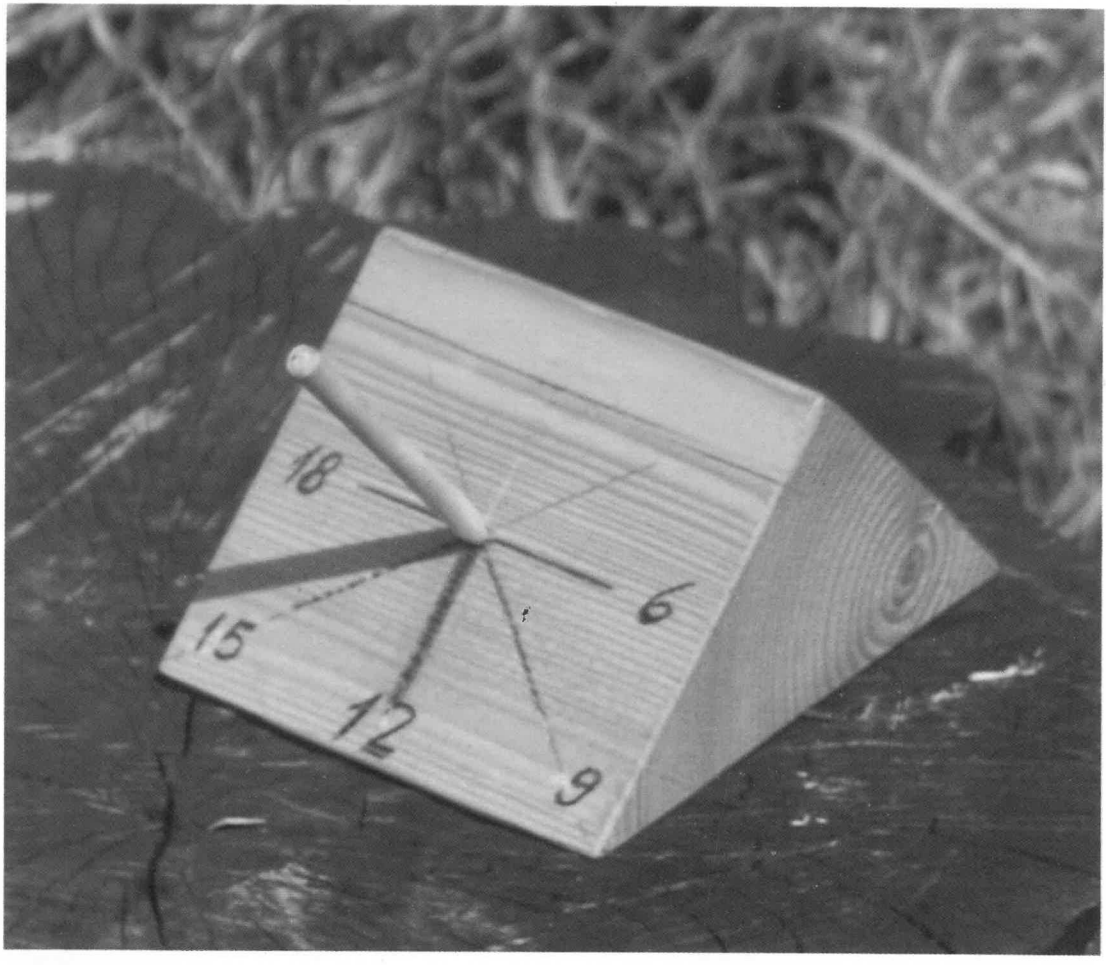
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

ODPISANO

2003
Letnik 50
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, NOVEMBER 2003, letnik 50, številka 6, strani 161–192

Naslov uredništva: DMFA-založništvo, Jadranska ul. 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana. **Spletna stran**: http://www.fmf.uni-lj.si/~zaloznistvo/omf/ **Telefon**: (01) 4766 553, 4232 460. **Telefaks**: (01) 2517281. **Devizna nakazila**: SKB banka d. d., Ajdovščina 4, Ljubljana. **SWIFT**: SKBASI2X. **Transakcijski račun**: 03100-1000018787.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič. Natisnjeno v Tiskarni KURIR v nakladi 1600 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 4000 SIT, za študente 2000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 800 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

© 2003 DMFA Slovenije – 1558 Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvorno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

OB KONCU PETDESETEGA LETNIKA OBZORNIKA

S pričujočo številko končujemo jubilejni 50. letnik našega društvenega glasila. Ob tej okrogli številki se zdi primerno opozoriti na stalno pomanjkanje kvalitetnih in zanimivih člankov, ki bi bili poleg tega razumljivi članom društva. Napisati tak članek seveda ni preprosta naloga. Že na začetku pisanja se pojavi vprašanje, ali je izbrana tema res primerna za Obzornik. Če je odgovor pritrdilen, potem sledi naslednje vprašanje, kako članek napisati. S temi problemi so se uredniki Obzornika ukvarjali že v prvem letu izhajanja, saj so o tem pisali v 2. številki. Ob branju navodil za tehnično plat pisanja se lahko malo nasmehnemo, druga razmišljanja tedanjih urednikov pa še vedno veljajo in zato spodaj ponovno objavljamo njihova navodila sodelavcem Obzornika.

Roman Drnovšek
odgovorni urednik

Sodelavcem !

Pri vsakem delu so v začetku težave. Tudi pri našem listu jih ne manjka. Največja je ta, da nas je malo. Zato še enkrat prosimo vsakogar, ki lahko kaj prispeva, da pristopi v krog naših sodelavcev. Izgovor, da ni časa, ne velja; saj ga tisti, ki že delajo za list, tudi nimajo na pretek. Res je, da zahteva tako pisanje mnogo truda, toda to naj ne bo zapreka. Uredništvo bo vedno rado pomagalo z literaturo in z nasveti pri izbiri snovi in pri obdelavi. Prosimo pa vse sodelavce, da se ravnajo po navodilih, ki so bila objavljena na ovitku prve številke. Zlasti prosimo tole:

1. Risbe naj bodo po predpisih izdelane, t. j. s črnim tušem na bel papir, z dovolj debelimi črtami in dovolj velikimi črkami za 2-kratno pomanjšavo.

2. Avtorji naj ne pozabijo sestaviti napisov, ki pridejo pod slike, in citirati literaturo. Citati naj bodo spisani kot v dosedanjih člankih.

3. Rokopis naj bo tipkan samo na eno stran, na gladek papir in s polnimi presledki med vrsticami (cela vrstica naj bo izpuščena). Slabo čitljiv rokopis ne more v tiskarno, ker bi nastale mnoge napake, ki bi tisk podražile in zavlekle.

4. Na hrbtno stran rokopisa naj avtor napiše svoj naslov, na katerega mu pošljemo korekture.

Sodelavci naj nam ne zamerijo, če priobčimo še nekaj splošnih napotkov, ki bodo morda koristni. Že pri izbiri teme se odpre vprašanje: Ali to spada v »Obzornik«? Tu se moramo ravnati edinole po namenu našega lista, ki hoče zbuditi zanimanje ter dvigniti raven matematične in fizikalne izobrazbe pri nas. Članek, ki k temu ne prispeva, ni za »Obzornik«.

Druga težava je slog pisanja. Včasih se pripeti, da je slog tako težak, da zlepa ne moreš razumeti, kaj hoče avtor povedati. Stavki so predolgi in

preveč zamotani. Razbij stavek na dva, tri kose, pa bo takoj bolje. Navadno je dobro, da denemo piko, kjerkoli jo lahko denemo. Upoštevati je treba, da mora bralec zbrati vso vnemo za razumevanje vsebine in da se ne more zamujati z razčlenjevanjem stavkov. Komplicirano izražanje mu dela le nepotrebne težave. Vsaka stvar se da povedati preprosto – in zato ni nič manj »znanstvena«.

Če naj bo slog dober, je treba veliko piliti. Nikomur se ne posreči, da bi bil rokopis dober, že ko je prvikrat napisan. Takrat človek komaj šele dobi oporo za dokončno razporeditev in omejitev snovi. Tudi, ko je članek tretjič napisan, se najde pri ponovnem prebiranju še to in ono, kar je vredno popraviti.

Mnogi vprašujejo: Kako visoko smem začeti? Gotovo je, da ne smemo priti na poljudno pisanje, ker to ni naš namen. Zato so druge revije. Priznati moramo, da smo tu v škripcih. Radi bi pokazali, kaj se danes dela v matematiki in fiziki, radi pa bi tudi, da nas vsi bralci razumejo. Nemara bo prav, da sklenemo tale dogovor: »Obzornik« naj ne zahteva več predizobrazbe, kot jo da osnovni dvoletni tečaj matematike in fizike na univerzi ali na tehniki. Seveda bodo mnogi članki zahtevali manj. Prav je tako, ker je krog naših bralcev zelo širok. List sam bo pomagal, da bomo v tem pogledu prišli naprej.

OBZORNIKOVIH PETDESET

Medtem ko imamo približen občutek za to, kako star je človek, ko sreča Abrahama, za revijo česa podobnega ne moremo trditi. Nobenega zakona narave ni, ki bi ji branil, da bi živela zelo dolgo. Priznati pa je treba, da je bil do zdaj iz razlogov, ki se ne zdijo pomembni in nikakor nimajo lastnosti zakonov narave, življenjski čas revij končen. Kljub temu je smiselno izhajati iz predpostavke, da bo Obzornik čez petdeset let praznoval stoletnico.

Ne smemo zamolčati, da Obzornik skriva svojo pravo starost. Četverica „pogumnih mož", Ivan Kuščer, Anton Moljk, Ivan Štalec in Albin Žabkar, ga je začela izdajati že leta 1951. V letih okoli 1954 in 1958 se je malo zatikalo, odtlej pa izhaja redno. Najprej so izšle na leto po štiri številke, zdaj pa jih izide šest s skupno 192 stranmi. Doslej je izšlo 9600 strani, če upoštevamo majhne posebnosti ter stvarni in avtorski kazali po petnajstem in po tridesetem letniku. Na polici je Obzornika vsaj za 45 centimetrov, če je vezava bolj trdna, pa še za nekaj več. Že to naredi vtis. Vloga odgovornih urednikov se je spreminjala, a vendar se ob obletnici spodobi, da se jih spomnimo: Ivan Štalec, Franc Kvaternik, Janez Strnad, Gabrijel Tomšič, Milan Hladnik, Boris Lavrič in Roman Drnovšek. Število članov uredniškega odbora je najprej raslo, potem se je zmanjšalo in je nastal odbor svetovalcev, ki ga že nekaj časa ni več. Domnevati smemo, da število članov uredniškega odbora ni znatno vplivalo na življenje Obzornika. Nekoliko več možnosti za tak vpliv so imeli odgovorni uredniki, predvsem kar zadeva naslovno stran.

Obzornik za matematiko in fiziko je bil od vsega začetka tesno povezan z Društvom matematikov, fizikov in astronomov, že precej časa pa je

društvena revija. Naklada se je zadnje čase ustalila pri 1450 izvodih ob 1100 članih društva. Čeprav dolžina Obzornika na policah zapusti močan vtis, veliko pomembnejše vprašanje zadeva vsebino. Ob okrogli obletnici ne gre omenjati vseh senčnih strani, a nobena tajnost ni, da vsi člani društva niso zadovoljni z vsebino, pravzaprav nikoli niso bili zadovoljni. Za tem se utegne skrivati tudi neskladje med željami naročnikov, da bi zvedeli kaj več, in med časom, ki je za kaj takega na voljo. Že večkrat je uredniški odbor razpravljal o tem vprašanju. O takih razpravah od časa do časa slišimo tudi pri drugih podobnih revijah. Ne vse, a številne sklepe je mogoče povzeti z izjavo, da imajo bralci veliko možnost, da sami vplivajo na vsebino. Napišejo naj kaj in pošljejo reviji.

V zvezi z vsebino se pojavi še enostranska skrb. Bibliometrijska analiza Obzornika je leta 2000 razkrila asimetrijo – fiziki bi najbrž govorili o zlomljeni simetriji. Fizikalnih člankov je bilo tedaj manj kot polovico matematičnih in podobno razmerje je veljalo tudi za prispevke, namenjene šoli. To najbrž ni povezano samo z dejstvom, da srenji matematikov in fizikov nista enako številni, ampak tudi z njunimi notranjimi lastnostmi. Ni mogoče spregledati, da je bilo okoli leta 1986 obrnjeno pri člankih in prispevkih, namenjenih šoli. Nekaj časa so se za Obzornik precej zanimali tudi študenti fizike, ni pa mogoče ugotoviti, ali je bilo to okoli leta 1986. Vrh tega je že pred časom Obzornik dobil mlajše brate ali bratrance, *Presek*, *Matematiko v šoli*, *Fiziko v šoli* ter *Logiko in razvedrilno matematiko*.

Ponatisnjene želje *Sodelavcem* zbudijo blago nostalgijo in razmišljanje o tem, da se nekatere zadeve ohranijo čez daljši čas, nekatere pa se spreminjajo. Pomanjkanje časa so poznali že pred petdesetimi leti! Tudi druge misli ob pisanju matematičnih, fizikalnih in astronomskih člankov so večinoma ostale v veljavi. Močno pa se je spremenila tehnika. Prve Obzornike so delali še v globokem tisku. Stavci so bili ljudje, s katerimi se ni bilo pametno šaliti. Izročilo ve povedati, da so se na proslavljanju prvega letnika stavci – število ni določeno – stepli, ne med sabo in na srečo ne s člani uredniškega odbora. Tiskanje je zdaj najbrž preprostejše, a v nekaterih drugih pogledih se zdi življenje bolj zapleteno. Na to kaže že blag spomin na en sam sklad za pospeševanje založništva v daljni preteklosti.

