

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

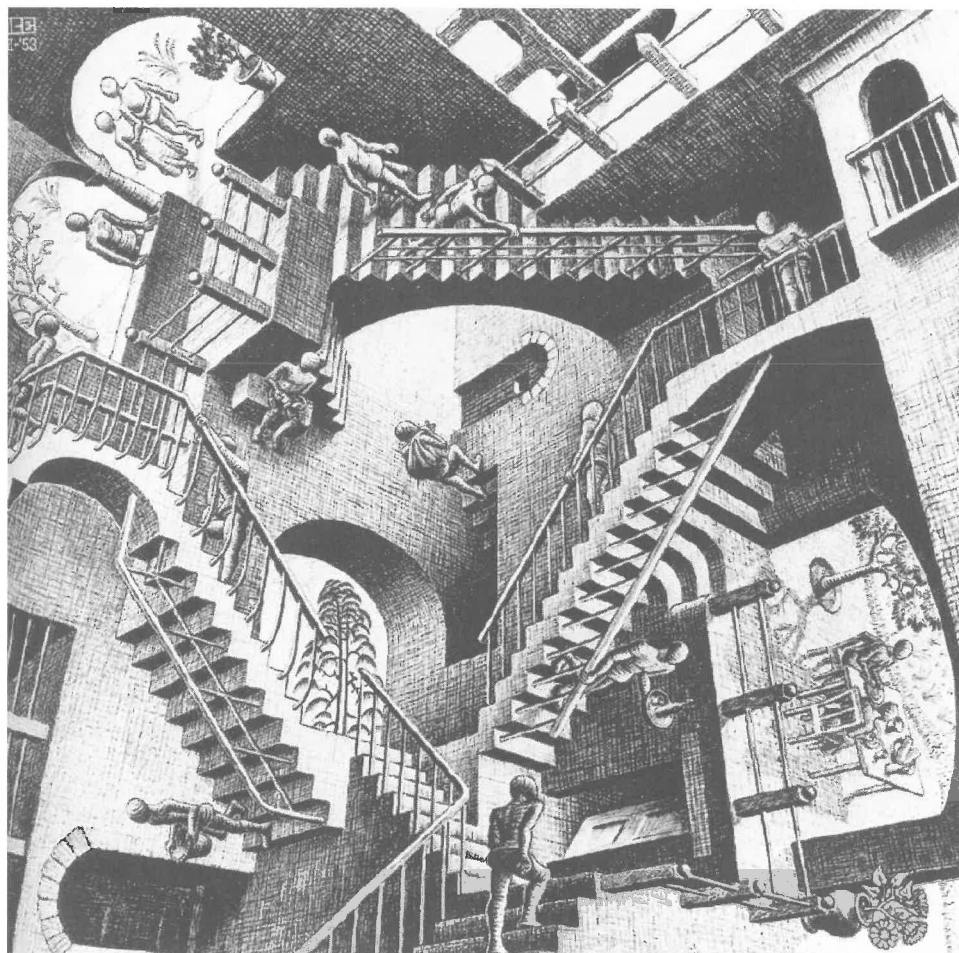
ODPISANO

2003

Letnik 50

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



M. C. Escher's "Relativity" © 2003 Cordon Art – the Netherlands. All rights reserved.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2003, letnik 50, številka 3, strani 65–92

Naslov uredništva: DMFA-založništvo, Jadranska ul. 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana.
Spletna stran: <http://www.fmf.uni-lj.si/~zaloznistvo/omf/> **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460. **Telefaks:** (01) 2517281. **Devizna nakazila:** SKB banka d. d., Ajdovščina 4, Ljubljana. **SWIFT:** SKBASL2X. **Transakcijski račun:** 03100-1000018787.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Alenka Klokočovnik (društvene novice), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič. Natisnjeno v Tiskarni KURIR v nakladi 1450 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 4000 SIT, za študente 2000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 800 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

© 2003 DMFA Slovenije – 1537

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov T_EX oziroma L^AT_EX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

ASOCIATIVNE SHEME

ALEKSANDAR JURIŠIĆ in ŠTEFKO MIKLAVIČ

Math. Subj. Class. (2000): 05E{20,30,35}, 05C{12,62,50}, 05B{20,25,30}, 68R{05,10,141}, 11T71, 51Exx, 52Cxx

Asociativne sheme so eden od temeljev moderne kombinatorike. V tem sestavku z njimi obravnavamo prepletanje algebre in kombinatorike, ki je znano pod imenom *algebraična kombinatorika*. Gre za diskretno matematiko, kjer pa imajo objekti in strukture določeno stopnjo regularnosti. Pomembnejša področja praktičnih uporab algebraične kombinatorike so teorija kod za odpravljanje napak, teorija statističnega načrtovanja eksperimentov ter, prek končnih geometrij in končnih obsegov, tudi kriptografija.

ASSOCIATION SCHEMES

Association schemes provide one of the foundations of modern combinatorics. Through them we study in this paper the interaction between algebra and combinatorics that is commonly known as *algebraic combinatorics*. This is part of discrete mathematics, in which there is certain level of regularity. Three important applications of this area are the theory of error-correcting codes, statistical design of experiments and, through finite geometries and the theory of finite fields, also cryptography.

1. Uvod

Za dani d -terici a in b elementov iz abecede z $n \geq 2$ simboli imamo glede na ujemanje $d + 1$ možnih relacij: lahko sta enaki, lahko se ujemata na $d - 1$ mestih, lahko se ujemata na $d - 2$ mestih, ... ali pa sta različni prav na vseh mestih.

Za dani d -elementni podmnožici A in B množice z n elementi, kjer je $n \geq 2d$, imamo $d + 1$ možnih relacij: lahko sta enaki, lahko se sekata v $d - 1$ elementih, lahko se sekata v $d - 2$ elementih, ... ali pa sta disjunktni.

Zgornja primera skupaj s seznamom relacij, ki spominja na popoln sistem dogodkov iz teorije verjetnosti, sta primera **asociativnih shem**, ki jih bomo bolj natančno definirali v tem razdelku. V članku bomo obravnavali prepletanje algebre in diskretne matematike, ki je znano pod imenom *algebraična kombinatorika*. Gre za diskretno matematiko, kjer pa imajo objekti in strukture določeno stopnjo regularnosti. To nam v večini znanih primerov zagotovi veliko grupo avtomorfizmov. Objekti algebraične kombinatorike ter njihove strukture pa so pogosto povezani z asociativnimi shemami. Preden preidemo na njihov podrobnejši opis, naštejmo še nekaj pomembnejših področij praktične uporabe algebraične kombinatorike: *teorija*

kodiranja, teorija statističnega načrtovanja ter, prek končnih geometrij in končnih obsegov, tudi kriptografija.

(Simetrična) asociativna shema z d razredi in n vozlišči je množica neničelnih simetričnih $(n \times n)$ -razsežnih 01-matrik $I = A_0, A_1, \dots, A_d$, za katere velja:

- (a) $\sum_{i=0}^d A_i = J$, kjer je J matrika samih enic,
- (b) za vsaka $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$ je produkt $A_i A_j$ linearna kombinacija matrik $A_0, \dots, A_d$.

Asociativno shemo bomo označevali z $\mathcal{A}$ in ji rekli na kratko kar shema. Ker je A_i simetrična binarna matrika, je matrika sosednosti nekega (neusmerjenega) grafa Γ_i na n vozliščih. Če sta vozlišči x in y povezani v grafu Γ_i , bomo to simbolično zapisali takole: $x \Gamma_i y$ in rekli, da sta v i -ti relaciji. Iz pogoja (a) sledi, da za poljubni vozlišči x in y obstaja natanko en i , da je $x \Gamma_i y$ ter da graf Γ_i , $i \neq 0$, nima zank. Iz pogoja (b) pa sledi, da obstajajo take konstante p_{ij}^h , $i, j, h \in \{0, \dots, d\}$, da velja

$$A_i A_j = \sum_{h=0}^d p_{ij}^h A_h. \quad (1)$$

Pravimo jim **presečna števila** asociativne sheme $\mathcal{A}$. Ker so matrike A_i simetrične, s transponiranjem leve in desne strani enakosti (1) ugotovimo, da med seboj komutirajo. Zato za vsa presečna števila velja $p_{ij}^h = p_{ji}^h$. Iz enakosti (1) pa razberemo tudi naslednji kombinatorični pomen presečnih števil p_{ij}^h , ki pojasni njihovo ime in zagotovi, da so nenegativna cela števila. Naj bosta x in y poljubni vozlišči, za kateri je $x \Gamma_h y$. Število vozlišč z , za katera velja $z \Gamma_i x$ in $z \Gamma_j y$, je enako p_{ij}^h , tj.

$$p_{ij}^h = |\{z; z \Gamma_i x \text{ in } z \Gamma_j y\}|. \quad (2)$$

Torej je Γ_i regularen graf stopnje $k_i := p_{ii}^0$ in je $p_{ij}^0 = \delta_{ij} k_i$. Če štejemo trojice vozlišč (x, y, z) , kjer je $x \Gamma_h y$, $z \Gamma_i x$ in $z \Gamma_j y$, na dva različna načina, dobimo še zvezo $k_h p_{ij}^h = k_j p_{ih}^j$.

Podprostor $n \times n$ razsežnih matrik nad $\mathbb{R}$, ki je generiran z matrikami $A_0, \dots, A_d$, je zaradi identitete (1) komutativna algebra. Poznamo jo pod imenom **Bose-Mesnerjeva algebra** asociativne sheme $\mathcal{A}$ in jo označimo z $\mathcal{M}$.

Oglejmo si sedaj nekaj primerov asociativnih shem. Shema z enim razredom je sestavljena iz identične matrike in matrike sosednosti grafa,

v katerem sta sosednji vsaki vozlišči, tj. grafa premera 1 oziroma polnega grafa K_n . Rekli bomo, da gre za **trivialno shemo**.

