

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2003
Letnik 50
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2003, letnik 50, številka 4, strani 97–128

Naslov uredništva: DMFA-založništvo, Jadranska ul. 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana.
Spletna stran: <http://www.fmf.uni-lj.si/~zaloznistvo/omf/> **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460. **Telefaks:** (01) 2517281. **Devizna nakazila:** SKB banka d. d., Ajdovščina 4, Ljubljana. **SWIFT:** SKBAS12X. **Transakcijski račun:** 03100-1000018787.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Alenka Klokočovnik (društvene novice), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič. Natisnjeno v Tiskarni KURIR v nakladi 1450 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 4000 SIT, za študente 2000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 800 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

© 2003 DMFA Slovenije – 1541

Poštšina plačana na pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oziroma $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

ZLATA DELITEV KROŽNICE

PRISPEVEK K RAZUMEVANJU FILOTAKSE, 2. DEL

MILAN HLADNIK

Math. Subj. Class. (2000): 11 J 71, 11 A 55, 11 B 39

Sestavek je nadaljevanje članka iz druge letošnje številke Obzornika [2]. V drugem delu obravnavamo aritmetične in metrične lastnosti splošne iracionalne delitve kroga v povezavi s teorijo enostavnih verižnih ulomkov. Zanimajo nas tiste lastnosti, ki karakterizirajo delitev kroga po zlatem rezu.

GOLDEN DIVISION OF THE CIRCLE

A CONTRIBUTION TO UNDERSTANDING PHYLOTAXIS, PART 2

This is a continuation of an article from the issue 2 of this volume of Obzornik [2]. In the second part, arithmetic and metric properties of a general irrational division of the circle are considered in relation to the theory of simple continued fractions.

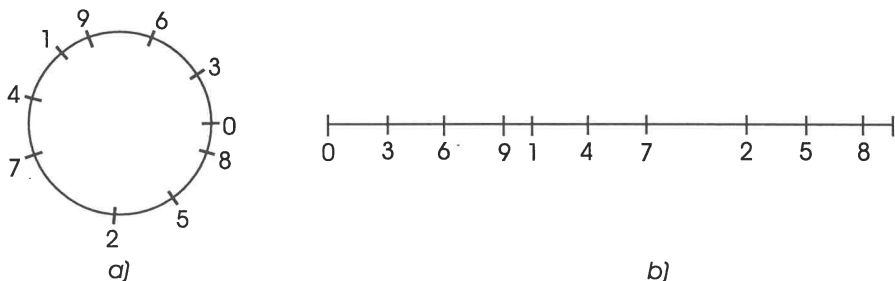
V prvem članku o filotaksi [2] smo definirali preprost geometrijski dinamični sistem v ravnini, ki omogoča določanje zaporedja divergenčnih kotov, in poiskali negibno točko tega sistema, tj. konstantni divergenčni kot, odvisen seveda od parametrov sistema. Tu nas bo zanimal samo primer, ko je kot med dvema zaporednima točkama orbite ves čas konstanten. Pozabili bomo na rast sistema, tj. na odmikanje točk od rodovne krožnice, in se posvetili samo delitvi krožnice s točkami, katerih polarni koti tvorijo aritmetično zaporedje.

1. Iracionalna delitev krožnice

Imejmo krožnico in na njej izberimo poljubno začetno točko. Z dodajanjem novih točk razdelimo krožnico na (čedalje) več krožnih lokov. Na vsakem koraku dodamo po eno točko, ki naj bo glede na prejšnjo zasukana za konstantni kot θ . Tako dobimo aritmetično zaporedje kotov $0, \theta, 2\theta, 3\theta, \dots$, ki jih seveda lahko reduciramo po modulu 2π . Označimo $\theta = 2\pi\alpha$. Če je α racionalno število, se točke prej ali slej začnejo ponavljati; različnih točk dobimo le končno mnogo (za $\alpha = m/n$ se n -ta točka po m obhodih spet ujame z začetno točko 0). Če pa je α iracionalno število, dobimo same različne točke, ki delijo krožnico na vedno manjše dele.

Odslej naj bo α (pozitivno) iracionalno število, manjše od 1. Namesto zaporedja kotov, reduciranih po modulu 2π , opazujemo zaporedje realnih števil $0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots$, reduciranih po modulu 1, torej v resnici zaporedje $0, \{\alpha\}, \{2\alpha\}, \{3\alpha\}, \dots$, kjer pomeni $\{x\} = x - [x]$ neceli del števila x , tj. razdaljo do najbližjega celega števila, ki ne presega števila x . Pripadajoče točke označimo kar z zaporedno številko: začetno točko z 0, naslednje (dodane) točke pa po vrsti z 1, 2, 3, $\dots$. Kot rečeno, so vse te točke zaradi iracionalnosti števila α med seboj različne in delijo interval $[0, 1]$ na manjše podintervale s skupno dolžino 1. Tako delitev intervala bomo na

kratko imenovali *iracionalna delitev intervala*, pripadajočo delitev krožnice pa *iracionalna delitev krožnice*. (Zaradi lažje predstave bomo tudi tedaj, ko bomo govorili o delitvi krožnice na krožne loke, pogosto mislili na delitev intervala $[0, 1)$ na odseke.)



Slika 1

V nadaljevanju bomo potrebovali različne aritmetične in metrične lastnosti iracionalne delitve krožnice. Nekatere od njih so preproste in dokaj očitne, druge pa kar zahtevni izreki, vendar jih bomo kljub temu večinoma navedli brez dokaza. V vsakem konkretnem primeru posebej se lahko bralec sam prepriča o njihovi veljavnosti, splošno in bolj podrobno analizo pa lahko skupaj z vsemi dokazi najde npr. v [5]. Poleg tega potrebujemo pri formulaciji (in pri dokazu) nekaterih lastnosti tudi terminologijo in osnovno znanje iz teorije verižnih ulomkov. Nekaj najnujnejših pojmov in dejstev o enostavnih verižnih ulomkih, s katerimi izrazimo spodnje lastnosti, smo bralcu v pomoč zbrali v dodatku.

(a) Osnovne lastnosti iracionalne delitve krožnice

Z začetno točko 0 in z N dodatnimi točkami $1, 2, \dots, N$ je krožnica razdeljena na $N + 1$ krožnih lokov. Na sliki 1 je npr. krožnica s točkami 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 razdeljena na 10 lokov treh različnih dolžin. V tem primeru je $N = 9$. Če bi odstranili zadnji dve točki, tj. točki 8 in 9, bi bila pri $N = 7$ krožnica razdeljena na $N + 1 = 8$ lokov, ki pa bi imeli to pot samo dve različni dolžini.

Ali lahko bolj natančno povemo, koliko različnih dolžin dobimo pri danem N in kolikšne so te dolžine?

Naj bo $N \geq 1$. Vseh N dodatnih točk na krožnici oziroma na intervalu $[0, 1]$ razvrstimo v zaporedje $u_1^{(N)}, u_2^{(N)}, \dots, u_N^{(N)}$ po naraščajočih reduciranih vrednostih števil $k\alpha$, $k = 1, \dots, N$, tako da velja $0 < \{u_1^{(N)}\alpha\} < \{u_2^{(N)}\alpha\} < \dots < \{u_N^{(N)}\alpha\} < 1$. Zaporedje $u_1^{(N)}, u_2^{(N)}, \dots, u_N^{(N)}$ je torej neka permutacija števil $1, 2, \dots, N$ (na sliki 1 dobimo npr. zaporedje 3, 6, 9, 1, 4, 7, 2, 5, 8). V tem zaporedju sta najpomembnejša prvi in zadnji člen, $u_1^{(N)}$ in $u_N^{(N)}$, ki predstavljata prvo in zadnjo delilno točko na intervalu

(na sliki 1 je $u_1^{(9)} = 3$ in $u_9^{(9)} = 8$). Odsek pred prvo točko $u_1^{(N)}$ je dolg $\|u_1^{(N)}\alpha\| = \{u_1^{(N)}\alpha\}$, odsek za zadnjo točko $u_N^{(N)}$ pa $\|u_N^{(N)}\alpha\| = 1 - \{u_N^{(N)}\alpha\}$. Za dovolj velik N sta to najkrajši razdalji števil $u_1^{(N)}\alpha$ in $u_N^{(N)}\alpha$ do množice celih števil, zato smo ju tudi enako označili.

Splošno zakonitost podaja naslednji izrek, ki ga ne bomo dokazali (glej [6]):

Izrek 1. *Pri $N \geq 1$ je natanko*

- (i) $N + 1 - u_1^{(N)}$ odsekov dolžine $\|u_1^{(N)}\alpha\|$,
- (ii) $N + 1 - u_N^{(N)}$ odsekov dolžine $\|u_N^{(N)}\alpha\|$ in
- (iii) $u_1^{(N)} + u_N^{(N)} - N - 1$ odsekov dolžine $\|u_1^{(N)}\alpha\| + \|u_N^{(N)}\alpha\|$.

Če je $N \geq 1$, so ti loki (odseki) torej vsaj dveh in ne več kot treh različnih dolžin. Odseke dveh različnih dolžin dobimo natanko takrat, ko je $u_1^{(N)} + u_N^{(N)} = N + 1$. Da velja tak izrek, je domneval že H. Steinhaus. Njegovo domnevo so pozneje dokazali različni avtorji in se danes imenuje *izrek o treh vrzelih* (glej [5] in [6] ter tamkajšnje citate).

Zgled 1. Izberimo npr. iracionalno število $\alpha = (\sqrt{3} - 1)/2$. Z nekaj računanja oziroma reduciranja zaporednih večkratnikov števila α po modulu 1 lahko npr. pri $N = 4$ ugotovimo zaporedje $(3, 1, 4, 2)$. Torej je $u_1^{(4)} = 3$, $u_4^{(4)} = 2$, $\|u_1^{(4)}\alpha\| = 3\alpha - 1$ in $\|u_4^{(4)}\alpha\| = 1 - 2\alpha$. Imamo dva odseka dolžine $3\alpha - 1$ in tri odseke dolžine $1 - 2\alpha$ (primerjajte sliko 2). Pri $N = 9$ pa dobimo zaporedje $(3, 6, 9, 1, 4, 7, 2, 5, 8)$, torej $u_1^{(9)} = 3$, $u_9^{(9)} = 8$, $\|u_1^{(9)}\alpha\| = 3\alpha - 1$ in $\|u_9^{(9)}\alpha\| = 3 - 8\alpha$. Zdaj je sedem odsekov dolžine $3\alpha - 1$, dva odseka dolžine $3 - 8\alpha$ in en odsek dolžine $2 - 5\alpha$ (slika 2).

Uvedemo lahko tudi druge količine. Tako npr. *trenutno starost* vsakega odseka, $s_N(u_j^{(N)}, u_{j+1}^{(N)})$, (tik pred izbiro nove točke $N + 1$) definiramo kot čas (tj. število korakov), ki ga je odsek „preživel” od svojega nastanka brez nadaljnje delitve. Da se pokazati, da je $s_N(u_j^{(N)}, u_{j+1}^{(N)}) = N + 1 - \max\{u_j^{(N)}, u_{j+1}^{(N)}\}$ (glej [5]). V zgledu 1 je npr. $s_4(0, 3) = 2$, $s_9(0, 3) = 7$, $s_9(7, 2) = 3$ in $s_9(9, 1) = 1$ (ker je odsek $(9, 1)$ pravkar nastal).

Zanimiv je naslednji izrek, ki ga spet navedimo brez dokaza (glej [5]):

Izrek 2. *Vsaka nova točka (razen prve) pade na najstarejšega izmed najdaljših odsekov, ki jih določajo dotedanje točke, in ga razdeli v dva dela. Eden od njiju je enako dolg kot dotlej najkrajši odsek.*

Naj pripomnimo, da je do izbire naslednje točke $N + 1$ najkrajši odsek dolg bodisi $\|u_1^{(N)}\alpha\|$ bodisi $\|u_N^{(N)}\alpha\|$, vsota $\|u_1^{(N)}\alpha\| + \|u_N^{(N)}\alpha\|$ pa je enaka

$$* = 11\alpha - 4, \quad + = 7 - 19\alpha$$

ato se zdi smiselna posledn

1 definiramo delilno razme

(1)

3. naslednja razmerja:

$$\alpha, \frac{1-2\alpha}{1-\alpha}, \frac{3\alpha-1}{\alpha}, \frac{3\alpha-1}{\alpha}, \frac{3\alpha-1}{1-2\alpha}, \frac{3\alpha-1}{1-2\alpha}, \frac{3\alpha-1}{1-2\alpha}, \frac{3-8\alpha}{2-5\alpha}, \dots$$

ura iracionalne delitve odvisi

(b) Reprezentacija delitev z verižnimi ulomki

Iracionalno število α razvijmo v neskončni enostavni verižni ulomek: $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ (ker smo izbrali $0 < \alpha < 1$, je $a_0 = 0$). Naj bo p_n/q_n ($n \geq 0$) zaporedje konvergentov števila α in $p_{n,i}/q_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, a_n$ ($n \geq 1$) zaporedje vmesnih konvergentov (glej dodatek). Ker je $p_{n,a_n}/q_{n,a_n} = p_n/q_n$ za vsak n , so v dvojnem zaporedju vmesnih konvergentov tudi vsi pravi konvergenti p_n/q_n . Z vmesnimi konvergenti, z njihovimi imenovalci in števci, lahko opišemo strukturo iracionalne delitve krožnice.

Oglejmo si naraščajoče dvojno zaporedje števil $q_{n,i}$, $i = 1, \dots, a_n$, $n \geq 1$. Ta števila so imenovalci vmesnih konvergentov.