Stavek „Največja [težava] je ta, da nas je malo" bo kmalu dobil še drugačen prizvok. Pisanje o matematiki in fiziki v slovenščini bo postalo še manj cenjeno in novi rod bo moral o tem ponovno premisliti. Ni mogoče dokazati trditve, da se znanost, za katero veljajo mednarodna merila, prek šole napaja v domačem jeziku, je pa mogoče, da velja. Če je tako, bodo morali raziskovalci in učitelji Obzornik za matematiko in fiziko najprej sami ceniti, da bodo uvideli, kaj pomeni, in ga bodo lahko hvalili drugim. Po stari kitajski modrosti bi to obletnico kazalo izkoristiti tudi za pogled v prihodnost, ne samo za pogled v preteklost.

Janez Strnad

O NEKI POSPLOŠITVI MALEGA FERMATOVEGA IZREKA

IVAN VIDAV

Math. Subj. Class.(2000) ??

Naj bo $\{x_n\}, n \geq 0$, zaporedje celih števil, ki zadošča homogeni linearni rekurzijski enačbi $x_{n+r} + a_1 x_{n+r-1} + \ldots + a_r x_n = 0$, kjer so koeficienti $a_1, a_2, \ldots, a_r$ dana cela števila. V članku obravnavamo vprašanje, kdaj velja v takem zaporedju za dano praštevilo p kongruenca $x_p \equiv x_1 \pmod{p}$.

ON A GENERALIZATION OF THE FERMAT'S LITTLE THEOREM

Let $\{x_n\}, n \geq 0$, be a sequence of integers satisfying a homogeneous linear recursion relation $x_{n+r} + a_1 x_{n+r-1} + \ldots + a_r x_n = 0$, where $a_1, a_2, \ldots, a_r$ are given integers. This article deals with the question of the validity of the congruence $x_p \equiv x_1 \pmod{p}$, where p is a given prime.

1. Mali Fermatov izrek pravi, da je razlika $a^{p-1} - 1$ deljiva s p, če je p praštevilo, celo število a pa ni deljivo s p. Od tod neposredno sledi, da je razlika $a^p - a$ deljiva s p pri vsakem celem številu a.

Zaporedje $x_n = a^n$, $n \geq 0$, je po definiciji potence določeno z začetnim členom $x_0 = a^0 = 1$ in z enakostjo $x_{n+1} = a^{n+1} = a^n \cdot a = a x_n$ za $n \geq 0$. Torej velja enačba

$$x_{n+1} - a x_n = 0, \quad n \geq 0. \tag{1}$$

Vsako zaporedje, ki zadošča tej enačbi, ima člene $x_n = x_0 a^n$, kjer je začetni člen x_0 lahko še poljuben. Če sta x_0 in koeficient a v (1) celi števili, so vsi členi x_n cela števila. Naj bo p praštevilo. Razlika $x_p - x_1 = x_0(a^p - a)$ je po malem Fermatovem izreku deljiva s p in velja zato kongruenca $x_p \equiv x_1 \pmod{p}$.

Vzemimo zdaj namesto preproste enačbe (1) splošno homogeno linearno rekurzijsko enačbo

$$x_{n+r} + a_1 x_{n+r-1} + a_2 x_{n+r-2} + \ldots + a_r x_n = 0, \quad n \geq 0. \tag{2}$$

Tu so koeficienti $a_1, \ldots, a_r$ dana števila. V tem članku bodo vselej cela števila. Zaporedje, katerega členi zadoščajo enačbi (2), je natanko določeno, če poznamo začetne člene $x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}$. Očitno so vsi x_n cela števila, če so koeficienti a_i in začetni členi cela števila.

Iskanje zaporedij, ki zadoščajo rekurzijskim enačbam oblike (2), je podobno reševanju homogenih linearnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti [4]. Hitro se prepričamo, da ustreza zaporedje potenc $x_n = \alpha^n$ enačbi (2), če je osnova α koren enačbe

$$\alpha^r + a_1 \alpha^{r-1} + a_2 \alpha^{r-2} + \ldots + a_r = 0. \tag{3}$$

To je algebraična enačba stopnje r. Ker smo privzeli, da so koeficienti a_i cela števila, je vsak njen koren α celo algebraično število (koeficient pri najvišji potenci α^r je namreč enak 1). V posebnem primeru, kadar je koren α racionalen, je navadno celo število, saj je vsako celo algebraično število, ki je racionalno, celo število (glej [5], str. 323).

Denimo, da ima enačba (3), ki je stopnje r, prav toliko različnih korenov $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. V tem primeru se členi x_n vsakega zaporedja, ki zadošča enačbi (2), izražajo v obliki vsote

$$x_n = C_1\alpha_1^n + C_2\alpha_2^n + \ldots + C_r\alpha_r^n \tag{4}$$

pri primerno izbranih koeficientih $C_1, \ldots, C_r$. Če so dani začetni členi $x_0, \ldots, x_{r-1}$, morajo koeficienti C_i ustrezati pogojem

$$\begin{array}{ccccccccc} C_1 & + & C_2 & + & \ldots & + & C_r & = & x_0 \\ C_1\alpha_1 & + & C_2\alpha_2 & + & \ldots & + & C_r\alpha_r & = & x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_1\alpha_1^{r-1} & + & C_2\alpha_2^{r-1} & + & \ldots & + & C_r\alpha_r^{r-1} & = & x_{r-1} \end{array} \tag{5}$$

To je sistem r linearnih enačb za r neznank $C_1, \ldots, C_r$. Determinanta tega sistema se glasi

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_r \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{r-1}, & \alpha_2^{r-1}, & \ldots, & \alpha_r^{r-1} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Δ se izraža kot produkt vseh možnih razlik $\alpha_i - \alpha_k$, kjer je indeks i večji od indeksa k, torej $\Delta = \prod_{i,k=1,i>k}^{r}(\alpha_i - \alpha_k)$. Kvadrat $\Delta^2 = D$ se imenuje diskriminanta. Diskriminanta D je polinom koeficientov a_i enačbe (3), koeficienti tega polinoma so cela števila (glej [5], str. 174–178). Zato je D hkrati s koeficienti a_i celo število.

Privzemimo zdaj, da so vsi koreni α_i med seboj različna cela števila. V tem primeru je Δ od nič različno celo število. Naj bodo tudi vsi začetni členi $x_0, \ldots, x_{r-1}$ cela števila! Koeficient C_i, ki zadoščajo sistemu (5), se izražajo kot kvocienti

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \ldots, \quad C_r = \frac{\Delta_r}{\Delta}. \tag{7}$$

Tu pomeni Δ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, determinanto, ki jo dobimo, če v determinanti (6) zamenjamo i-ti stolpec s stolpcem $[x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}]^T$ desnih strani v sistemu (5). Torej so v našem primeru Δ_i cela števila. Koeficienti C_i pa so ulomki s skupnim imenovalcem Δ in niso vselej cela števila.

Pomnožimo enakost (4) z $D = \Delta^2$. Produkti $DC_i = \Delta\Delta_i = C_i'$ so cela števila. Če zamenjamo indeks n s $p+k-1$, kjer je p praštevilo in $k \geq 1$, dobimo

$$Dx_{p+k-1} = C_1'\alpha_1^{p+k-1} + \ldots + C_r'\alpha_r^{p+k-1}.$$

Po malem Fermatovem izreku pa je $\alpha_i^p \equiv \alpha_i \pmod p$ (števila α_i so namreč cela). Torej

$$Dx_{p+k-1} \equiv C_1'\alpha_1^k + \ldots + C_r'\alpha_r^k = Dx_k \pmod p.$$

Tako smo dokazali

Trditev 1. *Zaporedje celih števil $\{x_n\}$ naj zadošča enačbi (2) s celimi koeficienti a_i. Če so vsi koreni pripadajoče algebraične enačbe (3) racionalni, velja za vsako praštevilo p in za vsak $k \geq 1$ kongruenca*

$$Dx_{p+k-1} \equiv Dx_k \pmod p. \tag{8}$$

Posebej za $k = 1$ imamo $Dx_p \equiv Dx_1 \pmod p$.

Pri dokazovanju smo sicer privzeli, da so vsi koreni enačbe (3) med seboj različni. Če pa ima (3) večkratne korene, je njena diskriminanta $D = 0$ in kongruenca (8) je trivialna.

Naj bo $D \neq 0$. Samo končno mnogo praštevil deli celo število D. Za vsa praštevila p, ki ne delijo D, velja kongruenca $x_{p+k-1} \equiv x_k \pmod p$.

2. Naj bo p dano praštevilo. Če delimo celo število a s p, se delitev v splošnem ne izide, dobimo kvocient q, ki je celo število, in ostanek, zaznamujmo ga z $\overline{a}$, ki je eno izmed števil $0, 1, \ldots, p-1$. Torej $a = qp + \overline{a}$. Kadar se delitev izide, je $\overline{a} = 0$. Ostanek $\overline{a}$ je s številom a pri danem praštevilu p natanko določen. Razlika $a - \overline{a} = qp$ je deljiva s p in velja zato kongruenca $a \equiv \overline{a} \pmod p$. Dve števili a in b pa imata isti ostanek natanko tedaj, kadar sta kongruentni po modulu p.

Ostanki $0, 1, \ldots, p-1$ po danem modulu p sestavljajo kolobar. V tem kolobarju dva ostanka $\overline{a}$ in $\overline{b}$ seštejemo (odštejemo oziroma zmnožimo) tako, da poiščemo ostanek pripadajoče vsote $\overline{a}+\overline{b}$ (razlike $\overline{a}-\overline{b}$ oziroma produkta $\overline{a}\overline{b}$). Če je modul p praštevilo, pripada vsakemu ostanku $\overline{a} \neq 0$ inverzni ostanek, namreč ostanek $\overline{x}$, za katerega velja $\overline{a}\overline{x} = \overline{1} = 1$ (pri deljenju števila 1 s p dobimo očitno ostanek 1 in je zato $\overline{1} = 1$). Zato sestavljajo vsi ostanki po praštevilskem modulu p obseg. Ta obseg ima p elementov, njegova karakteristika je p. Mali Fermatov izrek pove, da velja v njem enačba $\overline{a}^p = \overline{a}$ za vsak ostanek $\overline{a}$.

Imejmo poljubno zaporedje $\{x_n\}$ celih števil. Priredimo mu zaporedje ostankov $\{\overline{x}_n\}$ po nekem praštevilskem modulu p. Dva člena x_m in x_n

prvotnega zaporedja sta kongruentna po modulu p natanko tedaj, kadar sta pripadajoča člena $\overline{x}_m$ in $\overline{x}_n$ enaka.

Če zadošča zaporedje $\{x_n\}$ enačbi (2), kjer so koeficienti a_i cela števila, zadošča pripadajoče zaporedje $\{\overline{x}_n\}$ v obsegu ostankov po modulu p enačbi

$$\overline{x}_{n+r} + \overline{a}_1\overline{x}_{n+r-1} + \ldots + \overline{a}_r\overline{x}_n = 0. \tag{2*}$$

Tu so seveda $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_r$ ostanki števil $a_1, \ldots, a_r$ po modulu p.

Enačbo (2*) obravnavamo podobno kakor (2). Zaporedje potenc $\overline{x}_n = \overline{\alpha}^n$ zadošča enačbi (2*) natanko tedaj, kadar je osnova $\overline{\alpha}$ koren algebraične enačbe

$$\overline{\alpha}^r + \overline{a}_1\overline{\alpha}^{r-1} + \ldots + \overline{a}_r = 0 \tag{3*}$$

v obsegu ostankov. Denimo, da ima enačba (3*) v tem obsegu r različnih korenov $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_r$. Ker ima obseg ostankov po modulu p samo p elementov, mora biti seveda v tem primeru $p \geq r$. Splošna rešitev enačbe (2*) se potem glasi

$$\overline{x}_n = \overline{C}_1\overline{\alpha}_1^n + \overline{C}_2\overline{\alpha}_2^n + \ldots + \overline{C}_r\overline{\alpha}_r^n,$$

kjer so koeficienti $\overline{C}_i$ poljubni elementi iz obsega ostankov. Izbrati jih moramo tako, da bo imelo zaporedje predpisane začetne člene $\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_{r-1}$. Rešiti je treba sistem enačb, ki je v bistvu sistem (5) v obsegu ostankov. Rešitve se izražajo v obliki $\overline{C}_i = \frac{\overline{\Delta}_i}{\overline{\Delta}}$, kjer pomeni $\overline{\Delta}$ determinanto (6) v obsegu ostankov, $\overline{\Delta}_i$ pa je determinanta, ki jo spet dobimo tako, da i-ti stolpec v $\overline{\Delta}$ nadomestimo s stolpcem $[\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_{r-1}]^T$. Ker smo privzeli, da so vsi koreni enačbe (3*) med seboj različni, je $\overline{\Delta} \neq 0$. Zato obstaja v obsegu ostankov inverzni element $\overline{\Delta}^{-1}$, torej so vsi koeficienti $\overline{C}_i = \overline{\Delta}_i\overline{\Delta}^{-1}$ iz obsega ostankov.