Hammingova shema $H(d, n)$. Naj bosta d in n poljubni naravni števili in $\Sigma = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Vozlišča asociativne sheme $H(d, n)$ so vse d -terice elementov iz Σ . Vozlišči x in y sta v i -ti relaciji, Dobimo asociativno shemo z d razredi in n^d vozlišči. Omenimo še različico iz linearne algebre, ki ji pravimo **shema bilinearnih form $\mathcal{M}_{d \times m}(q)$** . Končnemu obsegu s q elementi pravimo Galoisov obseg in ga označimo z $\text{GF}(q)$. Naj bosta d in $m \geq d$ naravni števili ter q potenca nekega praštevila. Naj bodo vse $(d \times m)$ -razsežne matrike nad $\text{GF}(q)$ vozlišča sheme, vozlišči pa sta v i -ti relaciji, $0 \leq i \leq d$, če je rang njune razlike enak i .

Johnsonova shema $J(n, d)$. Naj bosta n in d poljubni naravni števili, za kateri je $d \leq n$ in X poljubna množica z n elementi. Vozlišča asociativne sheme $J(n, d)$ so vse d -elementne podmnožice množice X . Vozlišči x in y sta v i -ti relaciji, $0 \leq i \leq \min\{d, n-d\}$, natanko takrat, ko ima njun presek $d-i$ elementov. Tako dobimo asociativno shemo z $\min\{d, n-d\}$ razredi in $\binom{n}{d}$ vozlišči. Opišimo še **q -analogijo Johnsonove sheme $J_q(n, d)$** (poznano tudi pod imenom **Grassmanova shema**): za vozlišča vzamemo vse d -razsežne podprostore n -razsežnega vektorskega prostora V nad $\text{GF}(q)$. Podprostora A in B razsežnosti d sta v i -ti relaciji, $0 \leq i \leq d$, če je $\dim(A \cap B) = d-i$.

Ciklomatične sheme. Naj bo q potenca praštevila in d delitelj števila $q-1$. Naj bo C_1 podgrupa multiplikativne grupe obsega $\text{GF}(q)$ indeksa d in naj bodo $C_1, \dots, C_d$ odseki podgrupe C_1 . Vozlišča sheme so vsi elementi obsega $\text{GF}(q)$. Vozlišči x in y sta v i -ti relaciji, ko je $x-y \in C_i$ (in v 0-ti relaciji, ko je $x=y$). Da bi dobili asociativno shemo, mora biti $-1 \in C_1$, tako da so relacije simetrične, tj. $2 \mid d$, če je q lih.

Na prvi pogled bo morda kdo pomislil, da sploh ni tako lahko preveriti, ali določene matrike sestavljajo asociativno shemo. Vendar nam pogoja (b) običajno ni treba preverjati neposredno. Dovolj je že, da se prepričamo, da je vrednost izraza na desni strani relacije (2) neodvisna od izbire vozlišč (ne da bi računali presečna števila). Pogosto si lahko pomagamo s simetrijo. Naj bo X množica vozlišč in $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$ množica grafov, za katere velja $V(\Gamma_i) = X$ in katerih matrike sosednosti, skupaj z identično matriko, ustrezajo pogoju (a). **Avtomorfizem** te množice grafov je permutacija vozlišč, ki za vsak graf ohranja sosednost. Matrike sosednosti grafov $\Gamma_1, \dots, \Gamma_d$, skupaj z identično

matriko, tvorijo asociativno shemo, kakor hitro grupa avtomorfizmov deluje za vsak i tranzitivno na parih vozlišč, ki so sosedni v grafu Γ_i . Seveda pa je to le zadosten in ne tudi potreben pogoj. V tem duhu si oglejmo še en zanimiv primer asociativne sheme.

Permutacijska grupa G , ki deluje na množici X , je **krepro tranzitivna**, če za poljubna elementa x in y množice X obstaja tak $g \in G$, da je $xg = y$ in $yg = x$. Grupa avtomorfizmov cikla na n vozliščih je primer krepko tranzitivne grupe. Diagonala kartezičnega produkta $X \times X$ je množica parov $\{(x, x) \mid x \in X\}$. Grupa G deluje naravno tudi na množici $X \times X$: element (x, y) preslika v element (xg, yg) . Očitno je delovanje grupe G na X tranzitivno natanko takrat, ko je diagonala množice $X \times X$ orbita delovanja grupe G na $X \times X$. V tem primeru lahko na vsako nediagonalno orbito delovanja G na $X \times X$ gledamo kot na usmerjen graf z množico vozlišč X . Ko pa je grupa G krepko tranzitivna, so orbite njenega delovanja na množici $X \times X$ simetrične. Nediagonalna orbita nam v tem primeru definira neusmerjen graf. Matrike sosednosti teh grafov tvorijo, skupaj z identično matriko, asociativno shemo. Število njenih razredov je enako številu nediagonalnih orbit, število vozlišč pa moči množice X .

Prva sta konec tridesetih let prejšnjega stoletja vpeljala asociativne sheme Bose in Nair [2] za potrebe statistike. Toda Delsarte [8] je pokazal, da nam lahko rabijo kot povezava med številnimi področji matematike, na primer teorijo kodiranja in teorijo načrtov.

V tem članku se bomo najprej podali v teorijo grup (primitivnost in neprimitivnost) in linarno algebro (spektralna teorija). Sledila bo vpeljava metrike, študij dualnosti in povezava s teorijo karakterjev. Poseben pomen pa ima tudi geometrijski aspekt (reprezentacije in ortogonalni polinomi).

Omenimo še izjavo iz knjige Bannai in Ito [1]: *Algebraično kombinatoriko se da opisati kot „študij kombinatoričnih objektov s pomočjo teorije karakterjev“ ali pa kot „teorijo grup brez grup“*. Za konec naštejmo še nekaj zanimivih povezav z asociativnimi shemami, kot so teorija vozlov (spin moduli) [12], linearno programiranje [8], in končne geometrije [6]

2. Primitivnost in neprimitivnost

V teoriji grup so enostavne končne grupe osnovni objekti, iz katerih lahko zgradimo poljubne končne grupe. Pri asociativnih shemah koncept primitivnih asociativnih shem ustreza tistemu pri enostavnih grupah, vendar

pa je primitivnih asociativnih shem veliko več in je za zdaj videti, da je klasifikacija nemogoča. Še več, način, na katerega dobimo primitivne asociativne sheme iz neprimitivnih, je, kot bomo videli v tem razdelku, veliko bolj zapleten.

Asociativna shema z d razredi je **primitivna**, če so vsi njeni grafi Γ_i , $1 \leq i \leq d$, povezani, in **neprimitivna** sicer. Trivialna shema je seveda primitivna. Johnsonova shema $J(n, d)$ je primitivna natanko takrat, ko je $n \neq 2d$. Kadar pa je $n = 2d$, je graf Γ_d nepovezan. Hammingova shema $H(d, n)$ je primitivna natanko takrat, ko je $n \neq 2$. Če pa je $n = 2$, so nepovezani grafi Γ_i , $1 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor$ ter graf Γ_d .

Naj matrike $A_0, \dots, A_d$ sestavljajo asociativno shemo $\mathcal{A}$ z d razredi ter množico vozlišč X in naj bo π particija množice $\{1, \dots, d\}$ na $m \in \mathbb{N}$ nepraznih celic. Naj bodo $A'_1, \dots, A'_m$ matrike

$$\sum_{i \in C} A_i,$$

kjer C teče po vseh celicah particije π , in naj bo $A'_0 = I$. Te binarne matrike so elementi Bose-Mesnerjeve algebre $\mathcal{M}$, medsebojno komutirajo, njihova vsota pa je matrika J . V mnogih primerih tvorijo matrike $A'_0, \dots, A'_m$ asociativno shemo. Takrat pravimo, da smo dobili to shemo iz sheme $\mathcal{A}$ z **zlivanjem** razredov (tudi **fuzijo**). Za $m = 1$ dobimo trivialno asociativno shemo. Brouwer in Van Lint [5] sta v svojem preglednem članku predstavila zlivanje, ki je bilo uporabljeno tudi za konstrukcijo novih 2-razrednih asociativnih shem, torej primer $m = 2$. Če npr. v Johnsonovi shemi $J(7, 3)$ zlijemo A_1 in A_3 , dobimo 2-razredno asociativno shemo, v kateri eden izmed grafov ustreza bločnemu grafu projektivne geometrije $PG(3, 2)$, drugi pa seveda njegovemu komplementu.

V tem razdelku bomo videli, da v neprimitivni asociativni shemi vedno obstaja netrivialno zlivanje, ki nam da asociativno shemo. Pravzaprav bomo iz neprimitivne asociativne sheme skonstruirali kar tri manjše sheme, glej npr. Godsil [9, str. 232–234].

Naj bo $\mathcal{A}$ neprimitivna asociativna shema z d razredi in množico vozlišč $X = \{1, \dots, n\}$, v kateri graf Γ_ℓ ni povezan. Naj bo $C_1, C_2, \dots, C_m$ particija π množice X , ki jo določajo povezane komponente grafa Γ_ℓ . Ni se težko prepričati, da neprazne zožitve grafov Γ_i na vsako komponento tvorijo asociativno shemo, ki ji pravimo **podshema**. Prav tako se na osnovi (2) in $p_{ij}^h = p_{ji}^h$ ni težko prepričati, da imajo vse množice C_j enako moč. Označimo jo z r .

Za števili $i, j \in \{0, \dots, d\}$ bomo rekli, da sta v relaciji $\approx$, če in samo če velja naslednje: med poljubnima elementoma zgornje particije obstaja povezava iz grafa Γ_i , če in samo če obstaja med njima tudi povezava iz grafa Γ_j . Relacija $\approx$ je ekvivalenčna relacija, poleg tega pa za vsak $i \in \{0, \dots, d\}$ obstaja taka simetrična matrika B_i , da velja

$$\sum_{j \in [i]} A_j = B_i \otimes J_r,$$

kjer je $[i]$ ekvivalenčni razred števila i , $z \otimes$ pa smo označili tenzorski produkt matrik. Pri tem je B_0 identična matrika, matrike B_i pa se seštevajo v matriko samih enic. Z uporabo znane identitete $(B_i \otimes J_r)(B_j \otimes J_r) = r(B_i B_j \otimes J_r)$ se je moč prepričati, da matrike B_i tvorijo asociativno shemo, ki jo imenujemo **kvocientna shema** asociativne sheme $\mathcal{A}$. Matrike I_{mr} , $(B_0 \otimes J_r) - I_{mr}$ in $B_i \otimes J_r$ za vse $i \neq 0$ tvorijo še eno asociativno shemo. Ker le-ta razpenja podprostor Bose-Mesnerjeve algebre asociativne sheme $\mathcal{A}$, ki vsebuje matriki I in J , ter je zaprta za običajno množenje matrik in Schurovo množenje, ji pravimo **podalgebra** sheme $\mathcal{A}$ (ali pa tudi **fuzijska shema**).