Zgled 2. V situaciji, ki jo opisuje zgled 1, je $\alpha = [0; 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots]$. Torej je zaporedje vmesnih konvergentov: $p_0/q_0 = 0/1$, $p_{1,1}/q_{1,1} = [0; 1] = 1/1$, $p_1/q_1 = [0; 2] = 1/2$, $p_2/q_2 = [0; 2, 1] = 1/3$, $p_{3,1}/q_{3,1} = [0; 2, 1, 1] = 2/5$, $p_3/q_3 = [0; 2, 1, 2] = 3/8$, $p_4/q_4 = [0; 2, 1, 2, 1] = 4/11$, $p_{5,1}/q_{5,1} = [0; 2, 1, 2, 1, 1] = 7/19$, $p_5/q_5 = [0, 2, 1, 2, 1, 2] = 11/30$ itd. Zaporedje števcov je $p_0 = 0$, $p_{1,1} = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$, $p_{3,1} = 2$, $p_3 = 3$, $p_4 = 4$, $p_{5,1} = 7$, $p_5 = 11$, $\dots$, zaporedje imenovalcev pa $q_0 = 1$, $q_{1,1} = 1$, $q_1 = 2$, $q_2 = 3$, $q_{3,1} = 5$, $q_3 = 8$, $q_4 = 11$, $q_{5,1} = 19$, $q_5 = 30$, $\dots$

Spet brez dokaza (glej [5]) povejmo, da velja naslednji izrek, ki za vsako delitev krožnice z N točkami omogoča izračun para točk, ki sta točki 0 najbližji. Pri tem potrebujemo samo imenovalce.

Izrek 3. Naj bo $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots]$ razvoj števila α v enostavni verižni ulomek in $q_{n,i}$, $i = 1, 2, \dots, a_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, ustrezno zaporedje imenovalcev vmesnih konvergentov. Potem velja:

- (i) za $1 \leq N < q_1$ je $u_1^{(N)} = 1$ in $u_N^{(N)} = N$;
- (ii) za sodi $n \geq 2$ je

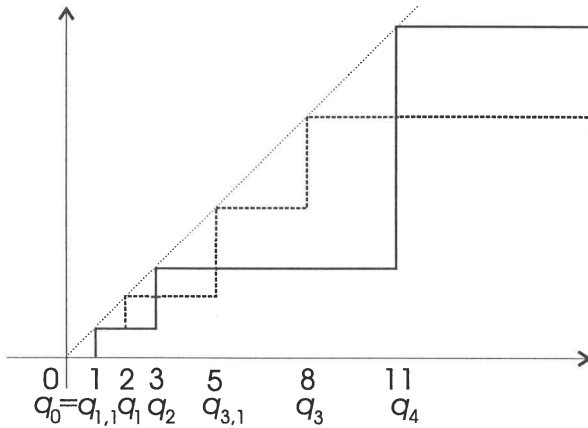
$$u_1^{(N)} = \begin{cases} q_{n-2}, & q_{n-1} \leq N < q_{n,1} \\ q_{n,i}, & q_{n,i} \leq N < q_{n,i+1}, \quad (1 \leq i < a_n) \end{cases}$$

in

$$u_N^{(N)} = q_{n-1}, \quad \text{če } q_{n-1} \leq N < q_n;$$

- (iii) za lihi $n > 2$ se v točki (ii) $u_1^{(N)}$ in $u_N^{(N)}$ zamenjata.

Vidimo, da je $u_1^{(N)}$ kot celoštevilska funkcija spremenljivke N naraščajoča in stopničasta. Svojo vrednost poveča le pri $N = q_{n,i}$ s sodim glavnim indeksom n , in sicer ravno na $q_{n,i}$. Podobno je $u_N^{(N)}$ naraščajoča stopničasta funkcija spremenljivke N , ki pa se spreminja le pri $N = q_{n,i}$ z lihimi indeksi. Na sliki 3 sta npr. shematično prikazani obe funkciji, $u_1^{(N)}$ (polna črta) in $u_N^{(N)}$ (črtkano), za podatke iz zgleda 2.



Slika 3

Izrek 3 je osnova za določanje vseh drugih količin, npr. števila krajših in daljših odsekov, njihovih dolžin, starosti odsekov itd. Pri računanju dolžin odsekov je treba upoštevati tudi števec vmesnih konvergentov.

Izrek 4. Za sodi $n \geq 2$ je

$$\|u_1^{(N)}\alpha\| = \begin{cases} q_{n-2}\alpha - p_{n-2}, & q_{n-1} \leq N < q_{n,1} \\ q_{n,i}\alpha - p_{n,i}, & q_{n,i} \leq N < q_{n,i+1}, 1 \leq i < a_n \end{cases} \quad (2)$$

in

$$\|u_N^{(N)}\alpha\| = p_{n-1} - q_{n-1}\alpha, \quad \text{če } q_{n-1} \leq N < q_n. \quad (3)$$

Za lihi $n > 2$ zamenjata $\|u_1^{(N)}\alpha\|$ in $\|u_N^{(N)}\alpha\|$ vlogi, hkrati pa se tudi na desni spremeni predznak; tako je npr. v (3) na desni $q_{n-1}\alpha - p_{n-1}$, ker je zdaj $n-1$ sodo število in je $\alpha > p_{n-1}/q_{n-1}$.

Dokaz. Za sodi n sta tako $q_{n-2}\alpha - p_{n-2}$ kot $q_{n,i}\alpha - p_{n,i}$, $1 \leq i < a_n$, pozitivni števili in manjši od 1, npr. $q_{n-2}\alpha - p_{n-2} < 1/q_{n-1} \leq 1$ in $q_{n,i}\alpha - p_{n,i} = (i/a_n)(q_n\alpha - p_n) + (1-i/a_n)(q_{n-2}\alpha - p_{n-2}) < 1$ (glej formuli (10) in (11) v dodatku). Torej je $\{q_{n-2}\alpha\} = q_{n-2}\alpha - p_{n-2}$ in $\{q_{n,i}\alpha\} = q_{n,i}\alpha - p_{n,i}$, tako da velja (2). Po drugi strani je spet po formuli (10) tedaj $0 < q_{n-1}\alpha - p_{n-1} + 1 < 1$ in zato $1 - \{q_{n-1}\alpha\} = p_{n-1} - q_{n-1}\alpha$. Torej velja (3).

Zanimivo je raziskati, kako se delilno razmerje $r_N(\alpha)$ izraža s parametri verižnih ulomkov. Spomnimo se (glej dodatek), da lahko za $n \geq 1$ zapišemo število α s končnim verižnim ulomkom $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t_n]$, kjer je t_n t. i. ostanek. Ravno s tem ostankom se izraža tudi delilno razmerje. Najprej lahko za vsak $n \geq 2$ število α zapišemo v obliki

$$\alpha = \frac{t_n p_{n-1} + p_{n-2}}{t_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

od koder vidimo, da je

$$t_n = \frac{q_{n-2}\alpha - p_{n-2}}{p_{n-1} - q_{n-1}\alpha}. \quad (4)$$

Prav tako je za $1 \leq i < a_n$

$$t_n - i = \frac{\alpha(iq_{n-1} + q_{n-2}) - (ip_{n-1} + p_{n-2})}{p_{n-1} - q_{n-1}\alpha} = \frac{q_{n,i}\alpha - p_{n,i}}{p_{n-1} - q_{n-1}\alpha}. \quad (5)$$

Ker velja $t_n > a_n > i \geq 1$, sta oba ulomka, (4) in (5), večja od 1, hkrati pa je tudi $t_n/(t_n - i) > 1$. Torej je v vsakem primeru $|p_{n-1} - q_{n-1}\alpha| < |q_{n,i}\alpha - p_{n,i}| < |q_{n-2}\alpha - p_{n-2}|$ oziroma

$$\min\{\|u_1^{(N)}\alpha\|, \|u_N^{(N)}\alpha\|\} = |p_{n-1} - q_{n-1}\alpha|.$$

Za vsak $n \geq 2$ (sodi ali lihi) potem zaradi (1), (2) in (3) velja

$$r_N(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{q_{n-2}\alpha - p_{n-2}}{p_{n-1} - q_{n-1}\alpha}}, & q_{n-1} \leq N < q_{n,1} \\ \frac{1}{1 + \frac{q_{n,i}\alpha - p_{n,i}}{p_{n-1} - q_{n-1}\alpha}}, & q_{n,i} \leq N < q_{n,i+1}, 1 \leq i < a_n \end{cases}$$

in zato tudi naslednji izrek:

Izrek 5. Za vsak $n \geq 2$ in vsak $N \geq q_1$ je delilno razmerje

$$r_N(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{1+t_n}, & q_{n-1} \leq N < q_{n,1} \\ \frac{1}{1-i+t_n}, & q_{n,i} \leq N < q_{n,i+1}, 1 \leq i < a_n. \end{cases} \quad (6)$$

Izrek 5 bomo potrebovali v naslednjem razdelku, ko bomo skušali ugotoviti, pri katerem iracionalnem številu α je $\inf_{N \geq 1} r_N(\alpha)$ največji.

Zgled 3. V zgledu 2 je zaporedje ostankov $t_1 = 1/\alpha$, $t_2 = \alpha/(1 - 2\alpha)$, $t_3 = (1 - 2\alpha)/(3\alpha - 1)$, $t_4 = (3\alpha - 1)/(3 - 8\alpha)$, $t_5 = (3 - 8\alpha)/(11\alpha - 4)$ itd. Za delilna razmerja pa dobimo $r_1(\alpha) = 1/t_1 = \alpha$, $r_2(\alpha) = 1/(1 + t_2) = (1 - 2\alpha)/(1 - \alpha)$, $r_3(\alpha) = 1/(1 + t_3) = (3\alpha - 1)/\alpha$, $r_4(\alpha) = 1/(1 + t_4) = (3\alpha - 1)/\alpha$, $r_5(\alpha) = 1/t_3 = (3\alpha - 1)/(1 - 2\alpha)$, $r_6(\alpha) = 1/t_3 = (3\alpha - 1)/(1 - 2\alpha)$, $r_7(\alpha) = 1/t_3 = (3\alpha - 1)/(1 - 2\alpha)$, $r_8(\alpha) = 1/(1 + t_4) = (3 - 8\alpha)/(2 - 5\alpha)$ itd. Primerjajte prej določena delilna razmerja v zvezi z zgledom 2.

Na videz dobimo neskončno mnogo različnih ostankov in neskončno mnogo različnih delilnih razmerij, vendar to ni res. Zaradi popolne periodičnosti verižnega ulomka, ki predstavlja izbrano število α , so vsi ostanki t_n z lihimi indeksom n enaki $[2; 1, 2, 1, 2, \dots] = \sqrt{3} + 1 = 1/\alpha$, vsi ostanki t_n s sodimi indeksom n pa $[1; 2, 1, 2, 1, \dots] = (\sqrt{3} + 1)/2 = 1/2\alpha$. (V zgornjem zaporedju ulomkov, ki določajo ostanke, moramo upoštevati, da zadošča število α enačbi $2\alpha^2 + 2\alpha = 1$.) Kot posledico dobimo le tri med seboj različna delilna razmerja: po izreku 5 sta za lihi n možni dve različni vrednosti, namreč $1/t_n = \alpha$ in $1/(1 + t_n) = \alpha/(\alpha + 1) = 1 - 2\alpha$, za sodi n pa le ena: $1/(1 + t_n) = 2\alpha/(2\alpha + 1) = 2(1 - \alpha)/3$.

2. Zlata delitev krožnice

V posebnem primeru naj bo $\alpha = \tau$ razmerje zlatega reza (ali $\alpha = 1 - \tau$, kar pomeni, da merimo kote v nasprotnem smislu). Pri takem iracionalnem številu se struktura delitev zelo poenostavi. Ogledali si bomo glavne posebnosti te delitve, potem pa skušali pokazati, da je izbira zlatega reza med vsemi iracionalnimi števili v nekem smislu optimalna.

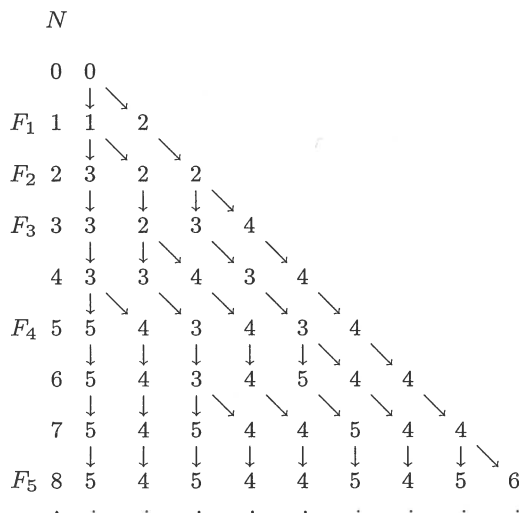
(a) Osnovne lastnosti zlatega delitve

Kot vemo, je $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618$, zato je razvoj števila τ v verižni ulomek zelo preprost: $\tau = [0; 1, 1, 1, \dots]$. Vsi koeficienti a_n so za $n \geq 1$ enaki 1. Torej vmesnih konvergentov ni, vsi konvergenti so pravi. Zaporedje imenovalcev q_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, je enako zaporedju Fibonaccijevih števil, $q_n = F_n$, saj je $q_0 = 1$ (po definiciji), $q_1 = 1$ in $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$, $n \geq 1$. Isti relaciji zadoščajo števeci, vendar je zdaj $p_n = F_{n-1}$ zaradi $p_0 = 0$ in $p_1 = 1$; konvergenti pa so kvocienti zaporednih Fibonaccijevih števil.

Tudi pari najbližjih točk $(u_1^{(N)}, u_N^{(N)})$ so pari zaporednih Fibonaccijevih števil, ki se ponavljajo in spreminjajo vrstni red v skladu s pravilom iz izreka 3. Za sodo število $n \geq 2$ in $q_{n-1} \leq N < q_n$ namreč velja $u_1^{(N)} = q_{n-2} = F_{n-2}$ in $u_N^{(N)} = q_{n-1} = F_{n-1}$, pri lihem $n > 2$ pa je obratno. Dobimo torej zaporedje parov: (1,1), (2,1), (2,3), (2,3), (5,3), (5,3), (5,3), (5,8), (5,8), (5,8), (5,8), (5,8), (13,8) ...

(b) Struktura odsekov

Enakost $\tau + \tau^2 = 1$ pove, da je interval $[0,1]$ razdeljen na dva odseka, daljši je dolžine τ , krajši dolžine τ^2 . Ker je tudi $\tau = \tau^2 + \tau^3$, lahko zapišemo $\tau^3 + \tau^2 + \tau^2 = 1$, kar pomeni, da je zdaj interval $[0,1]$ razdeljen na dva daljša



Slika 4

odseka dolžine τ^2 in en krajši odsek dolžine τ^3 . Tako poteka proces tudi naprej; delilno razmerje je zdaj konstantno: vsaka nova točka razdeli odsek, na katerega pade, v razmerju zlatega reza $r_N(\tau) = \tau^{N+1}/\tau^{N-1} = \tau^2 = 1 - \tau$. Delitveno drevo na sliki 4 prikazuje strukturo delitev na odseke za $\alpha = \tau$. Označeni so samo eksponenti pri potencah števila τ .