Vzemimo zdaj člen $\overline{x}_{p+k-1}$, kjer je $k \geq 1$, torej

$$\overline{x}_{p+k-1} = \overline{C}_1\overline{\alpha}_1^{p+k-1} + \ldots + \overline{C}_r\overline{\alpha}_r^{p+k-1}.$$

Po malem Fermatovem izreku pa je $\overline{\alpha}_i^p = \overline{\alpha}_i$ za vsak indeks i. Zato

$$\overline{x}_{p+k-1} = \overline{C}_1\overline{\alpha}_1^k + \ldots + \overline{C}_r\overline{\alpha}_r^k = \overline{x}_k.$$

Za prvotno zaporedje celih števil $\{x_n\}$ velja potemtakem kongruenca

$$x_{p+k-1} \equiv x_k \pmod{p}, \quad k \geq 1. \tag{9}$$

Pri katerih pogojih smo izpeljali kongruenco (9)? Zahtevali smo prvič, naj ima enačba (3*) samo različne korene, in drugič, vsi koreni naj pripadajo obsegu ostankov. Prvi pogoj je izpolnjen natanko tedaj, kadar je

diskriminanta $\overline{D}$ enačbe (3*) različna od nič. Ker se diskriminanta izraža kot polinom koeficientov enačbe, je diskriminanta $\overline{D}$ prirejene enačbe (3*) ravno ostanek, ki pripada po modulu p diskriminanti D prvotne enačbe (3). Pogoj $\overline{D} \neq 0$ pove, da ne velja kongruenca $D \equiv 0 \pmod{p}$. Zato je prvi pogoj izpolnjen, kadar praštevilo p ne deli diskriminante D enačbe (3).

Kaj pa drugi pogoj? Enačbo (3*) lahko zapišemo kot kongruenco

$$\alpha^r + a_1\alpha^{r-1} + \ldots + a_r \equiv 0 \pmod{p}. \tag{10}$$

Če celo število α zadošča tej kongruenci, je pripadajoči ostanek $\overline{\alpha}$ koren enačbe (3*), in narobe: če je $\overline{\alpha}$ rešitev enačbe (3*) v obsegu ostankov, zadošča $\overline{\alpha}$ kongruenci (10) (ostanek $\overline{\alpha}$ je neko celo število). Enačba (3*) ima r različnih korenov $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_r$ v obsegu ostankov natanko tedaj, kadar premore kongruenca (10) r takih rešitev $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, da je $\alpha_i \not\equiv \alpha_j \pmod{p}$, brž ko je $i \neq j$. Tako smo dokazali

Trditev 2. *Naj bo p praštevilo, ki ne deli diskriminante D enačbe (3). Nadalje naj ima kongruenca (10) r paroma nekongruentnih rešitev $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$. Potem velja kongruenca $x_{p+k-1} \equiv x_k \pmod{p}$ za vsak $k \geq 1$.*

Pripomba. Če so vsi koreni enačbe (3*) različni od nič, sme biti $k = 0$. Vsi koreni so različni od nič natanko tedaj, kadar je konstantni člen $\overline{a}_r$ v (3*) različen od nič. To pomeni: če praštevilo p ne deli koeficienta a_r, velja tudi kongruenca $x_{p-1} \equiv x_0 \pmod{p}$.

Oglejmo si natančneje primer $r = 2$. Rekurzijsko enačbo zapišimo zdaj v obliki

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, \tag{11}$$

kjer sta a in b dani celi števili. Pripadajoča enačba

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

je kvadratna enačba z diskriminanto $D = a^2 - 4b$.

Vzemimo liho praštevilo p, ki ne deli D. Kongruenca

$$\alpha^2 + a\alpha + b \equiv 0 \pmod{p} \tag{12}$$

je rešljiva s celimi števili natanko tedaj, kadar je rešljiva kongruenca $\xi^2 \equiv D \pmod{p}$, se pravi, kadar je diskriminanta D kvadrat za modul p. Naj bo ta pogoj izpolnjen! Obstaja torej tako celo število ξ, da je razlika $\xi^2 - D$ deljiva s p. Preprost račun pokaže, da sta celi števili

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(-a + \xi) \quad \text{in} \quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(-a - \xi)$$

rešitvi kongruence (12). (Če je število $-a+\xi$ liho, ni deljivo z 2. V tem primeru zamenjamo ξ s številom $\xi_1 = \xi + p$, ki tudi zadošča kongruenci $\xi^2 \equiv D \pmod p$. Število $-a+\xi_1$ pa je sodo, če je bilo $-a+\xi$ liho.) Trditev 2 pove, da velja kongruenca $x_{p+k-1} \equiv x_k \pmod p$, če je D kvadrat za modul p.

Ali se da kaj povedati o zaporedjih $\{x_n\}$, ki zadoščajo enačbi (11), če diskriminanta $D = a^2 - 4b$ ni kvadrat za modul p? V tem primeru kongruenca (12) ni rešljiva, enačba

$$\overline{\alpha}^2 + \overline{a}\,\overline{\alpha} + \overline{b} = 0 \tag{13}$$

pa nima korenov v obsegu ostankov.

Obseg ostankov se da razširiti tako, da premore enačba (13) v razširjenem obsegu korena $\overline{\alpha}_1$ in $\overline{\alpha}_2$. Razširitev dobimo ravno s privzemom (adjunkcijo) korenov $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}_2$ k obsegu ostankov (glej [5], IX. poglavje). Zaznamujmo razširjeni obseg s F. Ima končno mnogo elementov, njegova karakteristika pa je p. V vsakem obsegu s karakteristiko p veljata enačbi

$$(\overline{x} + \overline{y})^p = \overline{x}^p + \overline{y}^p \quad \text{in} \quad (\overline{x}\,\overline{y})^p = \overline{x}^p\overline{y}^p$$

za poljubna elementa $\overline{x}$, $\overline{y}$ iz obsega. Zato je preslikava $\sigma : F \longrightarrow F$, določena s predpisom $\sigma(\overline{x}) = \overline{x}^p$, avtomorfizem obsega F.

Mali Fermatov izrek pove, da je $\overline{x}^p = \overline{x}$ za vsak $\overline{x}$ iz obsega ostankov, ki je podobseg obsega F. Ker je stopnja enačbe

$$\overline{x}^p - \overline{x} = 0 \tag{14}$$

enaka p, kolikor je ostankov po modulu p, so vsi koreni te enačbe ravno ostanki. To pomeni: če element $\overline{x} \in F$ zadošča enačbi (14), je $\overline{x}$ iz obsega ostankov.

Naj bo α koren enačbe (13)! Če preslikamo obe strani te enačbe z avtomorfizmom σ, dobimo

$$(\overline{\alpha}^2)^p + \overline{a}^p\overline{\alpha}^p + \overline{b}^p = \sigma(0) = 0.$$

Ker pa je $\overline{a}^p = \overline{a}$ in $\overline{b}^p = \overline{b}$, je izpolnjena enačba

$$(\overline{\alpha}^p)^2 + \overline{a}\,\overline{\alpha}^p + \overline{b} = 0.$$

Torej je hkrati z $\overline{\alpha}$ tudi $\overline{\alpha}^p$ koren enačbe (13). Korena te enačbe smo zaznamovali z $\overline{\alpha}_1$ in $\overline{\alpha}_2$. Zato je bodisi $\overline{\alpha}_1^p = \overline{\alpha}_1$ bodisi $\overline{\alpha}_1^p = \overline{\alpha}_2$. Če bi bilo $\overline{\alpha}_1^p = \overline{\alpha}_1$, bi $\overline{\alpha}_1$ ustrezal enačbi (14), o kateri vemo, da so vsi njeni koreni iz obsega ostankov. Ker obravnavamo zdaj primer, ko diskriminanta D ni kvadrat za modul p in zato enačba (13) nima korenov v obsegu ostankov,

mora biti $\overline{\alpha}_1^p = \overline{\alpha}_2$. Podobno je potem $\overline{\alpha}_2^p = \overline{\alpha}_1$. Avtomorfizem σ zamenja korena enačbe (13).

Členi $\{\overline{x}_n\}$ zaporedja, ki pripada zaporedju $\{x_n\}$ po modulu p, se izražajo s formulo

$$\overline{x}_n = \overline{C}_1\overline{\alpha}_1^n + \overline{C}_2\overline{\alpha}_2^n$$

pri primerno izbranih koeficientih $\overline{C}_1$ in $\overline{C}_2$ iz razširjenega obsega F. Če zamenjamo indeks n s $p+k$, kjer je $k \geq 1$, upoštevamo, da je $\overline{\alpha}_1^p = \overline{\alpha}_2$ in $\overline{\alpha}_2^p = \overline{\alpha}_1$, dobimo

$$\overline{x}_{p+k} = \overline{C}_1\overline{\alpha}_1^k\overline{\alpha}_2 + \overline{C}_2\overline{\alpha}_2^k\overline{\alpha}_1 = (\overline{C}_1\overline{\alpha}_1^{k-1} + \overline{C}_2\overline{\alpha}_2^{k-1})\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2.$$

Faktor v oklepaju na desni je $\overline{x}_{k-1}$, produkt $\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2$ pa je enak $\overline{b}$, ker sta $\overline{\alpha}_1$ in $\overline{\alpha}_2$ korena enačbe (13). Torej je

$$\overline{x}_{p+k} = \overline{b}\overline{x}_{k-1}.$$

Za prvotno zaporedje $\{x_n\}$ velja potemtakem kongruenca

$$x_{p+k} \equiv bx_{k-1} \pmod p \quad \text{za} \quad k \geq 1.$$

Dosedanje ugotovitve lahko strnemo v

Trditev 3. *Naj bo p liho praštevilo in $\{x_n\}$ zaporedje celih števil, ki zadošča enačbi*

$$x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0, \quad n \geq 0,$$

kjer sta koeficienta a in b celi števili.
(1) Če p ne deli diskriminante $D = a^2 - 4b$ in če je D kvadrat za modul p, velja kongruenca $x_{p+k-1} \equiv x_k \pmod p$ za vsak $k \geq 1$. Kadar koeficient b ni deljiv s p, je lahko $k = 0$, torej $x_{p-1} \equiv x_0 \pmod p$.
(2) Če diskriminanta D ni kvadrat za modul p, velja za $k \geq 1$ kongruenca $x_{p+k} \equiv bx_{k-1} \pmod p$. Posebej za $k = 1$ imamo $x_{p+1} \equiv bx_0 \pmod p$.

Za zgled vzemimo Fibonaccijevo zaporedje, ki zadošča rekurzijski enačbi

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \quad n \geq 0,$$

začetna člena pa sta $x_0 = 0$ in $x_1 = 1$. Diskriminanta pripadajoče algebraične enačbe $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ je $D = 5$. Izkaže se, da je število 5 kvadrat za vsa praštevila oblike $5m \pm 1$ (tu je m naravno število) za praštevila oblike $5m \pm 2$ pa je nekvadrat (glej [2], str. 134). Za praštevila p oblike $5m \pm 1$ velja potemtakem kongruenca $x_{p+k-1} \equiv x_k \pmod p$. Ker koeficient $b = -1$ ni deljiv z nobenim praštevilom, smemo vzeti $k = 0$, torej $x_{p-1} \equiv x_0 = 0$

(mod p). Če je praštevilo p oblike $5m \pm 2$, število 5 ni kvadrat. V tem primeru velja kongruenca $x_{p+k} \equiv -x_{k-1} \pmod p$. Ker je $x_0 = 0$, imamo pri $k = 1$ kongruenco $x_{p+1} \equiv 0 \pmod p$. Tako smo ugotovili (glej [3], str. 150, Theorem 180):

Če je liho praštevilo p oblike $5m \pm 1$, je v Fibonaccijevem zaporedju člen x_{p-1} deljiv s p, če pa je p oblike $5m \pm 2$, je člen x_{p+1} deljiv s p.

3. Na koncu se vrnimo k zaporedjem celih števil, ki zadoščajo splošni enačbi (2) s celimi koeficienti a_i. Če niso vsi koreni enačbe (3*) v obsegu ostankov po danem praštevilskem modulu p, obseg ostankov razširimo s privzemom vseh korenov $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_r$. Razširjeni obseg imenujmo spet F. Ima končno število elementov, njegova karakteristika pa je p. Zato je preslikava $\sigma : F \longrightarrow F$, določena s predpisom $\sigma(\overline{x}) = \overline{x}^p$, avtomorfizem.

Kadar so vsi koreni enačbe (3*) med seboj različni, se izražajo členi $\overline{x}_n$ prirejenega zaporedja ostankov z vsoto

$$\overline{x}_n = \overline{C}_1\overline{\alpha}_1^n + \ldots + \overline{C}_r\overline{\alpha}_r^n,$$

kjer so koeficienti $\overline{C}_i$ v splošnem iz razširjenega obsega F. Oglejmo si primer, ko so vsi ti koeficienti iz osnovnega obsega ostankov po modulu p in je zato $\sigma(\overline{C}_i) = \overline{C}_i^p = \overline{C}_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Ker je tudi $\overline{x}_1 = C_1\overline{\alpha}_1 + \ldots + C_r\overline{\alpha}_r$ iz obsega ostankov, imamo $\sigma(\overline{x}_1) = \overline{x}_1^p = \overline{x}_1$. Preslikava σ pa je v obsegu F avtomorfizem, torej

$$\sigma(\overline{x}_1) = \overline{C}_1\overline{\alpha}_1^p + \ldots + \overline{C}_r\overline{\alpha}_r^p = \overline{x}_p.$$

Od tod dobimo $\overline{x}_p = \overline{x}_1$. Za prvotno zaporedje pa velja kongruenca $x_p \equiv x_1 \pmod p$. Tako smo dokazali

Trditev 4. *Zaporedje celih števil $\{x_n\}$ naj ustreza enačbi (2) s celimi koeficienti a_i. Če se členi pripadajočega zaporedja ostankov $\{\overline{x}_n\}$ po danem praštevilskem modulu p izražajo v obliki*

$$\overline{x}_n = \overline{C}_1\overline{\alpha}_1^n + \ldots + \overline{C}_r\overline{\alpha}_r^n,$$

kjer so $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_r$ koreni ustrezne enačbe (3) v razširjenem obsegu F, koeficienti $\overline{C}_i$ pa so vsi iz obsega ostankov po modulu p, velja kongruenca $x_p \equiv x_1 \pmod p$.*

Pogoj je očitno izpolnjen tedaj, kadar so v izrazu (4) za člene $\{x_n\}$ prvotnega zaporedja vsi koeficienti C_i cela števila. Torej velja

Trditev 5. *Zaporedje celih števil $\{x_n\}$ naj ustreza enačbi (2) s celimi koeficienti a_i. Če se členi izražajo v obliki*

$$x_n = C_1\alpha_1^n + \ldots + C_r\alpha_r^n,$$

kjer so $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ koreni enačbe (3), koeficienti C_i pa so (navadna) cela števila, velja kongruenca $x_p \equiv x_1 \pmod p$ za vsako praštevilo p.