3. Lastne vrednosti

Pomembno vlogo pri študiju asociativnih shem imajo lastne vrednosti. Ker so matrike $A_0, \dots, A_d$ asociativne sheme $\mathcal{A}$ linearno neodvisne, tvorijo bazo Bose-Mesnerjeve algebre $\mathcal{M}$. Naslednji izrek opiše še eno zanimivo bazo te algebre, glej npr. [9, izrek 12.2.1].

Izrek 3.1. *Naj bo $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_d\}$ asociativna shema nad n vozlišči. Potem obstajajo paroma pravokotne idempotentne matrike $E_0, \dots, E_d$ in realna števila $p_i(j)$, tako da velja:*

- (a) $\sum_{j=0}^d E_j = I$,
- (b) $A_i E_j = p_i(j) E_j$,
- (c) $E_0 = \frac{1}{n} J$,
- (č) *matrike $E_0, \dots, E_d$ so baza $(d+1)$ -razsežnega vektorskega prostora, generiranega z matrikami $A_0, \dots, A_d$.*

Dokaz. Naj bo $i \in \{1, 2, \dots, d\}$. Iz spektralne analize normalnih matrik vemo, da za vsako matriko A_i obstajajo paroma pravokotne idempotentne matrike Y_{ij} in realna števila θ_{ij} , tako da je $A_i Y_{ij} = \theta_{ij} Y_{ij}$ in

$$\sum_j Y_{ij} = I. \quad (3)$$

Prav tako vemo tudi, da se vsaka matrika Y_{ij} izraža kot neki polinom matrike A_i . Ker je $\mathcal{M}$ komutativna algebra, matrike Y_{ij} komutirajo med seboj in z matrikami $A_0, \dots, A_d$. Torej je vsak produkt teh matrik idempotentna matrika (ki pa je lahko tudi ničelna). Enačba (3) velja za $i = 1, \dots, d$. Če teh d enačb med seboj pomnožimo, dobimo enačbo oblike

$$I = \sum_j E_j, \quad (4)$$

kjer je vsak E_j idempotent, ki je enak produktu d idempotentov Y_{ik_i} . Pri tem so Y_{ik_i} idempotenti iz spektralne dekompozicije matrike A_i . Torej so idempotenti E_j med seboj pravokotni, za vsako matriko A_i pa obstajajo realna števila $p_i(j)$, tako da velja $A_i E_j = p_i(j) E_j$. Zato velja tudi enakost

$$A_i = A_i I = A_i \sum_j E_j = \sum_j p_i(j) E_j, \quad (5)$$

ki pa nam pove, da je vsaka matrika A_i linearna kombinacija matrik E_j . Ker so neničelne matrike E_j paroma pravokotne, so tudi linearno neodvisne. Torej tvorijo bazo Bose-Mesnerjeve algebre $\mathcal{M}$. To pa nam pove, da je med matrikami E_j natanko $d + 1$ neničelnih.

Točko (c) izreka naj poskusi dokazati bralec sam. ■

Matrike $E_0, \dots, E_d$ bomo imenovali **minimalni idempotenti** asociativne sheme $\mathcal{A}$. **Schurov** (oziroma Hadamardov) produkt matrik je množenje matrik po komponentah. Označevali ga bomo z "o". Ker je $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$, je Bose-Mesnerjeva algebra zaprta tudi za Schurov produkt. Matrike A_i so paroma pravokotni idempotenti za to množenje, zato jim pravimo tudi **Schurovi idempotenti** asociativne sheme $\mathcal{A}$. Ker pa so matrike $E_0, \dots, E_d$ baza vektorskega prostora, napetega na matrike $A_0, \dots, A_d$, velja naslednja posledica:

Posledica 3.2. $E_0, \dots, E_d$ njeni minimalni idempotenti. Potem obstajajo taka realna števila q_{ij}^h in $q_i(h)$ ($i, j, h \in \{0, \dots, d\}$), da velja

$$(a) \quad E_i \circ E_j = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^d q_{ij}^h E_h,$$

$$(b) \quad E_i = \frac{1}{n} \sum_{h=0}^d q_i(h) A_h,$$

(c) matrike A_i imajo kvečjemu $d + 1$ različnih lastnih vrednosti. ■

Števila $p_i(0), \dots, p_i(d)$ so (ne nujno različne) **lastne vrednosti** matrike A_i . Števila $q_i(0), \dots, q_i(d)$ pa imenujemo **dualne lastne vrednosti** matrike E_i . **Matrika lastnih vrednosti** asociativne sheme $\mathcal{A}$ je $(d+1) \times (d+1)$ -razsežna matrika P , definirana s $(P)_{ij} = p_i(j)$. Analogno s števili $q_i(j)$ definiramo tudi **matriko dualnih lastnih vrednosti**, ki jo označujemo s Q . Lastna vrednost $p_i(1)$ matrike A_1 ima večkratnost $m_i = q_i(0)$. Le-ta je enaka rang(E_i). Iz (5) in posledice 3.2(b) sledi $nPQ = I$. Ni se težko prepričati tudi o zvezi $\Delta_n Q = (\Delta_m P)^T$, kjer sta Δ_n in Δ_m diagonalni matriki z $(\Delta_n)_{ii} = k_i$ in $(\Delta_m)_{ii} = m_i$. Števila q_{ij}^h , ki so, kot bomo videli kasneje, nekakšen dual presečnih števil, imenujemo **Kreinovi parametri** asociativne sheme $\mathcal{A}$.

Z lastnimi vrednostmi lahko izrazimo vsa presečna števila in Kreinove parametre. Na primer, če enakost (a) pomnožimo z E_h , dobimo $q_{ij}^h E_h = n E_h (E_i \circ E_j)$ oziroma

$$q_{ij}^h = \frac{n}{m_h} \text{sled}(E_h(E_i \circ E_j)) = \frac{n}{m_h} \text{vsota}(E_h \circ E_i \circ E_j), \quad (6)$$

kjer je vsota matrike A enaka vsoti vseh njenih elementov. Iz (a) in (b) sledi še $E_i \circ E_j \circ E_h = (1/n^3) \sum_{\ell=0}^d q_i(\ell) q_j(\ell) q_h(\ell) A_\ell$, torej zaradi $\Delta_n Q = (\Delta_m P)^T$ dobimo

$$q_{ij}^h = \frac{1}{nm_h} \sum_{\ell=0}^d q_i(\ell) q_j(\ell) q_h(\ell) k_\ell = \frac{m_i m_j}{n} \sum_{\ell=0}^d \frac{p_\ell(i) p_\ell(j) p_\ell(h)}{k_\ell^2}.$$

Naj bo s premer grafa Γ_i . Potem so matrike $A_i^0, A_i^1, \dots, A_i^s$ linearno neodvisne, graf Γ_i pa ima zato vsaj $s+1$ različnih lastnih vrednosti. Seveda je $s \leq d$. Primeru, ko je $s = d$, bomo posvetili posebno pozornost v naslednjem razdelku.

4. Metrika

Že sama presečna števila nam nakažejo, da je smiselno posebno pozornost nameniti razredu asociativnih shem z metriko. Asociativna shema $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_d\}$ je **metrična** za razvrstitev $A_0, \dots, A_d$, če presečna števila zadovoljujejo naslednja pogoja:

- (i) (**trikotniški pogoj**): če je eno izmed števil i, j, h večje od vsote drugih dveh, je število p_{ij}^h enako 0,
- (ii) (**povezanost**): če je $i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$ in $i + j \leq d$, je $p_{ij}^{i+j} \neq 0$.

Metrične asociativne sheme imajo pomembno vlogo v algebraični kombinatoriki. Naj bo $\mathcal{A}$ metrična asociativna shema. Potem je prva matrika vedno identična. Pokazati se da, da je vrstni red odvisen že od matrike A_1 . Velja tudi, da je asociativna shema metrična glede na A_1 natanko takrat, ko ima ustrezen graf Γ_1 premer d , [9, lema 12.3.2]. Če velja slednja lastnost, potem pravimo, da je graf Γ_1 **razdaljno regularen**.

Asociativna shema $\mathcal{A}$ je **kometrična** za razvrstitev matrik $E_0, \dots, E_d$, če trikotniškemu pogoju in pogoju povezanosti zadoščajo Kreinovi parametri. Johnsonova in Hammingova asociativna shema sodita med sheme, ki so hkrati metrične in kometrične. Naj omenimo tudi, da je asociativna shema lahko metrična (oziroma kometrična) za različne razvrstitve matrik $A_0, A_1, \dots, A_d$ (oziroma $E_0, E_1, \dots, E_d$). V primeru $p_{11}^0 > 2$ pa je asociativna shema metrična za največ dve razvrstitvi, glej [4, izrek 4.2.12].

Kot primer si pogledajmo asociativne sheme z dvema razredoma: $\mathcal{A} = \{I, A_1, A_2\}$. Enakost $p_{ij}^0 = \delta_{ij}k_i$ nam zagotavlja, da so presečna števila p_{10}^0, p_{20}^0 in p_{21}^0 enaka 0, presečna števila p_{00}^0, p_{11}^0 in p_{22}^0 pa različna od nič. Ker velja $p_{ij}^h = p_{ji}^h$ in $k_h p_{ij}^h = k_j p_{ih}^j$, je treba ugotoviti le še, ali je $p_{11}^2 \neq 0$ za razvrstitev I, A_1, A_2 in $p_{22}^1 \neq 0$ za razvrstitev I, A_2, A_1 . Pogoju $p_{11}^2 \neq 0$ je izpolnjen natanko tedaj, ko je graf Γ_1 povezan, tj. kadar je diameter grafa Γ_1 enak 2. Enako vlogo ima pogoj $p_{22}^1 \neq 0$ v grafu Γ_2 . Če je shema $\mathcal{A}$ primitivna, sta zaradi povezanosti grafov Γ_1 in Γ_2 števili p_{11}^2 in p_{22}^1 različni od 0 in je shema $\mathcal{A}$ metrična za obe razvrstitvi. Brez škode za splošnost je treba preveriti še primer, ko je $p_{11}^2 = 0$. Potem iz (1) dobimo $A_1^2 = p_{11}^0 I + p_{11}^1 A_1$. V grafu Γ_1 je število sprehodov dolžine 2 od vozlišča x do vozlišča y enako številu njunih skupnih sosedov, to je $(A_1^2)_{xy}$. To pa pomeni, da v grafu Γ_1 ni vozlišč, ki bi bila na medsebojni razdalji 2. Ker je $\mathcal{A}$ dvorazredna shema, je graf Γ_1 disjunktna unija vsaj dveh klik, presečno število $p_{22}^1 = 0$, shema $\mathcal{A}$ pa je neprimitivna. V tem primeru je torej graf Γ_2 poln večdelen graf, shema $\mathcal{A}$ pa je metrična za razvrstitev I, A_2, A_1 .

