost, da CW-kompleks X nima celic v nekaterih dimenzijah, ali da lahko hkrati dodamo celice raznih dimenzij. Na primer, suspenzija ΣX je preslikavni stožec konstantne preslikave $X \rightarrow *$, torej je $\text{cl}(X) \leq 2$, čeprav sta tako dimenzija kot število celic v ΣX lahko poljubno velika. V resnici je Ganea dokazal (glej trditev 2.1 v [3]), da je za s potmi povezane prostore $\text{cl}(X) = \text{Cat}(X)$, torej $\text{cl}(X)$, tako kot krepka kategorija, presega $\text{cat}(X)$ največ za 1. Zaradi tega je jasno, da natančni izračun $\text{cl}(X)$ ne more biti bistveno lažji kot izračun $\text{cat}(X)$. V praksi običajno iz opisa prostora X ugotovimo, da ga je mogoče konstruirati z določenim številom preslikavnih stožcev (ki ni nujno minimalno) in to uporabimo kot zgornjo oceno za $\text{cat}(X)$.

Naslednjo oceno izpeljemo s pomočjo Whiteheadove karakterizacije kategorije. (Prostor je n -povezan, če je njegovih prvih n homotopskih grup trivialnih; n -povezan CW-kompleks dopušča dekompozicijo, v kateri ni celic v dimenzijah $1, \dots, n$.)

Trditev 9. *Za $(r - 1)$ -povezan CW-kompleks X velja*

$$\text{cat}(X) \leq \frac{\dim(X)}{r} + 1.$$

Dokaz. Ker je X $(r - 1)$ -povezan, lahko privzamemo, da ima CW-dekompozicijo, pri kateri so vse celice, razen ene 0-razsežne, dimenzije vsaj r . Tedaj so vse celice v $X^n - W^n X$ produkti po n pozitivno dimenzionalnih celic, torej imajo dimenzijo najmanj $n \cdot r$. Po izreku o celularni aproksimaciji lahko diagonalo $\Delta^n: X \rightarrow X^n$ deformiramo v $W^n X$, kakor hitro je $\dim(X) < n \cdot r$. Odtod pa že sledi zgornja formula. ■

Kategorija produkta in Ganejeva domneva

Zaporedje podprostorov

$$\emptyset = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$$

imenujemo *filtracija* prostora X . Filtracija prostora X z zaprtimi podprostori je *kategorična*, če je za $i = 1, \dots, n$ razlika $X_i - X_{i-1}$ vsebovana v kaki odprti kategorični podmnožici X .

Lema 10. *Naj bo prostor X normalen. Tedaj je $\text{cat}(X) \leq n$, če in samo če ima X kategorično filtracijo dolžine n .*

Dokaz. Naj bo $\emptyset = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n = X$ kategorična filtracija in naj bo U_i ($i = 1, 2, \dots, n$) odprta kategorična množica, ki vsebuje $X_i - X_{i-1}$. Tedaj je $U_1, \dots, U_n$ odprto kategorično pokritje za X .

Obratno, če je $U_1, \dots, U_n$ odprto kategorično pokritje normalnega prostora X , potem obstaja zaprto pokritje $F_1, \dots, F_n$ za X , kjer je $F_i \subset U_i$ za vse i in je z $X_i := F_1 \cup \dots \cup F_i$ podana kategorična filtracija dolžine n za X . ■

Izrek 11. *Naj bosta prostora X in Y metrizabilna in povezana s potmi. Tedaj je $\text{cat}(X \times Y) < \text{cat}(X) + \text{cat}(Y)$.*

Dokaz. Po prejšnji lemi obstajata kategorični filtraciji $\emptyset = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_m = X$ in $\emptyset = Y_0 \subseteq Y_1 \subseteq \dots \subseteq Y_n = Y$, kjer je $m = \text{cat}(X)$ in $n = \text{cat}(Y)$. Trdimo, da je z

$$Z_k := \bigcup_{i+j=k+1} X_i \times Y_j, \quad k = 0, \dots, m+n-1$$

podana kategorična filtracija za $X \times Y$. Množice Z_k so očitno zaprte, zato bo dovolj, če pokažemo, da so razlike $Z_k - Z_{k-1}$ vsebovane v odprtih kategoričnih podmnožicah $X \times Y$. Razliko $Z_k - Z_{k-1}$ lahko zapišemo kot disjunktno unijo:

$$Z_k - Z_{k-1} = \bigcup_{i+j=k+1} (X_i - X_{i-1}) \times (Y_j - Y_{j-1}).$$

Ker sta filtraciji za X in Y kategorični, obstajajo kategorične odprte podmnožice $U_1, \dots, U_k$ produkta $X \times Y$, za katere je $A_i := (X_i - X_{i-1}) \times (Y_{k+1-i} - Y_{k-i}) \subseteq U_i$. Ker pa množice U_i niso nujno paroma disjunktne, ne moremo trditi, da je tudi njihova unija kategorična podmnožica produkta. Zato s pomočjo metrike d na produktu definiramo množice

$$V_i := \{u \in U_i \mid d(u, A_i) < d(u, A_j), i \neq j\},$$

ki so odprte zaradi zveznosti metrike in kategorične, ker so podmnožice v U_i . Ni se težko prepričati, da so V_i disjunktne, kakor hitro velja $A_i \cap \overline{A_j} = \emptyset$ za $i \neq j$. Če je $i < j$, je $\overline{A_i} \cap A_j \subseteq ((X_i - X_{i-1}) \cap (X_j - X_{j-1})) \times Y = \emptyset$. Podobno, če je $i > j$, je $\overline{A_i} \cap A_j \subseteq X \times ((Y_{k+1-i} - Y_{k-i}) \cap (Y_{k+1-j} - Y_{k-j})) = \emptyset$. Ker so $V_1, \dots, V_k$ disjunktne, odprte in kategorične, je tudi njihova unija $V_1 \cup \dots \cup V_k$ odprta in kategorična. Ker obenem vsebuje $Z_k - Z_{k-1}$, sklepamo, da množice Z_k tvorijo kategorično filtracijo za $X \times Y$. ■

Faktorja X in Y sta homotopska retrakta $X \times Y$, zato imamo tudi spodnjo oceno za kategorijo produkta:

$$\max\{\text{cat}(X), \text{cat}(Y)\} \leq \text{cat}(X \times Y) < \text{cat}(X) + \text{cat}(Y).$$

Naravno vprašanje je, ali se pri množenju s kakim prostorom LS-kategorija nujno poveča. Če je Y kontraktibilen, je $\text{cat}(Y) = 1$, obenem pa je $X \times Y$ homotopsko ekvivalenten X , zato nam zgornja ocena ne pove nič novega. Prvi zanimiv primer je, ko je $\text{cat}(Y) = 2$, na primer, če je Y suspenzija takega prostora. Za nekontraktibilen X dobimo oceno

$$\text{cat}(X) \leq \text{cat}(X \times Y) \leq \text{cat}(X) + 1.$$

Žal ni težko dobiti primere, ko je Y nekontraktibilna suspenzija, a je vendarle $\text{cat}(X \times Y) = \text{cat}(X)$.

Primer 12. *Pseudoprojektivna ravnina* P_n je prostor, ki ga dobimo, če na krožnico nalepimo vzdolž roba disk s preslikavo stopnje n . Drugače povedano, P_n je preslikavni stožec preslikave $z \mapsto z^n$, kjer je z kompleksno število z absolutno vrednostjo 1. Ker je kategorija suspenzije največ 2, je po izreku 11 $\text{cat}(\Sigma P_m \times \Sigma P_n) \leq 3$.

Če sta m in n tuji števili, so reducirane homološke grupe produkta dane s

$$\tilde{H}_k(\Sigma P_m \times \Sigma P_n) = \begin{cases} \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n & k = 2, \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

to pa je enako homološkim grupam šopa $\Sigma P_m \vee \Sigma P_n$. Od tod sledi, da inkluzija $\Sigma P_m \vee \Sigma P_n \hookrightarrow \Sigma P_m \times \Sigma P_n$ inducira izomorfizem na homoloških grupah, torej je homotopska ekvivalenca. Sklepamo, da je $\text{cat}(\Sigma P_m \times \Sigma P_n) = \text{cat}(\Sigma P_m \vee \Sigma P_n) = 2$.

V naslednjem razdelku bomo pokazali, da je $\text{cat}(S^i \times S^j) = 3$, celo splošneje, da je $\text{cat}(S^{i_1} \times \cdots \times S^{i_n}) = k + 1$, torej se v teh primerih kategorija prostora poveča za 1, ko ga pomnožimo s sfero. Na podlagi tega in vrste drugih primerov je Ganea menil, da je ključna razlika med sfero in pseudoprojektivno ravnino ta, da je homologija pseudoprojektivnih ravnin torzijska in se torziji pri različnih praštevilih uničita. Zato je leta 1971 postavil domnevo, da je $\text{cat}(X \times S^i) = \text{cat}(X) + 1$. Ta domneva je kmalu postala osrednje vprašanje teorije, po množici delnih pozitivnih rezultatov pa jo je leta 1998 N. Iwase dokončno ovrgel.

Kategorija in kohomologija

Večina doslej obravnavanih ocen za LS-kategorijo prostora so bile v bistvu zgornje meje. Zdaj si bomo ogledali še najpomembnejšo spodnjo mejo – nilpotentnost kohomološkega kolobarja.

Vsakemu prostoru X lahko priredimo tako imenovani *kohomološki kolobar* $H^*(X)$, katerega struktura je tesno povezana z geometrijo prostora X . Našteli bomo njegove glavne lastnosti (najdemo jih v vsakem učbeniku algebrajske topologije, glej npr. 3. poglavje v [4]).

1. Pravilo, ki prostoru X priredi kolobar $H^*(X)$, je kontravarianten funktor: preslikava $f: X \rightarrow Y$ inducira homomorfizem kolobarjev

$$f^* = H^*(f): H^*(Y) \rightarrow H^*(X).$$

Ta funktor je homotopsko invarianten: če sta preslikavi f in g homotopni, je $f^* = g^*$. Posledično, če imata X in Y isti homotopski tip, sta kolobarja $H^*(X)$ in $H^*(Y)$ izomorfna.

2. Vsak podprostor $A \subseteq X$ določa *eksaktno zaporedje para*, ki je osnovno sredstvo za računanje kohomologije raznih prostorov. Mi bomo potrebovali in zato omenili le tole elementarno posledico: če je inkluzija $A \hookrightarrow X$ homotopna konstanti (torej če je A kategorična podmnožica v X), potem kvocientna preslikava $q: X \rightarrow X/A$ inducira epimorfizem kolobarjev $q^*: H^*(X/A) \rightarrow H^*(X)$.
3. Množenje v kohomološkem kolobarju pravzaprav izvira iz neke zunanje operacije: če sta A in B podprostora v X , potem lahko zmnožimo element $x \in H^*(X/A)$ z elementom $y \in H^*(X/B)$; tedaj je produkt $x \cdot y$ element v $H^*(X/(A \cup B))$.

Kohomološki kolobarji pomembnih prostorov so v glavnem znani. Večinoma gre za tenzorske produkte polinomskih kolobarjev (npr. $\mathbb{Z}[x]$), njihovih kvocientov po kakem idealu (npr. $\mathbb{Z}[x]/(p(x))$) in zunanjih kolobarjev (npr. $\Lambda(x, y)$). Oglejmo si nekaj značilnih primerov kohomoloških kolobarjev:

- $H^*(*) = \mathbb{Z}$;
- $H^*(S^n) = \mathbb{Z}[x]/(x^2)$;
- $H^*(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$; $H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[x]$;
 $H^*(\mathbb{H}P^n) = \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$; $H^*(\mathbb{H}P^\infty) = \mathbb{Z}[x]$

(Kohomološki kolobarji imajo še neko dodatno lastnost, pravimo ji *stopničastost*, ki za oceno LS-kategorije ni pomembna. Tako sta kohomološka kolobarja projektivnih prostorov $\mathbb{C}P^n$ in $\mathbb{H}P^n$ izomorfna kot kolobarja, ne pa tudi kot stopničasta kolobarja, ker je pri prvem element x dvorazsežen, pri drugem pa štirirazsežen.)