Zgled. Pred nekaj leti je Mihály Bencze v časopisu Amer. Math. Monthly postavil tole nalogo: Zaporedje celih števil $\{x_n\}$ je dano z začetnimi členi $x_0 = 4, x_1 = x_2 = 0, x_3 = 3$ in z rekurzijsko enačbo $x_{n+4} = x_{n+1} + x_n$, $n \geq 0$. Dokazati je treba, da je člen x_p deljiv s p, če je p praštevilo.

Algebraična enačba, ki pripada navedeni rekurzijski enačbi, se glasi

$$\alpha^4 - \alpha - 1 = 0.$$

Njeni koreni $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ so med seboj različna cela algebraična števila. Oglejmo si zaporedje s členi

$$x_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n + \alpha_4^n, \quad n \geq 0. \tag{15}$$

Zadošča rekurzijski enačbi $x_{n+4} = x_{n+1} + x_n$. Iz zvez med koreni in koeficienti algebraične enačbe izračunamo začetne člene zaporedja (15). Dobimo $x_0 = 4$, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 3$. Torej je zaporedje (15) tisto, ki ga navaja Benzce. Ker so koeficienti na desni v (15) vsi enaki 1, se pravi, cela števila, lahko uporabimo trditev 5. Zato velja kongruenca $x_p \equiv x_1 \pmod p$. Ker pa je $x_1 = 0$, je potemtakem člen x_p deljiv s p, če je p praštevilo.

LITERATURA

[1] M. Bencze, *Problem 10 625*, Amer. Math. Monthly, vol. 105 (1998), str. 366. Rešitev problema, Amer. Math. Monthly, Vol. 107 (2000), str. 281–282.

[2] J. Grasselli, *Osnove teorije števil*, 2. izdaja, Knjižnica Sigma, Ljubljana, 1975.

[3] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clanderon Press, Oxford, 1954.

[4] A. Vadnal, *Osnove diferenčnega računa*, Knjižnica Sigma, Ljubljana, 1968.

[5] I. Vidav, *Algebra*, DMFA, Ljubljana, 1989.

VESTI

DESETO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Med 25. in 31. julijem je bilo v Cluju v Romuniji deseto mednarodno tekmovanje študentov matematike. Ljubljansko univerzo so zastopali Matija Pretnar iz drugega, Irena Majcen iz tretjega ter Dušan Jan in Jure Kališnik iz četrtega letnika. Naši študentje so se dobro odrezali. Jure Kališnik je dobil drugo, Irena Majcen, Matija Pretnar in Dušan Jan pa tretjo nagrado. Najvišja mesta so zasedli študentje iz bivših sovjetskih republik.

Dva dneva so študentje vsak dan po pet ur reševali naslednje naloge (katerih teža približno narašča z zaporedno številko):

I.1. (a) Naj bo $(a_n)_n$ zaporedje realnih števil, za katera velja

$$a_1 = 1 \quad \text{in} \quad a_{n+1} > \tfrac{3}{2} a_n \quad \text{za vse } n \in \mathbb{N}.$$

Pokaži, da ima zaporedje $(b_n)_n$,

$$b_n := \frac{a_n}{(\frac{3}{2})^{n-1}},$$

bodisi končno limito ali pa gredo členi proti neskončnosti.

(b) Pokaži, da za vsako realno število $\alpha > 1$ obstaja zaporedje $(a_n)_n$ z enakimi lastnostmi kot v točki (a), za katero je

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha.$$

I.2. Naj bodo $a_1, \ldots, a_{51}$ nekateri neničelni elementi iz komutativnega obsega F. Vsakega od elementov zamenjamo z vsoto preostalih petdesetih in tako dobimo nove elemente $b_1, \ldots, b_{51}$. Kakšna je lahko karakteristika obsega F, če so novi elementi permutacija prejšnjih?

I.3. Naj bo A kvadratna realna matrika, za katero velja $3A^3 = A^2 + A + I$ (I označuje identično matriko). Pokaži, da zaporedje $(A^k)_k$ konvergira k idempotentni matriki.

I.4. Določi vse pare (a, b) naravnih števil, za katere lahko množico naravnih števil razbijemo na dve podmnožici A in B z lastnostjo $a \cdot A = b \cdot B$.

I.5. Naj bo $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ funkcijsko zaporedje, definirano z rekurzivnim pravilom $f_0 := g$ in

$$f_{n+1}(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f_n(t)\,dt \quad \text{za } x \in (0,1], \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Za vse $x \in (0,1]$ izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

I.6. $f(x) = a_n x^2 + \cdots + a_1 x + a_0$ je polinom z realnimi koeficienti, katerega vse ničle ležijo v polravnini $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z < 0\}$. Pokaži, da velja

$$a_k a_{k+3} < a_{k+1} a_{k+2} \quad \text{za } k = 0, 1, 2, \ldots, n-3.$$

II.1. Naj bosta A in B kvadratni realni matriki, za kateri velja

$$AB + A + B = 0.$$

Pokaži, da komutirata.

II.2. Za naravni števili m in n izračunaj limito

$$\lim_{x\to 0+} \int_x^{2x} \frac{\sin^m t}{t^n}\, dt.$$

II.3. A je zaprta podmnožica v $\mathbb{R}^n$, B pa množica vseh tistih točk $b \in \mathbb{R}^n$, za katere obstaja natanko ena točka $a_0 \in A$ z lastnostjo

$$|a_0 - b| = \inf_{a\in A} |a - b|.$$

Pokaži, da je množica B gosta v $\mathbb{R}^n$.

II.4. Določi vsa naravna števila n z naslednjo lastnostjo: obstaja družina $\mathcal{F}$ trielementnih podmnožic v $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, ki zadošča naslednjima lastnostma:

(i) Za poljubna različna elementa $a, b \in S$ obstaja natanko ena podmnožica $A \in \mathcal{F}$, ki vsebuje oba a in b.

(ii) Če za $a, b, c, x, y, z \in S$ velja $\{a, b, x\}, \{a, c, y\}, \{b, c, z\} \in \mathcal{F}$, potem tudi $\{x, y, z\} \in \mathcal{F}$.

II.5. (a) Pokaži, da za vsako funkcijo $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ obstaja funkcija $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, za katero je

$$f(x, y) \le g(x) + g(y) \qquad \text{za vse } x, y \in \mathbb{Q}.$$

(b) Poišči funkcijo $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katero nobena funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ne zadošča neenakosti

$$f(x, y) \le g(x) + g(y) \qquad \text{za vse } x, y \in \mathbb{R}.$$

II.6. Zaporedje $(a_n)_n$ je definirano rekurzivno s praviloma

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}.$$

Poišči limito

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{2^k},$$

če obstaja.

Marjan Jerman

ZECKENDORFOV IZREK IN FIBONACCIJEVE KOCKE

SANDI KLAVŽAR

Math. Subj. Class. (2000): 11B39, 90B18, 05C12

Predstavimo dobro znani Zeckendorfov izrek o reprezentaciji naravnih števil kot vsote Fibonaccijevih števil. Izrek poraja Fibonaccijeve nize, ki vodijo do definicije Fibonaccijevih kock. Te so bile vpeljane kot model za povezovalna omrežja. Prikazane so osnovne lastnosti Fibonaccijevih kock, med drugim je dokazano, da jih lahko izometrično vložimo v hiperkocke.

ZECKENDORF THEOREM AND FIBONACCI CUBES

A well-known Zeckendorf theorem concerning the representation of a positive integer as a sum of Fibonacci numbers is presented. The theorem gives rise to Fibonacci strings that in turn lead to the definition of Fibonacci cubes. These graphs were introduced as a model for interconnection networks. Some of their basic properties are listed, in particular it is proved that they can be isometrically embedded into hypercubes.

1. Uvod

Fibonaccijeva števila so definirana z $F_1 = F_2 = 1$ in $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ za $n > 2$. (V literaturi sicer najdemo manjša odstopanja glede indeksiranja tega zaporedja. Tu smo izbrali definicijo, ki jo zapoveduje združenje Fibonacci Association v svoji reviji Fibonacci Quarterly.) V spodnji tabeli je zapisanih prvih 25 Fibonaccijevih števil, kar nam bo prišlo prav kasneje.

F_1	1	F_6	8	F_{11}	89	F_{16}	987	F_{21}	10946
F_2	1	F_7	13	F_{12}	144	F_{17}	1597	F_{22}	17711
F_3	2	F_8	21	F_{13}	233	F_{18}	2584	F_{23}	28657
F_4	3	F_9	34	F_{14}	377	F_{19}	4181	F_{24}	46368
F_5	5	F_{10}	55	F_{15}	610	F_{20}	6765	F_{25}	75025

Fibonaccijeva števila oz. Fibonaccijevo zaporedje imajo neverjetno število lepih in pogosto tudi presenetljivih lastnosti, glej npr. obsežno knjigo [6]. Posebno mesto v tej teoriji ima Zeckendorfov[1] izrek, ki trdi, da lahko vsako naravno število enolično zapišemo kot vsoto **nezaporednih** Fibonaccijevih števil. Zeckendorfov izrek je leta 1951 objavil znani matematik Lekkerkerker

[1] Belgijec Edouard Zeckendorf (1901–1983) je bil po poklicu zdravnik, v prostem času pa se je uspešno ukvarjal tudi z matematiko. Objavil je več člankov s področja elementarne teorije števil, praviloma v reviji *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, glej npr. [12]. Najbolj znan je po izreku, ki ga obravnavamo v tem prispevku.

[7], v angleščini pa je bil prvič zapisan v [1]. V tem članku je Brown dokazal tudi presenetljivo dejstvo, da je Fibonaccijevo zaporedje edino zaporedje, za katero za vsa naravna števila obstaja tak reprezentacijski izrek.

V naslednjem razdelku dokažemo Zeckendorfov izrek ter vpeljemo Fibonaccijeve nize. V 3. razdelku na osnovi teh nizov definiramo Fibonaccijeve kocke, ki so bile sicer v literaturi vpeljane kot model za povezovalna omrežja. Nato si ogledamo nekaj preprostih lastnosti teh kock, na primer število njihovih povezav. V zadnjem razdelku najprej dokažemo, da lahko Fibonaccijeve kocke izometrično vložimo v hiperkocke ter nato s pomočjo tega dejstva obravnavamo nekatere metrične lastnosti Fibonaccijevih kock, kot so premer, polmer in center.

Kot običajno naj $V(G)$ in $E(G)$ označujeta množico točk in množico povezav grafa G. Spomnimo se še, da je *stopnja* točke u, $\deg(u)$, število njenih sosed in da je H *inducirani* podgraf grafa G, če je H maksimalen podgraf (glede na povezave) v G z množico točk $V(H)$. Za morebitne druge nedefinirane pojme iz teorije grafov glej [11].

2. Zeckendorfov izrek

Kot smo že omenili, je izhodišče tega prispevka naslednji *Zeckendorfov izrek*:

Izrek 1. *Naj bo n naravno število. Tedaj n lahko enolično zapišemo v obliki*

$$n = \sum_{i \geq 2} a_i F_i,$$

kjer je $a_i \in \{0, 1\}$ in $a_i a_{i+1} = 0$.

Preden izrek dokažemo, je potrebnih nekaj pripomb. Predstavitev števila n iz izreka imenujemo *Zeckendorfova reprezentacija* števila n. Na primer, $5 = 5$, $10 = 2 + 8$ in $99999 = 3 + 8 + 21 + 89 + 377 + 6765 + 17711 + + 75025$ so Zeckendorfove reprezentacije števil 5, 10 in 99999. Opozorimo, da F_1 ni dovoljen v reprezentaciji, saj sicer izgubimo enoličnost. Pogoj $a_i a_{i+1} = 0$ pravi, da v reprezentaciji ne nastopata zaporedni Fibonaccijevi števili.

Lotimo se sedaj dokaza. Najprej se spomnimo, da za vsak $m \geq 1$ velja

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2m-1} = F_{2m}, \tag{1}$$

glej npr. [3, Theorem 20]. Dokaz lastnosti (1) je preprost: zapišemo $F_1 = = F_2$, $F_3 = F_4 - F_2$, $\ldots$, $F_{2m-1} = F_{2m} - F_{2m-2}$, ter seštejemo leve in desne strani.