Zanimivo je tudi raziskati zaporedje daljših in krajših odsekov. V skladu z izrekom 1 imamo za $N + 1 = F_{n-2} + F_{n-1} = F_n$ odseke samo dveh dolžin, in sicer F_{n-1} odsekov dolžine $\|F_{n-2}\tau\| = \tau^{n-1}$ in F_{n-2} odsekov dolžine $\|F_{n-1}\tau\| = \tau^n$, skupaj torej F_n odsekov dolžine τ^{n-1} ali τ^n . Označimo daljši odsek pri delitvi z F_n točkami s črko D in krajšega s črko K . Potem si odseki v posameznih Fibonaccijevih delitvah (glede svoje dolžine) sledijo v naslednjem zaporedju: $D, DK, KDD, DDKDK, KDKDDKDD, \dots$. Ali lahko tu odkrijemo kakšno pravilnost? Seveda, vsak daljši odsek D se v naslednjem koraku (pri prehodu od n k $n + 1$) razdeli v dva odseka, daljšega in krajšega, vendar izmenično: pri lihem n v DK , pri sodem n v KD , vsak krajši odsek K pa postane v naslednjem koraku daljši D . Imamo torej naslednja transformacijska pravila: (i) $D \rightarrow DK$ za lihi n (oziroma $D \rightarrow KD$ za sodi n) in (ii) $K \rightarrow D$, po katerih je generirano zaporedje daljših in krajših odsekov. Pogled na zaporedje odsekov nam razkrije še eno skrivnost: naslednji člen, npr. $KDKDDKDD$, dobimo iz dveh prejšnjih tako, da zadnjemu členu ($DDKDK$) obrnemo vrstni red (v $KDKDD$) in mu preprosto dodamo predzadnji člen (KDD), torej npr. $KDKDDKDD = (KDKDD)(KDD)$. Tako tvorjeno zaporedje, tudi kadar vrstnega reda ne spreminjamo, imenujemo včasih *enodimenzionalni* ali *Fibonaccijev (kvazi)kristal* (glej npr. [7]).

Naj omenimo, da se da podobno strukturo odsekov določiti tudi pri poljubni iracionalni delitvi krožnice (za primer, ko je $N = q_{n,i}$ za $n \geq 1$ in $i = 1, 2, \dots, a_n$), vendar je bolj zapletena (glej [5], [6]).

(c) Prednosti zlate delitve pred drugimi iracionalnimi delitvami

Vidimo, da se v primeru $\alpha = \tau$ delitve obnašajo lepše kot pri drugih iracionalnih številih, zato se samo po sebi zastavlja naslednje vprašanje:

Kaj je tako posebnega pri zlati delitvi krožnice, da jo odlikuje pred drugimi iracionalnimi delitvami?

Da se npr. pokazati (glej [5]), da se pri zlati delitvi z novo točko vedno razdeli najstarejši od *vseh* dotedanjih odsekov (ne glede na dolžino). Pri drugih iracionalnih delitvah to ni nujno. V zgledu 1 (glej sliko 2) npr. točka 7 razdeli odsek (4,2), ki je najstarejši od dotedanjih *najdaljših* odsekov (ima starost $s_7(4, 2) = 3$), ni pa absolutno najstarejši (to je na tem koraku odsek (0,3) s starostjo $s_7(0, 3) = 4$).

Opomba 1. Delitev najstarejšega odseka se zdi smiselna tudi z botaničnega stališča, saj lahko nov rastlinski element nastane tam, kjer je biokemični potencial prejšnjih poganjkov najmanjši (primerjaj [2]). Res je znano, da pri realni rastlinski filotaksi narava zelo pogosto, menda kar v 92% primerih (glej [3, str. 157]), uporablja zlato delitev.

Zdi se, da imajo odločilno vlogo pri odgovoru na zgornje vprašanje delilna razmerja r_N , zato si jih oglejmo nekoliko podrobneje. Pri zlatem rezu so vsi ostanki v razvoju v verižni ulomek števila τ enaki $t_n = 1/\tau = 1 + \tau$, zato je za vsak N , $F_{n-1} \leq N < F_n$, tudi $r_N(\tau) = 1/(1 + t_n) = \tau/(1 + \tau) = \tau^2 = 1 - \tau$. Torej so delilna razmerja pri zlati delitvi krožnice konstantna.

Opomba 2. Vrednost delilnega razmerja je $\tau^2 = 1 - \tau$, kar pomeni, da vsaka nova točka razdeli odsek, na katerega pade, v razmerju zlatega reza, tj. enako, kot je že točka 1 razdelila interval $[0, 1]$. Vidimo, da gre za neke vrste *samopodobnost* delitve, res pa je, da se pri tem odseki razdelijo v tem razmerju izmenično z leve in z desne strani (pravilo $D \rightarrow DK$ ali $D \rightarrow KD$).

Pri poljubni iracionalni delitvi krožnice je delilno razmerje dano s formulo (6). Ko teče N po vseh naravnih številih, lahko postane $r_N(\alpha)$ pri danem iracionalnem številu α poljubno majhen. Iz izreka 5 vidimo, da velja $\inf_{N \geq q_1} r_N(\alpha) = 0$ natanko takrat, ko je $\sup_{n \geq 2} t_n = \infty$. Ker pa je $a_n = [t_n]$ za vsak $n \geq 1$, je slednje res natanko takrat, ko je zaporedje elementov a_n v razvoju števila α v verižni ulomek neomejeno. Pri omejenem zaporedju (a_n) je torej $\inf_{N \geq q_1} r_N(\alpha)$ in s tem tudi $\inf_{N \geq 1} r_N(\alpha)$ strogo pozitiven. Tako je npr. $\inf_{N \geq 1} r_N(\tau) = 1 - \tau$. Naslednji izrek pove, da je to največja vrednost, ki jo lahko dosežemo.

Izrek 6. Za vsako iracionalno število α , $0 < \alpha < 1$, je $\inf_{N \geq 1} r_N(\alpha) \leq 1 - \tau$. Enakost velja natanko takrat, ko je $\alpha = \tau$ ali $\alpha = 1 - \tau$.

Dokaz. Označimo $r(\alpha) = \inf_{N \geq 1} r_N(\alpha)$. Denimo najprej, da je v razvoju v verižni ulomek števila $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$ element $a_m \geq 2$ vsaj za en $m \geq 2$. Pokažimo, da je v tem primeru $r(\alpha) < 1/3$.

Izračunajmo

$$r(\alpha) = \inf_{N \geq 1} r_N(\alpha) = \inf_{n \geq 1} \inf_{q_{n-1} \leq N < q_n} r_N(\alpha) \leq \inf_{n \geq 2} \inf_{q_{n-1} \leq N < q_n} r_N(\alpha).$$

Ker je $t_n - i < t_n$ za vsak $n \geq 2$ in vsak $i \geq 1$, je zadnji infimum po izreku 5 enak

$$\inf_{n \geq 2} \inf_{q_{n-1} \leq N < q_n, 1} r_N(\alpha) = \inf_{n \geq 2} \frac{1}{1 + t_n} = \frac{1}{1 + \sup_{n \geq 2} t_n} \leq \frac{1}{1 + t_m} < \frac{1}{3}.$$

Ker je $1/3 < 1 - \tau$, gotovo velja zelena ocena, enakost pa v tem primeru ni dosežena.

Zdaj pa predpostavimo, da je razvoj v verižni ulomek oblike $\alpha = [0; a, 1, 1, \dots]$, kjer je $a \in \mathbb{N}$. Torej je zdaj α iracionalno število oblike

$$\alpha = \frac{1}{a + \tau}, \quad a \in \mathbb{N}.$$

Za tak α je $q_1 = a$ in $t_n = [1; 1, 1, \dots] = 1 + \tau$ za vsak $n \geq 1$, tako da je

$$\inf_{n \geq 2} \inf_{q_{n-1} \leq N < q_n} r_N(\alpha) = \inf_{n \geq 2} \inf_{q_{n-1} \leq N < q_{n,1}} r_N(\alpha) = \inf_{n \geq 2} \frac{1}{1 + t_n} = \frac{1}{2 + \tau} = 1 - \tau.$$

Poleg tega je

$$\inf_{q_0 \leq N < q_1} r_N(\alpha) = \inf_{1 \leq N < a} r_N(\alpha) = \inf_{1 \leq N < a} \frac{\alpha}{\alpha + (1 - N\alpha)} = \alpha.$$

Torej za $\alpha = 1/(a + \tau)$ velja $r(\alpha) = \min\{\alpha, 1 - \tau\} \leq 1 - \tau$. Enakost pa je dosežena, če in samo če je $\alpha \geq 1 - \tau$, tj. $a + \tau \leq 1/(1 - \tau) = (1 + \tau)^2$ oziroma $a \leq 1 + \tau + \tau^2 = 2$. Zato dobimo enakost le v primeru $a = 1$, ko je $\alpha = 1/(1 + \tau) = \tau$, in $a = 2$, ko je $\alpha = 1/(2 + \tau) = 1 - \tau$.

Obakrat, ko v izreku 6 doseže infimum delilnega razmerja največjo vrednost, gre v bistvu za isti primer, le da merimo kote v nasprotni smeri. Zlata delitev krožnice se torej izmed vseh drugih iracionalnih delitev krožnice odlikuje po tem, da maksimizira najmanjša delilna razmerja. Delilne točke so v tem smislu optimalno enakomerno porazdeljene.

Dodatek: Verižni ulomki

Ponovimo nekaj najbolj osnovnih dejstev iz teorije enostavnih verižnih ulomkov. Za dokaze glej [1] ali [4].

Vsako realno število α lahko razvijemo v (končen ali neskončen) enostavni verižni ulomek:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}.$$

Tu je $a_0 = [\alpha]$ celi del števila α , torej največje celo število, ki ne presega α , *elementi* verižnega ulomka a_i , $i \geq 1$, pa so naravna števila. Dobimo jih rekurzivno na naslednji način: Če je $\alpha \in \mathbb{N}$, se postopek ustavi; razvoj je končen, enak $\alpha = [a_0]$. Če $\alpha \notin \mathbb{N}$, lahko nadaljujemo. Naj bo $t_1 = 1/\{\alpha\} = 1/(\alpha - a_0)$ prvi ostanek verižnega ulomka in $a_1 = [t_1]$. Potem je $\alpha = a_0 + 1/t_1$, $t_1 > 1$. Če je $t_1 \in \mathbb{N}$, končamo; razvoj je enak $\alpha = [a_0; a_1]$. Sicer

lahko nadaljujemo. Če npr. t_n ni naravno število, naj bo $a_n = [t_n]$ in $t_{n+1} = 1/\{t_n\} = 1/(t_n - a_n)$, torej $t_n = a_n + 1/t_{n+1}$, $t_{n+1} > 1$ itd. Če je α racionalno število, se proces po nekaj korakih ustavi, za iracionalen α pa dobimo razvoj v neskončni enostavni verižni ulomek. Pokažemo lahko, da dobljeni neskončni verižni ulomek konvergira k vrednosti α v smislu, da konvergira k α zaporedje t. i. *konvergentov* s_n , ki jih dobimo kot vrednosti končnih verižnih ulomkov $s_n = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$. Konvergenti s sodim indeksom naraščajo, konvergenti z lihim indeksom padajo, število α je vgnezdено med obe zaporedji kot njuna skupna limita.

Konvergenti s_n so očitno racionalna števila. Naj bo $s_n = p_n/q_n$, kjer je ulomek na desni okrajšan. Za izračun števecv in imenovalcev obstajajo lepe rekurzivne formule, veljavne za $n \geq 2$ (oziroma tudi za $n \geq 1$, če dodatno formalno definiramo $p_{-1} = 1$ in $q_{-1} = 0$):

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \quad (8)$$

Upoštevajoč, da je $p_0 = a_0$ in $q_0 = 1$, lahko iz (8) ob dodatni definiciji za p_{-1} in q_{-1} brez težav zaporedoma izračunamo poljubno mnogo začetnih konvergentov. Ker so a_n naravna števila, sledi iz rekurzivnih formul (8), da tvorijo imenovalci q_n neomejeno (strogo) naraščajoče zaporedje naravnih števil. Poleg tega iz (8) takoj izpeljemo, da za $n \geq 1$ velja

$$q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n. \quad (9)$$

Iz relacije (9) vidimo, da sta pri vsakem n dobljeni števili p_n in q_n brez skupnega faktorja.

Obstajajo tudi t. i. *vmesni konvergenti*. Za vsak $n \geq 1$ in $1 \leq i \leq a_n$ so definirani rekurzivno s predpisom $s_{n,i} = p_{n,i}/q_{n,i}$, kjer je

$$p_{n,i} = i p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_{n,i} = i q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, a_n.$$

Tu je $p_{n,a_n} = p_n$ in $q_{n,a_n} = q_n$. Prave vmesne konvergente (različne od konvergentov) dobimo le tedaj, ko je $a_n > 1$. Le-ti interpolirajo dva zaporedna soda ali dva zaporedna liha konvergenta. Isto velja tudi za njihove števecv $p_{n,i}$ in imenovalce $q_{n,i}$. Natančneje, za vsak $n \geq 1$ in za $i = 1, 2, \dots, a_n$ je

$$p_{n,i} = \frac{i}{a_n} p_n + \left(1 - \frac{i}{a_n}\right) p_{n-2}, \quad q_{n,i} = \frac{i}{a_n} q_n + \left(1 - \frac{i}{a_n}\right) q_{n-2}. \quad (10)$$

To vidimo tako, da iz (8) izračunamo $p_{n-1} = (p_n - p_{n-2})/a_n$ in $q_{n-1} = (q_n - q_{n-2})/a_n$ in vstavimo v definicijo za $p_{n,i}$ in $q_{n,i}$. Tudi dvojno zaporedje vmesnih imenovalcev tvori neomejeno (strogo) naraščajoče zaporedje naravnih števil.