- Kohomološki kolobar $\mathbb{R}P^n$ je nekoliko bolj zapleten, a se poenostavi, če ga tenzorsko pomnožimo z $\mathbb{Z}_2$:

$$H^*(\mathbb{R}P^n) \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^{n+1}); \quad H^*(\mathbb{R}P^\infty) \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2[x];$$

- *Lečasti prostor* $L^{2n+1}(p)$ je $(2n+1)$ -razsežna mnogoterost, ki jo dobimo kot kvocientni prostor sfere S^{2n+1} po delovanju grupe $\mathbb{Z}_p$ (kjer je p praštevilo). Delovanje najlažje opišemo, če enačimo grupo $\mathbb{Z}_p$ s podgrupo p -tih korenov enote v kompleksni ravnini, sfero S^{2n+1} pa s podmnožico $S^{2n+1} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$. Tedaj element $\mathbb{Z}_p$ deluje na S^{2n+1} z množenjem po komponentah. Lečasti prostor $L^{2n+1}(2)$ je ravno $\mathbb{R}P^{2n+1}$, ki smo ga pravkar obravnavali, za lihe p pa je kohomološki kolobar lečastih prostorov podan takole:

$$H^*(L^{2n+1}(p)) \otimes \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p[x]/(x^{n+1}) \otimes \Lambda(y);$$

- Za grupo unitarnih $n \times n$ matrik $U(n)$ je

$$H^*(U(n)) = \Lambda(x_1, \dots, x_n);$$

- $H^*(X \vee Y) = H^*(X) \times H^*(Y)$;
- Če $H^*(X)$ nima torzije, potem je $H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes H^*(Y)$;
- Če sta M in N sklenjeni, orientabilni n -mnogoterosti in sta $[M]$ in $[N]$ po vrsti njuna fundamentalna razreda, tj. generatorja v $H^n(M)$ oziroma $H^n(N)$, potem je kohomološki kolobar povezane vsote dan s

$$H^*(M \# N) = (H^*(M) \times H^*(N))/([M] = [N]);$$

Če levo in desno stran tenzorsko pomnožimo z $\mathbb{Z}_2$, dobimo formulo, ki velja tudi za neorientabilne mnogoterosti.

Če je prostor X končno razsežen, so elementi $H^*(X)$ (z izjemo večkratnikov enote) nilpotentni: za $a \in H^*(X)$ je $a^n = 0$, kakor hitro je $n > \dim(X)$. Zato je smiselno opazovati ideal, ki ga dobimo tako, da kohomološkemu kolobarju 'odstranimo' enoto. Formalno ga opišemo takole: inkluzija točke x_0 v X inducira homomorfizem $i^*: H^*(X) \rightarrow H^*(x_0) = \mathbb{Z}$, katerega jedro označimo s $\tilde{H}^*(X) := \text{Ker } i^*$. Ker homomorfizem i^* slika enoto v enoto in ker ima levi inverz, induciran s konstantno preslikavo, sledi, da je $H^*(X)$ izomorfen razširitvi z enoto kolobarja $\tilde{H}^*(X)$, torej $\tilde{H}^*(X)$ povsem določa strukturo celega kohomološkega kolobarja. Po prej povedanem je ideal $\tilde{H}^*(X)$ nilpotenten, kakor hitro je X končno razsežen. Če z $\text{nil}(R)$ označimo nilpotenco kolobarja R , tj. najmanjši n , za katerega je

$R^n = \{x_1 \cdots x_n \mid x_i \in R\} = 0$, potem je $\text{nil}(\tilde{H}^*(X)) \leq \dim(X)$. Pravzaprav velja še boljša ocena:

Izrek 13. *Za povezan prostor X velja $\text{nil}(\tilde{H}^*(X)) \leq \text{cat}(X)$.*

Dokaz. Naj bo $\{A_1, \dots, A_n\}$ kategorično pokritje za X in naj bodo $x_1, \dots, x_n \in \tilde{H}^*(X)$. Kot smo prej omenili, so tedaj homomorfizmi $\tilde{H}^*(X/A_i) \rightarrow \tilde{H}^*(X)$ surjektivni, zato lahko izberemo elemente $\bar{x}_i \in \tilde{H}^*(X/A_i)$, ki se preslikajo po vrsti v x_i . Zaradi funktorialnosti se $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n$ preslika v $x_1 \cdots x_n$, ampak $\bar{x}_1 \cdots \bar{x}_n$ je element $\tilde{H}^*(X/(A_1 \cup \dots \cup A_n)) = \tilde{H}^*(*) = 0$, torej je $x_1 \cdots x_n = 0$. ■

Z uporabo tega rezultata lahko natančno ocenimo kategorijo mnogih prostorov.

1. Projektivni prostori: naj bo $\mathbb{F}$ obseg realnih števil, kompleksnih števil ali kvaternionov. S pomočjo eksplicitnega kategoričnega pokritja smo pokazali, da je $\text{cat}(\mathbb{F}P^n) \leq n + 1$. Po drugi strani je iz kohomoloških kolobarjev projektivnih prostorov razvidno, da v $\tilde{H}^*(\mathbb{F}P^n)$ obstaja element, katerega n -ta potenca je neničelna, zato je $\text{nil}(\tilde{H}^*(\mathbb{F}P^n)) \geq n + 1$ in je $\text{cat}(\mathbb{F}P^n) = n + 1$.
2. Produkti sfer: Po izreku 11 je $\text{cat}(S^{i_1} \times \dots \times S^{i_n}) \leq n + 1$. Po drugi strani je $\tilde{H}^*(S^{i_1} \times \dots \times S^{i_n}) = \mathbb{Z}[x_1]/(x_1^2) \otimes \dots \otimes \mathbb{Z}[x_n]/(x_n^2)$, torej je $x_1 \cdots x_n \neq 0$. Sklepamo, da je $\text{cat}(S^{i_1} \times \dots \times S^{i_n}) = n + 1$.
3. Sklenjene ploskve: Iz trditve 7 sledi, da imajo vse ploskve kategorijo največ 3. Za sfero že vemo, da velja $\text{cat}(S^2) = 2$. Vse preostale ploskve pa so bodisi povezane vsote torusov (če so orientabilne) oziroma povezane vsote torusov in ene projektivne ravnine (če so neorientabilne). Ker je torus T homeomorfen produktu krožnic, dobimo njegovo kohomologijo s pomočjo formule za kohomološki kolobar produkta: $H^*(T) = \bigwedge(x, y)$. V tem kolobarju je produkt xy od nič različen, zato je $\text{nil}(\tilde{H}^*(T)) \geq 3$, kar pomeni, da je $\text{cat}(T) = 3$. Iz formule za kohomološki kolobar povezane vsote pa vidimo, da v kohomologiji vseh sklenjenih ploskev, razen sfere, obstajajo elementi, katerih produkt je netrivialen, torej je $\text{cat}(X) = 3$ za vse sklenjene ploskve razen sfere.
4. Lečasti prostori so primer, ko nam niti kohomološki kolobar ne zadošča za natančen izračun kategorije. Ker je $\text{nil} \tilde{H}^*(L^{2n+1}(p)) \otimes \mathbb{Z}_p = n + 2$ in $\dim L^{2n+1}(p) = 2n + 1$, dobimo $n + 2 \leq \text{cat}(L^{2n+1}(p)) \leq 2n + 2$. Z uporabo drugačnih metod je mogoče pokazati, da je $\text{cat}(L^{2n+1}(p)) = 2n + 2$.

Za sklep naj omenimo, da je nilpotentnost pravzaprav le ena izmed ocen za LS-kategorijo, ki jih lahko izluščimo iz kohomološkega kolobarja in sorodnih algebrskih objektov (glej [7]).

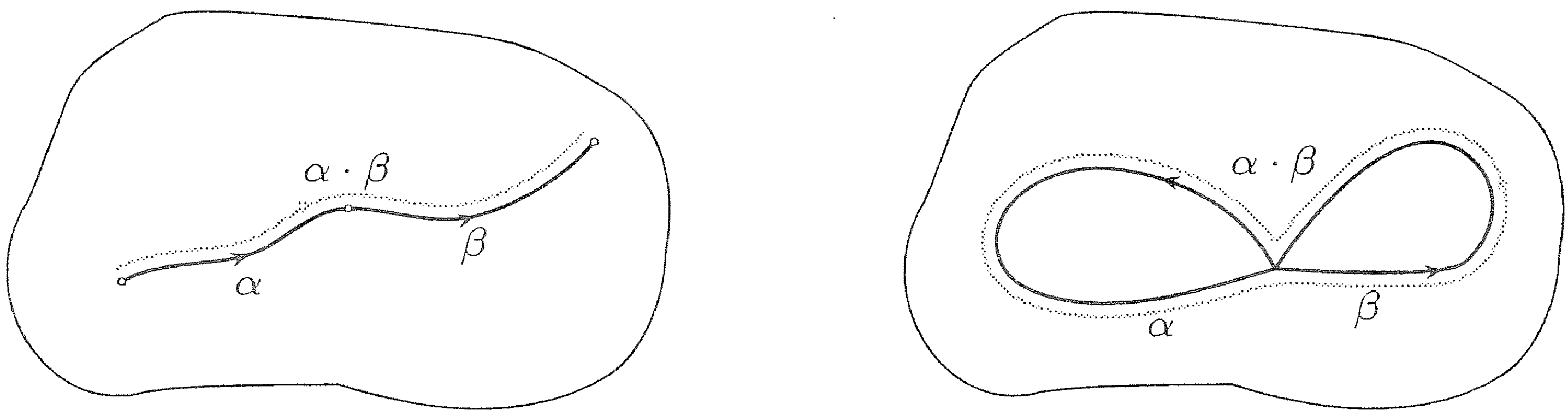
4. Nilpotentnost homotopskih množic

V homotopski teoriji se LS-kategorija največkrat pojavlja kot mera za nilpotenco. Najbolj znan rezultat tega tipa je izrek G. W. Whiteheada o nilpotenci grupe $[X, G]$, kjer je X prostor s končno kategorijo, G pa H -grupa.

Topološki prostor G je H -grupa, če obstaja zvezno množenje $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$, ki ima običajne lastnosti grupne operacije, a le do homotopije natančno. Topološke grupe so seveda posebni primeri H -grup, a obstajajo tudi drugi. Značilen primer (zaradi katerega je v resnici teorija H -grup nastala) je prostor zank v prostoru X , kjer so zanke poti $\alpha: I \rightarrow X$, ki se začnejo in končajo v neki izbrani točki x_0 . Zanke lahko stikamo, vendar ta operacija nima lepih algebrskih lastnosti: stik zanke $\alpha: I \rightarrow X$ z zanko $\beta: I \rightarrow X$ je zanka $\alpha \cdot \beta$, ki se na prvi polovici poti ujema z α , na drugi pa z β . S formulo to zapišemo:

$$(\alpha \cdot \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & \text{za } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{za } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Operacija stikanja ni asociativna: za zanke $\alpha, \beta, \gamma: I \rightarrow X$ je $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ le homotopno $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Podobno je stik s konstantno zanko le homotopen prvotni zanki, stik z nasprotno zanko pa je le homotopen konstantni zanki.



Slika 4. Stikanje poti in zank

Kadar pa nas zanimajo le homotopski razredi, se prostori zank, in splošneje, H -grupe obnašajo kot običajne, algebrske grupe. Na primer, za H -grupo G in poljuben prostor X je množica $[X, G]$ grupa za množenje, definirano po točkah: $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$. Posebej, če za prostor X vzamemo sfero S^n , je $[S^n, G] = \pi_n(G)$ n -ta homotopska grupa prostora G . Znano je, da so homotopske grupe $\pi_n(X)$ prostora X komutativne za vsak $n > 1$. Za H -grupo G pa je tudi $\pi_1(G)$ komutativna. Za splošne X pa bomo lahko pokazali, da so, ob primernih predpostavkah, grupe $[X, G]$ nilpotentne.

Nilpotentne grupe so naravna posplošitev abelovih grup in z abelovimi grupami delijo mnoge skupne lastnosti (glej [11]). Pridevnik 'nilpotenten'

se nanaša na komutatorski produkt: grupa G je nilpotentna reda $< n$, če je iterirani komutatorski produkt $[\cdots [[x_1, x_2], x_3] \cdots x_n] = 1$ za poljubne $x_1, \dots, x_n \in G$. Opazimo, da je iterirani komutator enak 1, kakor hitro je kak faktor x_i enak 1. Nilpotentne grupe reda 1 so natanko netrivialne abelove grupe.