Podobno za $m \geq 1$ dobimo tudi naslednjo enakost:

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2m} = F_{2m+1} - 1. \tag{2}$$

Dokažimo sedaj, da obstaja razcep oblike

$$n = F_{n_1} + F_{n_2} + \cdots + F_{n_k}, \tag{3}$$

kjer je $n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 2$ in je $n_i \geq n_{i+1} + 2$ za $1 \leq i \leq k-1$. Ker je zaporedje $F_2, F_3, \ldots$ strogo naraščajoče, obstaja enoličen indeks $n_1 \geq 2$, za katerega velja

$$F_{n_1} \leq n < F_{n_1+1}. \tag{4}$$

Če je $n = F_{n_1}$, že imamo iskani razcep. V nasprotnem velja

$$F_{n_1} < n < F_{n_1+1}.$$

Ko tej enakosti odštejemo F_{n_1} ter upoštevamo, da je $F_{n_1+1} = F_{n_1} + F_{n_1-1}$, dobimo

$$0 < n - F_{n_1} < F_{n_1-1}.$$

Zaradi istega razloga kot zgoraj obstaja enoličen indeks $n_2 \geq 2$, za katerega velja

$$F_{n_2} \leq n - F_{n_1} < F_{n_2+1}.$$

Ker je $F_{n_2} \leq n - F_{n_1} < F_{n_1-1}$ in zato $F_{n_2} < F_{n_1-1}$, velja $n_2 < n_1 - 1$ oziroma $n_1 \geq n_2 + 2$. Če je $n - F_{n_1} = F_{n_2}$, imamo razcep $n = F_{n_1} + F_{n_2}$, $(n_1 \geq n_2 + 2)$, sicer postopek ponovimo. Po končnem številu korakov se postopek ustavi in tako pridemo do zapisa (3).

Preostane še, da dokažemo enoličnost reprezentacije. Najprej pomožna ugotovitev. Naj bo F_i največje Fibonaccijevo število poljubne Zeckendorfove reprezentacije. Tedaj vsota gotovo ni večja, kot če bi jemali vsako drugo število: $F_i + F_{i-2} + +F_{i-4} + \ldots$

Poglejmo si sedaj (4) in recimo najprej, da je $n = F_{n_1}$. Ker je v reprezentaciji (3) $n_k \geq 2$, iz (1) in (2) ter gornje pomožne ugotovitve sledi, da je $n = F_{n_1}$ edina Zeckendorfova reprezentacija števila n. Kadar pa je $F_{n_1} < n < F_{n_1+1}$, analogno sklepamo, da mora F_{n_1} nastopati v vsaki Zeckendorfovi reprezentaciji števila n. Dokazovanje enoličnosti končamo z indukcijo in s tem izrek v celoti dokažemo.

Iz dokaza sledi enostaven napotek, kako poiskati Zeckendorfovo reprezentacijo števila n. Izberemo največje Fibonaccijevo število, ki ni večje od n, recimo F_r, ter na ostanku (na $n - F_r$) postopek ponavljamo, dokler ne sestavimo iskane reprezentacije.

Ker je Zeckendorfova reprezentacija poljubnega naravnega števila enolična, nam poraja *Fibonaccijev številski sistem*. Namreč, vsako naravno število lahko reprezentiramo z binarnim nizom $(b_k b_{k-1} \ldots b_2)_F$ ($b_i \in \{0,1\}$), kjer ta niz predstavlja zapis $n = \sum_{i=2}^{k} b_i F_i$. Ustrezne nize imenujemo *Fibonaccijevi nizi* – to so torej binarni nizi, v katerih nimamo dveh zaporednih enic. Na primer, število 99999 zapišemo v Fibonaccijevem številskem sistemu kot $(100101000001001001010001)_F$, saj je $99999 = F_{25} + F_{22} + F_{20} + F_{14} + F_{11} + F_8 + F_6 + F_2$.

Zeckendorfov izrek je bil obravnavan iz mnogih zornih kotov, med drugim se da posplošiti na različne načine, glej npr. [2]. Kot zanimivost omenimo le naslednji Knuthov rezultat iz [5]. Definirajmo binarno operacijo $\circ$ nad naravnimi števili takole: naj bo

$$m \circ n = \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=1}^{\ell} F_{i_p + j_q},$$

kjer sta $m = F_{i_1} + \cdots + F_{i_k}$ in $n = F_{j_1} + \cdots + F_{j_\ell}$ Zeckendorfovi reprezentaciji števil n in m. Knuth je dokazal, da je operacija $\circ$ asociativna.

3. Fibonaccijeve kocke

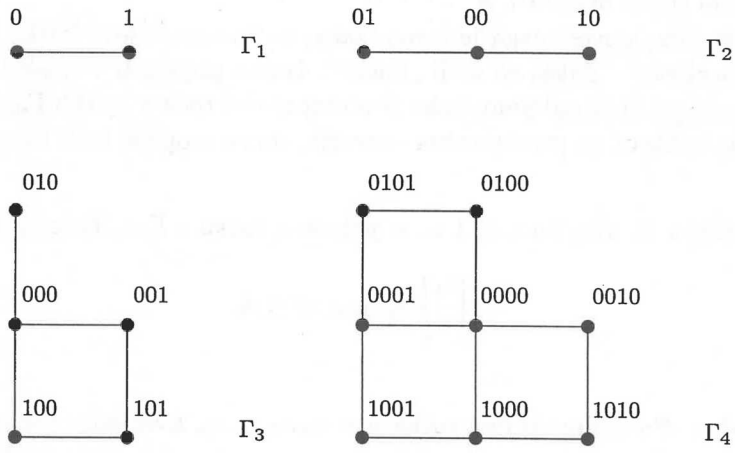
Oglejmo si vse zapise števil dolžine n v Fibonaccijevem številskem sistemu. Najmanjše število, ki ga lahko tako zapišemo, je seveda $(00\ldots0)_F$, to je število 0. Največje tako število je $(1010\ldots1(0))_F$, ki je zaradi (1) in (2) število $F_{n+2} - 1$. Torej z n mesti zapišemo natanko F_{n+2} števil. Ta razmislek je tudi motivacija za vpeljavo Fibonaccijevih kock, ki so bile v [4] vpeljane kot model za povezovalna omrežja.

Za $n \geq 1$ je *Fibonaccijeva kocka* Γ_n definirana tako, da so njene točke vsi Fibonaccijevi nizi dolžine n, pri tem pa sta točki sosednji, če se razlikujeta na natanko enem mestu. Fibonaccijeve kocke Γ_n, $1 \leq n \leq 4$, so prikazane na sliki 1.

Po vpeljavi leta 1993 so Fibonaccijeve kocke vsestransko proučevali, glej npr. članek [9] in v njem navedeno literaturo. Oglejmo si sedaj nekaj njihovih osnovnih lastnosti. Zgoraj smo že ugotovili, da ima Γ_n natanko F_{n+2} točk. Naslednji rezulat iz [8] odgovori na vprašanje o številu povezav Fibonaccijevih kock.

Trditev 2. *Za $n \geq 1$ velja:*

$$|E(\Gamma_n)| = \frac{nF_{n+1} + 2(n+1)F_n}{5}.$$



Slika 1. Začetne Fibonaccijeve kocke.

Dokaz. Uporabimo indukcijo po n. Za $n = 1$ in $n = 2$ je formula pravilna, saj vrne 1 in 2. Naj bo sedaj n poljubno naravno število, večje od 2. Razdelimo točke grafa Γ_n na tiste, ki se začnejo z 0, in tiste, ki se začnejo z 1:

$$V_1 = \{v \in V(\Gamma_n) \mid v = 0\ldots\} \qquad \text{in} \qquad V_2 = \{v \in V(\Gamma_n) \mid v = 1\ldots\}\,.$$

Očitno V_1 in V_2 tvorita razbitje množice $V(\Gamma_n)$. Naj bosta H_1 in H_2 podgrafa v Γ_n, inducirana s točkami iz V_1 oziroma iz V_2. Ker so točke Fibonaccijevi nizi, se vse točke iz V_2 začnejo s podzaporedjem 10. Zato je podgraf H_1 izomorfen Γ_{n-1} in podgraf H_2 izomorfen Γ_{n-2} in tako vsebujeta $|E(\Gamma_{n-1})|$ in $|E(\Gamma_{n-2})|$ povezav. Poglejmo še, koliko povezav poteka med H_1 in H_2. Naj bo $u = 10\ldots$ poljubna točka iz V_2. Ker se sosednji točki razlikujeta na natanko enem mestu, ima u natanko eno sosedo v V_1, namreč točko, ki se začne z 0 in se v preostalih mestih ujema z u. Torej med H_2 in H_1 poteka toliko povezav, kolikor je točk v H_2, to je F_n. Ugotovili smo torej, da velja zveza

$$|E(\Gamma_n)| = |E(\Gamma_{n-1})| + |E(\Gamma_{n-2})| + F_n\,.$$

Iz te zveze s pomočjo indukcijske predpostavke izračunamo:

$$\begin{aligned}
|E(\Gamma_n)| &= |E(\Gamma_{n-1})| + |E(\Gamma_{n-2})| + F_n \\
&= \frac{(n-1)F_n + 2nF_{n-1}}{5} + \frac{(n-2)F_{n-1} + 2(n-1)F_{n-2}}{5} + F_n \\
&= \frac{n(F_n + F_{n-1}) + 2n(F_{n-1} + F_{n-2}) + 4F_n - 2(F_{n-1} + F_{n-2})}{5} \\
&= \frac{nF_{n+1} + 2nF_n + 2F_n}{5},
\end{aligned}$$

kar je bilo treba dokazati. ■

Iz dosedaj povedanega je jasno, zakaj se Fibonaccijeve kocke imenujejo „Fibonaccijeve". Zakaj so tudi „kocke", bomo pojasnili v naslednjem razdelku, prej pa si še oglejmo, kako je s stopnjami točk v grafih Γ_n, saj je pomembna zahteva za povezovalna omrežja, da se stopnje točk ne razlikujejo preveč.

Trditev 3. *Naj bo $n \geq 1$ in u poljubna točka v Γ_n. Tedaj velja*

$$\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor \leq \deg(u) \leq n.$$

Dokaz. Po definiciji ima točka $u = u_1u_2 \ldots u_n$ kvečjemu toliko sosedov, kolikor ima elementov v svojem binarnem nizu, torej n. Zato je $\deg(u) \leq n$.

Za spodnjo mejo iz niza $u_1u_2 \ldots u_n$ poberimo $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ zaporednih trojic $u_1u_2u_3$, $u_4u_5u_6$, ... Ker je u Fibonnacijev niz, imamo za poljubno tako trojico eno izmed naslednjih možnosti: 000, 001, 010, 100 in 101. V prvem primeru lahko srednjo ničlo spremenimo v 1 ter dobimo sosednjo točko točke u. V vseh drugih primerih lahko spremenimo posamezno enico v ničlo in zopet dobimo sosednjo točko točke u. Tako vsaka trojica poraja vsaj enega soseda točke u, zato je sosedov vsaj $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. ■

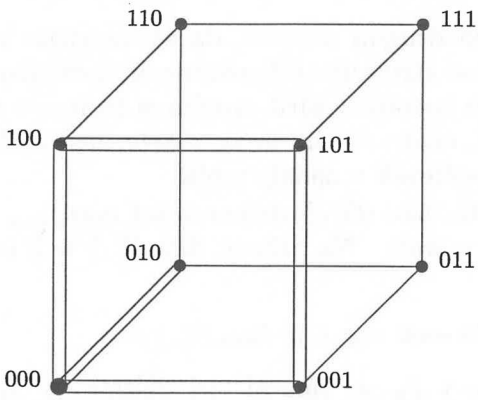
4. Metrične lastnosti Fibonaccijevih kock

V tem razdelku bomo najprej dokazali, da Fibonaccijeve kocke premorejo izometrično vložitev v (običajne) kocke, in s tem utemeljili, da so Fibonaccijeve kocke tudi „kocke". Opisana vložitev v kocke nam bo nato olajšala obravnavo njihovih osnovnih metričnih lastnosti.

Naj bo G povezan graf. *Razdalja* $d_G(u, v)$ med točkama u in v je število povezav na najkrajši poti med u in v. Graf G skupaj s funkcijo d_G tvori metrični prostor.

Za $n \geq 1$ je *n-kocka* Q_n graf, katerega točke so vsi binarni nizi dolžine n, kjer je sosednost definirana kot v Fibonaccijevih kockah: točki sta sosednji, če se razlikujeta na natanko enem mestu. Na primer, Q_1 je enak Γ_1, Q_2 je 4-cikel, medtem ko je Q_3 običajna kocka, glej sliko 2. Vse n-kocke skupaj imenujemo *hiperkocke*. Ena izmed lepih in uporabnih lastnosti n-kock je, da je razdalja $d_{Q_n}(u, v)$ enaka številu mest, na katerih se razlikujeta u in v.

Med modeli povezovalnih omrežij imajo hiperkocke osrednje mesto, saj imajo vrsto odličnih lastnosti, ki so zaželene pri takih omrežjih. Ena izmed redkih slabosti je, da jih je bolj malo. Natančneje, ker ima n-kocka 2^n točk (za vsako mesto binarnega niza imamo dve možnosti), lahko s hiperkockami



Slika 2. Izometrična vložitev Γ_3 v Q_3.

modeliramo samo omrežja, katerih število vozlišč je potenca števila dve. Pomemben razlog za vpeljavo Fibonnacijevih kock je torej dejstvo, da je teh kock precej več kot hiperkock.

Fibonaccijeva kocka Γ_n je induciran podgraf v Q_n. Res, vsaka točka iz Γ_n je tudi točka v Q_n in poljubni točki v Γ_n sta sosednji natanko tedaj, ko sta sosednji v Q_n. Dejansko je zveza med Fibonaccijevimi kockami in hiperkockami še dosti globlja. Pravimo, da je podgraf H grafa G *izometrični podgraf*, če za vsak par točk u in v grafa H velja $d_H(u,v) = d_G(u,v)$.