Podobno ugotovimo, da je 2-razredna asociativna shema tudi kometrična, in da je kometrična za dve razvrstitvi natanko takrat, ko je primitivna.

Asociativne sheme z dvema razredoma so ekvivalentne **krepko regularnim grafom**. To so regularni grafi, ki niso polni in zanje obstajata taki nenegativni celi števili λ in μ , da imata vsaki sosednji vozlišči natanko λ skupnih sosedov, vsaki nesosednji vozlišči pa natanko μ skupnih sosedov.

Metričnost oziroma kometričnost asociativne sheme pa lahko definiramo tudi s povsem algebraičnega vidika. Rekli bomo, da je shema

$\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ **P-polinomska**, če lahko matrike $A_0, A_1, \dots, A_d$ uređimo tako, da je matrika A_i polinom stopnje i v matriki A_1 , $0 \leq i \leq d$. Podobno definiramo **Q-polinomske** asociativne sheme. Za poljubno matriko E z $E^{(r)}$ označimo Schurov produkt r kopij matrike E , pri tem pa naj bo $E^{(0)} = J$. Za poljuben polinom $q(x) = \sum_{i=0}^m q_i x^i$ definirajmo $q \circ E$ z

$$q \circ E = \sum_{i=0}^m q_i E^{(i)}.$$

Matriko $q \circ E$ bomo imenovali **Schurov polinom** v matriki E . Asociativna shema $\mathcal{A}$ z minimalnimi idempotenti $E_0, E_1, \dots, E_d$ je **Q-polinomska**, če lahko njene minimalne idempotente uređimo tako, da je matrika E_i Schurov polinom stopnje i v matriki E_1 , $0 \leq i \leq d$.

Izkaže se (glej [4, trditev 2.7.1]), da je asociativna shema metrična (oz. kometrična) natanko takrat, ko je **P-polinomska** (oz. **Q-polinomska**).

5. Dualnost

Na določene rezultate iz teorije kodiranja in teorije t -načrtov (ki so jih odkrili neodvisno) lahko danes gledamo kot na formalno dualne poglede določenih idej iz teorije asociativnih shem. Tako so Fisherjeva neenakost in njene posplošitve [20, Izrek 19.8], [4, str. 138] formalno dualne oceni za zlaganje krogel [20, izrek 21.1], [22]. Lloydov izrek za popolne kode [21], [8], [4, str. 56] je formalen dual izreka o tesnih načrtih (angl. *tight design*) in ortogonalnih tabelah (angl. *orthogonal array*) [23]. Delsartova neenakost za porazdelitveni vektor podmnožice asociativne sheme [8, str. 26], [20, izrek 30.3], [4, trditev 2.5.2] pomeni oceno linearnega programa za velikost kod. V tem razdelku si bomo ogledali, za kakšno dualnost pravzaprav gre.

Bose-Mesnerjeva algebra $\mathcal{M}$ asociativne sheme $\mathcal{A}$ ni zaprta samo za običajno matrično množenje, ampak tudi za množenje po komponentah (Schurovo oziroma Hadamardovo množenje matrik). Matrike A_i tvorijo bazo minimalnih Schurovih idempotentov glede na to množenje in relacijo, ki je definirana z $A \leq A'$, če in samo če je $A' \circ A = A$.

Dualnost med običajnim matričnim množenjem, števili p_{ij}^h in matrikami A_i in P na eni strani ter Schurovim množenjem matrik, števili q_{ij}^h in matrikami E_i in Q na drugi je osnovna gonilna sila teorije asociativnih shem in tudi teorije razdaljno regularnih grafov. Tako se na primer imprimitivnost in dualna imprimitivnost ujemata, podshema in kvocientna shema imprimitivne asociativne sheme pa sta dualna koncepta. Za asociativne sheme

imajo presečna števila enostavno kombinatorično interpretacijo in so zato cela števila. Ne poznamo pa ničesar podobnega za poljubne Kreinove parametre. Deloma to vrzel zapolni naslednji izrek, ki nam poda močan kriterij za obstoj asociativnih shem.

Izrek 5.3 (Scott, [24]). *Naj bo $\mathcal{A}$ asociativna shema na n vozliščih in $e_1, \dots, e_n$ standardna baza za $\mathbb{R}^n$. Naj bo $v = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i \otimes e_i$. Potem so Kreinovi parametri q_{ij}^h nenegativni, oziroma bolj natančno*

$$q_{ij}^h = \frac{n}{m_h} \|(E_i \otimes E_j \otimes E_h)v\|^2,$$

in $q_{ij}^h = 0$ natanko tedaj, ko je $(E_i \otimes E_j \otimes E_h)v = 0$.

Dokaz (Godsil [10, lema 1.8.3]). Iz (6) in znane tenzorske identitete $(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By$ za $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $x, y \in \mathbb{R}^n$ dobimo

$$q_{ij}^h = \frac{n}{m_h} \text{vsota}(E_i \circ E_j \circ E_h) = \frac{n}{m_h} v^T (E_i \otimes E_j \otimes E_h) v.$$

Sedaj trditev sledi iz dejstva, da je $E_i \otimes E_j \otimes E_h$ simetričen idempotent. ■

Še en močan kriterij za obstoj asociativne sheme je **absolutna meja**, ki omeji rang matrike $E_i \circ E_j$, in jo podajamo v naslednjem izreku, glej npr. [4, izrek 2.3.3].

Izrek 5.4. *Naj bo $\mathcal{A}$ d -razredna asociativna shema. Potem njene večkratnosti m_i , $1 \leq i \leq d$, zadoščajo neenakosti*

$$\sum_{q_{ij}^h \neq 0} m_h \leq \begin{cases} m_i m_j, & \text{če } i \neq j, \\ \frac{1}{2} m_i (m_i + 1), & \text{če } i = j. \end{cases}$$

Dokaz. Leva stran je enaka $\text{rang}(E_i \circ E_j)$, ki je kvečjemu $\text{rang}(E_i \otimes E_j) = m_i m_j$. Naj bo sedaj $i = j$. Med vrsticami matrike E_i si lahko izberemo m_i vrstic, ki jih generirajo. Potem so vrstice matrike $E_i \circ E_i$, katere elementi so kvadrati elementov matrike E_i , generirane z $m_i + \binom{m_i}{2}$ vrsticami, ki so Schurovi produkti katerih koli dveh izmed teh m_i vrstic. ■

Čeprav smo omenili, da za poljubne Kreinove parametre ne poznamo kombinatorične interpretacije, v nekaterih primerih stanje le ni tako brezupno. Prvi tak rezultat je naslednji izrek, ki so ga dokazali Cameron, Goethals in Seidel v [7, izrek 5.4].

Izrek 5.5. *Naj bo Γ krepko regularen graf in privzemimo, da je $q_{ii}^i = 0$ za neki $i \in \{1, 2\}$. Potem sta za vsako vozlišče x grafa Γ krepko regularna tudi grafa, inducirana s sosedi oziroma nesosedi vozlišča x . ■*

Podobne kombinatorične interpretacije pa so za razdaljno regularne grafe premera 3 in 4 dokazali Godsil in Hansel [11] ter Jurišić in Koolen [17].

Če za neki asociativni shemi velja, da so presečna števila ene sheme ravno Kreinovi parametri druge, potem je res tudi obratno. Za taki shemi pravimo, da sta **formalno dualni**. Asociativna shema, ki je formalen dual metrične asociativne sheme, je kometrična. Jaeger [13] je dokazal, da vsak spin model pripada Bose-Mesnerjevi algebri formalno sebi dualne asociativne sheme. Glej tudi [14] in [15]. Asociativna shema ima lahko več formalnih dualov ali pa sploh nobenega. Formalna dualnost je pač stvar parametrov, ne pa strukture same. V nekaterih primerih pa lahko vedno na naraven način definiramo dualno asociativno shemo, kar bomo pokazali v naslednjem razdelku.

6. Algebra

Oglejmo si sedaj zvezo med teorijo reprezentacij in zgoraj opisano dualnostjo. Omejili se bomo na Abelove grupe, vendar pa se da celoten prijem uporabiti tudi bolj splošno.

Naj bo G Abelova grupa reda n z enoto 0 . **Karakter** grupe G je homomorfizem iz grupe G v multiplikativno grupo neničelnih kompleksnih števil. Množico vseh karakterjev označimo z G^* . **Trivialen** karakter je homomorfizem, ki vsak element grupe G preslika v 1 . Za vsak $g \in G$ velja, da je $ng = 0$. Zato za poljuben karakter Φ velja $1 = \Phi/ng = \Phi(g)^n$, torej je $\Phi(g)$ n -ti koren enote.

Naj bo $\Phi \in G^*$. S $\bar{\Phi}$ označimo preslikavo, ki vsak $g \in G$ preslika v konjugirano število števila $\Phi(g)$. Ni se težko prepričati, da je $\bar{\Phi}$ karakter. Za vsak $g \in G$ velja $\Phi(g)\bar{\Phi}(g) = 1$, od tod pa sledi, da je $\bar{\Phi}(g) = \Phi(g^{-1})$. V množici G^* za poljubna elementa $\Phi, \Psi \in G^*$ definirajmo produkt $\Phi\Psi$ s $(\Phi\Psi)(g) = \Phi(g)\Psi(g)$ za vsak $g \in G$. Iz zgornjih dejstev ni težko ugotoviti, da je množica G^* za tako definirano množenje grupa. Enota je trivialni karakter, inverz karakterja Φ pa karakter $\bar{\Phi}$. Dokaz naslednje pomembne trditve kakor tudi dokaze vseh drugih trditev iz tega razdelka si bralec lahko ogleda npr. v Godsil [9, razdelki 12.8, 12.9 in 12.10].