Ostanek verižnega ulomka reda n je verižni ulomek $t_n = [a_n; a_{n+1}, \dots]$, torej vedno velja $t_n = a_n + 1/t_{n+1} > a_n$. Ker lahko za vsak $n \geq 1$ zapišemo tudi $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, t_n]$ in ker je ta verižni ulomek enak kot končni verižni ulomek za n -ti konvergent s_n , le da je na zadnjem mestu ostanek t_n namesto elementa a_n , velja za $n \geq 1$ tudi formula

$$\alpha = \frac{t_n p_{n-1} + p_{n-2}}{t_n q_{n-1} + q_{n-2}}.$$

Iz nje lahko izrazimo ostanek t_n kot funkcijo števila α :

$$t_n = \frac{\alpha q_{n-2} - p_{n-2}}{p_{n-1} - \alpha q_{n-1}}.$$

Z absolutno vrednostjo takih izrazov, kot sta števec ali imenovalec v tej formuli, merimo, kako dober približek števila α je vsakokratni konvergent. Upošteva je rekurzivne formule (8), relacijo (9) in dejstvo, da leži α vedno med dvema zaporednima konvergentoma, se lahko npr. hitro prepričamo, da za vsak $n \geq 1$ velja

$$1/(q_n + q_{n-1}) < |\alpha q_{n-1} - p_{n-1}| < 1/q_n. \quad (11)$$

V teoriji racionalnih aproksimacij je pomemben tudi pojem najboljšega približka. Rečemo, da je (okrajšani) ulomek p/q s celim števцем p in naravnim imenovalcem q *najboljši približek (druge vrste)* za realno število α , če za vsak drug ulomek $a/b \neq p/q$ z lastnostjo $0 < b \leq q$ velja $|q\alpha - p| < |b\alpha - a|$. Odtod potem takoj sledi tudi boljša aproksimacija $|\alpha - p/q| < |\alpha - a/b|$. Znano je (glej npr. [4]), da so pri iracionalnem številu α najboljše približki druge vrste natanko njegovi konvergenti v razvoju v enostavni verižni ulomek.

LITERATURA

- [1] J. Grasselli, *Diofantski približki*, Knjižnica Sigma 51, DMFAS, Ljubljana 1992.
- [2] M. Hladnik, *Dinamični model spiralne filotakse, Prispevek k razumevanju filotakse, 1. del*, Obzornik mat. fiz. **50** (2003), 33–41.
- [3] R. V. Jean, *Phyllotaxis, A Systemic Study in Plant Morphogenesis*, Cambridge University Press, 1994.
- [4] A. Ya. Khinchin, *Continued fractions*, Dover Publ. 1992.
- [5] T. van Ravenstein, *Optimal spacing of points on a circle*, Fibonacci Quart. **27** (1989), 18–24.
- [6] T. van Ravenstein, *The three gap theorem (Steinhaus conjecture)*, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) **45** (1988), 360–370.
- [7] M. Senechal, *Quasicrystals And Geometry*, Cambridge University Press 1995.

MIKRORESONATORJI V INTEGRIRANI OPTIKI

MARKO ZGONIK

PACS 42.82.Et

Članek opisuje osnove integrirane optike in posebej možnosti uporabe krožnih mikroresonatorjev v modernih telekomunikacijah. Ločevanje uporabnega frekvenčnega pasu optičnih vlaken v sto in več kanalov že povečuje hitrost prenosa podatkov na velike razdalje. Elektro-optična modulacija integriranih resonatorjev pa odpira možnosti uporabe optičnih komunikacij za lokalne mreže.

OPTICAL MICRORING RESONATORS

The article describes the basics of integrated optics and specifically the applications of micro-ring resonators. Dense wavelength division multiplexing allows to establish more than hundred independent data channels through conventional optical fibers. On chip fabrication of microresonators that can be electro-optically modulated promises new transceivers for local area optical communications.

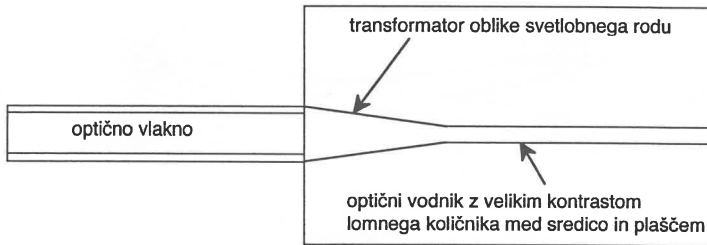
V elektroniki, elektromehaniki in tudi na drugih področjih je miniaturizacija eden od glavnih dejavnikov, ki povečujejo uporabnost izdelkov, hkrati pa zmanjšujejo ceno in porabo energije. Želja po miniaturizaciji in integraciji optičnih komponent prav tako poganja razvoj integrirane optike. V sedanjih uspešnih aplikacijah miniaturne optike, npr. optičnih komunikacijah, optičnih pomnilnikih (CD, DVD) še ne moremo govoriti o integrirani optiki, čeprav vsebujejo nekaj hibridnih miniaturnih optičnih komponent.

Komercialni razvoj integrirane optike je za zdaj še vedno počasen. Najbrž je glavni krivec to, da raziskovalcem ni uspelo izdelati osnovnega gradnika integrirane optike, optičnega tranzistorja. Izgube v optičnih vodnikih in drugih pasivnih elementih pa so navadno tolikšne, da je treba vmesno ojačiti svetlobne signale. Vse to vodi do mnenja, da bo v prihodnosti uspešna kombinacija optike in elektronike, to je integrirana optoelektronika.

Integrirana optika v kombinaciji z elektroniko lahko torej računa na ogromen tehnološki razvoj, ki stoji za moderno elektroniko. Na običajni Si rezini je mogoče s standardnimi metodami nanosa in litografije [1] izdelati svetlobne vodnike s kombinacijo materialov, kot so SiO_2 , Si_3N_4 in TiO_2 , če naštejemo le tri, ki si sledijo po naraščajoči vrednosti lomnega količnika. SiO_2 rabi kot osnova in plašč optičnih vezij, druga dva materiala pa sta uporabna za sredico vodnikov. Razlika lomnih količnikov sredice in plašča, ki ji rečemo kontrast, določa velikost preseka sredice, ker običajno želimo, da se po vodniku razširja le en rod svetlobnega polja z določeno polarizacijo. S pravilnim razmerjem med širino in višino sredice lahko izpolnimo še dodatni pogoj, da je hitrost razširjanja za oba rodova z ortogonalnima polarizacijama enaka.

Prva težava se pojavi, ko želimo iz optičnega vlakna poslati svetlobo v vodnik na integriranem vezju. Presek rodu svetlobnega valovanja v optičnem vlaknu je tipično 10-krat večji kot v vodniku, ker so optična vlakna izdelana iz sredice in plašča z majhnim kontrastom lomnega količnika.

Da se izognemo izgubam na prehodu, je treba na vezje dodati transformator prečne oblike svetlobnega rodu, ki obliko iz optičnega vlakna počasi prevede na obliko, kot jo ima svetlobni rod v integriranem vodniku. Primer shematično prikazuje slika 1.

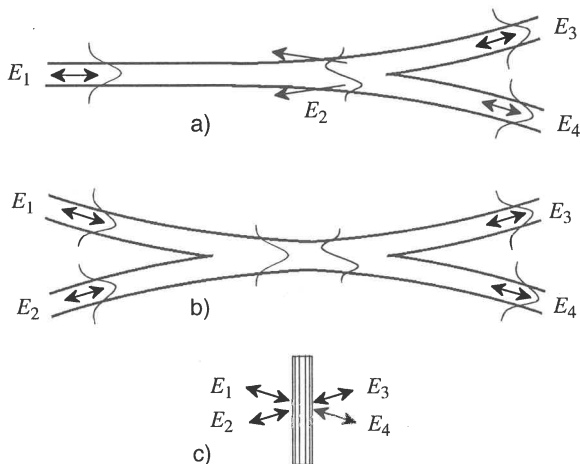


Slika 1. Spoj enorodovnega optičnega vlakna in optičnega vodnika na integriranem vezju je treba izvesti s transformatorjem oblike in velikosti rodu.

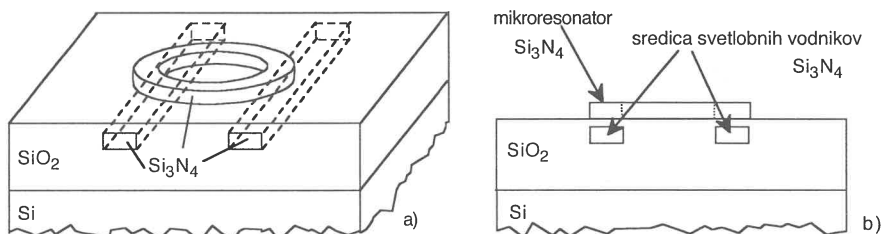
Za uspešno uporabo integrirane optike potrebujemo še mnoge pasivne elemente, ki so analogni klasičnim optičnim gradnikom: delilnik snopa, polarizator, rotator polarizacije za 90 stopinj, optično zakasnilno linijo, interferometer, itd. Podobnost med delovanjem integriranih vezji in klasičnih sestavov je pogosto zelo popolna, včasih pa nastopijo značilne razlike. Oglejmo si dve izvedbi delilnika snopa, kot ju kaže slika 2. Le delilnik na sliki 2b je enakovreden navadnemu delilniku snopa, narejenemu z dielektričnim ogledalom. V takem delilniku snopa lahko dosežemo poljubno delilno razmerje in prenos brez izgub v vse smeri.

Med pomembne optične elemente spada interferenčni filter, ki omogoča spektralno filtriranje svetlobnega snopa. Ločevanje posameznih spektralnih komponent je postalo v zadnjem obdobju zelo pomembna naloga v optičnih komunikacijah, kjer želijo kar najbolj izkoristiti zmogljivosti obstoječih optičnih vodnikov z razdelitvijo prepustnega pasu na posamezne kanale [2]. Prednosti so izredne, saj bi v področju med 1500 in 1600 nm lahko uporabili več kot 100 kanalov, ki bi bili 100 GHz narazen, po vsakem kanalu pa bi pošiljali podatke s hitrostjo 40 Gbit/s. Filtri morajo biti zelo stabilni, ozki in s čim manjšimi izgubami. Osnovani so na optičnih resonatorjih sklopljenih z optičnimi vodniki. Princip delovanja je analogen Fabry-Perotovemu interferometru. Za prodor hitrih optičnih komunikacij v lokalne mreže, v katerih bi bilo z enim optičnim vodnikom povezanih nekaj deset ali sto računalnikov, bi bilo treba poceniti izdelavo takih filtrov. Kaže, da bi bilo to mogoče z uporabo integrirane optike. V zadnjih letih se je kot najobetavnejša možnost izdelave mikroresonatorja uveljavil krožni mikroresonator. V nadaljevanju članka se bom osredotočil na njegove lastnosti.

V optičnem resonatorju imamo lahko valovanje v obliki stojnega vala ali pa samozaključenega potujočega vala. V integrirani optiki se zaradi težav pri izdelavi visokoodbojnih kompaktnih ogledal na koncih valovnega vodnika raje odločimo za drugo možnost. Izdelamo optični vodnik v obliki kroga z majhnim radijem, tipično manj od 0,1 mm. Ukrivljenost vodnika



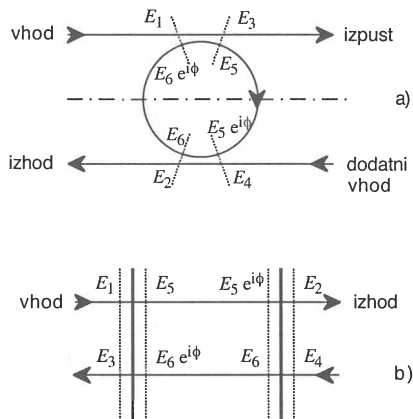
Slika 2. Dve izvedbi delilnika snopa. Delilnik a) razdeli snop E_1 na dva enaka dela E_3 in E_4 . Obrat časa pove, da lahko sestavimo snop E_1 , če pošljemo snopa E_3 in E_4 v obratni smeri in z enako amplitudo in fazo. Medsebojno različni amplitudi in/ali fazi snopov E_3 in E_4 pa povzročita, da se del valovanja sklopi s prvim višjim (antisimetričnim) rodom, ki ima v enorodovnem vodniku velike izgube. V posebnem primeru, ko pošljemo nazaj le snop E_3 , dobimo na izhodu E_1 le polovico moči, druga polovica pa se izseva v plašč vodnika. Delilnik b) je prava analogija klasičnega delilnika snopa c) z dielektričnim ogledalom brez izgub. V srednjem delu se lahko brez izgub širita dva rodova, ki ju enako kot prej vzbujamo s svetlobo iz posameznih vodnikov. Ko skupni vodnik na koncu spet ločimo, se svetloba razdeli na posamezna rodova v obeh vodnikih v odvisnosti od amplitude in faze obeh rodov v skupnem delu.



Slika 3. Izvedba spektralnega filtra v integrirani optiki. Dva ravna svetlobna vodnika sta sklopljena v navpični smeri s krožnim resonatorjem. Slika v perspektivi a) in prerez filtra skozi sredino krožnega resonatorja v pravokotni smeri glede na ravne vodnike b).

sicer povzroči izgube, te pa so tem manjše, čim večji je kontrast lomnega količnika med sredico in plaščem vodnika. V praksi je že mogoče zmanjšati izgube do te mere, da svetloba prepotuje takšen resonator 10^4 -krat, preden se je polovico izgubi. Za filter, ki je analogen Fabry-Perotovemu interferometru, potrebujemo dva vodnika z enako močno sklopitvijo z resonatorjem. To sta navadno dva ravna vodnika, kot ju kaže slika 3. Po vseh vodnikih se pri osnovni uporabi svetloba širi le v eno smer in tako imamo v vezju simetrično dva vhoda in dva izhoda, kot kaže slika 4. Zaradi načrtovane uporabe v optičnih telekomunikacijah so ti vhodi-izhodi dobili specifična imena.

Mikroresonatorji v integrirani optiki



Slika 4. Prenosno funkcijo krožnega mikroresonatorja a) in Fabry-Perotovega interferometra b) lahko izračunamo na enak način, saj sta si v osnovi enaka. Z E_i so na sliki a) označene amplitude rodov in na sliki b) amplitude ravnih valov v referenčnih ravninah, ki so označene črtkano.