Trditev 4. *Za $n \geq 1$ je Fibonaccijeva kocka Γ_n izometrični podgraf v n-kocki Q_n.*

Dokaz. Naj bosta u in v poljubni točki grafa Γ_n. Ker je Γ_n (induciran) podgraf v Q_n, velja $d_{\Gamma_n}(u,v) \geq d_{Q_n}(u,v)$. Pokazati moramo še, da je $d_{\Gamma_n}(u,v) \leq d_{Q_n}(u,v)$. V ta namen zadostuje, da najdemo pot v Γ_n med u in v dolžine $d_{Q_n}(u,v)$. Z drugimi besedami, taka pot mora vsebovati toliko povezav, na kolikor mestih se razlikujeta u in v, ter mora potekati znotraj Γ_n. To storimo takole. Naj bo $u = u_1u_2\ldots u_n$ in $v = v_1v_2\ldots v_n$, potem pa recimo, da se u in v razlikujeta v r mestih. Naj bodo $i_1, i_2, \ldots, i_s$ indeksi, za katere je $u_{i_k} = 1$, $v_{i_k} = 0$, $1 \leq k \leq s$, in naj bodo $j_1, j_2, \ldots, j_t$ indeksi, za katere je $u_{j_k} = 0$, $v_{j_k} = 1$, $1 \leq k \leq t$. Pri tem je seveda $s + t = r$. Za $k = 1, 2, \ldots, s$ naj bo u^k točka, ki jo dobimo iz u tako, da spremenimo $u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}$ iz 1 v 0. Nadalje, za $k = 1, 2, \ldots, t$ naj bo v^k točka, ki jo dobimo iz u^s tako, da na mestih z indeksi $j_1, \ldots, j_t$ spremenimo 0 v 1. Tedaj je

$$u \to u^1 \to \cdots \to u^s \to v^1 \to \cdots \to v^t = v$$

pot dolžine $s + t = r = d_{Q_n}(u,v)$. Ta pot tudi v celoti poteka znotraj Γ_n, saj nobena točka na poti nima dveh sosednjih enic. To pa je bilo treba tudi dokazati. ■

Na sliki 2 je trditev 4 ilustrirana za primer $n = 3$.

Trditev 4 med drugim pomeni, da se metrična struktura hiperkock prenese na metrično strukturo Fibonaccijevih kock, kar je zelo pomembno za študij omrežnih lastnosti. Med drugim iz trditve 4 sledi, da je razdalja med točkama v Γ_n enaka številu mest, v katerih se razlikujeta. To dejstvo bomo s pridom upoštevali v nadaljevanju.

Premer grafa G, $\mathrm{diam}(G)$, je definiran kot $\max_{u,v\in V(G)} d(u,v)$, torej kot največja razdalja v grafu. Na primer, $\mathrm{diam}(\Gamma_3) = 3$ in $\mathrm{diam}(\Gamma_4) = 4$. V splošnem velja:

Trditev 5. *Za vsak* $n \geq 1$ *je* $\mathrm{diam}(\Gamma_n) = n$.

Dokaz. Točke v Γ_n so binarni nizi dolžine n. Ker je razdalja med točkama v Γ_n enaka številu mest, v katerih se razlikujeta, največja razdalja ni večja kot n. Po drugi strani se točki $u = 1010\ldots1(0)$ in $v = 0101\ldots0(1)$ razlikujeta v vseh mestih, torej je $d(u,v) = n$. ■

Polmer grafa G, označimo ga z $r(G)$, je definiran takole:

$$r(G) = \min_{v\in V(G)} \max_{u\in V(G)} d(u,v).$$

Polmer danega grafa torej določimo tako, da za vsako točko poiščemo razdaljo do njej najbolj oddaljene točke, nato pa izberemo najmanjšo tako razdaljo med vsemi točkami. Na primer, $r(\Gamma_3) = r(\Gamma_4) = 2$. Res, točki 000 in 0000 sta taki, da so vse druge točke na razdalji kvečjemu dva do njiju. Torej je polmer kvečjemu dva. Ker po drugi strani v Γ_3 in v Γ_4 ni točke, ki bi bila sosednja z vsemi drugimi, je polmer natančno dva. V splošnem imamo naslednji rezultat:

Trditev 6. *Za vsak* $n \geq 1$ *je* $r(\Gamma_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Dokaz. Naj bo $v = v_1v_2\ldots v_n$ poljubna točka iz Γ_n. Recimo, da niz $v_1v_2\ldots v_n$ vsebuje k enic, kjer je $0 \leq k \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Niz $v_1v_2\ldots v_n$ torej vsebuje k enic in $n-k$ ničel. Naj bo v' točka, ki jo dobimo tako, da v nizu $v_1v_2\ldots v_n$ vse enice spremenimo v ničle, vsako maksimalno podzaporedje ničel (torej podzaporedje ničel, ki ni vsebovano v nobenem daljšem takem podzaporedju) pa v podzaporedje, ki se začne z 1 ter alternirajoče nadaljuje z 0 in 1. (Na primer, če je $v = 1000100101$, je $v' = 0101010010$.) Tako definirano zaporedje je Fibonaccijev niz, torej je $v' \in V(\Gamma_n)$. Nadalje velja

$$d(v,v') \geq k + \left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

Po drugi strani ima vsak Fibonaccijev niz kvečjemu $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ enic, zato je razdalja točke $00\ldots0$ do poljubne točke kvečjemu $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. ■

Poglejmo si še, katere točke realizirajo polmer Fibonaccijevih kock. V ta namen definirajmo *center* grafa G, z oznako $Z(G)$, kot množico tistih točk, za katere je v definiciji polmera $r(G)$ dosežen minimum. Na primer, $Z(\Gamma_3) = \{000, 001, 100\}$ in $Z(\Gamma_4) = \{0000\}$. Naj bo U_n množica točk v Γ_n, ki vsebujejo natanko eno enico ter imajo pri tem pred in za enico sodo število ničel. Na primer, $U_3 = \{001, 100\}$, $U_5 = \{00001, 00100, 10000\}$, medtem ko je U_4 prazna množica. Naslednjo trditev brez posebnih težav dokažemo podobno kot prejšnji trditvi, zato dokaz prepuščamo bralcu.

Trditev 7. *Naj bo $n \geq 1$. Če je n sod, je v $Z(\Gamma_n)$ samo točka $00\ldots0$. Če je n lih, je v $Z(\Gamma_n)$ točka $00\ldots0$ skupaj z množico U_n.*

Za konec omenimo, da Fibonaccijeve kocke dopuščajo preprosto lokalno usmerjanje (angl. local routing) ter razpošiljanje (angl. broadcasting), algoritma sta podrobno opisana v [10].

LITERATURA

[1] J. L. Brown Jr., *Zeckendorf's theorem and some applications*, Fibonacci Quart. 2 (1964) 163–168.

[2] P. S. Bruckman, *The generalized Zeckendorf theorems*, Fibonacci Quart. 27 (1989) 338–347.

[3] D. I. A. Cohen, *Basic Techniques of Combinatorial Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1978.

[4] W.-J. Hsu, *Fibonacci Cubes - A New Interconnection Topology*, IEEE Trans. Parallel Distr. Systems 4 (1993) 3–12.

[5] D. E. Knuth, *Fibonacci multiplication*, Appl. Math. Lett. 1 (1988) 57–60.

[6] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, Wiley-Interscience, New York, 2001.

[7] C. G. Lekkerkerker, *Voorstelling van natuurlijke getallen door een som van Fibonacci*, Simon Stevin 29 (1951–52) 190–195.

[8] E. Munarini, C. P. Cippo in N. Zagaglia Salvi, *On the Lucas cubes*, Fibonacci Quart. 39 (2001) 12–21.

[9] E. Munarini in N. Zagaglia Salvi, *Structural and enumerative properties of the Fibonacci cubes*, Discrete Math. 255 (2002) 317–324.

[10] I. Stojmenovic, *Optimal deadlock-free routing and broadcasting on Fibonacci cube networks*, Utilitas Math. 53 (1998) 159–166.

[11] R. J. Wilson in J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, Knjižnica Sigma 63, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1997.

[12] E. Zeckendorf, *Représentation des nombres naturels par une somme des nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 41 (1972) 179–182.

BOSE-EINSTEINOVA KONDENZACIJA CEZIJA

JANEZ STRNAD

PACS 03.75.Fi

Opazovali so Bose-Einsteinovo kondenzacijo v oblaku atomov cezija. Prejšnji poskusi so spodleteli zaradi značilnih lastnosti atomov cezija in njihovega medsebojnega delovanja. Odločilno je bilo spoznanje, da je mogoče na to delovanje vplivati z magnetnim poljem. Tako je kondenzacijo omogočil pojav, za katerega se je spočetka zdelo, da jo onemogoča.

BOSE-EINSTEIN CONDENSATION OF CESIUM

Bose-Einstein condensation was observed in a dilute gas of cesium atoms. Previous attempts failed owing to characteric features of cesium atoms and their interaction. The decisive step was to recognize that this interaction can be adjusted by changing the magnetic field. So the condensation was made feasible by the effect which was at the beginning thought to prevent it.

Bose-Einsteinova kondenzacija v razredčenih plinih alkalijskih izotopov ^{87}Rb, ^{23}Na in ^{7}Li je leta 1995 zbudila precej pozornosti [1]. E. A. Cornell in C. E. Wieman iz raziskovalne skupine, ki je delala z ^{87}Rb, in W. Ketterle iz skupine, ki je delala z ^{23}Na, so si leta 2001 delili Nobelovo nagrado za fiziko. Leta 1998 je uspelo opazovati kondenzacijo v oblaku vodikovih atomov, leta 2000 v oblaku alkalijskega izotopa ^{87}Rb in leta 2001 v oblaku alkalijskega izotopa ^{41}K. Tega leta so jo opazili tudi v oblaku atomov helija ^{4}He v metastabilnem tripletnem stanju pri energiji približno 20 eV nad osnovnim stanjem.[1] Od obstojnih alkalijskih izotopov z jedri z lihim številom nukleonov in polovičnim spinom se je kondenzaciji upiral samo še edini obstojni izotop cezija ^{133}Cs.[2] Cezij je pomemben v metrologiji. Uporabljajo ga v urah na curek atomov ter med drugim pri merjenju konstante fine strukture in merjenjih, ki pokažejo, da elektron nima električnega dipolnega momenta. Na začetku leta 2003 je na Inštitutu za eksperimentalno fiziko univerze v Innsbrucku uspelo opazovati še Bose-Einsteinovo kondenzacijo v oblaku atomov cezija [2].

Pri prvih poskusih z oblaki alkalijskih atomov sta do Bose-Einsteinove kondenzacije vodila dva koraka. V prvem v posodi z alkalijsko paro pri zelo nizkem tlaku v dipolni optični ali magnetooptični pasti zberejo dovolj gost oblak atomov. V drugem koraku oblak premestijo v magnetno past.

---

[1] Supertekoči helij, ki so ga pridobili že pred drugo svetovno vojno, je kapljevina, torej gosta snov.

[2] Jedro z lihim številom nukleonov ima polovičen spin, ki se s spinom elektrona $\frac{1}{2}$ sklopi v celoštevilčen spin atoma. Bose-Einsteinovo kondenzacijo opazimo samo pri delcih s celim spinom, bozonih.

V njej z nehomogenim magnetnim poljem na območju z najmanjšo gostoto zadržijo atome z največjo negativno komponento magnetnega momenta v smeri polja. V magnetni pasti se gostota oblaka poveča in ta gostejši oblak ohladijo z odparevanjem. Pri tem z dodatnim radiofrekvenčnim magnetnim poljem najhitrejšim atomom preklopijo spin, tako da jih past ne veže več in uidejo iz nje. Frekvenco dodatnega magnetnega polja prilagodijo gostoti magnetnega polja v delu pasti, v katerem se zadržujejo najhitrejši atomi. S tem da frekvenco postopno znižajo, dosežejo, da nazadnje v pasti preostanejo le najpočasnejši atomi. Ti z drugimi atomi ob prožnih trkih izmenjavajo energijo, tako da se temperatura oblaka izdatno zniža in pride do kondenzacije [1].

Po izkušnjah je za hlajenje z odparevanjem potrebno, da v magnetni pasti atom vsaj stokrat prožno trči z drugimi atomi in je neželenih trkov stokrat manj kot prožnih. Neželeni trki, po katerih atom zapusti oblak, so treh vrst. Najprej so to trki cezijevih atomov z molekulami preostalega plina v vakuumski posodi. Pogostost takih trkov ni odvisna od povprečne gostote cezijevih atomov v oblaku. Pri drugi vrsti se ob neprožnem trku dveh atomov preklopi spin, tako da atomov past ne veže več. Pogostost te *dvodelčne dipolarne relaksacije* je sorazmerna s povprečno gostoto cezijevih atomov. Pri tretji vrsti trkov se dva atoma v bližini tretjega združita v molekulo, ki je past ne veže. Pogostost te *tridelčne rekombinacije* je sorazmerna s kvadratom povprečne gostote cezijevih atomov.

Pri zelo nizki temperaturi je energija, ki jo ima atom v oblaku zaradi delovanja drugih atomov, odvisna od gostote atomov in od *sipalne dolžine*. Slednjo določa v kvantni mehaniki amplituda sipanega dela valovne funkcije pri prožnem sipanju. Prožno sipanje pri zelo nizki energiji pri kvantnem številu obhodne vrtilne količine $l = 0$ je izotropno. Valovno funkcijo sestavimo iz vpadnega in sipanega dela:

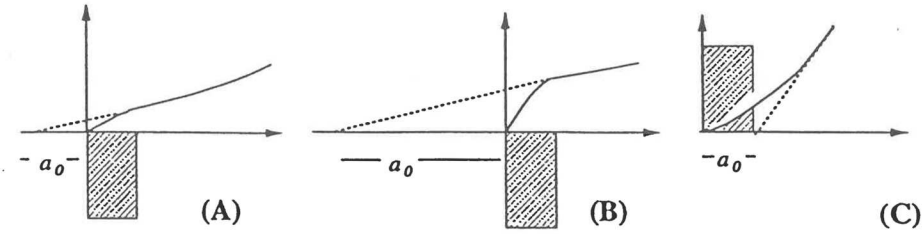
$$\mathrm{e}^{ikz} + f\frac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}\,.$$

K amplitudi f pri vse višji hitrosti prispevajo stanja z vse večjim kvantnim številom obhodne vrtilne količine l. Pri zelo majhni hitrosti pa je treba upoštevati samo prispevek $l = 0$. Najmanjša od nič različna vrtilna količina, ki jo za $l = 1$ dobimo iz $\sqrt{l(l+1)}\,\hbar$, pripelje do omejitve $\sqrt{2}\hbar = m_1 v b = m_1 b\sqrt{8kT/\pi m_1}$, v kateri je b doseg potenciala, m_1 masa atoma in smo upoštevali povprečno velikost hitrosti. Dokler velja za temperaturo:

$$T < \frac{\pi\hbar^2}{4b^2 k m_1}\,,$$

je treba upoštevati samo $l = 0$. Po zapisani oceni dosegu $b = 10$ nm ustreza temperatura 43 μK.