Naj bo X poljuben prostor, G pa H -grupa. Iterirane komutatorje na grupi $[X, G]$ lahko opišemo takole: definiramo preslikavo

$$\Phi: G \times G \rightarrow G, \quad (x, y) \mapsto x \cdot y \cdot x^{-1} \cdot y^{-1},$$

potem pa induktivno $\Phi_n: G^n \rightarrow G$ z

$$\Phi_1 := \text{id}, \quad \Phi_{n+1} := \Phi \circ (\Phi_n \times \text{id}_G).$$

Iterirani komutator preslikav $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow G$ je enak kompozitumu

$$X \xrightarrow{\Delta^n} X^n \xrightarrow{f_1 \times \cdots \times f_n} G^n \xrightarrow{\Phi_n} G$$

Izrek 14. Naj bo X prostor s $\text{cat}(X) \leq n$ in naj bo G poljubna H -grupa. Tedaj je grupa $[X, G]$ nilpotentna reda $< n$.

Dokaz. Izberimo $f_1, \dots, f_n: X \rightarrow G$ in si oglejmo naslednji komutativni diagram ($W^n G$ je debeli šop):

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\Delta^n} & X^n & \xrightarrow{f_1 \times \cdots \times f_n} & G^n & \xrightarrow{\Phi_n} & G \\ & \searrow g & \uparrow & & \uparrow & \nearrow * & \\ & & W^n X & \xrightarrow{f_1 \times \cdots \times f_n|_{W^n X}} & W^n G & & \end{array}$$

Po privzetku je $\text{cat}(X) \leq n$, zato obstaja tak $g: X \rightarrow W^n X$, da je $i \circ g \simeq \Delta^n$. Ker je množenje z $x_0 \in X$ homotopno konstanti in ker ima vsak element debelega šopa $W^n X$ vsaj eno komponento enako x_0 , je $\Phi_n|_{W^n G} \simeq *$. Sledi, da je iterirani komutator preslikav $f_1, \dots, f_n$ trivialen. ■

5. Kritične točke gladkih preslikav

Za konec si oglejmo rezultat, ki je botroval nastanku LS-kategorije. Naj bo M gladka mnogoterost brez roba in $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ gladka preslikava. Točke $x \in M$, za katere je odvod $df(x) = 0$, imenujemo *kritične točke* preslikave f , množico vseh kritičnih točk pa označimo s K . Elemente množice $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ imenujemo *kritične vrednosti* preslikave f . Poleg tega imenujemo točke iz $M - K$ *regularne točke* f , točke iz $f(M) - f(K)$ pa *regularne vrednosti* f .

Pokazati nameravamo, da ima vsaka gladka preslikava f vsaj za $\text{cat}(M)$ kritičnih točk. V ta namen vpeljimo za vsak $a \in \mathbb{R}$ množici $M_a := \{x \in M \mid f(x) < a\}$ in $K_a := K \cap f^{-1}(a)$. Za obnašanje množic M_a v bližini regularnih in kritičnih vrednosti velja naslednje:

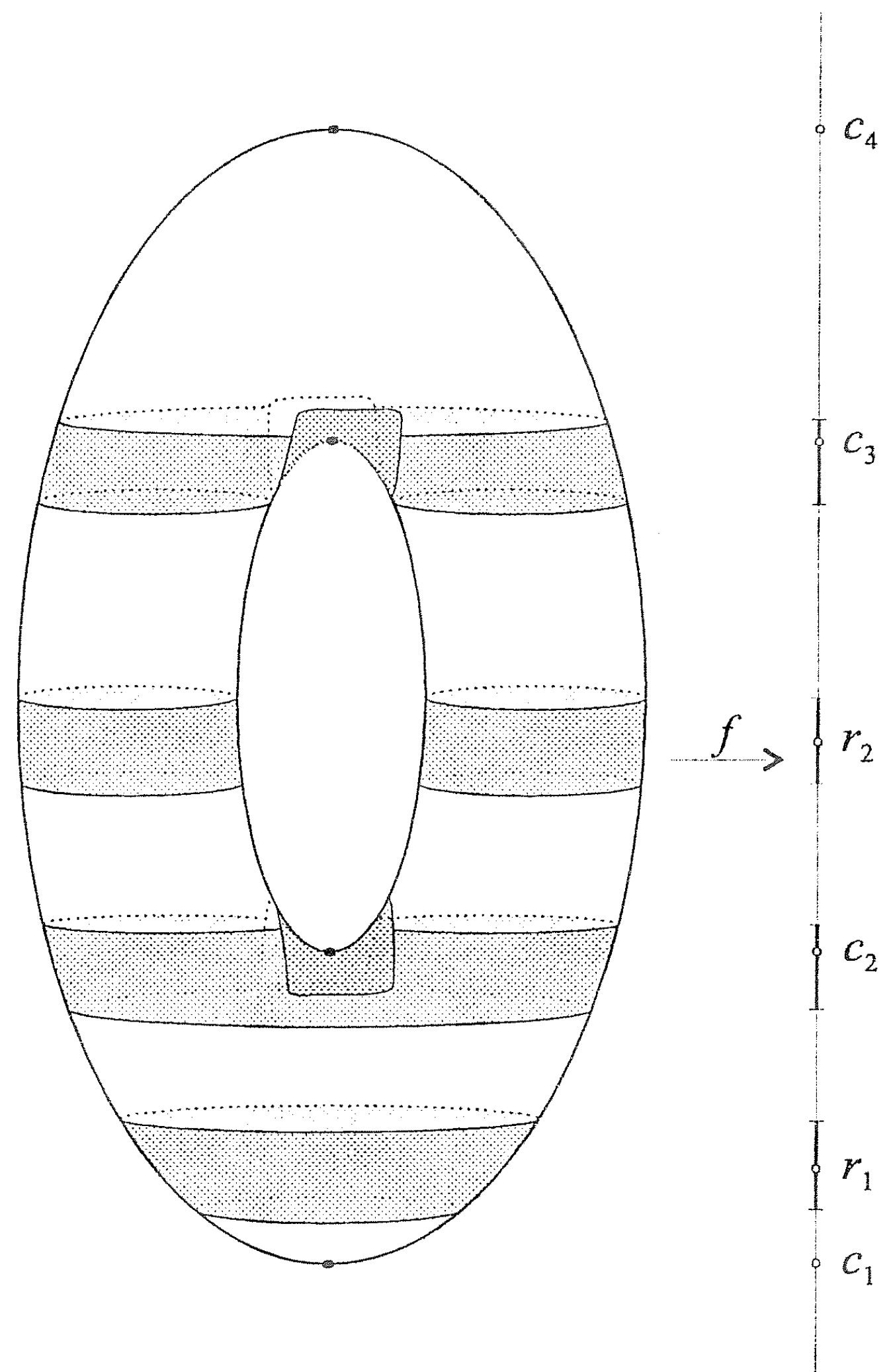
- i. če je $a \in \mathbb{R}$ regularna vrednost f , potem za dovolj majhne $\varepsilon > 0$ obstaja izotopija (tj. homotopija skozi homeomorfizme), ki $M_{a+\varepsilon}$ prenese v $M_{a-\varepsilon}$;
- ii. če je $a \in \mathbb{R}$ kritična vrednost f , potem za vse dovolj majhne okolice U za K_a obstajata $\varepsilon > 0$ in izotopija, ki $M_{a+\varepsilon} - U$ prenese v $M_{a-\varepsilon}$.

Dokazovanje omenjenih lastnosti bi nas peljalo predaleč v diferencialno topologijo, zato jih raje ponazorimo na zgledu: Naj bo

$$c_n := \inf_{\text{cat}_M F \geq n} \left\{ \sup_{x \in F} f(x) \right\},$$

kjer so $F \subseteq M$ zaprte. Če si za f mislimo višinsko funkcijo, kot je prikazana na sliki, potem je c_n 'vrh' zaprte množice, ki je najnižja izmed tistih s kategorijo vsaj n . Neposredno sledi, da je $c_n \leq c_{n+1}$ in da je c_1 globalni minimum funkcije f iz definicije na M . Poleg tega so vsi c_n kritične vrednosti f , saj bi v nasprotnem primeru prišli v protislovje z lastnostjo (i).

Slika 5. Točke c_1, c_2, c_3, c_4 so kritične vrednosti preslikave f , vse ostale točke iz zaloge vrednosti so regularne. Svetlo osenčena območja na sliki so sledi izotopij. Na primer, za $a \in (c_1, c_2)$ je rob M_a krožnica, za $a \in (c_2, c_3)$ pa disjunktna unija dveh krožnic. Če okoli kritične točke, ki se preslika v c_2 , izrežemo okolico U (temno senčeno), ima za dovolj bližnje vrednosti $a' \in (c_2, c_3)$ tudi množica $M_{a'} - U$ za rob krožnico in je izotopna M_a za $a < c_2$. Podobno se zgodi pri c_3 , kjer ima za dovolj bližnje vrednosti $a' \in (c_3, c_4)$ množica $M_{a'} - U$ za rob unijo dveh krožnic, tako kot M_a za $a \in (c_2, c_3)$.



Preden se lotimo Lusternik-Schnirelmannovega izreka, izpeljimo še oceno za $\text{cat}_M(K_c)$ v primeru, ko je c kritična vrednost funkcije f . Mnogoterost M je absolutni okoliški retrakt, zato lahko poiščemo tako okolico U za K_c , da je $M_{c+\varepsilon} - U$ izotopen $M_{c-\varepsilon}$ in je obenem $\text{cat}_M(U) = \text{cat}_M(K_c)$. Tedaj dobimo

$$\text{cat}_M(M_{c+\varepsilon}) \leq \text{cat}_M(M_{c+\varepsilon} - U) + \text{cat}_M(U) = \text{cat}_M(M_{c-\varepsilon}) + \text{cat}_M(K_c).$$

Posebej, če je $c = c_n = c_{n+1}$, je $\text{cat}_M(M_{c-\varepsilon}) \leq n-1$ in $\text{cat}_M(M_{c+\varepsilon}) \leq n+1$, torej je $\text{cat}_M(K_c) \geq 2$, kar pomeni, da je K_c neskončna množica.

Izrek 15 (Lusternik-Schnirelmann). *Naj bo $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ gladka, navzdol omejena preslikava na gladki mnogoterosti brez roba M . Tedaj ima f vsaj za $\text{cat}(M)$ kritičnih točk.*

Dokaz. Pokažimo z indukcijo, da je na M_{c_n} vsaj n kritičnih točk. Ker je c_1 kritična vrednost, je trditev pravilna za $n = 1$. Privzemimo, da je pravilna za $M_{c_{n-1}}$ in ločimo dve možnosti: če je $c_n > c_{n-1}$, potem je na $f^{-1}(c_n) \subset M_{c_n}$ vsaj ena kritična točka, ki ni v $M_{c_{n-1}}$; če pa je $c_n = c_{n-1}$, je po prej izpeljanem rezultatu množica K_{c_n} neskončna. V obeh primerih sledi, da je na M_{c_n} vsaj n kritičnih točk. ■

Lusternik-Schnirelmannov izrek je doživel večkratne izboljšave in popložitve. Ena izmed oblik izreka velja celo za Banachove mnogoterosti z robom. Nekaj več o tem pogledu na LS-kategorijo lahko bralec najde v [1].

LITERATURA

- [1] M. Clapp, D. Puppe, *Invariants of the Lusternik-Schnirelmann type and the topology of critical sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **298** (1986), 603–620.
- [2] R. H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, Ann. Math. **42** (1941), 333–370.
- [3] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, Illinois J. Math. **11** (1967), 417–427.
- [4] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [5] K. Hess, *A proof of Ganea's conjecture for rational spaces*, Topology **30** (1991), 205–214.
- [6] N. Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, Bull. London Math. Soc. **30** (1998), 623–634.
- [7] I. James, *On category in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology **17** (1978), 331–348.
- [8] B. Jessup, *Rational approximation to L. S. category and a conjecture of Ganea*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 655–660.
- [9] L. Lusternik, L. Schnirelmann, *Méthodes Topologiques dans les Problèmes Variationnelles*, Hermann, Paris, 1934.
- [10] F. Takens, *The Lusternik-Schnirelmann categories of a product space*, Compositio Math. **22** (1970), 175–180.
- [11] R. B. Warfield, *Nilpotent groups*, LNM 513 (Springer, Berlin, 1976).