Izrek 6.6. Če je G končna Abelova grupa, potem sta grupi G in G^* izomorfni. ■

Tabela karakterjev grupe G je kompleksna matrika H , katere vrstice in stolpci so indeksirani zaporedoma s karakterji in elementi grupe G , i -ti element pa je enak vrednosti i -tega karakterja na j -tem elementu grupe G . Potem je $HH^* = nI$.

Naj bo G poljubna grupa. Za vsako njeno podmnožico C definirajmo $C^{-1} := \{c^{-1} \mid c \in C\}$. Naj bo C taka podmnožica grupe G , da je $C^{-1} = C$ in C ne vsebuje enote grupe G . Vpeljimo **Cayleyev graf** grupe G glede na množico C . Množica njegovih vozlišč je množica elementov grupe G , elementa g in h pa sta povezana natanko takrat, ko je $hg^{-1} \in C$. Cayleyev graf grupe G glede na množico C bomo označevali z $\Gamma(C)$. Ni se težko prepričati, da je za vsak $g \in G$ permutacija, ki vozlišče v grafa $\Gamma(C)$ preslika v vozlišče vg , avtomorfizem grafa $\Gamma(C)$. Torej grupa G deluje z desne na množici vozlišč grafa $\Gamma(C)$ kot grupa avtomorfizmov grafa $\Gamma(C)$. Poleg tega je to delovanje tudi regularno, kar pomeni, da je tranzitivno in da je enota edini element, ki ima fiksno točko. Velja tudi naslednja lema:

Lema 6.7. Naj bo Γ graf. Podgrupa G grupe avtomorfizmov grafa Γ deluje regularno na množici vozlišč $V(\Gamma)$ natanko tedaj, ko je $\Gamma = \Gamma(C)$ za neko podmnožico C grupe G , ki ne vsebuje enote in za katero je $C = C^{-1}$. ■

Naj bo $\mathcal{A} = \{A_0, A_1, \dots, A_d\}$ asociativna shema. Ker je vsota matrik A_i enaka matriki J , lahko vsako izmed matrik A_i , $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ obravnavamo kot matriko sosednosti nekega grafa Γ_i . Kot smo že omenili, je avtomorfizem asociativne sheme $\mathcal{A}$ permutacija njenih vozlišč, ki je avtomorfizem vsakega izmed grafov Γ_i .

Recimo, da grupa avtomorfizmov asociativne sheme $\mathcal{A}$ vsebuje tako Abelovo podgrupo G , ki deluje regularno na vsakem izmed grafov Γ_i . Takim asociativnim shemam pravimo **translacijske** asociativne sheme. Po lemi 6.7 za vsak graf Γ_i obstaja taka podmnožica C_i grupe $G \setminus \{0\}$ (kjer je 0 enota grupe G), da je $C_i^{-1} = C_i$ in $\Gamma_i = \Gamma(C_i)$. Pokažimo, da množice C_i tvorijo particijo množice $G \setminus \{0\}$. Naj bo g poljuben element množice $G \setminus \{0\}$. Ker je g povezan z 0 v natanko enem izmed grafov Γ_i , je g element natanko ene od množice C_i .

Sedaj pa začnimo z drugega konca. Naj bo G Abelova grupa s particijo množice $G \setminus \{0\}$ na podmnožice C_i , za katere velja $C_i^{-1} = C_i$. Kdaj

Cayleyevi grafi $\Gamma_i = \Gamma(C_i)$ določajo asociativno shemo? Da bi odgovorili na to vprašanje, najprej povejmo, da vsaka particija σ grupe G porodi particijo σ^* grupe G^* : karakterja Φ in Ψ naj bosta v isti množici particije σ^* natanko takrat, ko je $\Phi(C) = \Psi(C)$ za vsako množico C particije σ . Število blokov particije σ označimo z $|\sigma|$. Naslednji izrek sta prva dokazala Bridges in Mena [3].

Izrek 6.8. *Naj bo G končna Abelova grupa in $\sigma = \{C_0, \dots, C_d\}$ particija grupe G , za katero velja $C_i^{-1} = C_i$, $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ in $C_0 = \{0\}$. Potem je $|\sigma^*| \geq |\sigma|$. Grafi $\Gamma(C_i)$ tvorijo asociativno shemo $\mathcal{A}$, katere vozlišča so elementi grupe G , natanko takrat, ko je $|\sigma^*| = |\sigma|$. V tem primeru σ^* določa asociativno shemo $\mathcal{A}^*$, katere vozlišča so elementi grupe G^* , shemi $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}^*$ pa sta formalno dualni.*

7. Geometrija

Naj bo Γ graf z množico vozlišč $\{1, 2, \dots, n\}$ in matriko sosednosti A . Naj bo θ lastna vrednost matrike A z večkratnostjo m , U_θ pa $n \times m$ razsežna matrika, katere stolpci tvorijo ortonormirano bazo njenega lastnega podprostora. Z $u_i = u_i(\theta)$ označimo i -to vrstico matrike U_θ . Za poljuben lastni vektor x lastne vrednosti θ velja $Ax = \theta x$ oziroma $\sum_{j \sim i} x_j = \theta x_i$ za $1 \leq i \leq n$. Zato velja $AU_\theta = \theta U_\theta$ oziroma

$$\sum_{j \sim i} u_j(\theta) = \theta u_i(\theta). \quad (7)$$

Zgornja enačba je smiselna tudi za poljubno asociativno shemo, če vzamemo $\Gamma = \Gamma_i$. Vsako preslikavo iz množice vozlišč grafa Γ v $\mathbb{R}^m$, za katero velja zgornja enakost, bomo imenovali *evklidska reprezentacija grafa* Γ glede na lastno vrednost θ . Evklidske reprezentacije razdaljno regularnih grafov so še posebej zanimive zaradi naslednje lastnosti:

Trditev 7.9. *Naj bo Γ razdaljno regularen graf in naj bo θ lastna vrednost njegove matrike sosednosti A . Za poljubni vozlišči i in j je skalarni produkt $\langle u_i(\theta), u_j(\theta) \rangle$ odvisen samo od njune razdalje v grafu Γ .*

Dokaz. Enačbo (5) lahko za $i = 1$ zapišemo takole: $A = \sum \{\theta E_\theta \mid \theta \in \text{ev}(A)\}$, kjer smo z $\text{ev}(A)$ označili množico lastnih vrednosti matrike A . Ker pa so matrike E_i idempotenti, za vsak polinom f velja $f(A) = \sum \{f(\theta)E_\theta \mid \theta \in \text{ev}(A)\}$. Vzemimo sedaj za f polinom $f(x) = \prod \{(x - \tau) \mid \tau \in \text{ev}(A) \setminus \{\theta\}\}$. Potem je $f(A) = f(\theta)E_\theta$ in $f(\theta) \neq 0$. Matrika $f(A)$

pa je linearna kombinacija matrik $A_0, A_1, \dots, A_d$, zato je vrednost $(f(A))_{ij}$, oziroma vrednost $(E_\theta)_{ij}$, odvisna samo od indeksa h . Ker pa je $E_\theta = U_\theta U_\theta^T$, velja $(E_\theta)_{ij} = \langle u_i(\theta), u_j(\theta) \rangle$ in trditev je dokazana. ■

Kadar pa je $i = j$, nam zgornji rezultat zagotovi, da imajo vektorji $u_i(\theta)$ za $i = 1, 2, \dots, n$ enako dolžino oziroma da reprezentacija U_θ preslika vsa vozlišča razdaljno regularnega grafa Γ na neko sfero v $\mathbb{R}^m$. Za poljubni vozlišči i in j razdaljno regularnega grafa Γ , ki sta na razdalji r , naj bo funkcija $\sigma_r(\theta)$ definirana s

$$\sigma_r(\theta) = \frac{\langle u_i(\theta), u_j(\theta) \rangle}{\langle u_i(\theta), u_i(\theta) \rangle}.$$

Pravimo ji **r -ti kosinus** lastne vrednosti θ . Če enačbo (7) skalarno pomnožimo z $u_\ell(\theta)$, kjer je razdalja med i in ℓ enaka r , dobimo tričleno rekurzivno zvezo

$$\theta \sigma_r = p_{1,r+1}^r \sigma_{r+1} + p_{1,r}^r \sigma_r + p_{1,r-1}^r \sigma_{r-1} \quad (8)$$

z začetnima pogoje $\sigma_0(\theta) = 1$ in $\sigma_1(\theta) = \theta/p_{11}^0$. Od tod lahko nato izračunamo še druge kosinuse. Za $r = 2$ dobimo na primer $\sigma_2(\theta) = (\theta^2 - p_{11}^1 \theta - p_{11}^0)/(p_{11}^0 p_{12}^1)$. Če v tričleni rekurzivni formuli nadomestimo lastno vrednost θ z neodvisno spremenljivko, dobimo zaporedje ortogonalnih polinomov. V tem kontekstu lahko štejemo razdaljno regularne grafe za kombinatorično interpretacijo ortogonalnih polinomov. Leonard [19] je pokazal, da so ortogonalni polinomi asociativnih shem, ki so hkrati metrične in kometrične, bodisi Askey-Wilsonovi polinomi ali pa limitni primeri le-teh. Posledica tega močnega rezultata je, da se da izraziti vse parametre teh asociativnih shem le s petimi parametri. Za Hammingovo asociativno shemo dobimo na primer Krawtchoukove polinome [1, str. 209], [25, str. 240]:

$$K_k(x; n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{x}{j} \binom{n-x}{k-j}$$

na množici $\{0, 1, \dots, n\}$ za utež $w(i) = \binom{n}{i}$. Za Johnsonovo shemo pa dobimo Eberleinove polinome [1, str. 220], [25, str. 244] (oziroma dualne Hahnovе polinome):

$$E_k(x, n, d) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{d-j}{k-j} \binom{d-x}{j} \binom{n-d+j-x}{j}$$

na množici $\{z_i = i(n+1-i) \mid i = 0, \dots, n\}$ za utež $w(z_i) = \binom{n}{i} - \binom{n-1}{i}$. Seveda lahko s številnimi orodji, ki jih uporabljamo pri delu z ortogonalnimi polinomi (npr. Sturmovo zaporedje), dobimo veliko nadaljnjih informacij o razdaljno regularnih grafih. Na primer, če so $\theta_0 > \theta_1 > \dots > \theta_d$ lastne vrednosti razdaljno regularnega grafa Γ , potem velja

$$\sigma_0(\theta_1) > \sigma_1(\theta_1) > \dots > \sigma_d(\theta_1) \quad \text{in} \quad (-1)^i \sigma_i(\theta_d) \geq 0. \quad (9)$$

Prva izmed zgornjih dveh lastnosti nam pove, da je 1-skelet konveksne ogrinjače evklidske reprezentacije grafa Γ glede na lastno vrednost θ_1 ravno graf Γ , glej Godsil [9, lema 13.3.3]. Lepa posledica tega rezultata pa je, da je razdaljno regularen graf Γ ravninski, brž ko ima njegova druga največja lastna vrednost θ_1 večkratnost 3. Če pa je večkratnost lastne vrednosti θ_1 enaka 4, potem je ravninski graf, ki je induciran na sosedih poljubnega vozlišča x grafa Γ . Iz lastnosti (9) in (8) pa se da izpeljati parametrizacijo presečnih števil s pomočjo kosinusov, ki pripadajo lastnima vrednostma θ_1 in θ_d , glej Jurišić, Koolen in Terwilliger [18, lema 10.1].