Resonator je možno sklopiti z valovnim vodnikom tako, da del resonatorskega krožnega vodnika in ravni vodnik dovolj približamo. Na ta način dosežemo prekrivanje eksponentno pojemajočega dela svetlobnega polja zunaj sredice enega vodnika s sredico drugega in obratno. Obravnava sklopitve obeh vodnikov je zelo podobna tuneliranju v kvantni mehaniki. Vodnika lahko približamo bočno ali postavimo enega nad drugega. V prvem primeru je videti izdelava sicer enostavnejša, ker sta vodnik in resonator v isti ravnini, natančnost litografije pa je navadno pretrd oreh. Pri navpični postavitvi vodnikov je seveda treba v postopku izdelave narediti več korakov, vendar pa izboljšana natančnost medsebojne razdalje med vodnikoma za zdaj odtehta dodatni napor [3].

Podrobnosti razširjanja svetlobe v takih strukturah je možno analizirati s pomočjo valovne enačbe. Zaradi zapletenih robnih pogojev in nujnosti upoštevanja vektorske narave elektromagnetnega polja pa si moramo pomagati z numeričnimi rešitvami. Poglejmo sedaj le račun, ki preskoči podrobnosti in pokaže osnovne lastnosti takšnega filtra. Na sliki 4 sta shematično prikazana krožni mikroresonator in Fabry-Perotov interferometer [4]. Sklopljena vodnika na sliki 4a sta analogna zrcalu na sliki 4b, pot v krožnem resonatorju med dvema referenčnima ravninama pa ustreza poti med ogledaloma FP interferometra. V krožnem mikroresonatorju ustreza poti med referenčnima ravninama sprememba faze valovanja $\phi = n_{\text{eff}} k_0 d_{\text{eff}}$, kjer je n_{eff} efektivni lomni količnik v krožnem mikroresonatorju, k_0 valovni vektor svetlobe v vakuumu in d_{eff} efektivna razdalja med referenčnima ravninama (slika 4). Sklopljena vodnika lahko torej opišemo z dvema kompleksnima parametroma, amplitudno prepustnostjo $t = t_0 \exp i\psi$ in amplitudno odbojnostjo $r = r_0 \exp i\vartheta$, kjer so t_0, r_0, ψ in ϑ realni, enako kot pri običajnem ogledalu. Če ni izgub, velja $t_0^2 + r_0^2 = 1$ in $\psi - \theta = \pm\pi/2$. Referenčne ravnine izberemo v nesklapljenih vodnikih, vendar blizu sklopitve. Koeficienta

t in r vzamemo za konstantna v uporabnem spektralnem pasu in z njima zapišemo štiri enačbe, ki sklapljajo polja v resonatorju. To so

$$E_3 = rE_1 + tE_6 \exp i\phi, \quad (1)$$

$$E_5 = tE_1 + rE_6 \exp i\phi, \quad (2)$$

$$E_6 = rE_5 \exp i\phi + tE_4 \quad \text{in} \quad (3)$$

$$E_2 = tE_5 \exp i\phi + rE_4. \quad (4)$$

Ker je sistem linearen in simetričen v amplitudah E_1 in E_4 , lahko poiščemo rešitev le za vhodno polje E_1 in postavimo v gornjih enačbah $E_4 = 0$. Enačbe nam dajo izhodno amplitudo E_2 in skozi filter prepuščeno amplitudo polja E_3 . Navedimo le prvo, ki je

$$E_2 = \frac{r((r^2 - t^2)e^{2i\phi} - 1)}{r^2e^{2i\phi} - 1} E_1. \quad (5)$$

Kvocienta E_2/E_1 in E_3/E_1 sta ustrezni amplitudni prenosni funkciji. Kvadrati njunih absolutnih vrednosti pa nam dasta intenzitetno prepustnost filtra na vходу in izpustu. Intenzitetna prepustnost na izhodu ima obliko znane Airyjeve formule

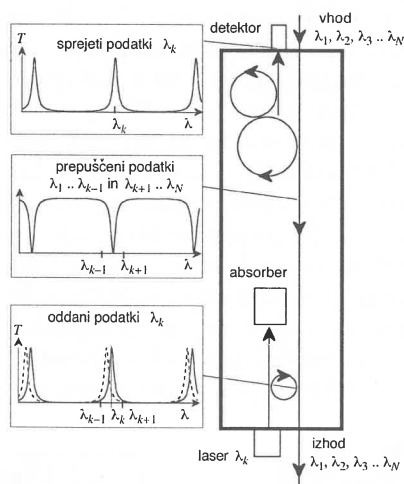
$$T_2 = \frac{(tt^*)^2}{(1 - rr^*)^2 + 4rr^* \sin^2(\phi)}, \quad (6)$$

ki ima v vrhovih vrednost 1, če nimamo izgub. Funkcija je periodična in ne ločuje spektralnih komponent, ki se razlikujeta za $\phi = \pi/2$. Področju frekvenc, ki jih filter enolično razločuje, pravimo prosto spektralno področje $\Delta\nu_{\text{FSR}} = c_0/(n_{\text{eff}}d_{\text{eff}})$. S c_0 je označena svetlobna hitrost v vakuumu. Ločljivost filtra $\Delta\nu$ definiramo, kot običajno, kot širino prepustnosti na polovični višini in je enaka

$$\Delta\nu = \frac{1 - rr^*}{\pi\sqrt{rr^*}} \frac{c_0}{2n_{\text{eff}}d_{\text{eff}}} = \frac{\Delta\nu_{\text{FSR}}}{F}, \quad (7)$$

kjer smo vpeljali fineso filtra F . Finesa je merilo za relativno ločljivost znotraj enega prostega spektralnega področja in ni odvisna od velikosti resonatorja, ampak le od sklopitve z zunanjim poljem in pa tudi od izgub v resonatorju, ki pa jih tukaj ne bomo natančneje obravnavali. Ponovimo, da je v običajnem Fabry-Perotovem interferometru sklopitev resonatorja z zunanjim poljem odvisna od odbojnosti ogledal – običajno podane z intenzitetno odbojnostjo R – in je finesa $F = \pi\sqrt{R}/(1 - R)$. Povečevanje finese z večanjem R oziroma zmanjševanjem sklopitve med resonatorjem in vodnikom ima nezaželene stranske pojave. Močno se namreč povečuje vpliv resonatorskih in drugih izgub [4] in Fabry-Perotov interferometer običajno postane neuporaben pri $F > 200$, kar velja tudi za krožne mikroresonatorje.

Pri konstantni sklopitvi mikroresonatorja z optičnimi vodniki dosežemo boljšo ločljivost z večjimi resonatorji, vendar hkrati zmanjšujemo tudi $\Delta\nu_{\text{FSR}}$. Ohranitev večjega $\Delta\nu_{\text{FSR}}$ in doseganje dobre ločljivosti je možno s kombinacijo dveh ali več zaporednih resonatorjev različnih velikosti. Za Brillouinovo spektroskopijo se danes navadno uporabljajo tandemske Fabry-Perotovi interferometri z večkratnim prehodom [5]. Uporabo enakih principov načrtujejo tudi v optičnih telekomunikacijskih filterih [6]. Primer takega sprejemnika prikazuje shematično slika 5. V prikazanem primeru bi iz vlakna z dvostopenjskim filtrom izločili spektralni pas λ_k in ga z detektorjem pretvorili v električni podatkovni tok. Preostali del svetlobnega spektra ($\lambda_1 \dots \lambda_{k-1}$ in $\lambda_{k+1} \dots \lambda_N$) bi nemoteno nadaljeval pot skozi sprejemnik.

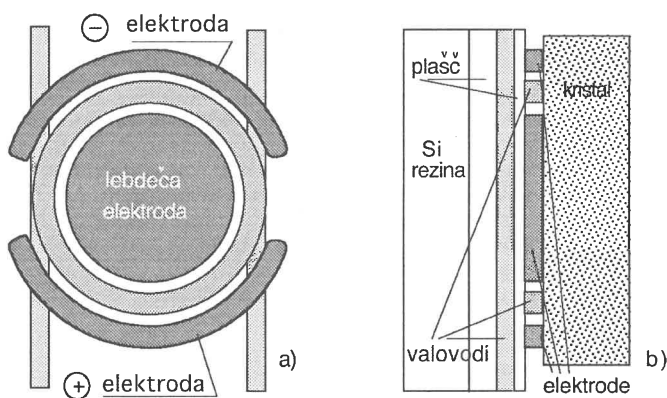


Slika 5. Osnovna shema optičnega mikrovezja s sprejemnikom in oddajnikom. Taka naprava bi lahko povezovala računalnik v lokalno zanko ali mrežo. Prenos podatkov bi potekal po enem samem optičnem vlaknu po mnogih kanalih, ki bi se razlikovali po srednji valovni dolžini spektralnega pasu ($\lambda_1 \dots \lambda_N$). V prikazanem primeru bi iz vlakna z dvostopenjskim filtrom izločili spektralni pas λ_k in ga z detektorjem pretvorili v električni podatkovni tok. Preostali del svetlobnega spektra ($\lambda_1 \dots \lambda_{k-1}$ in $\lambda_{k+1} \dots \lambda_N$) bi nemoteno nadaljeval pot skozi sprejemnik. Na isto vlakno bi priklopili tudi oddajnik. Oddajnik je sestavljen iz laserja, ki deluje pri določeni valovni dolžini (λ_k), in je sklopljen z glavnim vlaknom prek krožnega mikroresonatorja, ki rabi za modulator.

Krožni mikroresonatorji pa so še dodatno zanimivi, ker jih je možno prirediti za uporabo v oddajnikih. Osnovni del oddajnika je modulator svetlobe. Sedanji modulatorji uporabljajo princip interferometra – lahko si predstavljamo Michelsonov interferometer – v katerem v eni veji z elektro-optičnim (EO) pojavom spreminjajo lomni količnik in s tem fazo svetlobe. Sprememba faze za π omogoča 100 % modulacijo na izhodu interferometra. Z napetostjo 5 V in za hitrost, ki omogoča 40 GHz modulacijo, potrebujemo v najboljših materialih za tako veliko spremembo faze pot svetlobe večjo kot 5 cm. Sedanji modulatorji so zato veliki približno $5 \times 5 \times 10 \text{ cm}^3$, in

so dražji od tipičnega osebnega računalnika. Za uporabo v lokalnih zankah taki modulatorji niso primerni.

Resonatorji lahko rabijo tudi za modulatorje, če jim izmenično spreminjamo resonančno frekvenco in s tem prepustnost za dano svetlobo. Krožni mikroresonator uglašujemo tako, da spreminjamo fazo valovanja po enem obhodu resonatorja. Da dosežemo skoraj 100 % modulacijo, potrebujemo le spremembo faze $\Delta\phi = \pi/F$, se pravi tipično 100-krat manj kot v interferometru, zato je lahko tak modulator precej manjši. Za hitro modulacijo uporabimo elektro-optični pojav, enako kot v obstoječih modulatorjih za optične komunikacije. EO pojav uporabimo tako, da resonator ali del resonatorja izdelamo iz snovi z velikimi EO koeficienti in ob resonator dodamo elektrode. Prvi način je uporaba polimerov, iz katerih lahko izdelamo tako pasivne kot tudi aktivne (EO) resonatorje [7]. Prednosti polimerov so relativna cenenost, enostavnost nanosa in obdelave. Njihove pomanjkljivosti pa so večje optične nehomogenosti in s tem povezane izgube v vodnikih in tudi spreminjanje lastnosti s staranjem. Druga možnost za modulacijo je uporaba stabilnih pasivnih materialov za sredico optičnih vodnikov, ki jim dodamo del plašča iz EO materiala, najboljše kvaliteten kristal. To izvedemo tako, da na mikrovezju pustimo odkrit gornji del mikroresonatorja in nanj pritismo EO kristal. Shematično prikazuje ta način slika 6. Krovni kristal mora imeti nekoliko manjši lomni količnik od sredice mikroresonatorja, tako da je svetlobni rod v mikroresonatorju še vedno voden, znaten del svetlobnega polja pa potuje po krovnem kristalu. V tem primeru je fazna hitrost rodu dovolj močno odvisna od lomnega količnika kristala, da jo lahko spreminjamo prek elektro-optičnega pojava v kristalu [8].



Slika 6. Shema elektro-optičnega modulatorja osnovanega, na krožnem mikroresonatorju. a) pogled od zgoraj in b) prerez.

Aktivni mikroresonatorji v optičnem mikrovezju s sprejemnikom in oddajnikom bi omogočili ceneno povezavo računalnikov v lokalno zanko ali mrežo. Primer vezja kaže slika 5. Prenos podatkov bi potekal po enem samem optičnem vlaknu po mnogih kanalih, ki bi se razlikovali po srednji

valovni dolžini spektralnega pasu ($\lambda_1 \dots \lambda_N$). Oddajnik je sestavljen iz laserja, ki deluje pri določeni valovni dolžini (λ_k) in je sklopljen z glavnim vlaknom prek krožnega mikroresonatorja, ki služi za modulator. Resonatorju namreč s pomočjo elektro optičnega pojava spreminjamo resonančno frekvenco in na ta način usmerjamo svetlobo iz laserja izmenično v vlakno in v absorber. Zaradi manjšega radija mikroresonatorja bi bil ustrezno večji $\Delta\nu_{\text{FSR}}$ in bi z enim korakom pokrili celotno uporabno frekvenčno področje. Večje bi bile tudi izgube pri zahtevani večji finesi. Te izgube pa bi bile večje le za prepuščeno svetlobo (λ_k) od laserja do izhoda in jih je možno kompenzirati z močnejšim laserjem. Važno je predvsem, da so izgube minimalne za preostale valovne dolžine.

Opisana uporaba integrirane optike bi nedvomno pomenila veliko spodbudo za nadaljnje raziskave in izboljšave. Kako daleč pa lahko vodijo majhne tehnološke izboljšave, nam lepo pokažejo izkušnje z mikroelektro-niko.