BORSUKOV PROBLEM

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (2000) 52A20, 52C17

Članek obravnava Borsukov problem o pokritjih omejenih množic v $\mathbb{R}^n$ z množicami manjšega premera. Vsebuje pregled glavnih rezultatov in osnovne poteze njihovih dokazov.

BORSUK'S PROBLEM

In this note Borsuk's problem on coverings of bounded subsets of $\mathbb{R}^n$ with subsets of smaller diameter is considered. It contains an overview of main results and sketches of their proofs.

1. Predstavitev problema in pregled rezultatov

V uvodnem razdelku natančneje predstavimo Borsukov problem in podamo kratek zgodovinski pregled pomembnejših dosežkov, povezanih z njim. Med literaturo o tej tematiki velja posebej omeniti pregledni prispevek B. Grünbauma [12] iz leta 1963 in peto poglavje knjige V. Boltjanskega, H. Martinija in P. S. Soltana [3] iz leta 1997.

Naj bo M neprazna omejena podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$, opremljenega z običajno evklidsko normo $\|\cdot\|$. Najmanjšo zgornjo mejo vseh razdalj med poljubnima točkama iz M imenujemo *premer* množice M in ga zaznamujemo z $d(M)$:

$$d(M) = \sup\{\|x - y\| : x \in M, y \in M\}.$$

Če ima M pozitiven premer (to je takrat, kadar vsebuje vsaj dve točki), jo je očitno mogoče pokriti s končnim številom množic z manjšimi premeri. Najmanjše število množic, ki jih potrebujemo za tako pokritje, imenujemo *Borsukovo število* množice M in ga zaznamujemo z $b(M)$. Zlahka vidimo, da se v tej definiciji lahko brez škode omejimo na pokritja s podmnožicami množice M ali celo na particije množice M .

Oglejmo si nekaj primerov. Za vsako omejeno podmnožico $M \subset \mathbb{R}$ s pozitivnim polmerom očitno velja $b(M) = 2$. Podobno za kvadrat K velja $b(K) = 2$, za enakostranični trikotnik T pa $b(T) = 3$. Malo manj očitno je, da ima tudi krog Borsukovo število enako 3. Dokaz je preprost, a dovolj mikaven za vajo radovednim bralcem. Kako pa je z Borsukovim številom kocke, pravilnega tetraedra in krogle? S kocko in tetraedrom ni težav, celo s posplošitvama v n -razsežnem prostoru ne. Če n -razsežno kocko K_n prerežemo na pol z afino hiperravnino, pravokotno na njen rob, K_n razpade na dva dela z manjšim premerom, zato velja $b(K_n) = 2$. Pravilni n -razsežni simpleks T_n je konveksna množica v $\mathbb{R}^n$, napeta na $n + 1$ med sabo

enako oddaljenih oglišč. Njegov premer je enak razdalji med poljubnima ogliščema. Če ga pokrijemo z n podmnožicami, potem vsaj ena od njih vsebuje dve oglišči in ima tedaj enak premer kot sam simpleks. Zato za n -razsežni simpleks T_n velja $b(T_n) \geq n + 1$. Pokritja simpleksa T_n z $n + 1$ podmnožicami manjšega premera ni težko najti. Za vsako množico takšnega pokritja je namreč potrebno in zadostno, da vsebuje natanko eno od oglišč simpleksa in da njeno zaprtje ne vsebuje nobenega drugega oglišča. Torej je $b(T_n) = n + 1$. Z n -razsežno kroglo B_n pa ni tako preprosto.

Poljski matematik Karol Borsuk je s topološkimi metodami v članku [4] dokazal enakost $b(B_n) = n + 1$. Kmalu zatem je leta 1933 ugotovil v [5], da za vsako omejeno ravninsko množico, ki vsebuje vsaj dve točki, velja ocena $b(M) \leq 3$. Ob tem je postavil naslednje vprašanje, danes znano pod imenom *Borsukov problem*.

Ali lahko vsako omejeno podmnožico prostora $\mathbb{R}^n$ s pozitivnim premerom pokrijemo z $n + 1$ podmnožicami z manjšimi premeri?

Leta 1947 je J. Perkal pritrdilno odgovoril na Borsukovo vprašanje za $n = 3$ [28]. Svojo pravo težo je problem pokazal pri $n > 3$. Matematiki so ga skušali rešiti na različne načine. Ker ima omejena množica enak premer kot njena konveksna ogrinjača, se pri obravnavi Borsukovega problema lahko brez škode za splošnost omejimo na konveksne množice. Že leta 1946 je H. Hadwigerju v [13,14] uspelo dokazati, da za vsako omejeno konveksno podmnožico $M \subset \mathbb{R}^n$ z gladkim robom velja $b(M) \leq n + 1$. Pri tem si je pomagal z analognim rezultatom za n -razsežno kroglo. Kasneje so ta rezultat razširili na razne druge družine omejenih n -razsežnih množic. Tako je A. S. Riesling v članku [31] iz leta 1971 dokazal neenakost $b(M) \leq n + 1$ za vse centralno simetrične kompaktne konveksne množice $M \subset \mathbb{R}^n$, D. Kolodziejczyk pa leta 1988 v [20] za vse kompaktne konveksne vrtenine $M \subset \mathbb{R}^n$.

Ocenimo navzgor Borsukova števila omejenih podmnožic danega prostora $\mathbb{R}^n$. Naj bo $M \subset \mathbb{R}^n$ omejena in naj vsebuje vsaj dve točki. Vzemimo poljuben $j \in \{1, \dots, n\}$. Ker za vsak $x, y \in \mathbb{R}^n$ velja $|x_i - y_i| \leq \|x - y\|$, $i = 1, \dots, n$, leži M med vzporednima afinima hiperravninama, ki sta pravokotni na j -ti standardni bazni vektor prostora $\mathbb{R}^n$ in med sabo oddaljeni $d(M)$. Od tod brž sledi, da je M vsebovana v n -razsežni kocki K_n z robom dolžine $d(M)$. Vzemimo zdaj poljubno naravno število $k > 1$ in z ustreznimi vzporednimi afinimi hiperravninami razdelimo K_n na k^n kock z robovi dolžine $d(M)/k$. Premeri delilnih kock so enaki $d(M)\sqrt{n}/k$, zato so pri $k = \lceil \sqrt{n} + 1 \rceil$ manjši od $d(M)$. Od tod brez težav sledi ocena $b(M) \leq \lceil \sqrt{n} + 1 \rceil^n$, ki jo je leta 1955 dokazal H. Lenz [22]. Množica Borsukovih števil vseh omejenih podmnožic v $\mathbb{R}^n$ s pozitivnim premerom je torej navzgor omejena.

Ker jo sestavljajo le naravna števila, ima največji element, ki ga bomo zaznamovali z $b(n)$. Po prejšnjem velja $b(n) \leq [\sqrt{n} + 1]^n$, kar pa je daleč od neenakosti $b(n) \leq n + 1$, ki je ekvivalentna pritrdilnemu odgovoru na Borsukovo vprašanje. Podobno velja tudi za razne kasnejše izboljšave Lenzove ocene, npr. za Lassakovo neenakost $b(n) \leq 2^{n-1} + 1$ iz leta 1982 [21]. Zakaj se ugotovljene ocene za $b(n)$ tako močno razlikujejo od neenakosti $b(n) \leq n + 1$?

V začetku osemdesetih let prejšnjega stoletja sta P. Erdős [8] in D. Larman [33] zaslutila, da bi se morda dalo s proučevanjem kombinatoričnih lastnosti končnih množic točk v $\mathbb{R}^n$ najti primer, ki bi dal pri dovolj velikem n neenakost $b(n) > n + 1$ in s tem nikalen odgovor na Borsukovo vprašanje. Prav to je leta 1993 uspelo napraviti J. Kahnu in G. Kalaiu [19] s pomočjo ustreznih kombinatoričnih rezultatov P. Frankla in R. Wilsona [9]. Dokazala sta, da je $b(n) > n + 1$ za $n = 1325$ in za vsak $n \geq 2015$ ter da za dovolj velika števila n določene oblike velja celo ocena $b(n) > 1.2^{\sqrt{n}}$. Ta neenakost je bila kasneje nekajkrat izboljšana, prav tako pa je bila močno znižana tudi spodnja meja števil n , za katera velja $b(n) > n + 1$. Nekaj najnovejših ocen najdemo v člankih A. M. Raigorodskega [29,30] ter A. Hinrichsa in C. Richterja [15,16], v primeru $3 < n < 298$ pa ostaja Borsukovo vprašanje še vedno brez odgovora.

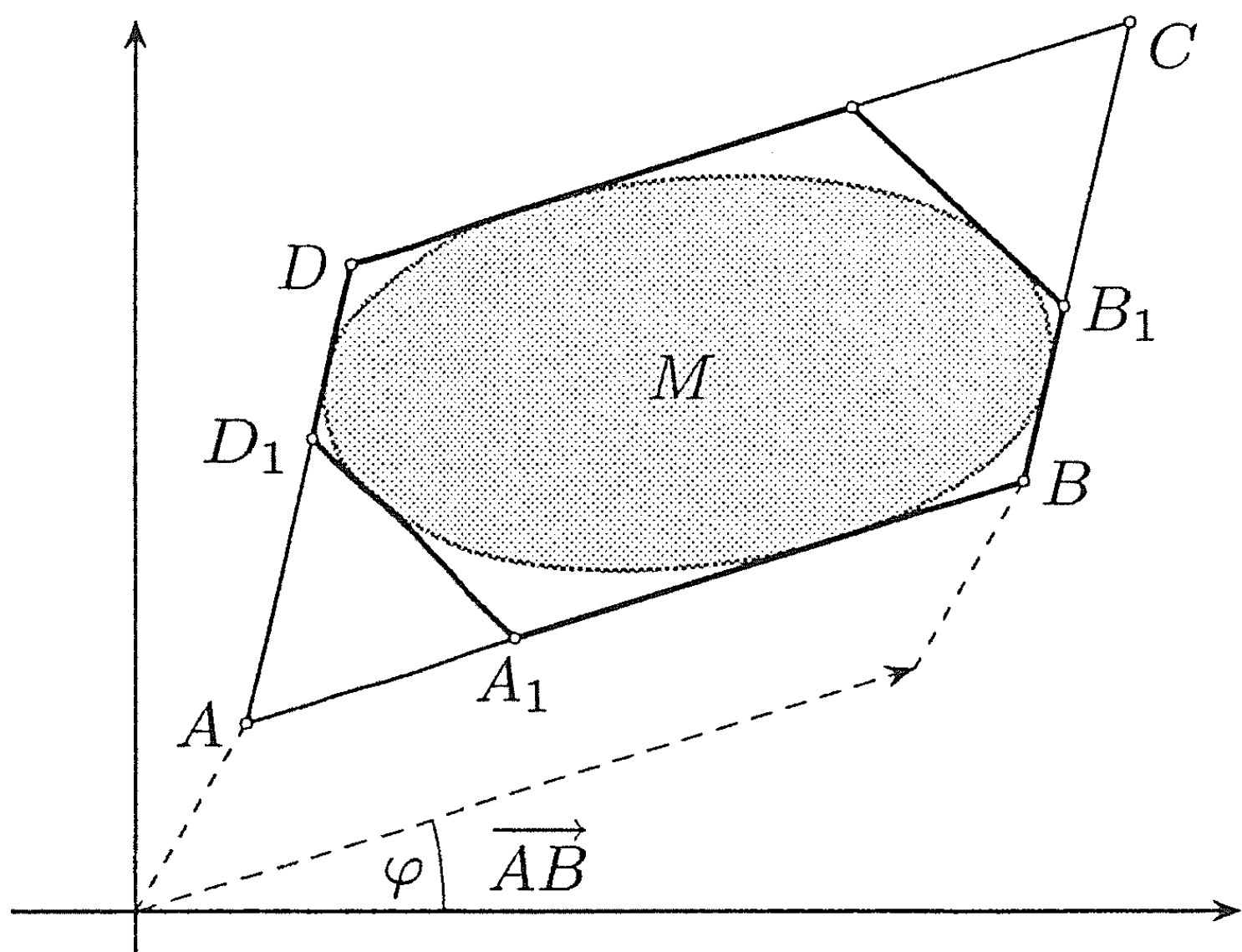
V nadaljevanju si bomo ogledali osnovne poteze dokazov nekaterih omenjenih rezultatov in njihovih izboljšav.