Za konec omenimo še, da se da precej teorije o simetričnih asociativnih shemah posplošiti tudi na nesimetrične asociativne sheme, ki jih dobimo, če v definiciji asociativne sheme $\mathcal{A} = \{A_0, \dots, A_d\}$ nadomestimo pogoj, da so matrike iz $\mathcal{A}$ simetrične, s pogojem, da je $A_i^T \in \mathcal{A}$ za vsak i in da poljubni matriki iz $\mathcal{A}$ komutirata. V tem primeru so lahko nekatere lastne vrednosti sheme kompleksne. Konjugiranke končne grupe so v tem primeru razredi asociativne sheme, tabela karakterjev pa je v bistvu matrika lastnih vrednosti sheme (zvezi $PQ = nI$ in $P^T \Delta_m = \Delta_n Q$ sta zvezi za pravokotnost karakterjev).

LITERATURA

- [1] E. Bannai in T. Ito, *Algebraic Combinatorics I: Association Schemes*, Benjamin-Cummings, California, 1984.
- [2] R. C. Bose in K. R. Nair, *Partially balanced incomplete block designs*, Sankhya 4 (1939), 337–372.
- [3] W. G. Bridges in R. A. Mena, *On the rational spectra of graphs with abelian Singer groups*, Linear Algebra Appl. 46 (1982), 51–60.
- [4] A. E. Brouwer, A. M. Cohen in A. Neumaier, *Distance-regular graphs*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [5] A. E. Brouwer in J. H. van Lint, *Strongly regular graphs and partial geometries*, in: *Enumeration and Design – Proc. Silver Jubilee Conf. on Combinatorics*, Waterloo 1982 (D. M. Jackson & S. A. Vanstone, eds.), Academic Press, Toronto (1984), pp. 85–122.

- [6] F. Buekenhout, ed., *Handbook of incidence geometry, Buildings and Foundations*, North-Holland 1995.
- [7] P. J. Cameron, J. M. Goethals in J. J. Seidel, *Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents*, J. of Algebra **55** (1978), 257–280.
- [8] P. Delsarte, *An algebraic approach to the association schemes of coding theory*, Philips research reports supplements No. 10, 1973.
- [9] C. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman & Hall, New York, 1993.
- [10] C. D. Godsil, *Association schemes*, rokopis, 2002.
- [11] C. D. Godsil in A. D. Hensel, *Distance regular covers of the complete graph*, J. Combin. Th. (B) **56** (1992), 205–238.
- [12] F. Jaeger, *Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial*, Geom. Dedicata **44** (1992), 23–52.
- [13] F. Jaeger, *Towards a classification of spin models in terms of association schemes*, in: *Progress in algebraic combinatorics (Fukuoka, 1993)*, vol. **24** Math. Soc. Japan, Tokyo, 1996, pp. 197–225.
- [14] F. Jaeger, M. Matsumoto in K. Nomura, *Bose-Mesner algebras related to type II matrices and spin models*, J. Algebraic Combin. **8** (1998), 39–72.
- [15] F. Jaeger, *On four-weight spin models and their gauge transformations*, J. Algebraic Combin. **11** (2000), 241–268.
- [16] A. Jurišić, *Antipodal Covers*, doktorska disertacija, University of Waterloo, Canada, 1995
- [17] A. Jurišić and J. Koolen, *Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4*, Discr. Math. **244** (2002), 181–202.
- [18] A. Jurišić, J. Koolen in P. Terwilliger, *Tight Distance-Regular Graphs*, J. Alg. Combin. **12** (2000), 163–197.
- [19] D. A. Leonard, *Orthogonal polynomials, duality and association schemes*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 656–663.
- [20] J. H. Van Lint and R. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2nd ed. (2001).
- [21] S. P. Lloyd, *Binary block coding*, Bell System Tech. J. **36** (1957), 517–535.
- [22] A. M. Odlyzko in N. J. A. Sloane, *New upper bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions*, J. Combin. Th. A **26** (1979), 210–214.
- [23] D. K Ray-Chaudhuri in R. M. Wilson, *On t -designs*, Osaka J. Math. **12** (1975), 737–747.
- [24] L. L. Scott, *A condition on Higman's parameters*, Notices Amer. Math. Soc. **20** (1973), A-97.
- [25] N. J. A. Sloane, *An introduction to association schemes and coding theory*, Theory and application of special functions (Proc. Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., Publ. No. 35, Academic Press, New York, 1975), pp. 225–260.

O ELEKTRONIH V ATOMU

JANEZ STRNAD

PACS 01.40.Ej

V evropskih revijah, namenjenih poučevanju fizike se tu in tam pojavijo predlogi, ki so skregani z zakoni fizike. Uredniki le neradi objavijo kritične odzive na take predloge. Navadno so pripravljeni objaviti le zelo skrajšano pismo uredniku. Potezo je mogoče vsaj delno razumeti. Predlog je „ustvarjalen” in poln navdušenja nad novim, medtem ko sklicevanje na zakone fizike nosi pečat ustaljenosti. Toda s tem uredniki fiziki in poučevanju fizike delajo slabo uslugo in preprečujejo revijam, da bi opravljale svoje poslanstvo. Na napakah se je namreč mogoče uspešno učiti. Zgrešenim poučevalskim predlogom je treba nasprotovati. Samo tako lahko upamo, da predlogi ne bodo prizadeli dijakov in poučevanja fizike odtujili fiziki. Prispevek obdela zgled, ki zadeva elektrone v atomu.

ON ELECTRONS IN ATOM

In European journals devoted to physics education occasionally teaching models are proposed which are at odds with the laws of physics. Editors only reluctantly accept critical responses to such proposals. At most they are willing to accept only a very shortened Letter-to-the-Editor. This trait can be understood, at least partially. The proposal is „creative” and full of enthusiasm for the novelty whereas references to the laws of physics appear to be rather traditional. However, therewith editors are doing a disservice to physics and physics education and prevent journals to perform their mission since mistakes are a powerfull vehicle of instruction. One should object against unfounded teaching models. Only in this way they we can prevent that such models would harm students and separate physics education from physics. An example is considered concerning electrons in an atom.

Fizika iz Karlsruheja za nižjo srednjo šolo je sprožila nekaj odzivov tudi pri nas [1], [2]. Razprava se je nadaljevala v mednarodnih revijah [3]. Učbenik je uvedel pojem „elektronija”: „Verjetno si že slišal, da je ovoj atoma iz točkastih elektronov, ki se gibljejo okrog jedra. To je podoba atoma, ki so si jo ljudje ustvarili na začetku 20. stoletja. Ta podoba pa se ne sklada več z umevanjem atoma v sodobni fiziki. Namesto tega si lahko predstavljaš, da je ovoj atoma iz neke snovi, ki je zvezno porazdeljena okrog jedra. To snov bomo imenovali ‘elektronij’.” [4]

V resnici je „elektronij” popolnoma tuj sodobni fiziki. Elektroni in vrzeli v kristalih so kvazi delci in jih ne moremo opisati kot zgoščine in razredčine „elektronija” [2]. Medtem so predlog, da bi z „elektronijem” opisali elektrone v atomih, razvili dalje [5]. Pri tem so nastali nadaljnji spodrseljaji, a vseeno predlog hvalijo kot „kvantni poučevalski model atoma” in „uspešno orodje za poučevanje”.

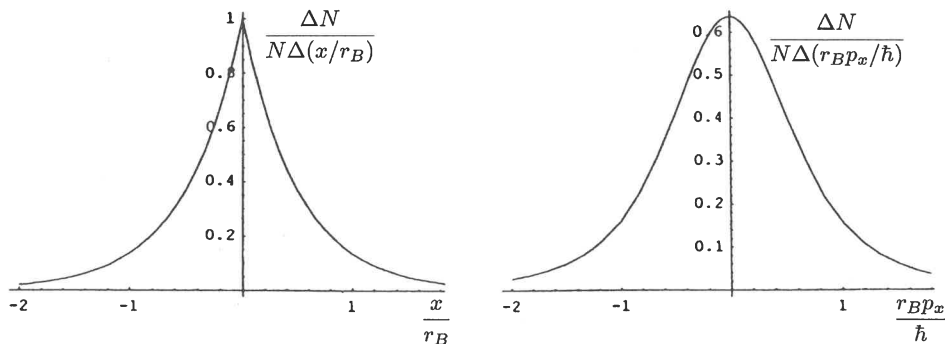
R. U. Sengl je imel navado trditi, da mora učitelj razmišljati o snovi na naslednji višji stopnji, če naj uspešno poučuje. V tem duhu utegne biti poučno obdelati „elektronij” s stališča študenta fizike v drugem letniku.