LITERATURA

- [1] D. J. W. Klunder, E. Krioukov, F. S. Tan, T. Van Der Veen, H. F. Bulthuis, G. Sengo, C. Otto, H. J. W. M. Hoekstra, A. Driessen, *Vertically and laterally waveguide-coupled cylindrical microresonators in Si₃N₄ on SiO₂ technology*, Appl. Phys. B **73** (2001) 603–608.
- [2] C. Gamache, M. Tetu, C. Latrasse, N. Cyr, M. A. Duguay, B. Villeneuve, *An optical frequency scale in exact multiples of 100 GHz for standardization of multifrequency communications*, IEEE Photonic Tech. Lett. **8** (1996) 290–292.
- [3] D. J. W. Klunder, C. G. H. Roeloffzen, A. Driessen, *A novel polarization-independent wavelength-division-multiplexing filter based on cylindrical microresonators*, IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron. **8** (2002) 1294–1299.
- [4] M. Zgonik, *Brillouinov spektrometer za študij faznih prehodov v kristalih*, magistrsko delo, Ljubljana 1982, in M. Čopic in M. Zgonik, *On multi-pass Fabry-Perot interferometer*, Opt. Commun. **41** (1982) 310–314.
- [5] B. Hillebrands, *Progress in multipass tandem Fabry-Perot interferometry*, Rev. Phys. Instrum. **70** (1999) 1589–1598.
- [6] S. T. Chu, B. E. Little, W. G. Pan, T. Kaneko, Y. Kokubun, *Cascaded microring resonators for crosstalk reduction and spectrum cleanup in add-drop filters*, IEEE Photonic Tech. Lett. **11** (1999) 1423–1425.
- [7] P. Rabiei, W. H. Steier, C. Zhang, L. R. Dalton, *Polymer micro-ring filters and modulators*, J. Lightwave Technol. **20** (2002) 1968–1975.
- [8] *Next generation Active Integrated optic Sub-systems*, Projekt (European Commission) IST 2000-28018, <http://www.mesaplus.utwente.nl/nais/>

OBVESTILO

V OMF, letnik 49, št. 2, str. 62–63, in na domači spletni strani DMFA <http://www.dmfa.si/> je objavljen Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.

Vabimo vas, da pisne predloge za letošnja društvena priznanja pošljete do **10. oktobra 2003** na naslov: **DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost, 1000 Ljubljana, Jadranska 19, p.p. 2964.**

Predlogi naj bodo vsestransko utemeljeni, da bodo omogočili komisiji tehtno presojo in pravično odločitev.

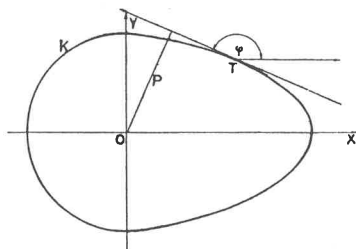
Predsednik DMFA Slovenije:
Peter Petek

O KONVEKSNIH KRIVULJAH*

IVAN VIDAV

Konveksna krivulja se imenuje taka enostavno sklenjena v ravnini ležeča krivulja, ki jo vsaka premica seče kvečjemu dvakrat. Ta definicija je dobra le, če ni noben del krivulje premočrten. V nasprotnem primeru ima lahko premica neskončno mnogo točk skupaj s krivuljo, namreč celo daljico. Vendar pa taka premica ne more iti skozi notranjost polja, ki ga ograja naša sklenjena krivulja. Zato lahko rečemo, da seče vsaka premica, ki gre skozi notranjost tega polja, krivuljo le dvakrat. Ta definicija velja potem v vsakem primeru.

Najprej vzemimo tako konveksno krivuljo K , ki ima v vsaki točki tangento in ta naj se zvezno spreminja, ko gremo po krivulji naprej. Da bomo našli enačbo take krivulje, si mislimo na njeni ravnini kak pravokotni koordinatni sistem (glej sliko). Tu je izhodišče koordinatnega sistema v notranjosti krivulje, kar pa ni nič pomembno. Tangenta v točki T naj oklepa kot φ s pozitivno smerjo osi x . Ta kot je natančno določen v mejah med 0 in 2π . Vzemimo na krivulji pozitivni smisel obkroženja, na tangenti pa tisti poltrak, ki kaže v smeri tega obkroženja. Potem je φ kot med tem poltrakom in pozitivno smerjo osi x . Ta kot stalno narašča, če se točka T pomika po krivulji v pozitivnem smislu, in gre od $\varphi = 0$, ko je T v T_0 , kjer je tangenta vzporedna z osjo x , do $\varphi = 2\pi$, ko obkroži T vso krivuljo in se vrne v T_0 . Kot φ zavzame torej vsako vrednost med 0 in 2π enkrat in le enkrat. Zato je lega vsake točke na krivulji s φ natančno določena. Zaznamujmo s p oddaljenost tangente od izhodišča! Seveda je v splošnem p funkcija kota φ , $p = p(\varphi)$. Smerni koeficient tangente pa je $\operatorname{tg} \varphi$. Zato se glasi enačba tangente



Slika 1

$$(1) \quad x \sin \varphi - y \cos \varphi = p(\varphi).$$

Tu vzemimo, da je $p(\varphi)$ zvezna in odvedljiva funkcija φ . Krivulja je potem ogrinjača vseh tangent. Po pravilu, kako se išče enačba ogrinjače, je treba (1) odvajati na φ . Torej je

$$(2) \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = p'(\varphi).$$

Če iz teh dveh enačb izračunamo x in y , dobimo koordinati dotikališča, t.j. točke T na krivulji. Imamo tedaj

$$(3) \quad x = p \sin \varphi + p' \cos(\varphi), \quad y = -p \cos \varphi + p' \sin \varphi.$$

To sta enačbi krivulje K v parametrični obliki. Parameter je φ in pomeni kot, ki ga oklepa tangenta na krivuljo v pripadajoči točki z osjo x .

* Članek je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. 1 (1951), 81–89.

Formuli (3) sta zelo splošni. Veljata namreč vedno, če je vsak del krivulje res konveksen (to se pravi, da ni daljica). Najprej se da dokazati, da ima konveksna krivulja skoraj v vsaki točki tangento. Taka točka pa, kjer tangente ni, je ogel. (Pripadajoča funkcija, ki definira krivuljo, ima tam desni in levi odvod.) Oglov pa je kvečjemu števno mnogo. Kot φ se namreč stalno veča, če obkrožimo krivuljo v pozitivnem smislu. V vsakem oglu napravi φ končen skok, ki je enak zunanjemu kotu pri tem oglu. Ker priraste pri obkroženju kot φ za 2π , je torej vsota zunanjih kotov pri vseh oglih manjša od 2π . Zato je prav gotovo le končno mnogo oglov, ki imajo zunanji kot večji od $\varphi/2$ (kvečjemu trije so), prav tako jih je končno mnogo z zunanjim kotom med $\pi/4$ in $\pi/2$, nadalje z zunanjim kotom med $\pi/8$ in $\pi/4$ itd. Torej je res kvečjemu števno neskončno mnogo oglov.

Pojem tangente lahko posplošimo v tem smislu, da imenujemo vsako premico tangento, ki ima le eno točko skupno s krivuljo. V oglih je takih premic več, vse namreč, ki potekajo v notranjosti zunanjega kota. Če smo tako posplošili pojem tangente, pripada vsakemu kotu φ med 0 in 2π ena in le ena tangenta in ena točka na krivulji, namreč dotikalnišče. Torej sta koordinati x in y zvezni funkciji φ -ja. Kjer je kak ogel, sta ti dve funkciji konstantni na nekem intervalu kota φ . Ta interval ima širino pripadajočega zunanjega kota.

Ko poznamo x in y kot funkciji kota φ , se dasta p in p' izračunati iz enačb (3). Dobimo namreč

$$p = x \sin \varphi - y \cos \varphi, \quad p' = x \cos \varphi + y \sin \varphi.$$

Ti dve enačbi povesta, da sta p in p' zvezni funkciji kota φ . Ni pa od tod neposredno razvidno, da je p' odvod funkcije p . Pač pa je to mogoče dokazati. Od tod lahko sklepamo, da sta formuli (6) in (7) popolnoma splošno veljavni in prav tako tudi (8). Torej ima konveksna krivulja vedno točno določen obseg in ograja točno določeno ploščino.

Če vzamemo za $p(\varphi)$ poljubno zvezno odvedljivo in periodično funkcijo s periodo 2π , nam dasta enačbi (3) neko sklenjeno krivuljo v ravnini. Vendar pa ni gotovo, da je ta krivulja brez dvojnih točk in da je konveksna. Pozneje bomo našli pogoje, ki mu mora zadoščati funkcija $p(\varphi)$, da je krivulja (3) res konveksna.

Če je p konstanta $= r$, pomenita enačbi (3) krog s polmerom r . V tem primeru imamo namreč

$$x = r \sin \varphi, \quad y = -r \cos \varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Ta rezultat je nazorno očiten, ker so le pri krogu vse tangente enako oddaljene od neke stalne točke, namreč od središča.

Drugič bodi $p = a \sin \varphi - b \cos \varphi$, kjer sta a in b konstanti. Iz enačb (3) najdemo sedaj, da je $x = a$, $y = b$. To sta pa koordinati ene same točke. Pri tem p se torej krivulja skrči v eno samo točko.

Naj določa $p(\varphi)$ neko konveksno krivuljo K ! Kaj dobimo sedaj, če v (3) postavimo $\bar{p} = p + a \sin \varphi - b \cos \varphi$? Koordinate točk nove krivulje zaznamujmo z $\bar{x}$ in $\bar{y}$. Potem je

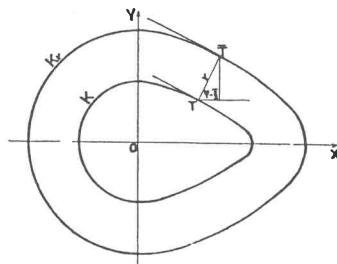
$$\bar{x} = p \sin \varphi + p' \cos \varphi + a = x + a, \quad \bar{y} = -p \cos \varphi + p' \sin \varphi + b = y + b.$$

Ti dve enačbi povesta, da je nova krivulja le paralelno premaknjena prvotna K . Torej določa transformacija $\bar{p} = p + a \sin \varphi - b \cos \varphi$ paralelni premik.

Končno si oglejmo še primer, da je $\bar{p} = p + r$, kjer je r konstanta. Enačbi (3) dasta

$$\bar{x} = x + r \sin \varphi, \quad \bar{y} = y - r \cos \varphi.$$

Točko $\bar{T}$ s koordinatama $\bar{x}, \bar{y}$ konstruiramo takole: Skozi točko T prvotne krivulje potegnemo normalo. Točka $\bar{T}$ leži na tej normali v razdalji r od dotikališča (glej sliko 2). Ker obkrožimo krivuljo v pozitivnem smislu pri naraščajočem φ , je za pozitiven r točka $\bar{T}$ zunaj krivulje, za negativen r pa leži znotraj. Tako dobimo neko krivuljo K_r . Očitno je tangenta na to krivuljo v $\bar{T}$ paralelna tangenti na K v pripadajoči točki T . Zato se imenuje K_r paralelna krivulja k prvotni K . Zunanje paralelne krivulje so tudi vse konveksne, notranje pa le v zadostni bližini prvotne krivulje.



Slika 2

Obseg in ploščina. Iz enačb (3) najdemo

$$(4) \quad x' = (p + p'') \cos \varphi, \quad y' = (p + p'') \sin \varphi.$$

Od tod je ločni diferencial

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\varphi = |p + p''| d\varphi.$$

Če naj bo φ kot, ki ga oklepa z osjo x tista polovica tangente, ki kaže v smeri naraščajočega φ , mora biti zaradi enačb (4) povsod $p + p'' > 0$. Ločni element je tedaj kar

$$(5) \quad ds = (p + p'') d\varphi.$$

Za obseg O konveksne krivulje pa dobimo, ker je

$$\int_0^{2\pi} p''(\varphi) d\varphi = p'(2\pi) - p'(0) = 0,$$

tole formulo

$$(6) \quad O = \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi.$$

Pri krogu je npr. $p = r$ in znaša obseg $O = 2\pi r$. Elipso dobimo, če postavimo $p = a\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$, kjer je $2a$ velika os, ε pa numerična ekscentričnost. Obseg znaša v tem primeru

$$O = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

in se izraža, kakor je znano, z eliptičnim integralom.

Iz formule (6) moremo takoj dobiti tole: Če leži konveksna krivulja K_1 popolnoma v notranjosti konveksne krivulje K , ima vedno manjši obseg kakor K . Vzemimo namreč, da je izhodišče koordinatnega sistema v notranjosti krivulje K_1 , tedaj tudi v notranjosti krivulje K . V tem primeru je povsod $p(\varphi) > 0$ in $p_1(\varphi) > 0$, kjer določa p_1 krivuljo K_1 . Ker leži K_1 v

notranjosti K , je $p_1(\varphi) < p(\varphi)$ za vsak φ . V točkah, ki pripadata istemu φ , sta namreč tangenti na obe krivulji vzporedni in je izhodišče bolj oddaljeno od zunanje tangente kakor od notranje. Zaradi (6) je potem res

$$O_1 = \int_0^{2\pi} p_1(\varphi) d\varphi < \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi = O.$$

Za konveksne poligone se da to dejstvo zelo elementarno dokazati.