2. Borsukov problem v ravnini in prostoru

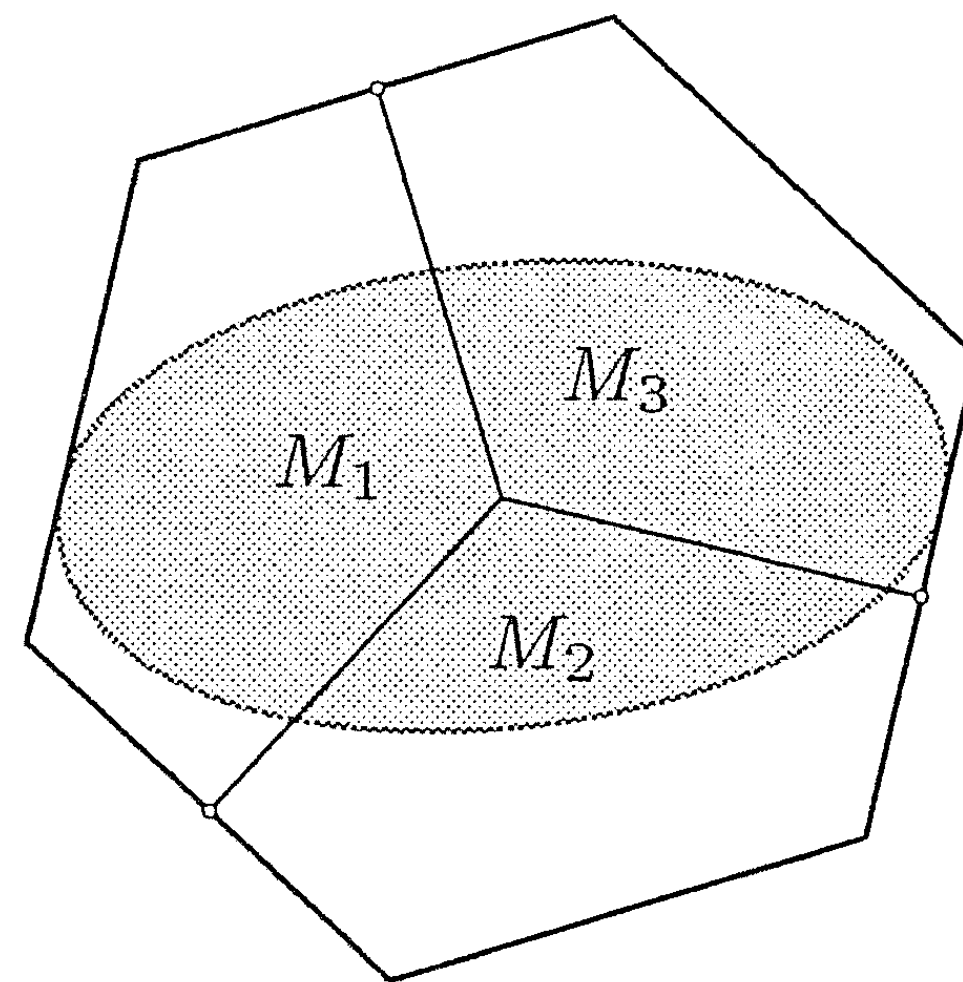
Borsukov dokaz neenakosti $b(2) \leq 3$ temelji na naslednjem elementarnem rezultatu J. Pála o pokritju ravninskih likov:

Vsako omejeno množico $M \subset \mathbb{R}^2$ se da pokriti s pravilnim šestkotnikom, v katerem je razdalja med nasprotnima stranicama enaka $d(M)$.

Skicirajmo dokaz te trditve in pri tem brez škode privzemimo, da je množica M konveksna, zaprta in da ima neprazno notranjost. Za vsak $\varphi \in [0, 2\pi)$ očrtajmo M tak pozitivno orientiran paralelogram $ABCD$ s kotom $\pi/3$ ob vrhu A , da je $\overrightarrow{AB} = |AB|(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Tangenti na M , ki sta pravokotni na simetralo kota BAD , odrežeta od paralelograma $ABCD$ enakostranična trikotnika AA_1D_1 in CC_1B_1 , kot kaže slika 1. Lega paralelograma in obeh trikotnikov je zvezno odvisna od φ , zato je funkcija $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s predpisom $f(\varphi) = |AA_1| - |CC_1|$, zvezna. Ker očitno velja $f(\pi) = -f(0)$, obstaja tak $\varphi \in [0, \pi]$, da je $|AA_1| = |CC_1|$. Tedaj je večkotnik $A_1BB_1C_1DD_1$ centralno simetričen in ga lahko razširimo



Slika 1



Slika 2

do pravilnega šestkotnika z istim središčem, katerega nasprotni stranici sta med sabo oddaljeni $d(M)$. Seveda smo s tem našli iskani pravilni šestkotnik.

Zdaj je le še korak do Borsukove neenakosti $b(2) \leq 3$. Pravilni šestkotnik iz Pálovega rezultata namreč razdelimo z daljicami, ki vežejo njegovo središče z razpolovišči treh paroma nesosednih stranic, na tri skladne petkotnike s premerom $(\sqrt{3}/2)d(M)$ in s tem brž dobimo tudi ustrezno pokritje množice M s tremi podmnožicami manjšega premera (glej sliko 2).

Iz dokaza lahko razberemo, da premeri množic iz pokritja ne presegajo $(\sqrt{3}/2)d(M)$. V splošnem kvocienta $\sqrt{3}/2$ ni mogoče zmanjšati. Za krog s premerom 1 namreč velja, da ima vsaj en član pokritja (od treh) premer večji ali enak $\sqrt{3}/2$.

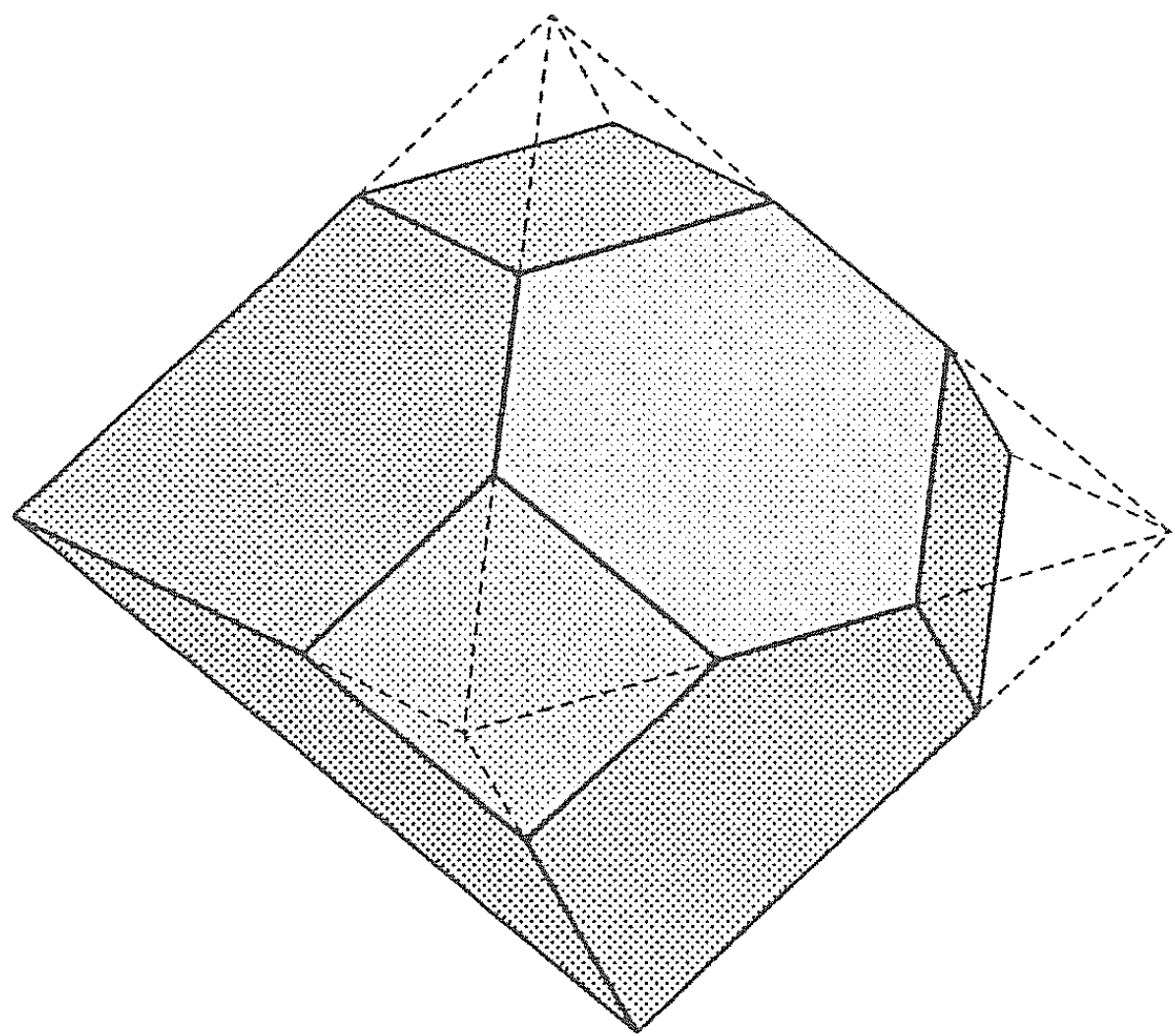
Obstaja zanimiva geometrijska karakterizacija omejenih ravninskih množic, ki imajo Borsukovo število enako 3. V. G. Boltjanski je namreč dokazal v [2], da za omejeno ravninsko množico M velja $b(M) = 3$ natanko takrat, kadar obstaja natanko ena dopolnitev množice M do zaprte konveksne ravninske množice s konstantno širino. Definicijo množice s konstantno širino in dokaz, da vsako omejeno konveksno množico $M \subset \mathbb{R}^2$ lahko dopolnimo do zaprte konveksne množice s konstantno širino $d(M)$, najdemo v knjigi M. Hladnika [17]. S kombiniranjem trditev 58 in 60 iz iste knjige dobimo tudi omenjeni Pálov izrek o pokrivanju.

Oglejmo si še prostorski primer. Neenakost $b(3) \leq 4$ je leta 1947 z zapletenimi neelementarnimi metodami dokazal J. Perkal [28], na podoben način pa je osem let kasneje neodvisno od njega to uspelo tudi H. G. Egglestonu [7]. Mnogo enostavnejši in krajši dokaz je leta 1957 našel B. Grünbaum [11]. Njegov dokaz temelji na naslednji prostorski različici Pálovega izreka, ki jo je leta 1953 odkril D. Gale [10]:

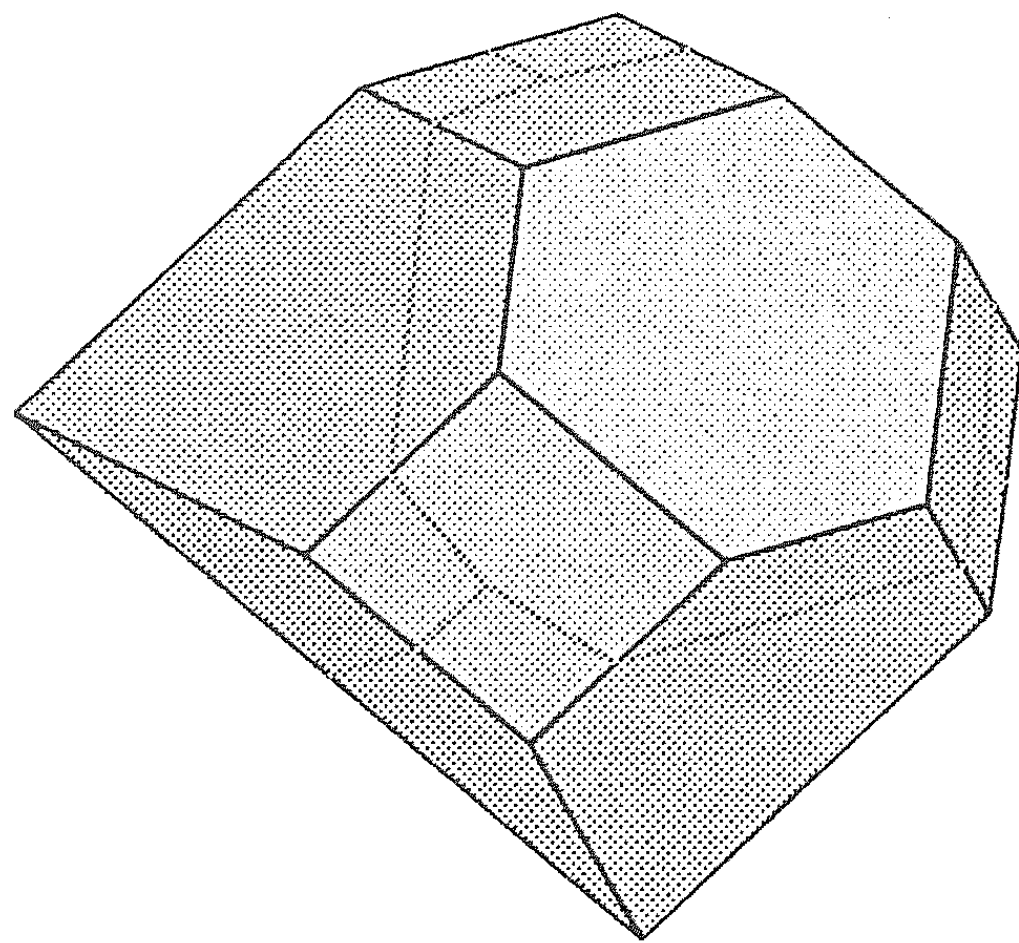
Vsako omejeno množico $M \subset \mathbb{R}^3$ lahko pokrijemo s pravilnim oktaedrom, katerega nasprotni stranski ploskvi sta med sabo oddaljeni $d(M)$.

Dokaz je podoben dokazu Pálovega izreka, vendar nekoliko zahtevnejši. V grobem poteka takole: Množici M očrtamo ustrezen paralelepiped, ki mu nato ob dveh nasprotnih ogliščih z vzporednima tangentnima ravninama na M odrežemo pravilni tristrani piramidi. S sukanjem okrog prave osi in s pomočjo zveznosti lahko ugotovimo, da sta v ustreznem položaju paralelepipeda odrezani piramidi skladni. Navsezadnje dobljeno telo simetrično razširimo do iskanega pravilnega oktaedra.

Za dokaz neenakosti $b(3) \leq 4$ pravilni oktaeder obtešemo, tako da zaporedoma ob treh ogliščih ene od njegovih stranskih ploskev odrežemo pravilne štiristrane piramide, ki so $d(M)/2$ oddaljene od središča oktaedra (glej sliko 3). Ni težko ugotoviti, da s pravo izbiro oglišč za tesianje množica M ostane v nastalem telesu.



Slika 3



Slika 4

Obtesani oktaeder se da razrezati na štiri poliedre, kot kaže slika 4. Pri tem so trije poliedri skladni, vsi štirje pa se stikajo v središču prvotnega oktaedra. S pravo izbiro delilnih razmerij lahko dosežemo, da imajo vsi štirje poliedri premer $kd(M)$, kjer je

$$k = \frac{\sqrt{6129030 - 937419\sqrt{3}}}{1518\sqrt{2}} = 0.9887\dots$$

Dobljeni koeficient k nasploh ni optimalen. V prispevku [24] iz leta 1997 je V. V. Makejev obtesani oktaeder nadomestil s poliedrom (obtesani rombododekaeder), A. L. Evdokimov pa ga je s pomočjo računalnika razdelil na štiri dele in zmanjšal koeficient na $k = 0.98$. Najbrž se da k še zmanjšati, Gale v [10] celo domneva, da je najmanjši možen koeficient k enak $\sqrt{3 + \sqrt{3}}/\sqrt{6} = 0.888\dots$

3. Borsukov problem za konveksne množice z gladkim robom

Naj bo M poljubna omejena podmnožica prostora $\mathbb{R}^n$. Njena *konveksna ogrinjača* $\text{co}M$ je najmanjša konveksna podmnožica $\mathbb{R}^n$, ki vsebuje M . Sestavljajo jo vse konveksne kombinacije točk iz M , torej točke oblike $\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, kjer so λ_i nenegativna realna števila z vsoto 1 in $x_i \in M$ za vsak i . S pomočjo trikotniške neenakosti lahko vidimo, da razdalja med konveksnima kombinacijama elementov $x_1, \dots, x_k$ in elementov $y_1, \dots, y_l$ ne presega $\max\{\|x_i - y_j\| : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l\}$, od koder brž sledi enakost premerov $d(M) = d(\text{co}M)$. Zato se pri obravnavi Borsukovega vprašanja lahko omejimo na omejene konveksne množice. Ker se premer ohranja tudi pri tvorjenju zaprtja in ker je zaprtje konveksne množice konveksno, se lahko omejimo na konveksne kompaktne množice. Še več, brez škode za splošnost obravnave se smemo omejiti na konveksne kompaktne množice z neprazno notranjostjo.

Naj bo množica $M \subset \mathbb{R}^n$ konveksna kompaktna in naj ima neprazno notranjost. Potem skozi vsako njeno robno točko poteka taka afina hiperravnina H , da M v celoti leži v enem od polprostorov, ki ju določa H . Pravimo ji *oporna hiperravnina* množice M . V splošnem je robna točka vsebovana v več opornih hiperravninah, kadar pa skozi vsako robno točko množice M poteka natanko ena oporna hiperravnina, pravimo, da ima M *gladek rob*. Preprost primer takšne množice je n -razsežna krogla $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

Borsuk je svoj izrek o pokrivanju krogle B_{n+1} odkril pri preučevanju zveznih preslikav med robom te krogle, n razsežno sfero S_n in prostorom $\mathbb{R}^n$. Tu bomo Borsukovo število krogle B_n izračunali z uporabo znamenitega Borsuk-Ulamovega izreka. Zapišimo eno od njegovih najbolj znanih oblik:

Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $f : S_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zvezna funkcija. Potem obstaja tak $x \in S_n$, da je $f(x) = f(-x)$.

Najprej bomo dokazali, da iz njega sledi naslednji izrek L. A. Ljusternika in L. G. Šnireljmana [23], ki je celo ekvivalenten Borsuk-Ulamovemu izreku (glej npr. članek N. Mramor Kosta [25]).

Naj bo sfera S_n , $n \in \mathbb{N}$, pokrita z zaprtimi podmnožicami $F_1, \dots, F_{n+1}$. Potem vsaj ena od njih vsebuje par antipodnih točk $\{x, -x\}$.

Denimo, da nobena od množic $F_1, \dots, F_n$ ne vsebuje para antipodnih točk, torej da je $F_i \cap (-F_i) = \emptyset$ za $i = 1, \dots, n$. Potem po Urysohnu za vsak i obstaja taka zvezna funkcija $f_i : S_n \longrightarrow [0, 1]$, da je $f_i(x) = 0$ za vsak $x \in F_i$ in $f_i(x) = 1$ za vak $x \in -F_i$. Borsuk-Ulamov izrek za preslikavo $f : x \longmapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ iz S_n v $\mathbb{R}^n$ zagotavlja obstoj takega elementa $x \in S_n$, da je $f(x) = f(-x)$. Iz konstrukcije preslikav f_i sledi, da x ne pripada

nobeni od množic $F_1, \dots, F_n$. Ker to velja tudi za $-x$, $\{F_1, \dots, F_{n+1}\}$ pa je pokritje sfere S_n , množica F_{n+1} vsebuje $\{x, -x\}$.

Od tod dalje vodi kratka pot do neenakosti $b(B_n) \geq n + 1$. Pokazati je treba, da krogle B_n ne moremo pokriti z n množicami manjšega premera. Denimo, da podmnožice $M_1, \dots, M_n \subseteq B_n$ sestavljajo pokritje krogle B_n , $n > 1$. Brez škode za splošnost dokaza privzemimo, da so te množice zaprte. Potem so zaprte tudi množice $F_i = M_i \cap S_{n-1}$, $i = 1, \dots, n$, ki sestavljajo pokritje sfere S_{n-1} . Po izreku Ljusternika in Šnireljmana vsaj ena od njih, recimo F_j , vsebuje par antipodnih točk. Zato je $d(F_j) = 2$ in tedaj $d(M_j) = d(B_n)$.

Z ustreznim pokritjem oziroma razdelitvijo krogle B_n potrdimo še neenakost $b(B_n) \leq n + 1$, ki skupaj s prej dobljeno oceno da Borsukovo enakost $b(B_n) = n + 1$. Naj bo $\{e_1, \dots, e_n\}$ standardna baza prostora $\mathbb{R}^n$, $e_0 = -\sum_{i=1}^n e_i$ in $E = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$. Za vsak $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ naj bo C_j stožec, generiran z $E \setminus \{e_j\}$ in $N_j = C_j \cap B_n$, torej

$$N_j = \left\{ \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \alpha_i e_i \in B_n : \alpha_i \geq 0 \forall i \right\}.$$

Množice N_j so zaprte in sestavljajo pokritje krogle B_n . Ker nobena ne vsebuje para antipodnih točk iz S_{n-1} , za vsak j velja $d(N_j) < d(B_n) = 2$. Torej je res $b(B_n) \leq n + 1$.

Leta 1946 je H. Hadwigerju [13,14] uspelo Borsukovo neenakost razširiti na konveksne množice z gladkim robom:

Za vsako omejeno konveksno podmnožico $M \subset \mathbb{R}^n$ z gladkim robom je $b(M) \leq n + 1$.

Osnovna ideja dokaza je vzpostavitev ustrezne zveze med robom ∂M množice M in robom $\partial B_n = S_{n-1}$ krogle B_n . Lahko privzamemo, da je M kompaktna in v svoji notranjosti vsebuje točko 0. Zaradi gladkosti roba ∂M v vsaki točki $x \in \partial M$ obstaja natanko ena enotska zunanja normala $f(x)$ na M . Še več, s tem opredeljena preslikava $f : \partial M \rightarrow S_{n-1}$ je zvezna bijekcija.

Vzemimo pokritje $\{N_0, \dots, N_n\}$ krogle B_n iz dokaza neenakosti $b(B_n) \leq n + 1$. Zaprte množice $L_i = f^{-1}(N_i \cap S_{n-1})$, $i = 0, \dots, n$, sestavljajo pokritje roba ∂M . Denimo, da za kak i velja $d(L_i) = d(M)$. Potem obstajata točki $f^{-1}(x)$ in $f^{-1}(y)$, $x, y \in N_i \cap S_{n-1}$, med sabo oddaljeni $d(M)$. Normali x in y v teh dveh točkah sta nasprotni druga drugi, $y = -x$, saj bi v nasprotnem primeru na robu ∂M našli točki, ki bi bili med sabo oddaljeni več kot $d(M)$. Množica N_i tedaj vsebuje par antipodnih točk, kar pa nasprotuje

izbiri pokritja $\{N_0, \dots, N_n\}$. Tako smo ugotovili, da za vsak i velja $d(L_i) < d(M)$.

Naj bo M_i presek stožca $\{\lambda x : x \in L_i, 0 \leq \lambda \in \mathbb{R}\}$ z M . Potem je $\{M_0, \dots, M_n\}$ pokritje množice M , za katero velja $d(M_i) = d(L_i) < d(M)$, $i = 0, \dots, n$.

Hadwigerjev izrek se da še nekoliko razširiti. Boltjanski je dokazal v [1], da velja $b(M) \leq n + 1$ tudi za omejene konveksne podmnožice $M \subset \mathbb{R}^n$, ki imajo kvečjemu v n točkah roba ∂M več opornih hiperravnin (te točke imenujemo oglišča množice M), povsod drugod na robu pa so gladke in imajo le po eno oporno hiperravnino.

4. Ocene Borsukovih števil

Lenzovo oceno $b(n) \leq [\sqrt{n} + 1]^n$ lahko močno izboljšamo z uporabo naslednjega rezultata, znanega pod imenom Jungov izrek [18]:

Vsako omejeno podmnožico $M \subset \mathbb{R}^n$ je mogoče pokriti z n -razsežno kroglo s polmerom $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}d(M)$.