Začnimo z vodikovimi atomi v osnovnem stanju. „Elektronij nima delčne narave, ampak je kontinuum s spremenljivo gostoto”, ki je „konstanten v času, ni nobenega gibanja” [5]. „Elektronij” naj bi se vedel kot negativno naelektrena „kapljevina”. V Bohrovem modelu stare kvantne mehanike spočetka proton z nabojem e_0 in maso m_p in elektron z nabojem $-e_0$ in maso m obravnavamo na enaki osnovi. Potem zaradi veliko večje mase protona ($m_p/m \approx 1800$) v težiščnem koordinatnem sistemu spregledamo njegovo gibanje. „Elektronij” je od vsega začetka odlikovan, o kakem „protoniju” ni ne duha ne sluha. Vendar bi se „elektronij” razbežal, če ga ne bi vezal pozitivni naboj, ki torej obdrži delčne lastnosti. Ob tem se pokaže, da ime ni domišljeno, ker spominja na pozitronij in druge vezane sisteme delca in antidelca. F. Pflug, ki je resno obdelal gibanje elektronov v kovini s klasičnega stališča, je predlagal za elektronsko tekočino ime *elektrolej*, ki spominja na petrolej, kapljevino z zapleteno sestavo [6].

Privlačna sila pozitivnega naboja pospeši dele negativne „kapljevine” proti središču. Če bi obstajalo dušenje kot sevanje v klasičnem primeru, bi negativni naboj naposled padel na pozitivnega. V kvantnem primeru ni sevanja, dokler je na voljo manj energije od energije prvega vzbujenega stanja, 10,2 eV. Tako „kapljevina” mora radialno nihati. „Elektronij” bi miroval samo, če bi bil tog. V tem primeru pa bi se vrnili k nekakšnemu Thomson-Kelvinovemu modelu atoma z negativnim nabojem, velikim kot atom, a z veliko manjšo maso. Če bi bil togi oblak neprepusten, bi se nekateri delci α pri sipanju na atomih ne mogli odkloniti za velik kot in bi se sipali nekako tako, kot so pričakovali, pred poskusi H. Geigerja in E. Marsdena ter Rutherfordovo vpeljavo atomskega jedra.

V klasični fiziki je kinetična energija delca, ki ga na drug delec veže sila, obratno sorazmerna s kvadratom razdalje, enaka polovici negativne potencialne energije. To je mogoče hitro ugotoviti pri kroženju elektrona v vodikovem atomu. V kvantni mehaniki velja to za povprečni vrednosti. Bolj splošno zagotavlja to virialni izrek, ki velja tudi v kvantni mehaniki za povprečne vrednosti.

„Elektronij” onemogoči dijakom, da bi razvili predstavo o tem, kako potrebujemo poleg močne privlačne sile še hitro gibanje, da ostane elektron vezan na majhen del prostora. Polno energijo vodikovega atoma sestavljata potencialna in kinetična energija: $W = -e_0^2/4\pi\epsilon_0 r + \frac{1}{2}p^2/m$. V Heisenbergovi neenačbi $\delta r \delta p \gtrsim \hbar$ nedoločenost razdalje δr ocenimo z razdaljo r in nedoločenost gibalne količine δp z gibalno količino p , pa z zvezo $rp = \hbar$ dobimo najmanjšo polno energijo v osnovnem stanju $W_1 = -me_0^4/(32\pi^2\epsilon_0^2\hbar^2)$



Slika 1. Obravnavajmo množico N atomov vodika v osnovnem stanju v enorazsežnem modelu. V koordinatnem prostoru je gostota elektronov $\Delta N/N\Delta x = \psi(x)^*\psi(x) = r_B^{-1}e^{2x/r_B}$ za $-\infty < x < 0$ in $r_B^{-1}e^{-2x/r_B}$ za $0 < x < \infty$ z Bohrovim radijem r_B . Fourierova transformacija pripelje do ustrezne gostote v prostoru gibalne količine $\Delta N/N\Delta p_x = \phi(p_x)^*\phi(p_x) = (2r_B/\pi\hbar)(1 + r_B^2 p_x^2/\hbar^2)^{-2}$ za $-\infty < p_x < \infty$. Če „ne bi bilo gibanja“, bi bi imela porazdelitev v prostoru gibalne količine zelo ozek in visok vrh v izhodišču in bi porazdelitev v koordinatnem prostoru bila konstantna, se pravi, da bi segla do zelo velikih razdalj.

in ustrezno značilno razsežnost $r_B = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/(me_0^2)$. Sklepanje te vrste pripelje do ugotovitve, da Coulombova sila ne more vezati elektronov v jedru, kot so predlagali pred odkritjem nevtrona.

V zvezi z „elektronijem“ nekajkrat omenijo „razsežni elektron“. Toda pri poskusih s trki elektronov in pozitronov v trkalniku LEP v CERN pri težiščni energiji okoli 200 GeV niso zasledili kake zgradbe v elektronu. Tej energiji ustreza de Broglieva valovna dolžina $\lambda_B/2\pi = \hbar/p = c\hbar/W \approx 10^{-18}$ m, če v skrajno relativističnem približku gibalno količino izrazimo z energijo: $p = W/c$.

Z zvezno porazdeljenim „elektronijem“ bi dobili premajhen presek za neprožno sipanje elektronov na atomih vodika pri velikih sipalnih kotih, če bi privzeli, da je togi elektronij prepusten za elektrone. Po tej poti so z merjenjem globokega neprožnega sipanja elektronov z energijo 20 GeV na vodik in devteriju zasledili tri točkaste kvarke v protonu in nevtronu.

Trdijo, da je mogoče z „elektronijem“ pojasniti večielektronske atome in kemijske vezi. Kako to uspe z elektroni, ki nimajo „delčne narave“? Kako je mogoče naboj Z -tega elektrona v atomu z Z elektroni v enodelčnem približku ločiti od krogelno simetričnega naboja $Z - 1$ preostalih elektronov? Elektroni v večielektronskem atomu imajo v osnovnem stanju obhodno vrtilno količino in ustrezni magnetni moment. Kako je mogoče to uskladiti s trditvijo, da „ni nobenega gibanja“? Kako naj potem pojasnimo lupinsko zgradbo atomov vsaj za atome na začetku periodne preglednice in magična vrstna števila žlahtnih plinov?

Kar zadeva zgodovino, je E. Schrödinger leta 1926 predlagal $-e_0\psi^*\psi$ za gostoto naboja v vodikovem atomu. Predstavo pa so kmalu opustili, ko so uvideli, da pri poskusih vselej naletimo na ves naboj elektrona in nikoli na njegov del. Vrh tega je v atomu z Z elektroni valovna funkcija določena v $3Z$ -razsežnem konfiguracijskem prostoru Z elektronov in ne v navadnem trirazsežnem prostoru. Istega leta je E. Madelung razvil hidrodinamični model kvantne mehanike z „zvezno porazdeljenim električnim nabojem z gostoto mase, ki je sorazmena z gostoto naboja“ [6]. Vendar je bil to stacionaren, ne statični model. Pa še tega so zaradi slabosti kmalu opustili.

„Elektronij“ z navedenimi lastnostmi neposredno nasprotuje fizikalnim dejstvom. Tako je popolnoma neuporaben v šoli. Pripelje do zgrešenih predstav, ki dajo zgrešeno sliko kvantne mehanike. Dijaki, ki bi se o njem učili in ki bi v nadaljevaanju študija prišli v stik s fiziko, bi morali naučeno čim prej pozabiti.

Zagovorniki modela se pritožujejo, da je „predstava s planetnimi tirnicami“ pri dijakih dokaj zasidrana. Zakaj ne bi na njej začeli graditi in jo z opisom poskusov in razglabljanjem prevedli v opis, ki bi se skladal s kvantno mehaniko? Zakaj naj bi dijaki ne obdržali predstave, da se elektroni v atomu gibljejo, a je to gibanje treba opisati drugače kot v klasični mehaniki. Zares je dijakom včasih težko ločiti spekter svetlobe, ki jo sevajo atomi, od podrobnejšega pojasnila tega spektra z gibanjem elektronov. Ob tem imajo še težavo z verjetnostno porazdelitvijo. Zakaj ne bi ločili korakov? Najprej bi opisali diskretna energijska stanja atoma. Nato bi vsaj okvirno stanja pojasnili z gibanjem elektrona, če bi se to zdelo potrebno. Pri tem se je mogoče omejiti na poskuse z elektroni v množici enako pripravljenih atomov in navesti frekvenčne porazdelitve (kot na primer na sliki 1). V ločenem koraku lahko nazadnje vpeljemo verjetnostno gostoto, s katero opišemo posamični elektron iz množice, če se to zdi potrebno.

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Tretji del fizike iz Karlsruheja*, Obzornik mat. fiz. **45** (1998) 29.
- [2] P. Prelog, *Po karlsrujski fiziki ...*, Fizika v šoli **1** (1996) 17.
- [3] F. Herrmann, *The Karlsruhe Physics Course*, Eur. J. Phys. **21** (2000) 49–58; J. Strnad, *On the Karlsruhe Physics Course*, ibid. **21** (200) L33; F. Herrmann *Reply to Comment 'On the Karlsruhe physics course'*, ibid. **22** (2001) L9.
- [4] F. Herrmann, *Karlsrujski tečaj fizike. Reakcije, valovanja, atomi*, DZS, Ljubljana 1997.
- [5] M. Budde, H. Niedderer, P. Scott, J. Leach *'Electronium': a quantum atomic teaching model; The quantum atomic model 'Electronium': a successful teaching tool*, Phys. Educ. **37** (2002) 197; 204.
- [6] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics* Wiley, New York 1974, str. 24, 33.
- [7] A. Pflug, *Elektronen sind doch ein besonderer Saft*, Tagungsband (ur. W. Kuhn), Giessen 1988.

NOVE KNJIGE

Janko Bračič, Uvod v analitično teorijo števil, Podiplomski seminar iz matematike 26, DMFAS – založništvo, Ljubljana 2003, 209 strani.

Z najnovejšim zvezkom podiplomskega seminarja iz matematike smo slovenski bralci po nekaj letih spet dobili v roke besedilo iz teorije števil. V ne preveč obsežni knjižici je avtor zbral in obdelal dostopnejša poglavja analitične teorije števil. Predstavil je zlasti tiste metode in postopke, ki vodijo do dokazov dveh dobro znanih klasičnih izrekov: praštevilskega (o tem, kako so praštevila asimptotično porazdeljena med vsemi naravnimi števili) in Dirichletovega (o praštevilih v aritmetičnih zaporedjih). Kljub svoji starosti, saj so oba izreka na tak način dokazali že v 19. stoletju, je obravnavana tematika še vedno eden najlepših primerov sodelovanja različnih matematičnih disciplin (teorije števil, algebre in analize) v odkrivanju matematične resnice.