Ploščino lika, ki ga ograja kaka sklenjena krivulja, dobimo iz formule

$$P = \frac{1}{2} \int (x dy - y dx).$$

Tu je treba integrirati po vsej ograji v pozitivnem smislu. V našem primeru dobimo iz enačb (3) in (4)

$$(7) \quad P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(p + p'') d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\varphi,$$

ker da integracija per partes

$$\int_0^{2\pi} pp'' d\varphi = [pp']_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} p'^2 d\varphi - \int_0^{2\pi} p'^2 d\varphi.$$

Izračunajmo iz formul (6) in (7) obseg in ploščino paralelne krivulje K_r ! Za p moramo postaviti $p + r$. Potem je

$$O_r = \int_0^{2\pi} (p + r) d\varphi = \int_0^{2\pi} p d\varphi + r \int_0^{2\pi} d\varphi = O + 2\pi r$$

in

$$P_r = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p^2 - p'^2) d\varphi + r \int_0^{2\pi} p d\varphi + \pi r^2.$$

Imamo tedaj formuli

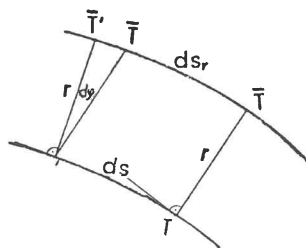
$$(8) \quad O_r = O + 2\pi r; \quad P_r = P + Or + \pi r^2.$$

Obe se dasta dobiti tudi neposredno (glej sliko 3). Na sliki pomeni ds majhen del loka na prvotni krivulji K , ds_r pa pripadajoči del loka na paralelni krivulji K_r . Daljica $T'\bar{T}_2$ je paralelna k $T\bar{T}$. Če se je tangenta zasukala za kot $d\varphi$ od T do T' , je $\angle \bar{T}_2 T' \bar{T}' = d\varphi$. Zato je $\bar{T}_2 \bar{T}' = r d\varphi$ in $ds_r = ds + r d\varphi$. Nadalje je ploščina trikotnika $T'\bar{T}_2 \bar{T}'$ enaka $\frac{1}{2} r^2 d\varphi$, ploščina trapeza $T\bar{T} \bar{T}' T'$ pa $r ds + \frac{1}{2} r^2 d\varphi$. Če to seštejemo po vsem obodu krivulje K , dobimo najprej, ker gre kot φ od 0 do 2π , da je $O_r = O + 2\pi r$, za ploščino kolobarja med K in K_r pa $rO + \pi r^2$. To sta pa res formuli (8). Pri negativnem r veljata formuli le za majhne $|r|$, ker ima pri večjem $|r|$ krivulja K_r lahko dvojne točke. Zadnja izpeljava formul (8) je zelo splošna. Velja tudi za take krivulje K , ki imajo poljubno mnogo

oglov. Nasproti vsakega ogla sestoji paralelna krivulja iz nekega krožnega loka. Torej veljata (8) tudi za konveksne poligone.

Ukrivljenost k krivulje je razmerje med kotom dveh infinitezimalno bližnjih tangent in pripadajočim ločnim elementom. V našem primeru je tedaj $k = \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{ds}$. Po formuli (5) dobimo od tod

$$(9) \quad k = \frac{1}{\rho + p''} \quad \text{ali} \quad \rho = p + p''. \quad \text{Slika 3}$$



Prej smo dognali, da mora biti pri konveksnih krivuljah povsod $p + p'' > 0$. Zato je ukrivljenost $k > 0$. Ta pogoj je potreben in zadosten, da določa funkcija $p(\varphi)$ konveksno krivuljo. Naj bo namreč $p(\varphi)$ dvakrat zvezno odvedljiva periodična funkcija, kjer je $p + p'' > 0$. Enačbi (3) najprej povesta, da je pripadajoča krivulja sklenjena. Zaradi tega dobimo iz (4)

$$(10) \quad \int_0^{2\pi} (p + p'') \cos \varphi d\varphi = 0 \quad \text{in} \quad \int_0^{2\pi} (p + p'') \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Od tod sklepamo, da krivulja nima dvojne točke. Če bi bila npr. začetna točka dvojna točka, bi moralo biti za neki $\varphi_1 < 2\pi$

$$\int_0^{\varphi_1} (p + p'') \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Ker je $p + p'' > 0$, vidimo od tod, da bi moral biti $\varphi_1 > \pi$. Od φ_1 do 2π pa je potem integrand povsod negativen in ne bi mogla biti izpolnjena druga enačba (10). Začetno točko pa lahko poljubno izberemo, saj smemo koordinatni sistem zavrteti. Zato krivulja res nima dvojnih točk. Nadalje leži vsa vedno le na eni strani tangente. V začetni točki je npr. $y = y_0$ enačba tangente, ki je tu vzporedna osi x . Iz druge enačbe (4) pa imamo

$$y = y_0 + \int_0^\varphi (p + p'') \sin \varphi d\varphi.$$

Po prejšnjem vidimo, da je $y \geq y_0$, kjer velja znak $=$ le za začetno in končno točko. Torej je res naša krivulja konveksna. Pri paralelni krivulji K_r je polmer pritisnjene kroga $\rho_r = \rho + r$, torej za r večji. Od tod sklepamo, da je tudi vsaka zunanja paralelna krivulja konveksna in da ima isto središče pritisnjene kroga kakor prvotna krivulja. Zato ima tudi isto evoluto.

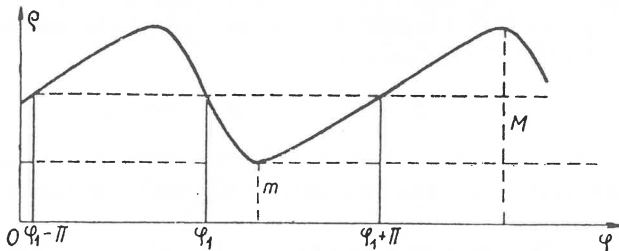
Ukrivljenost k oziroma polmer pritisnjene kroga ρ sta v splošnem funkciji kota φ . Vzemimo, da se ρ vzdolž krivulje K zvezno spreminja. Torej je $\rho = \rho(\varphi)$ zvezna periodična funkcija s periodo 2π . Vsaka taka funkcija določa do paralelnega premika natančno neko konveksno krivuljo, če je povsod $\rho > 0$ in sta obenem izpolnjeni enačbi (10), t.j.

$$(10^*) \quad \int_0^{2\pi} \rho(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \rho(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Ti dve enačbi povesta, da je krivulja sklenjena. Ker je $\rho(\varphi)$ periodična funkcija, lahko sklepamo iz (10*), da je za poljuben interval širine 2π vedno

$$(11) \quad \int_{\varphi_1}^{\varphi_1+2\pi} \rho(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Ker se krivinski polmer zvezno spreminja, je povsod končen, krivulja pa sklenjena, mora ρ vsaj v dveh točkah doseči ekstremno vrednost: neke maksimum in neke minimum. Tako točko imenujemo *teme konveksne krivulje*. Sedaj pa velja izrek, da ima vsaka konveksna krivulja najmanj štiri temena. Pri elipsi so to presečišča z obema osema. Minimum razumemo tukaj takole: V sosednjih točkah na obeh straneh ρ ni nikjer manjši, preden pa pride na eni ali drugi strani do manjših vrednosti, zavzame večje vrednosti. Podobno je definiran maksimum.



Slika 4

Če je ρ odvedljiv, je v taki točki odvod $= 0$. V tem primeru gornji izrek pove, da je najmanj štirikrat $\rho'(\varphi) = 0$. Sedaj pa dokažimo ta izrek! Če bi imel ρ samo dva ekstrema, bi od tiste točke, kjer doseže maksimum, monotonno padal do tam, kjer doseže minimum, od tam naprej pa bi zopet naraščal do največje vrednosti. Funkcija $\rho(\varphi)$ bi torej potekala tako, kakor kaže pričujoča slika 4. Naj bo m minimum in M maksimum! Vzporednica z osjo φ se v razdalji m ravno dotika krivulje, če pa se ta vzporednica dviga, krivuljo seče, oddaljenost med presečiščema se stalno večja in doseže vrednost 2π , ko ima vzporednica razdaljo M od osi x . V neki vmesni legi, imenujmo μ pripadajočo oddaljenost od osi φ , je ta razdalja med presečišči ravno $= \pi$. Zaznamujmo s φ_1 prvo presečišče, potem je $\varphi_1 + \pi$ drugo, zaradi periodičnosti funkcije $\rho(\varphi)$ pa je tudi $\varphi_1 - \pi$ presečišče. Diferenca $\rho(\varphi) - \mu$ je tedaj na intervalu med $\varphi_1 - \pi$ in φ_1 pozitivna, med φ_1 in $\varphi_1 + \pi$ negativna. Zato je

$$\int_{\varphi_1-\pi}^{\varphi_1+\pi} \rho(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_1) d\varphi > 0.$$

To pa je v nasprotju z enačbo (11). S tem je gornji izrek res dokazan.

Krivulje s konstantno širino. To so take konveksne krivulje, pri katerih je oddaljenost med dvema paralelnima tangentama vedno ista. Očitno ima

krog to lastnost. Če omejuje osnovno ploskev pokončnega valja krivulja take vrste, bi mogli na takih valjih tudi valiti bremena, ker ostane breme vedno v isti višini.

Iz pomena kota φ vidimo, da dasta vrednosti φ in $\varphi + \pi$ paralelni tangenti. Če leži izhodišče koordinatnega sistema v notranjosti krivulje, mora biti pri krivuljah s konstantno širino

$$(12) \quad p(\varphi) + p(\varphi + \pi) = 2r,$$

kjer je $2r$ konstantna oddaljenost paralelnih tangent. Od tod dobimo za obseg

$$(13) \quad O = \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi = \int_0^\pi p(\varphi) d\varphi + \int_0^\pi p(\varphi + \pi) d\varphi = 2r \int_0^\pi d\varphi = 2\pi r.$$

Vidimo, da imajo vse krivulje s širino $2r$ isti obseg $2\pi r$.

Dotikališči paralelnih tangent $T(x, y)$ in $\bar{T}(\bar{x}, \bar{y})$ sta določeni s kotoma φ in $\varphi + \pi$. Iz enačbe (3) dobimo, da je

$$\bar{x} = x - 2r \sin \varphi, \quad \bar{y} = y + 2r \cos \varphi.$$

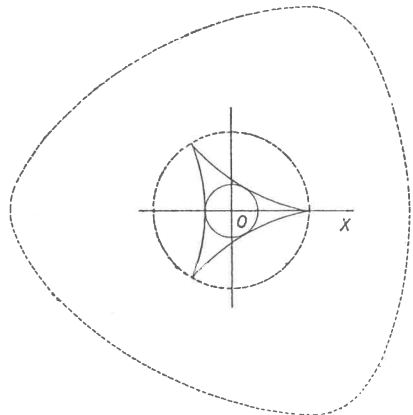
Ti dve enačbi povesta, da leži spojnica $T\bar{T}$ pravokotno na paralelnih tangentah. Zato je npr. najvišja točka pri taki krivulji vedno natanko nad najnižjo točko.

Krivulj s konstantno širino je nešteto, saj nam jih dajo vse funkcije $p(\varphi)$, ki ustrezajo enačbi (12), če je le $p + p'' > 0$. Če pa postavimo $p(\varphi) = r + \Phi(\varphi)$, mora biti $\Phi(\varphi + \pi) = -\Phi(\varphi)$. Tej enačbi ustreza npr. funkcija $\Phi = a \sin 3\varphi$. Torej določa $p = r + a \sin 3\varphi$ konveksno krivuljo s konstantno širino, če je $p + p'' > 0$. Ker je $p + p'' = r - 8a \sin \varphi$, mora biti $r > 8a$. (Na pričujoči sliki je $r = 9a$).

Izoperimetrična lastnost kroga. Med vsemi sklenjenimi krivuljami z danim obsegom O ima krog največjo površino P . To je izoperimetrična lastnost kroga. Če ima krog polmer r , je njegov obseg $O = 2\pi r$ in ploščina $P = \pi r^2$. Torej velja med obsegom in ploščino kroga tale relacija: $O^2 - 4\pi P = 0$. Vsaka druga krivulja ima pri istem obsegu manjšo ploščino in velja zato vedno $O^2 - 4\pi P > 0$. Če je torej O obseg kake enostavno sklenjene krivulje in P ploščina, je

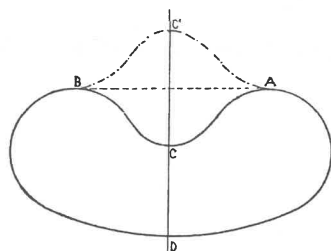
$$(14) \quad O^2 - 4\pi P \geq 0,$$

kjer velja = le za krog. To izoperimetrično neenačbo hočemo sedaj dokazati.

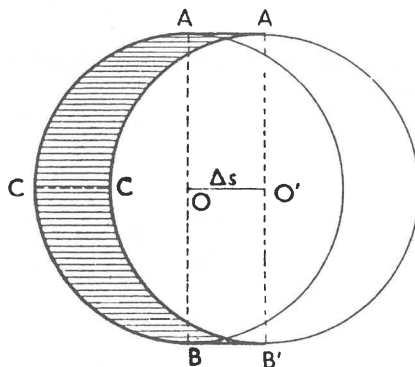


Slika 5

Očitno je najprej, da moramo iskati rešitev problema le med konveksnimi krivuljami. Če namreč krivulja ni konveksna, najdemo lahko takoj krivuljo z istim obsegom in večjo ploščino. Na pričujoči sliki je lok $AC'B$ zrcalna slika loka ACB na tetivo AB , ima tedaj isto dolžino. Krivulja $AC'BDA$ pa oklepa večjo ploščino kakor $ACBDA$.



Slika 6



Slika 7

Pri dokazu neenačbe (14) potrebujemo neko formulo, ki jo bomo najprej izpeljali. Okrog poljubno izbrane točke na krivulji opišemo krog s polmerom r ! Kolikšno ploščino opiše krožnica tega kroga, če se središče giblje po krivulji in pride nazaj v začetno točko? Če premaknemo središče kroga premočrtno za Δs naprej, opiše zadnja polovica krožnice lik $A'ACBB'C'$, to pa je ravno ploščina pravokotnika $A'ABB' = 2r\Delta s$ (glej pričujočo sliko). Obe polovici krožnice opišeta tedaj ploščino $4r\Delta s$. Sedaj lahko takoj odgovorimo na gornje vprašanje. Krivuljo razdelimo na same ločne elemente ds . Vsak izmed teh da ploščino $4rds$. Torej je vsa ploščina, ki jo opiše krožnica, ko preteče središče celo krivuljo, enaka $\sum 4rds = 4rO$, če je O obseg. Pri tem pa opiše krožnica nekatere dele ravnine večkrat, in sicer dvakrat, štirikrat ali šestkrat itd. Naj bo P_2 tista ploščina, ki je pokrita natančno dvakrat, P_4 natančno štirikrat itd. Potem velja tale enačba

$$(15) \quad 4rO = 2P_2 + 4P_4 + 6P_6 + \dots$$

To formulo moremo tolmačiti tudi takole: Vsaka točka pokrite ploščine je vsaj od ene točke krivulje K oddaljena natančno za r . Če tedaj okrog te točke opišemo krog s polmerom r , ta krog seče krivuljo K . Presečišči sta najmanj dve, če se krog ravno ne dotika krivulje. Zato je P_2 ploščina polja, ki ga tvorijo vsa središča krogov s polmerom r , ki natanko dvakrat sečejo K . Nadalje je P_4 ploščina polja, ki ga tvorijo vsa središča krogov, ki štirikrat sečejo K itd. Meje med posameznimi polji so krivulje, torej nimajo nobene ploščine. Krog s središčem na meji seče krivuljo K ali enkrat ali trikrat itd.