Razdelimo kroglo B_n s hiperravninami $H_j = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j = 0\}$, $j = 1, \dots, n$, na 2^n delov. Njihova zaprtja so skladna, eno od njih je $B_n^+ = \{x \in B_n : x_i \geq 0, \forall i\}$, presek B_n s pozitivnim ortantom prostora $\mathbb{R}^n$. Za vsak $x, y \in B_n^+$ velja $\|x - y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \leq 2$, od koder brž dobimo enakost $d(B_n^+) = \sqrt{2}$. Analogno razdelimo kroglo s polmerom $\sqrt{\frac{n}{2n+2}}d(M)$, ki jo zagotavlja Jungov izrek. S tem razdelimo tudi M na 2^n delov, katerih premeri ne presegajo $\sqrt{\frac{n}{n+1}}d(M) < d(M)$. Torej velja $b(M) \leq 2^n$ in tedaj tudi $b(n) \leq 2^n$.

M. Lassak je leta 1982 v članku [21] z izpopolnitvijo opisane razdelitve krogle izboljšal oceno na $b(n) \leq 2^{n-1} + 1$. Kroglo je najprej razdelil z izbrano afino hiperravnino H na dva dela, nato pa večjega z $n - 1$ paroma pravokotnimi afinimi hiperravninami, pravokotnimi na H , na 2^{n-1} delov s skladnimi zaprtji in premeri, manjšimi od $d(M)$.

Za velika števila n je najboljšo do sedaj znano zgornjo mejo našel O. Schramm v [34]. Leta 1988 je dokazal, da velja

$$b(n) \leq 5n\sqrt{n}(e + \ln n) \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

V nekoliko drugačni obliki sta to oceno nekoliko kasneje ponovno odkrila J. Bourgain in J. Lindenstrauss [6].

Dolgo je večina matematikov skušala potrditi neenakost $b(n) \leq n + 1$, po letu 1980 pa so se intenzivneje začela tudi iskanja protiprimera. Že leta 1971 je C. A. Rogers v [32] zapisal, da je do rezultata $b(M) \leq n + 1$ za centralno simetrična telesa $M \subset \mathbb{R}^n$ prišel, ko je poskušal ovreči hipotezo $b(n) \leq n + 1$. Deset let kasneje sta D. Larman [33] in P. Erdős [8] na osnovi preučevanja konveksnih politopov oziroma končnih konfiguracij točk v $\mathbb{R}^n$ nakazala možnost konstrukcije končnih množic $M \subset \mathbb{R}^n$, za katere bi veljalo $b(M) > n + 1$.

Larman je opazil, da se Borsukovo vprašanje za množice vektorjev iz $\{0, 1\}^n \subset \mathbb{R}^n$ s konstantno vsoto komponent da prevesti na naslednje kombinatorično vprašanje:

Naj bo $\mathcal{K}$ družina enako močnih podmnožic dane množice A z n elementi in

$$t = \min\{|A \cap B| : A, B \in \mathcal{K}\}.$$

Ali je mogoče $\mathcal{K}$ razdeliti na $n + 1$ delov, tako da imata vsaki dve množici iz kateregakoli od teh delov vsaj $t + 1$ skupnih elementov?

Dokažimo ekvivalentnost obeh vprašanj. Osnovno zvezo vzpostavimo z bijektivno preslikavo F med $\{0, 1\}^n$ in potenčno množico $\mathcal{P}A$ množice $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ z n elementi, ki jo definiramo s predpisom

$$F(x) = \{a_i \in A : x_i = 1\}.$$

Naj bo $m \in \{1, \dots, n\}$ moč, ki jo imajo vse množice iz $\mathcal{K}$, in

$$M_0 = \{x \in \{0, 1\}^n : \sum_{i=1}^n x_i = m\}.$$

Potem je

$$\mathcal{K} \subseteq \{B : B \subseteq A, |B| = m\} = F(M_0).$$

Za vsak $x, y \in M_0$ velja

$$\|x - y\|^2 = 2(m - |F(x) \cap F(y)|),$$

od koder za $M = F^{-1}(\mathcal{K})$ dobimo

$$d(M)^2 = 2(m - \min\{|F(x) \cap F(y)| : x, y \in M\}) = 2(m - t).$$

Zato ima podmnožica $N \subset M$ manjši premer od M natanko takrat, kadar je

$$|F(x) \cap F(y)| \geq t + 1 \quad \text{za vsak } x, y \in N.$$

Od tod že sledi Larmanova opazka. Še več, iz gornjega dokaza lahko razberemo, da za $\mathcal{K}$ velja naslednje:

Če družine $\mathcal{K}$ ne moremo razdeliti na r ali manj delov, tako da imata vsaki dve množici iz kateregakoli od teh delov vsaj $t + 1$ skupnih elementov, potem je $b(n) > r$.

J. Kahn in G. Kalai sta pri reševanju Borsukovega problema uporabila tudi naslednji kombinatorični rezultat, ki sta ga dokazala P. Frankl in R. Wilson v [9] z metodami iz linearne algebre.

Naj bo k potenca praštevila, $\mathcal{K}$ pa taka družina podmnožic množice $K = \{1, \dots, 4k\}$, da nobeni dve nimata natanko k skupnih elementov. Potem ima $\mathcal{K}$ največ $2 \binom{4k-1}{k-1}$ elementov.

Oglejmo si zdaj znamenito konstrukcijo, s katero sta Kahn in Kalai leta 1993 v [19] dokazala, da je odgovor na Borsukovo vprašanje negativen za $n = 1325$ in za vsak $n \geq 2015$.

Naj bo k potenca praštevila in $K = \{1, \dots, 4k\}$. Za vsako podmnožico $A \subseteq K$ postavimo

$$A^* = \{\{a, b\} : a \in A, b \in K \setminus A\}$$

in si oglejmo družino $\mathcal{K}$ vseh množic A^* , ki ustrezajo pogoju $|A| = 2k$. Elementi družine $\mathcal{K}$ so torej enako močne podmnožice množice $\{\{a, b\} : a, b \in K, a \neq b\}$, ki ima $n = \binom{4k}{2}$ elementov. Ker za vsak par $A^*, B^* \in \mathcal{K}$ velja

$$|A^* \cap B^*| = 2(|A \cap B| - k)^2 + 2k^2,$$

je

$$\min\{|A^* \cap B^*| : A^*, B^* \in \mathcal{K}\} = 2k^2,$$

pri čemer je minimum dosežen natanko takrat, kadar je $|A \cap B| = k$.

Naj bo $\{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_r\}$ particija družine $\mathcal{K}$ na r delov, tako da imata vsaki dve množici vsakega dela $\mathcal{K}_i$ vsaj $2k^2 + 1$ skupnih elementov. Potem za poljubni množici $A, B \subset K$, ki ustrezata pogoju $A^*, B^* \in \mathcal{K}_i$, velja $|A \cap B| \neq k$. Po izreku Frankla in Wilsona tedaj za vsak $i \in \{1, \dots, r\}$ dobimo

$$|\mathcal{K}_i| = |\{A : A^* \in \mathcal{K}_i\}| \leq 2 \binom{4k-1}{k-1}.$$

Ker je $|\mathcal{K}| = \frac{1}{2} \binom{4k}{2k}$, od tod sledi

$$\frac{1}{2} \binom{4k}{2k} \leq 2r \binom{4k-1}{k-1}.$$

Brž ko r ne izpolnjuje te neenakosti, družina $\mathcal{K}$ ne more biti razdeljena na r ali manj takih delov, da imata vsaki dve množici kateregakoli od njih vsaj $2k^2 + 1$ skupnih elementov. Torej velja

$$b(n) \geq \frac{\binom{4k}{2k}}{4^{\binom{4k-1}{k-1}}}.$$

Če upoštevamo še enakost $n = 2k(4k - 1)$ in uporabimo na primer oceno

$$e\left(\frac{m}{e}\right)^m < m! < em\left(\frac{m}{e}\right)^m, \quad m = 1, 2, \dots$$

ali Stirlingovo formulo za $m!$, ugotovimo, da za dovolj velika števila n oblike $2p^s(4p^s - 1)$, kjer je $s \in \mathbb{N}$ in p praštevilo, velja $b(n) > 1.2^{\sqrt{n}}$. Z nekoliko natančnejšo analizo neenakosti in z uporabo porazdelitve praštevil lahko ugotovimo, da velja $b(n) > n + 1$ za $n = 1325$ in za vsak $n \geq 2015$.

Že leto po objavi prvega protiprimera [19] je uspelo N. Alonu v [26] znižati znano spodnjo mejo števil n , za katera velja $b(n) > n + 1$, na $n = 946$. Dokaz je v osnovi podoben originalu [19], vendar pa se ne opira na kombinatorični rezultat [9]. Z izboljšanjem in novimi spremembami osnovne metode [19] je A. M. Raigorodski leta 1999 ugotovil, da velja $b(n) > n + 1$ za vsak $n \geq 561$. Tri leta kasneje je A. Hinrichs s pomočjo teorije sfernih kod (*sferna koda* je drugo ime za končno podmnožico enotske sfere S_{n-1} prostora $\mathbb{R}^n$) razširil metodo [19] in uspelo mu je dokazati v [15], da je $b(n) > n + 1$ v primeru $323 \leq n < 561$, letos pa skupaj s C. Richterjem v [16] tudi za $n \geq 298$. V primeru $3 < n < 298$ je Borsukov problem še vedno odprt.

LITERATURA

- [1] В. Г. Болтыанский, *Задача об освещении границы выпуклого тела*, Изв. Молд. фил. АН СССР (1960), 10 (76), 77–84.
- [2] В. Болтыанский, *О разбиении плоских фигур на части меньшего диаметра*, Colloq. Math. **21** (1970), 253–263.
- [3] V. G. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [4] K. Borsuk, *Über die Zerlegung einer euklidischen n -dimensionalen Vollkugel in n Mengen*, Verh. Internat. Math. Kongr., Zürich, 1932.
- [5] K. Borsuk, *Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre*, Fund. Math. **20** (1933), 177–190.
- [6] J. Bourgain, J. Lindenstrauss, *On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes Math. 1469, Springer-Verlag, Berlin 1991, 138–144.
- [7] H. G. Eggleston, *Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter*, J. London Math. Soc. **30** (1955), 11–24.

- [8] P. Erdős, *My Scottish book „problems”*, The Scottish Book, Mathematics from the Scottish Café, Birkhäuser, 1981, 35–43.
- [9] P. Frankl, R. Wilson, *Intersection theorems with geometric consequences*, Combinatorica **1** (1981), 357–368.
- [10] D. Gale, *On inscribing n -dimensional sets in a regular n -simplex*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 222–225.
- [11] B. Grünbaum, *A simple proof of Borsuk’s conjecture in three dimensions*, Proc. Camb. Phil. Soc. **53** (1957), 776–778.
- [12] B. Grünbaum, *Borsuk’s problem and related questions.*, Proc. Symposia Pure Math. Vol. 7 (Amer. Math. Soc., Providence, RI) 1963, 271–284.
- [13] H. Hadwiger, *Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers*, Comment. Math. Helvet. **18** (1945/46), 73–75.
- [14] H. Hadwiger, *Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers*, Comment. Math. Helvet. **19** (1946/47), 71–73.
- [15] A. Hinrichs, *Spherical codes and Borsuk’s conjecture*, Discrete Math. **243** (2002), 253–256.
- [16] A. Hinrichs, C. Richter, *New sets with large Borsuk numbers*, e-print: arXiv:math.
- [17] M. Hladnik, *Konveksne množice v ravnini*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1997.
- [18] H. W. E. Jung, *Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst*, J. Reine Angew. Math. **123** (1901), 241–257.
- [19] J. Kahn, G. Kalai, *A counterexample to Borsuk’s conjecture*, Bull. Amer. Math. Soc. **29** (1993), 60–62.
- [20] D. Kolodziejczyk, *Some remarks on the Borsuk conjecture*, Ann. Soc. Math. Polon. **28** (1988), 78–86.
- [21] M. Lassak, *An estimate concerning Borsuk’s partition problem*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. **30** (1982), 449–451.
- [22] H. Lenz, *Zur Zerlegung von Punktmengen in solche kleineren Durchmessers*, Arch. Math. **6** (1955), 413–416.
- [23] Л. А. Лыустерник, Л. Г. Схнирелјман, *Топологицхеские методы в вариационных задачах*, МГУ, Иссл. ин-т матем. мех., Москва, 1930.
- [24] В. В. Макеев, *Об аффинных образах ромбододекаэдра, описанных вокруг трехмерного выпуклого тела в $\mathbb{R}^3$* , Зап. науцх. сем. ПОМИ 246 (1997), 191–195.
- [25] N. Mramor Kosta, *O Borsukovem antipodnem izreku*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987), 65–72.
- [26] A. Nilli, *On Borsuk’s problem*, Contemp. Math. **178** (1994), 209–210.
- [27] J. Pál, *Über ein elementares Variationsproblem*, Copenhagen: Roy. Danish Acad. Sci. Letters, 1920.
- [28] J. Perkal, *Sur la subdivision des ensembles en parties de diamètres inférieur*, Colloq. Math. **1** (1947), 45.
- [29] А. М. Райгородский, *Об одной оценке в проблеме Борсука*, Усп. Мат. Наук **54**, 2 (1999), 185–186.
- [30] А. М. Райгородский, *Проблема Борсука и хроматическые числа некоторых метрицхеских пространств*, Усп. Мат. Наук **56**, 1 (2001), 107–146.
- [31] А. С. Рислинг, *Проблема Борсука в трехмерных пространствах постоянной кривизны*, Укр. геом. сб. **11** (1971), 78–83.
- [32] C. A. Rogers, *Symmetrical sets of constant width and their partition*, Mathematika **18** (1971), 105–111.
- [33] C. A. Rogers, *Some problems in the geometry of convex bodies*, The Geometric Vein, Springer, New York, Berlin 1981, 279–284.
- [34] O. Schramm, *Illuminating sets of constant width*, Mathematika **35** (1988), 180–199.