V tem primeru je sipanje izotropno, amplituda f ni odvisna od sipalnega kota in je enaka sipalni dolžini a_0. Diferencialni sipalni presek je $d\sigma/d\Omega = |f|^2 = a_0^2$ in integralni presek za prožno sipanje $\sigma = 4\pi a_0^2$ je štirikrat večji od geometrijskega preseka kroglice z radijem a_0. Radialna valovna funkcija $rR_0(r)$ je v izhodišču enaka 0 in sipalna dolžina je določena kot razdalja od izhodišča do točke, v kateri asimptotična tangenta na to funkcijo seka os r (slika 1). Večina se drži dogovora, da privlačni sili ustreza negativna sipalna dolžina in odbojni sili pozitivna. Pokazalo se je, da je kondenzacijo laže doseči v oblaku rubidijevih ali natrijevih atomov s pozitivno sipalno dolžino kot v oblaku litijevih atomov z negativno [1].

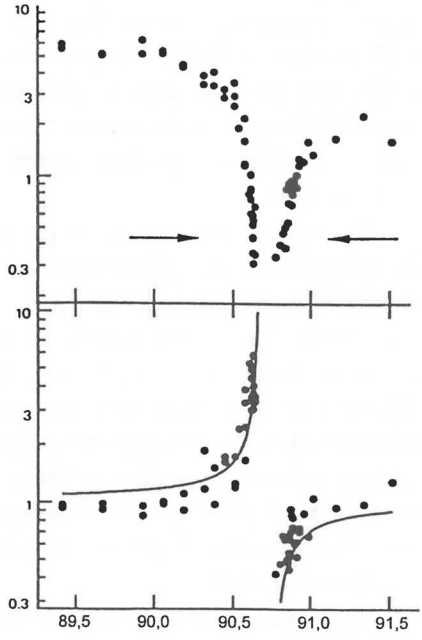


Slika 1. Radialne valovne funkcije rR_0 pri izotropnem sipanju na krogelno simetričnem potencialu, ki je nakazan na istem diagramu: manjša negativna sipalna dolžina ustreza šibkejši privlačni sili (A), večja negativna sipalna dolžina močnejši privlačni sili (B), pozitivna sipalna dolžina pa odbojni sili (C).

Ali je mogoče na sipalno dolžino v oblaku atomov vplivati z magnetnim poljem? Vprašanje sta leta 1992 postavila E. Cornell in sodelavec. Na njuno prošnjo ga je teoretično raziskal B. Verhaar s sodelavci [3]. Preračunali so trk dveh atomov cezija v osnovnem stanju v magnetnem polju. Upoštevali so energijo, ki jo prispevata prvi in drugi atom vsak zase, to je kinetično energijo, energijo zaradi hiperfine sklopitve in energijo zaradi Zeemanovega pojava. Poleg tega so upoštevali še skupni prispevek obeh atomov. Tega sestavljata centralno simetrični del, odvisen samo od polnega spina obeh atomov v singletnem ali tripletnem stanju, in dipolarni del, to je energija zaradi delovanja enega polnega magnetnega momenta na drugega. Dokaj zapleten račun je pokazal, da lahko magnetno polje izdatno vpliva na sipalno dolžino v oblaku alkalijskih atomov.

V energijski odvisnosti reakcijskega preseka smo vajeni vrhov v obliki resonanc. Na podobne resonance naletimo pri nihanju nihal v mehaniki in elektriki, ko jih rišemo v odvisnosti od razmerja med frekvencama vsiljenega nihanja in lastnega nihanja. Frekvenci v kvantni mehaniki ustreza energija. Vajeni smo tudi diagramov, ki kažejo pri mehaničnih in električnih nihalih

frekvenčno odvisnost faze in ki so povezani z odvodom resonančnih krivulj. Podobno odvisnost dobimo za sipalno dolžino, ki je povezana s fazo, pri sipanju počasnih alkalijskih atomov. Da se namesto frekvenčne ali energijske odvisnosti pojavi odvisnost od gostote magnetnega polja, pri sistemu delcev z magnetnim momentom ni presentljivo (slika 2). Stanju dveh prostih atomov, ki trčita z zelo majhno kinetično energijo, ustreza stanje molekule iz dveh atomov blizu energije 0. V časovni sliki si predstavljamo, da počasna atoma letita drug ob drugem, se za kratek čas zvežeta v molekulo in nato razideta. Resonance te vrste je splošno obdelal H. Feshbach leta 1962 v jedrski fiziki in so znane kot *Feshbachove resonance.*[3] V letih med 1993 in 1995 so Feshbachove resonance iskali v oblaku cezijevih in rubidijevih atomov, a jih niso zasledili. Po odkritju Bose-Einsteinove kondenzacije pa jih je v natriju prvi opazoval W. Ketterle s sodelavci [4].



Slika 2. Raziskovalna skupina W. Ketterleja je opazovala število atomov v oblaku natrija (zgoraj, v enotah 10^5 atomov) in sipalno dolžino (spodaj, v enotah neke računske sipalne dolžine $\overline{a}$) v odvisnosti od gostote magnetnega polja v militeslih. V zgornji odvisnosti smemo videti na glavo postavljeno odvisnost preseka: čim večji je presek, tem pogosteje se atomi sipajo, tem več je neželenih trkov druge in posebno tretje vrste in tem manj atomov ostane v oblaku. Puščici opozarjata na to, da v prvem delu poskusa gostoto magnetnega polja počasi povečajo. V drugem delu poskusa pa najprej gostoto hitro povečajo in jo nato počasi manjšajo. Sipalna dolžina na spodnji risbi je povezana s silo med atomi. Lahko si mislimo, da spodnjo odvisnost dobimo kot negativni odvod zgornje [4].

[3] V atomski fiziki so prvo Feshbachovo resonanco opazovali pri fotonski ionizaciji vodikovih ionov H^-. Na curek ionov s kinetično energijo 800 MeV so usmerili curek svetlobe iz dušikovega laserja z energijo fotonov 3,68 eV, ki je v sunkih dosegel največjo moč 50 kW. S spreminjanjem kota med curkoma so energijo fotonov v lastnem opazovalnem sistemu ionov spreminjali med 2 in 11,5 eV. Pri energiji 10,93 eV so zaznali zelo ozko Feshbachovo resonanco. H. C. Bryant in drugi, *Observation of resonances near 11 eV in the photodetachment cross section of the H^- ion*, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 228.

Sipalna dolžina v bližini Feshbachove resonance se spreminja z gostoto magnetnega polja B:

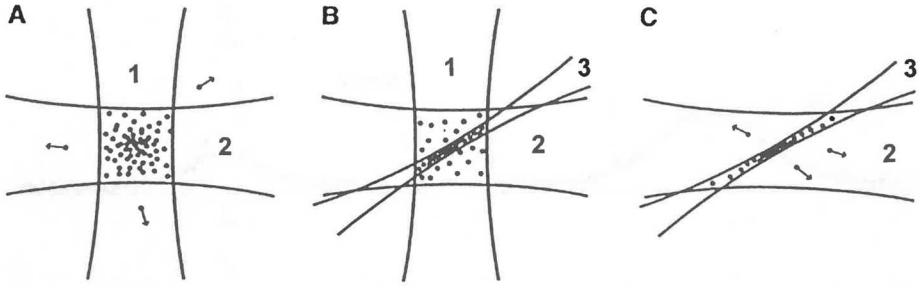
$$a_0 = a_0' \left(1 - \frac{\Delta}{B - B_0}\right).$$

a_0' je sipalna dolžina daleč od resonance pri gostoti polja B_0, Δ pa parameter, povezan s širino resonance. Pri natriju meri na primer $a_0' = 52 r_B$, ko ni magnetnega polja, če je $r_B = 0{,}0529$ nm Bohrov radij. Opazili so dve resonanci, izrazitejšo pri 90,7 mT in manj izrazito pri gostoti polja, ki je bila za 5,4 mT nižja. Merili so z oblakom kondenziranih atomov natrija v optični pasti, v kateri za zadrževanje niso potrebovali magnetnega polja. Pri tem so gostoto polja spreminjali, ne da bi vplivali na lastnosti pasti.

Resonance te vrste so v cezijevem oblaku preprečile, da bi dosegli kondenzacijo, če so v drugem koraku uporabili magnetno past. Blizu resonance je prišlo do povečanega prožnega sipanja in neželenih trkov. Zaradi slednjih, predvsem tridelčnih rekombinacij, se je število atomov v oblaku močno zmanjšalo, še preden je oblak postal dovolj gost. Pri lažjih alkalijskih atomih se Feshbachove resonance pojavijo pri večji gostoti magnetnega polja, kot jo uporabijo v magnetnih pasteh. Zato so pri lažjih alkalijskih atomih dosegli kondenzacijo v magnetnih pasteh. Pri ceziju pa so te resonance na območju gostote magnetnega polja, kakršno uporabijo v magnetnih pasteh.

Po teh spoznanjih so se ravnali pri uspešnem poskusu [2]. Na začetku so uporabili veliko plitvo dipolno optično past. Naredili so jo tako, da so v vodoravni ravnini prekrižali dva curka iz laserjev na ogljikov dioksid z močjo po 100 W. V pasti so zbrali 20 milijonov atomov v stanju $F = 3$, $m_F = 3$ pri temperaturi okoli 1 μK. F je kvantno število spina atoma, v katerega se sklopita spin jedra in spin zunanjega elektrona, in m_F ustrezno magnetno kvantno število. Na past je atome vezala zelo šibka sila. Tako so morali s šibkim nehomogenim magnetnim poljem uravnovesiti težo. Past sama razen tega polja ni potrebovala drugega magnetnega polja. To je omogočilo, da so po volji spreminjali gostoto homogenega magnetnega polja in z njo vplivali na sipalno dolžino.

Kondenzacijo so dosegli v treh korakih (slika 3). V prvem koraku so zbrani oblak 10 s ohlajali z odparevanjem. Gostoto homogenega magnetnega polja so naravnali na 7,5 mT in s tem zvečali sipalno dolžino na $1200 r_B$. Tako so v razmeroma redkem oblaku atomi ob prožnih trkih med seboj dovolj hitro izmenjavali kinetično energijo. Zaradi odparevanja se je temperatura znižala, število atomov v oblaku pa zmanjšalo od 20 milijonov na 2 milijona. Z optičnim vlaknom so pripeljali v pravokotni smeri na sredo oblaka curek iterbijevega laserja z valovno dolžino 1064 nm. V drugem koraku so v curku iterbijevega laserja energijski tok povečali od 0 na 90 mW

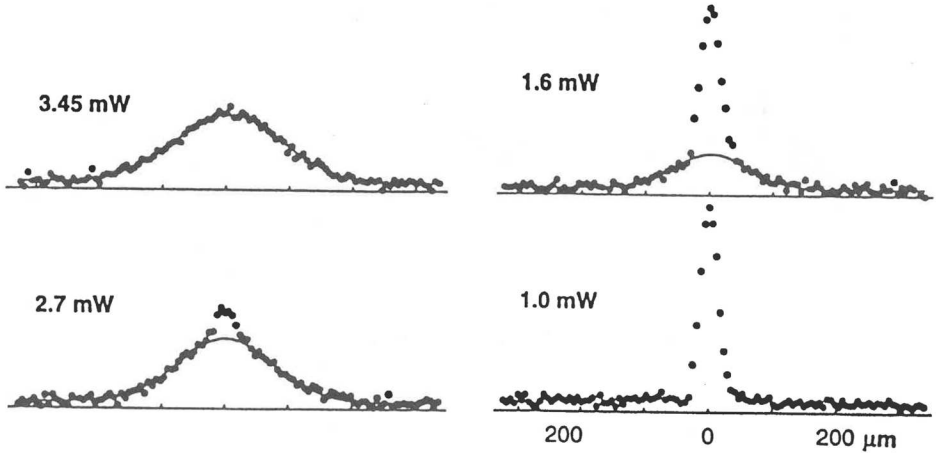


Slika 3. Trije koraki v ohlajanju z odparevanjem na poti do Bose-Einsteinove kondenzacije v oblaku cezijevih atomov. 1 curek laserja na ogljikov dioksid, 2 curek drugega laserja na ogljikov dioksid, 3 curek iterbijevega laserja. V prvem koraku za 10 s priključijo prekrižana curka laserjev na ogljikov dioksid v magnetnem polju z gostoto 7,5 mT pri sipalni dolžini $1200r_B$ (A). V drugem koraku za 5 s priključijo še iterbijev laser in se v njegovi ožini zgosti oblak atomov v magnetnem polju z gostoto 2,3 mT pri sipalni dolžini $300r_B$ (B). V tretjem koraku za 17 s zmanjšajo moč iterbijevega laserja na 0 v magnetnem polju z gostoto 2,3 mT (c) [2].

in ga pustili vključenega 5 s. Curek se je zožil na najmanjši premer 30 μm na sredi pasti. Zaradi sile, s katero je deloval na atome proti najožjemu preseku, se je tam oblak izdatno zgostil. Ob tem je temperatura nekoliko narasla. Gostoto homogenega magnetnega polja so naravnali na 2,3 mT, da se je sipalna dolžina zmanjšala na $300r_B$ in so se izognili neželenim trkom. Na koncu so izključili enega od laserjev na ogljikov dioksid. Atome je v vretenastem oblaku v smeri osi zadrževalo sevanje drugega laserja na ogljikov dioksid, prečno na os pa sevanje iterbijevega laserja. Gostota atomov v oblaku je dosegla nekaj 10^{12} cm^{-3}. V tretjem koraku so postopno znižali moč iterbijevega laserja, ne da bi spremenili gostoto magnetnega polja. Zaradi močnega odparevanja se je znižala temperatura najbolj do 20 nK.