Naj bo sedaj ρ polmer največjega kroga, ki leži popolnoma v notranjosti krivulje K (in se je seveda v nekaj točkah dotika), R pa naj bo polmer tistega najmanjšega kroga, v katerega notranjosti leži vsa krivulja K . Če

izberemo tak r , da je $\rho \leq r \leq R$, seče prav gotovo vsak krog, ki ima središče v notranjosti krivulje $\bar{K}$, to krivuljo najmanj dvakrat. Polje vseh središč krogov s polmerom r , ki sečejo K , pa je očitno na zunanaj omejeno s paralelno krivuljo $\bar{K}_r$ v razdalji r . Ker je ploščina, ki jo ograja ta paralelna krivulja $\bar{K}_r$, enaka $P + Or + \pi r^2$, imamo tedaj

$$(16) \quad P + Or + \pi r^2 = P_2 + P_4 + P_6 + \dots$$

Pa odštejmo to enačbo od enačbe (15), ki smo jo prej še delili z $2!$ Tako dobimo

$$Or - P - \pi r^2 = P_4 + 2P_6 + \dots$$

ali

$$(17) \quad \frac{O^2}{4\pi} - P = \pi \left(\frac{O}{2\pi} - r \right)^2 + P_4 + 2P_6 + \dots$$

Ker ni noben člen na desni negativen, imamo od tod izoperimetrično neenačbo (14).

Moremo pa najti še boljšo oceno, in to takole: Postavimo v (17) najprej $r = \rho$ in nato $r = R$! Krog s polmerom ρ leži v notranjosti krivulje K , zato ima manjši obseg: $2\pi\rho < O$. Ker pa leži K vsa v krogu s polmerom R , je $O < 2\pi R$. Torej je

$$(18) \quad O^2 - 4\pi P \geq 4\pi^2 \left(\frac{O}{2\pi} - \rho \right)^2 \quad \text{in} \quad O^2 - 4\pi P \geq 4\pi^2 \left(R - \frac{O}{2\pi} \right)^2.$$

Izraza v oklepaju na desni sta oba pozitivna. Za dve pozitivni števili x in y pa velja vedno neenačba

$$(19) \quad \frac{x^2 + y^2}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2} \right)^2.$$

Diferenca med levo in desno stranjo je namreč $\frac{1}{4}(x - y)^2$ in ta je vedno pozitivna, enaka nič je le za $x = y$. Če torej neenačbi (18) seštejemo, delimo z 2 in upoštevamo (19), dobimo oceno

$$(20) \quad O^2 - 4\pi P \geq \pi^2(R - \rho)^2.$$

To ostrejšo obliko formule (14) je prvi izpeljal Bonnesen.

Kdaj velja v (14) enakost? Iz ocene (20) vidimo, da mora biti v tem primeru $R = \rho$. Notranji in zunanji krog imata torej isti polmer. To pa je mogoče le, če je tudi krivulja sama krog. S tem je izoperimetrična lastnost kroga dokazana.

Ta zelo preprosti dokaz je dal katalonski matematik L. A. Santaló. Pri dokazovanju sta nam bili potrebni le formuli (8) in (15). Obe se dasta hitro in nazorno izpeljati brez znanja infinitezimalnega računa.

ZOISOVE NAGRADE IN PRIZNANJA ZA ZNA NSTVENORAZISKOVALNO DELO MATEMATIKU IN FIZIKOMA

V prostorih Narodnega muzeja v Ljubljani so bile novembra 2002 podeljene Zoisove nagrade in priznanja za znanstvenoraziskovalno delo. Prejeli so jih tudi trije znanstveniki, ki raziskujejo v matematiki oziroma fiziki:

- profesor dr. Dragan Marušič – Zoisova nagrada za vrhunske znanstvene dosežke na področju teorije grafov in algebre,
- profesor dr. Dragan D. Mihailović – Zoisova nagrada za vrhunske znanstvene dosežke na področju fizike kondenzirane materije,
- profesor dr. Peter Križan – Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke na področju fizike osnovnih delcev.

Povzemimo uradne utemeljitve Ministrstva za šolstvo, znanost in šport.

Prof. dr. Dragan Marušič, redni profesor Pedagoške fakultete Univerze v Ljubljani, je eden vodilnih slovenskih matematikov, izjemno priznan in uveljavljen pa je tudi v svetu. Glavno področje njegovega znanstvenega dela je algebrajska teorija grafov, kjer raziskuje simetrije grafov in delovanje končnih grup na kombinatoričnih objektih. Je utemeljitelj algebrajske teorije grafov in teorije permutacijskih grup v Sloveniji, kjer je vzgojil skupino sodelavcev, ki je danes dobro znana v svetu.

Glavnina obsežnega znanstvenega opusa profesorja Marušiča je posvečena raziskovanju poltranzitivnih grafov in njihovi klasifikaciji. Zaporedje njegovih del na tem področju je doseglo vrhunec v natančnem opisu strukture tranzitivnih permutacijskih grup s sebi nezrcalnimi orbitami dolžine dve. Le-ta omogoči opis prirejenih orbitalnih grafov stopnje štiri in popolno karakterizacijo ustreznih stabilizatorjev vozlišč. Ta globoki in pomembni rezultat je naletel na precejšen odmev v svetu. Pomembne rezultate je profesor Marušič dosegel tudi na več drugih področjih, kot so Hamiltonove poti in cikli v Cayleyevih grafih, ter pri raziskavah polysimetričnih grafov. Rezultate svojega znanstvenega dela je objavil v 52 izvirnih znanstvenih člankih v uglednih mednarodnih revijah, od tega 32 člankov v zadnjih sedmih letih. Njegova dela pogosto citirajo drugi avtorji, svoje rezultate pa je predstavil tudi na številnih mednarodnih matematičnih konferencah in na tujih univerzah.

V svetu velja profesor Marušič za enega od najvidnejših raziskovalcev na področju delovanja končnih grup na grafih. Njegovo raziskovalno delo odlikujejo globina, prodornost, obilica izvirnih idej in uvedba povsem novih metod pri reševanju problemov. Njegovi rezultati pri raziskovanju poltranzitivnih grafov so odprli nove smeri razvoja na tem področju. Mnoga njegova dela pomenijo trajen prispevek v svetovno zakladnico znanja.

Prof. dr. Dragan D. Mihailović, vodja Odseka za kompleksne snovi na Institutu Jožef Stefan in izredni profesor fizike, je eden vodilnih slovenskih znanstvenikov na področju fizike snovi. S svojim obsežnim znanstvenim delom si je pridobil ugled doma in v svetu. Težišče njegovega dela v zadnjem obdobju je na področju fullerenov in visokotemperaturnih superprevodnikov.

S pomočjo femtosekundne spektroskopije je kot prvi ugotovil obstoj lokaliziranih stanj v kovinskem stanju superprevodnika. Natančni podatki o osnovnem stanju elektronov v snoveh so namreč zelo pomembni za razlago visokotemperaturnih superprevodnikov. Vrsta sistematičnih meritev relaksacije elektronov v visokotemperaturnih superprevodnikih in sorodnih snoveh je potrdila, da so njihova osnovna stanja nehomogena. Na podlagi teh podatkov je mogoče opisati interakcijo med elektroni, fononi in spini ter napovedati posledice. Tako je bil na primer pred kratkim izmerjen napovedani zlom simetrije. V sklopu teh raziskav je s sodelavci na Institutu Jožef Stefan razvil nove spektroskopske metode, pri katerih uporablja nekaj deset femtosekund dolge laserske sunke za vzbujanje neravnovesne elektronske porazdelitve.

Drugo področje dela profesorja Mihailovića je študij fullerenov. Pred 11 leti odkriti magnetni prehod v fulerenu TDAE-C60 je skupaj s sodelavci opazoval z več metodami, in sicer magnetno susceptometrijo ter elektronsko spinsko in jedrsko magnetno resonanco. Med pomembne dosežke teh meritev spada odkritje povezave med orientacijskim in magnetnim urejanjem, ki je ključnega pomena za razumevanje feromagnetizma v fulerenu TDAE-C60.

Njegovih 79 člankov, objavljenih v mednarodnih revijah v zadnjih sedmih letih, je doživelo velik odmev v strokovni javnosti, kar se kaže tudi v vrsti vabljenih predavanj in odmevih v naravoslovnih revijah s širokim krogom bralcev.

Profesor Mihailović je izredno prodoren znanstvenik in ima odličen pregled nad raziskavami na svojem področju. Uspelo mu je razviti širok krog mednarodnega sodelovanja. Njegovo delo je vrhunski prispevek k svetovnemu znanju na področju fullerenov in superprevodnikov.

Prof. dr. Peter Križan, redni profesor na Oddelku za fiziko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, je eden vodilnih slovenskih znanstvenikov na področju fizike osnovnih delcev.

Celotni opus profesorja Križana obsega 150 znanstvenih člankov v priznanih mednarodnih revijah. V zadnjem desetletju se je intenzivno posvetil pripravam meritev in meritvam kršitve kombinirane simetrije pri zrcaljenju prostora in naboja v sistemu nevtralnih mezonov B. Prav meritvi kršitve te kombinacije v sistemu nevtralnih mezonov B je bil namenjen projekt HERA-B, v katerem je Peter Križan prevzel koordinatorstvo mednarodne skupine z nalogo izdelati detektor obročev Čerenkova. Detektor je kompleksna naprava in je namenjen identifikaciji nabitih kaonov, s katero ločujemo razpad nevtralnega mezona B od razpada njegovega antidelca.

Profesor Križan je s sodelavci projektiral detektor, postavil laboratorij za izdelavo fotokatod ter na podlagi preizkusov izbral najprimernejše številce fotonov. V izdelavo detektorja je vključil tudi slovenske dobavitelje. Nastala je naprava, ki ima najboljše značilnosti med obstoječimi detektorji obročev Čerenkova. O tem delu je bilo v sedmih letih objavljenih 24 člankov v uglednih mednarodnih revijah in 21 predstavitev na konferencah.

Delo, ki ga je opravil profesor Križan, je veliko prispevalo v zakladnico svetovnega znanja in je z njim dosegel pomembno uveljavitev slovenske znanosti v mednarodnem prostoru.

Zbral in uredil: *Roman Drnovšek*

VABILO

Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi vse matematike, fizike in astronome na

10. SLOVENSKO SREČANJE O UPORABI FIZIKE, STROKOVNO SREČANJE DMFA

ter

55. OBČNI ZBOR DRUŠTVA,

ki bodo 7. in 8. novembra 2003 v Bohinju v Hotelu Zlatorog.

Program:

10. slovensko srečanje o uporabi fizike

Petek, 7. 11. 2003

8.30–18.00 Registracija, predavanja, predstavitev plakatov

18.00 Okrogla miza

Strokovno srečanje in 55. občni zbor društva

Petek, 7. 11. 2003

8.30 Registracija

9.00–19.00 Strokovno srečanje: seminar, prispevki udeležencev

20.00 Večerja, družabni večer

Sobota, 8. 11. 2003

9.00–19.00 Plenarna predavanja, občni zbor DMFA, nadaljevanje strokovnega srečanja.

V okviru strokovnega srečanja bomo izvedli izobraževalni seminar *Problem-ski pouk matematike* (uvrščen je med programe stalnega strokovnega spopolnjevanja strokovnih delavcev v vzgoji in izobraževanju 2003/2004 in ovrednoten z 1 točko). Naslovi vabljenih predavanj, seminarskih tem, prispevkov udeležencev, dnevni red občnega zbora ter podrobnosti o 10. slovenskem srečanju o uporabi fizike so objavljeni na <http://www.dmfa.si/>.

Hotelske storitve si morajo udeleženci srečanja rezervirati sami najkasneje do 30. oktobra 2003 na naslov: **Hotel Zlatorog**, Ukanc 65, 4265 Bohinjsko jezero (telefon **04/572 33 81**, fax: 04/572 33 84, el. naslov: *alpinum.bohinj@eunet.si*). Več o hotelu si lahko preberete na http://www.alpinum.net/slo_ok/html/hotel.zlatorog.html.

Cene v Hotelu Zlatorog*** (Vili Zlatorog***): polpenzion 7000 SIT (6000 SIT), nočitev z zajtrkom 5800 SIT (4800 SIT), kosilo 1900 SIT, doplačilo za enoposteljno sobo 2400 SIT, turistična taksa 154 SIT po osebi za 1 dan.

Predsednik DMFA Slovenije:

Peter Petek

OBZORNIK ZA MATEMATIKO

LJUBLJANA, JULIJ 200

Letnik 50, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 5

R 177/03



100001170,4

VSEBINA

ODPISANO

Članki

Strani

Zlata delitev krožnice. Prispevek k razumevanju filotakse, 2. del, Milan Hladnik	97–109
Mikroresonatorji v integrirani optiki, Marko Zgonik	110–117

V Obzorniku pred petdesetimi leti

O konveksnih krivuljah, Ivan Vidav	118–126
--	---------

Vesti

Obvestilo, Peter Petek	117
Zoisove nagrade in priznanja za znanstvenoraziskovalno delo matematiku in fizikoma, Roman Drnovšek	127–128
Strokovno srečanje in 55. občni zbor društva, Peter Petek	III

CONTENTS

Articles

Pages

Golden division of the circle. A contribution to understanding phyllotaxis, part 2, Milan Hladnik	97–109
Optical microring resonators, Marko Zgonik	110–117

Obzornik: fifty years ago

On convex curves, Ivan Vidav	118–126
--	---------

News	117–III
----------------	---------

Naslovnica, ki jo je posnel Marko Razpet, prikazuje spiralno filotakso pri brokoližu. Slika je povezana s člankom na strani 97, ki je 2. del serije prispevkov, namenjenih boljšemu razumevanju filotakse.