NOVE KNJIGE

Stanislav Južnič: *Hallerstein – kitajski astronom iz Mengša*, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 2003, 136 strani

Običajno prepričanje je, da kranjske dežele v 17. in 18. stoletju niso kaj prida prispevale k vesplošni rasti naravoslovnih znanosti v tem obdobju. Pri tem bi najbrž ostalo, če med nami ne bi bilo učenjakov, ki bi se jim zdelo vredno ta splošni predsodek vzeti pod drobnogled detajlnega zgodovinskega proučevanja. Eden od teh je prav gotovo dr. Stanislav Južnič. S svojimi številnimi članki in sedaj tudi s knjigo, ki jo imamo pred sabo, je dodobra spodkopal ta predsodek in nam v svojih delih predstavil slikovito paleto pomembnih in zanimivih naravoslovcev, ki so se v slovenskih deželah v tedanjem času posvečali znanosti. Predvsem gre za naravoslovce (morda je bolje uporabljati ta precej manj diferenciran pojem kot kasnejši fiziki, matematiki, astronomi itd.), ki so delovali v okviru takrat močne in idejno propulzivne Družbe Jezusove in ki so bodisi predavali ali pa se učili prvih korakov v naravoslovje na ljubljanskem jezuitskem kolegiju. Čeprav bi se spodobilo, da bi vsakdo, ki gre skozi sodobne slovenske naravoslovne šole, vedel, kdo so bili Erberg, Zois, Ambschell, Schoettl, Taufferer, Morautscher, Gruber ter Pogrietschnig, večina teh imen le redkemu poznavalcu pomeni karkoli oprijemljivega. Ti ljudje so v svojem času ne le sledili svetovni znanosti, kupovali sodobne knjige za jezuitsko knjižnico, ki jih je dajala na voljo takratnim študentom, ampak so sami tudi pisali znanstvene knjige in se aktivno vključevali v svetovni tok znanja. Mnogi med njimi so dosegli zavidljivo raven strokovnosti in so zasedali pomembne položaje tudi zunaj meja tedanjih slovenskih dežel. Spomnimo se le Jurija Vege in kasnejšega generala jezuitskega reda v takratni Rusiji Gabriela Gruberja. Šole v slovenskih deželah tistega časa so morale biti izjemno dobre, da so omogočale takšne podvige svojih nekdanjih učencev na odru sveta.

Avgustin Hallerstein je eno od teh skoraj in po krivici pozabljenih imen, ki jih Južničeva knjiga ponovno odkriva zainteresiranemu bralcu v slovenskih deželah. Rodil se je pred natančno 300 leti v Mengšu, kjer so to visoko obletnico tudi primerno počastili. Tudi Južničeva knjiga sama je zanimiv in zgovoren poklon tej visoki obletnici. Bil je študent jezuitskega kolegija v Ljubljani, na katerem je kasneje nekaj časa tudi poučeval. Študij v Ljubljani ga je strokovno očitno zelo dobro pripravil na kasnejše podvige na

Daljnem vzhodu. Leta 1739 se je po različnih peripetijah izkrcał na Kitajskem kot eden od članov Družbe Jezusove na dvoru kitajskega cesarja. Jezuiti so bili namreč v tistem času pomemben vir poznavanja Kitajske za vso Evropo. Njegova izobrazba mu je očitno dajala dovolj strokovne samozavesti in razgledanosti, da je kasneje postal dvorni astronom na dvoru kitajskega cesarja in da je svoja opazovanja na številnih področjih, ne le na astronomskem, objavljaj pri Kraljevi družbi v Londonu ter akademijah v Parizu, Berlinu in Sankt Peterburgu. Hallerstein je bil 1743 imenovan za prisednika matematičnega in astronomskega kolegija cesarskega dvora v Pekingu, leta 1745 za provinciala in vizitatorja japonske jezuitske province in leta 1746 za predsednika astronomsko-matematičnega kolegija in za mandarina tretje stopnje, kar je najvišji položaj na kitajskem dvoru, ki ga je lahko dosegel zahodnjak. Vsekakor meteorska kariera tega kranjskega učenjaka.

Hallerstein je na Kitajskem opazoval in potem poročal o sončnih in luninih mrkih, o prehodu Venere in Merkurja prek sončne plošče, prehodu Jupitra pod lunino ploščo, o zvezdnem nebu nad Kitajsko, o severnem siju, elektriki in vakuumu. Risal je zvezdne karte kitajskega neba in zemljevide različnih delov dežele. Njegov je tudi prvi podroben opis pizmarja, nerogatega jelena iz notranje Azije, od katerega so v tistem času dobivali v Evropi cenjeno dišavo – mošus. In še bolj zanimivo, na osnovi cesarskih statistik je izračunal število in letni prirastek kitajskega prebivalstva v letih 1760–61. Številke in natančnost tega njegovega dela so fascinantne. Južničeva knjiga vsebuje vrsto detajlov in zanimive analize vseh njegovih opažanj, objav in potovanj. Še posebno so zanimiva in že v svojem času pomembna in brana njegova pisma, ki jih je redno pisal bodisi svojim domačim ali evropskim strokovnim kolegom.

Ob branju te knjige se seveda človek nehote vpraša, zakaj v naših šolah tolikšen pomenljiv molk o ljudeh iz slovenskih dežel, ki so v zgodovini igrali zanimive in pomembne vloge na odru sveta. Tega pri drugih narodih ni videti, čeprav tudi tam nekateri učenjaki niso govorili njihovega kasnejšega uradnega jezika (recimo pri Dancih ali Švedih). Kot je v predgovoru k Južničevi knjigi zapisal akademik prof. dr. Žekš, lahko le upam, da ne zato, ker ni bil „naš“. Če se bomo omejili le na „naše“, nas bo na koncu ostalo bore malo. Upam, da se tega zavedajo tisti, ki tako zelo skrbijo za pravovernost naše zgodovine.

Južničevo knjigo lahko le priporočim kar se da širokemu krogu bralcev. Takšnih knjig bi želel videti še več.

Rudolf Podgornik

PREHOD VENERE ČEZ SONČEVO PLOSKEV

V torek, 8. junija 2004, bomo lahko opazovali navidezen prehod Venere čez Sončevo ploskev (glej naslovnico). Prehod bo trajal približno šest ur in opazovati ga bo mogoče v Evropi, Afriki in Aziji. Zadnji tak prehod je bil viden 6. decembra 1882. Prav zaradi izjemne redkosti velja prehod Venere za enega najlepših nebesnih pojavov v letu 2004. Zato so pomembne evropske znanstvene ustanove, katerih nosilec je European Southern Observatory (ESO), pripravile projekt Prehod Venere 2004 (The Venus Transit).

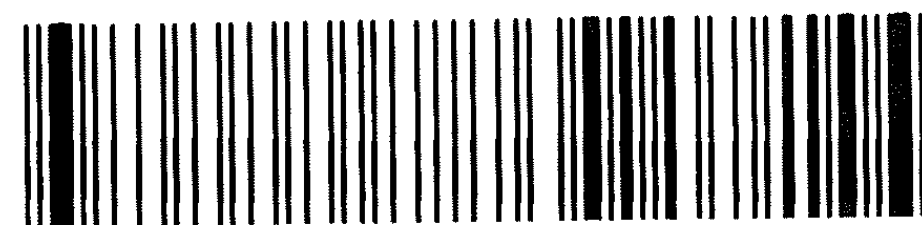
Projekt Prehod Venere 2004 (VT-2004) je bil izbran kot eden najboljših projektov EU za leto 2003. Vanj je vključenih več kot 25 evropskih držav, pri njem pa bodo sodelovale tudi ustanove iz Avstralije, Združenih držav Amerike, Indije, Egipta in z Nove Zelandije. Glavni organizator projekta ESO je zaupal vlogo nacionalnega koordinatorja v Sloveniji Fakulteti za matematiko in fiziko.

K opazovanju prehoda Venere vabimo šole, astronomske krožke, astronomske ustanove ter astronomska društva. Želimo, da sodelujejo pri merjenju časov stika med Venerino ploskvico in Sončevo ploskvijo. Dobljene podatke bo treba skupaj z geografskima koordinatama opazovališča posredovati na Pariški observatorij. Na osnovi izmerjenih časov stika in geografskih koordinat bodo izračunali povprečno razdaljo med Zemljo in Soncem ter sproti obveščali javnost o rezultatu.

Cilj projekta je povečati zanimanje mladih za znanost, popularizirati znanstvene metode pri raziskovanju sveta ter vključiti mlade v mednarodne projekte. Najboljši rezultati projekta bodo predstavljeni v okviru Evropskega znanstvenega tedna oktobra 2004 v Grenoblu. Vsi, ki ne bodo imeli možnosti sami opazovati prehoda, ga bodo lahko spremljali po internetu, saj ga bo nekaj največjih evropskih observatorijev snemalo v živo.

K opazovanju izjemno redkega nebesnega pojava ste vabljeni vsi. Vse potrebne informacije o prehodu Venere najdete na slovenskem spletnem naslovu www.fiz.uni-lj.si/astro. Na tej strani se lahko prijavite kot član skupine ali posameznik, če želite opazovati prehod. Vabljeni ste, da v forumu izmenjate mnenja z vsemi drugimi. Za vse učitelje, ki želijo opazovati prehod, bomo na Fakulteti za matematiko in fiziko pripravili seminar z naslovom Prehod Venere 2004. Podrobnosti o točnem datumu, uri in vsebini seminarja bodo dosegljive na zgoraj omenjenem naslovu. Dodatne informacije dobite tudi na osrednji strani ESO www.vt-2004.org v angleškem jeziku.

V imenu slovenskega vodstvenega odbora:
Sonja Jejčič, Andrej Čadež, Tomaž Zwitter



VSEBINA

ODPISANO

Članki

Strani

Lusternik-Schnirelmannova kategorija, Petar Pavešić	33–50
Borsukov problem, Boris Lavrič	51–62

Nove knjige

Hallerstein – kitajski astronom iz Mengša, Rudolf Podgornik	63–64
---	-------

Vesti

Prehod Venere čez Sončevo ploskev, Sonja Jejčič, Andrej Čadež, Tomaž Zwitter	III
---	-----

CONTENTS

Articles

Pages

Lusternik-Schnirelmann category, Petar Pavešić	33–50
Borsuk's problem, Boris Lavrič	51–62

New books	63–64
---------------------	-------

News	III
----------------	-----

Na naslovnici je prikazan navidezen prehod Venere čez Sončevo ploskev, ki ga bo mogoče opazovati 8. junija 2004.