Nazadnje se je v oblaku kondenziralo 16 tisoč atomov pri 160 nK, ko so izključili še zadnji laser. Kondenzat so lahko opazovali le 100 ms, ker se je potem razlezel zaradi šibke prečne odbojne sile nehomogenega magnetnega polja, ki je uravnovesilo težo. 50 ms po izključitvi laserjev so oblak od strani osvetlili z resonančnim svetlobnim curkom in po absorpciji ugotovili, kako se je širil v navpični smeri (slika 4).

Raziskali so odvisnost širjenja od sipalne dolžine. V ta namen so po izključitvi za 10 ms vključili homogeno magnetno polje in ga nato pustili konstantnega pri 1,7 mT. V šibkem začetnem polju pod 1,7 mT je bila sipalna dolžina negativna in se je oblak najprej skrčil. V vse gostejšem začetnem magnetnem polju do 4,8 mT je sipalna dolžina postala pozitivna in postopno narasla na $1000r_B$. Tako je naraščala tudi debelina oblaka v navpični smeri. Zaradi Feshbachove resonance se je oblak pri 4,8 mT močno razširil. Izrazito zmanjšanje števila atomov v oblaku bi lahko kazalo na



Slika 4. Porazdelitev gostote v oblaku atomov cezija v navpični smeri 50 ms po izključitvi laserjev. Navedena je končna moč iterbijevega laserja. Vrhovi nad termično porazdelitvijo pričajo o Bose-Einsteinovi kondenzaciji. Delež termičnega oblaka se zmanjšuje in nazadnje preostane samo kondenzat [2].

nastanek molekul Cs_2.

Že prej so v skupini E. Cornella in C. Wiemana opazovali kondenzat v oblaku rubidijevih atomov, ko so naravnali magnetno polje tako, da je sipalna dolžina postala negativna [6]. Kondenzat se je najprej skrčil, nato pa eksplozivno razširil. Eksplozijo oblaka so imenovali *bosanova*, ker je spominjala na eksplozijo supernove. Ko so spremenili sipalno dolžino, a tako, da je ostala pozitivna, so ugotovili, da je prišlo do nihanja med atomskim in molekulskim oblakom. S tem pojavom bo morda mogoče raziskovati Bose-Einsteinovo kondenzacijo molekul in celo kvantne lastnosti kapljevin.

Zanimivo je, da so Bose-Einsteinovo kondenzacijo oblaka cezijevih atomov v optični pasti dosegli, ko so izkoristili Feshbachove resonance, zaradi katerih se je cezij prej upiral kondenzaciji v magnetni pasti. Spoznanje, da magnetno polje vpliva na sipalno dolžino in s tem na delovanje atomov drugega na drugega, utegne biti pri ceziju še posebej pomembno. V oblaku, v katerem bi z magnetnim poljem nastavili sipalno dolžino 0, atomi ne bi delovali na druge atome. Tak oblak, ki bi bil lahko dokaj obstojen, bi utegnili uporabiti, da bi izboljšali delovanje cezijevih ur.

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Bose-Einsteinova kondenzacija*, Obzornik mat. fiz. **44** (1997) 74.

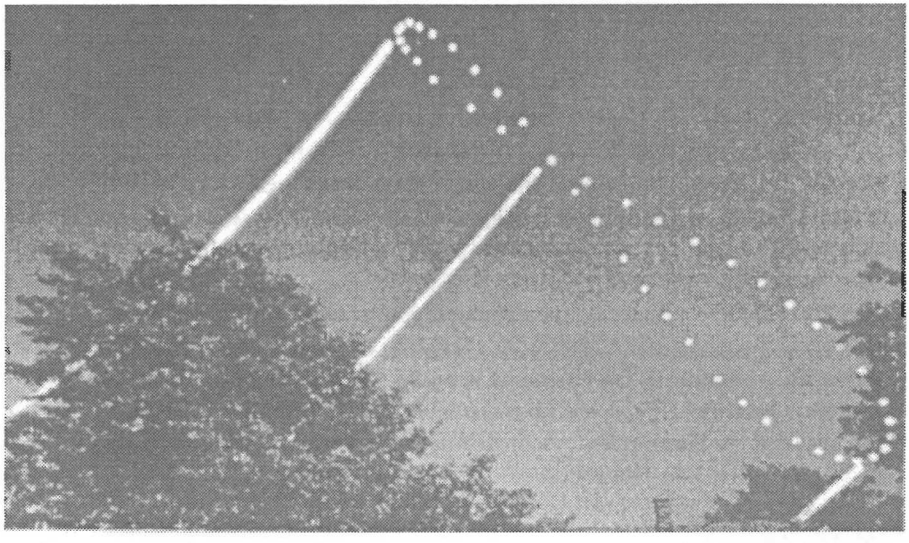
[2] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H.-Ch. Nägerl, R. Grimm, *Bose-Einstein condensation of cesium*, Science **299** (2003) 232.

[3] E. Tiesinga, B. J. Verhaar, H. T. C. Stoof, *Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions*, Phys. Rev. A **47** (1993) 4114.
[4] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Stamper-Kurn, W. Ketterle, *Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate*, Nature **392** (1998) 151.
[5] C. Chin, V. Vuletić, J. Kerman, S. Chu, *High resolution Feshbach spectroscopy of cesium*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 2717.
[6] J. L. Roberts, N. R. Claussen, S. L. Cornish, E. A. Donley, E. A. Cornell, C. E. Wieman, *Controlled colapse of a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 4211.

NOVE KNJIGE

Marijan Prosen: Ukvarjanje s senco, Presekova knjižnica 39, DMFA–založništvo, Ljubljana 2003, 91 strani.

V knjigi avtor z vseh zornih kotov opazuje senco. Poleg uvoda najdemo naslednja poglavja: O senci, s kakršno se bomo ukvarjali; Določitev poldnevnice; Približna orientacija po senci; Dolžina opoldanske sence; Ocenitev kotne hitrosti vrtenja Zemlje po senci; Najdaljša senca; Enačba sence; Analema; Senčne ure; Senca in koledar; Zgodbi o uporabi sence. Knjiga vsebuje tudi številne ilustracije, za vzorec si poglejmo spodnjo sliko, ki prikazuje analemo, posneto v Avstraliji.



Večji del knjige obsega opazovanje sence. Poskusi niso težki, kot opremo večinoma potrebujejo le ošiljeno ravno palico (z učenim imenom *gnomon*) in pokončen slok stožec. Vsekakor pa nekateri poskusi zahtevajo potrpežljivega raziskovalca, saj lahko potekajo tudi skozi daljše časovno obdobje, recimo

enega leta. Pripadajoča matematika ni prezahtevna, nekoliko težji sta morda le poglavji o najdaljši senci in o enačbi sence. Zato je knjiga primerna za dijake in njihove mentorje, na osnovnošolskem nivoju pa se zdi knjiga kot naročena za različne krožke (matematično-fizikalne, naravoslovne, astronomske, geografske), različne obšolske in zunajšolske dejavnosti ter tudi za naravoslovne in raziskovalne dneve. Zato lahko pričakujemo, da bo knjiga koristen pripomoček za vse tiste člane društva, ki jih tematika zanima. Na zadnjem občnem zboru DMFA Slovenije, novembra 2003 v Bohinju, je knjiga vzbudila precejšnje zanimanje.

Sandi Klavžar

Letno kazalo
Obzornik za matematiko in fiziko 50 (2003) številke 1–6, str. 1–192

Članki – Articles

Numerična analiza in Liejeve grupe — Numerical analysis and Lie groups (Bojan Orel) 1–13

Dualno Eulerjevi grafi — Dual-Eulerian graphs (Brigitte in Herman Servatius, prev. in prir. Arjana Žitnik) 14–20

Logaritmovniki v Ljubljani v času Vegovega šolanja — Tables of logarithms in Ljubljana in the time of Georg Vega's study (Stanislav Južnič) 21–26

Vega o obliki Zemlje — Vega on the form of the Earth (Janez Strnad) . 27–III

Dinamični model spiralne filotakse. Prispevek k razumevanju filotakse, 1. del — A dynamical model for spiral phyllotaxis. A contribution to understanding phyllotaxis, part 1 (Milan Hladnik) 33–41

Zgornje meje za povezovalno konstanto v $\mathbb{Z}^d$ — Upper bounds for the connective constant in $\mathbb{Z}^d$ (Melita Hajdinjak) 42–53

Asociativne sheme — Association schemes (Aleksandar Jurišić in Štefko Miklavič) 65–81

O elektronih v atomu — On electrons in atom (Janez Strnad) 82–85

Zlata delitev krožnice. Prispevek k razumevanju filotakse, 2. del — Golden division of the circle. A contribution to understanding phyllotaxis, part 2 (Milan Hladnik) 97–109

Mikroresonatorji v integrirani optiki — Optical microring resonators (Marko Zgonik) 110–117

Odločitveni problem Praštevilo — Decision problem Primes (Tadej Novak) 129–143

Ravninske mreže in verižni ulomki. Prispevek k razumevanju filotakse, 3. del — Plannar Lattices And Continued Fractions. A contribution to understanding phyllotaxis, part 3 (Milan Hladnik) 144–153

Kako sem pisal učbenik za fiziko — How I wrote a physics textbook (Janez Strnad) 157–160
O neki posplošitvi malega Fermatovega izreka — On a generalization of the Fermat's little theorem (Ivan Vidav) 164–172
Zeckendorfov izrek in Fibonaccijeve kocke — Zeckendorf theorem and Fibonacci cubes (Sandi Klavžar) 175–183
Bose-Einsteinova kondenzacija cezija — Bose-Einstein condensation of cesium (Janez Strnad) 184–191

V Obzorniku pred petdesetimi leti

O konveksnih krivuljah (Ivan Vidav) 118–126

Vesti – News

Novice iz Evropskega matematičnega društva (EMS) (Peter Legiša) 54–58
Strokovno srečanje in občni zbor DMFA Slovenije (Nada Razpet) 58–60
Milanu Miku Pintarju v spomin (G. Lahajnar in J. Peternelj) 61–63
Vabilo (Peter Petek) VII
Nagrade in priznanja DMFA Slovenije za leto 2002 (Anton Suhadolc, Janez Krušič, Milan Hladnik, Maja Manohin in Nada Razpet) 88–94
Profesorja Zvonimir Bohte in Anton Suhadolc postala zaslužna profesorja (Jernej Kozak in Jože Vrabec) 94–96
Mednarodno priznanje Boru Plestenjaku (Zvonimir Bohte) 96–XI
Vabilo (Janez Grad) XI
Obvestilo (Peter Petek) 117
Zoisove nagrade in priznanja za znanstvenoraziskovalno delo matematiku in fizikoma (Roman Drnovšek) 127–128
Strokovno srečanje in 55. občni zbor društva (Peter Petek) XV
Profesorju Niku Prijatelju v slovo (Edvard Kramar, Tomaž Pisanski in Jože Vrabec) 153–155
April 2003 – mesec matematičnega ozaveščanja (Matjaž Konvalinka) ... 155–156
Novi člani društva v letu 2002 (Vladimir Bensa) XVIII
Ob koncu petdesetega letnika Obzornika (Roman Drnovšek) 161–162
Obzornikovih petdeset (Janez Strnad) 162–163
Deseto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Marjan Jerman) 172–174

Nove knjige – New books

Strukturna algebra za podiplomce in nespecialiste, Mirko Dobovišek ... 63–64
Uvod v analitično teorijo števil, Milan Hladnik 86–87
Tekoči kristali, Irena Drevenšek-Olenik 87–88
Matematika in odločanje, Zvonimir Bohte 160–XVIII
Ukvarjanje s senco, Sandi Klavžar 191–192

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, NOVEMBER 2003
Letnik 50, številka 6

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki **Strani**

O neki posplošitvi malega Fermatovega izreka, Ivan Vidav 164–172
Zeckendorfov izrek in Fibonaccijeve kocke, Sandi Klavžar 175–183
Bose-Einsteinova kondenzacija cezija, Janez Strnad 184–191

Nove knjige

Ukvarjanje s senco, Sandi Klavžar 191–192

Vesti

Ob koncu petdesetega letnika Obzornika, Roman Drnovšek 161–162
Obzornikovih petdeset, Janez Strnad 162–163
Deseto mednarodno tekmovanje študentov matematike, Marjan Jerman . 172–174
Letno kazalo 217–218

CONTENTS

Articles **Pages**

On a generalization of the Fermat's little theorem, Ivan Vidav 164–172
Zeckendorf theorem and Fibonacci cubes, Sandi Klavžar 175–183
Bose-Einstein condensation of cesium, Janez Strnad 184–191

New books 191–192

News 162–174

Na naslovnici je slika iz knjige, ki je predstavljena na strani 191. Na njej je ekvatorialna sončna ura, izdelana iz polovice lesene kocke.