Na kratko si oglejmo vsebino knjižice. Prvo poglavje je uvodnega značaja in vsebuje preproste primere uporabe analize pri raziskovanju števil. V drugem poglavju spoznamo, kaj so aritmetične funkcije in njihove vsote, za katere so izpeljane različne asimptotične ocene. Tretje poglavje nas nauči določati karakterje končne Abelove grupe, posebej Dirichletove karakterje, seznanimo se s periodičnimi aritmetičnimi funkcijami, njihovim Fourierovim razvojem in z Gaussovimi vsotami, prirejenimi Dirichletovim karakterjem. V četrtem poglavju se spet pojavi analiza v podobi Dirichletovih vrst, njihove konvergence in analitičnih lastnosti njihovih vsot. Peto poglavje je posvečeno Riemannovi funkciji ζ in njenim sorodnikom, Hurwitzovi funkciji ζ in Dirichletovim L -funkcijam. Te funkcije s polravnine razširimo na celotno kompleksno ravnino (z izjemo točke 1) in pokažemo, da Riemannova funkcija ζ nima ničel na navpični premici skozi točko 1. (Kot je znano, je s točno lokacijo netrivialnih ničel te funkcije povezan eden od najbolj slavnih in še vedno nerešenih matematičnih problemov: Riemannova domneva.) V šestem poglavju nas avtor najprej seznani s funkcijami Čebiševa in z ekvivalentno formulacijo praštevilskega izreka, nato pa poveže vse niti dosedanje izpeljave v dokaz obeh glavnih izrekov, praštevilskega in Dirichletovega, ter tako zaokroži zgodbo.

Če je bil avtorjev namen prikazati, kako analitične metode pomagajo pri proučevanju diskretnega sveta naravnih števil, mu je to po mojem mnenju dobro uspelo, saj je ustvaril povezano celoto z eno centralno temo. Od prve strani dalje bralca motivira in usposablja za razumevanje kasnejših dokazov. Pripravlja si različna algebrska in analitična orodja ter postopoma stopnjuje

zahtevnost, tako da bralcu kar se da olajša pot do cilja. V tem pogledu je delo lep pedagoški dosežek. Seveda pa se brez osnovnega poprejšnjega znanja o integralih, vrstah in holomorfnih funkcijah bralec ne bo mogel prebiti do konca. Kraljevskih poti v matematiko pač še vedno ni.

V načelu je knjižica dostopna vsem diplomiranim matematikom oziroma vsem, ki dovolj dobro obvladajo osnove visokošolske matematike. Ker je pisana kot učbenik in opremljena s precejšnjim številom (skupaj 97) zanimivih in ne prav lahkih nalog na koncu vsakega poglavja, je gotovo najbolj primerna za študente višjih letnikov ali za podiplomske študente matematike, zlasti za tiste, ki se nameravajo ukvarjati s teorijo števil. Morda pa jo bo z zanimanjem vzel v roke še kdo od nespecialistov, ki bi želel spoznati osnove analitičnega pristopa k tej lepi in pomembni teoriji. Ne nazadnje je bila teorija števil od nekdanjih ena glavnih povezovalnih in združevalnih tem celotne matematike in, kot kaže, bo tako ostalo tudi v 21. stoletju.

Milan Hladnik

Marija Vilfan in Igor Muševič, Tekoči kristali, Knjižnica Sigma, DMFA založništvo, Ljubljana 2002, 117 strani, (cena za študente in člane DMFA 1600 SIT).

Knjiga Tekoči kristali poskuša v slovenskem knjižnem prostoru zapolniti splošno vrzel v učbeniški in strokovni literaturi, ki se opisu tekočih kristalov kljub njihovem širokemu tehnološkemu pomenu še vedno v glavnem izogiba. Besedilo nas v 13 poglavjih popelje v svet teh, po mnenju Nobelovega nagrajenca P. G. de Gennesa, „lepih in hkrati skrivnostnih“ materialov in nam na poljudno-strokovnem nivoju pojasni njihove posebnosti v primerjavi z običajnimi snovmi in razloži principe delovanja nekaterih najbolj znanih naprav na osnovi tekočih kristalov (zasloni LCD, varilska očala, termometri, itd.).

V začetnih poglavjih bralec izve, kaj so tekoči kristali, v čem se razlikujejo od običajnih kristalov in kapljev in ter kakšne so osnovne lastnosti različnih tekočokristalnih faz. Podrobneje so obdelane predvsem razlage nematične faze in nekatere smektične faze, ki jih najpogosteje srečamo v termotropnih tekočih kristalih. Četrto poglavje najprej obravnava pojav dvojnega loma na splošno, nato pa nekoliko podrobneje opiše še eksperimentalno metodo za njegovo opazovanje v tekočem kristalu. V petem poglavju sta opisana Freederickszov prehod in elektrooptični pojav, ki ju uporabljamo v prikazovalnikih s tekočimi kristali. Šesto in sedmo poglavje podajata osnove delovanja tekočokristalnih naprav. Izvemo denimo, kakšna je razlika med preprostimi segmentnimi prikazovalniki, ki jih najdemo na ročnih urah in kalkulatorjih, ter velikimi matričnimi LCD zasloni, kot je na

primer barvni računalniški zaslon. Seznanimo se tudi z osnovami krmiljenja in najpomembnejšimi tehnološkimi problemi, povezanimi z izdelavo velikih zaslonov. Naslednja tri poglavja obravnavajo vijačne tekoče kristale, katerih periodična struktura vodi do značilnega selektivnega odboja svetlobe, ki ga izkoriščamo v različnih temperaturnih senzorjih in za izdelavo neobičajnih optičnih premazov. V vijačni smektični C* fazi se poleg tega pojavlja še feroelektričnost, ki omogoča izdelavo prikazovalnikov z zelo hitrim odzivom in velikim kontrastom. Delo končujejo poglavja o tekočokristalnih disperzijah v polimerih, o liotropnih tekočih kristalih (škoda, da jim v knjigi ni namenjenega več prostora) in kratka zgodovina tekočih kristalov.

Tekst je vseskozi popestren s številnimi ilustracijami in dvema barvnima prilogama, pri čemer so zlasti barvne slike zelo skrbno izbrane, tako da zbujajo radovednost in željo po širšem razumevanju ozadja. Knjiga, čeprav je napisana precej poljudno, predstavlja koristno dopolnilo srednješolskim in tudi univerzitetnim učbenikom fizike in kemije. Po besedah avtorjev je v osnovi namenjena vsem, ki bi radi izvedeli, kaj so tekoči kristali, odkod izvirajo njihove izjemne optične lastnosti in kako delujejo prikazovalniki. Besedilo se z eno samo izjemo dosledno izogiba rabi fizikalnih enačb, kar bo zagotovo deležno odobravanja pri mlajših bralcih in mnogih radovednejših zunaj področja fizikalne stroke. Zanimiva popestritev besedila so dodatna vprašanja oz. naloge in predlogi za poskuse, ki jih najdemo na koncu vsakega poglavja. Namenjena so v prvi vrsti učiteljem fizike, saj lahko z njimi učencu približajo in utrdijo marsikatero standardno poglavje pri pouku fizike. Vsakogar s kančkom naravoslovne žilice bo ob branju zagotovo zamikalo, da bi se opisanih oz. predlaganih poskusov lotil tudi sam. V ta namen so v knjigi navedeni nekateri komercialni viri, pri katerih je možno nabaviti ustrezne kemikalije in drugo demonstracijsko opremo, ki skupaj s knjigo lahko rabijo kot pripravna osnova za popestritev pouka, za delo v različnih interesnih krožkih in za raziskovalne naloge mladih naravoslovnih navdušencev.

Irena Drevenšek-Olenik

VESTI

NAGRADE IN PRIZNANJA DMFA SLOVENIJE ZA LETO 2002

Novi častni članici društva sta postali Marija Vencelj in Agata Tiegl.

Mag. Marija Vencelj je v zadnji četrtini 20. stoletja močno zaznamovala dogajanje na dveh pomembnih področjih slovenskega matematičnega življenja. To sta izobraževanje in vzgoja novih srednješolskih učiteljev matematike ter delo na področju popularizacije matematike in fizike med mladimi.

Vrsto let je najprej kot (takrat edina) asistentka in kasneje višja predavateljica uvajala študente različnih študijskih smeri, od matematikov in fizikov do agronomov, psihologov, farmacevtov in tekstilcev, v skrivnosti matematike in jih pri tem poleg nudenja strokovne pomoči tudi vzgajala v urejenosti in oblikovanju izdelkov ter poštenem odnosu do dela in soljudi. Sodelovala je pri pisanju Višje matematike, pred tridesetimi in več leti osnovne matematične knjige številnim generacijam študentov. Po letu 1975 se je predvsem posvetila pedagoškemu izobraževanju. Kar 25 let je študentom pedagoške matematike, bodočim srednješolskim učiteljem, predavala Elementarno matematiko z metodiko in zanje v 3. in 4. letniku vodila poseben seminar. Pri njej je diplomiralo več kot 20 študentov. Bila je njihova strokovna mentorica in neredko tudi prijateljica in svetovalka v življenjskih težavah. Organizirala je hospitacije in nastope svojih študentov po srednjih in osnovnih šolah. Zaradi številnih osebnih stikov s srednješolskimi profesorji matematike je bila v krogih slovenskih šolnikov ena najbolj znanih predavateljic matematike na ljubljanski univerzi.

Njeno delo na področju popularizacije matematike je še bolj raznovrstno. Že od študentskih let je delovala v okviru društva. Srednješolcem je predavala na matematičnih krožkih, učiteljem na društvenih seminarjih (kar še vedno rada počne). Ogromno je objavljala v slovenskih matematičnih časopisih: v Obzorniku, Matematiki v šoli in zadnjih 20 let zlasti v Preseku, od kratkih prispevkov, nalog in ugank, do daljših člankov. V njih je posebno rada obravnavala topologijo, geometrijo in teorijo števil, včasih kombinatoriko, pisala pa je tudi o matematičnih osnovah glasbe, o fiziki in o bolj splošnih temah. Številne prispevke je posvetila obletnicam velikih matematikov, kot so Lobačevski, Descartes, Laplace, Hilbert, Abel, Galois in drugi. S svojo razgledanostjo na različnih (tudi nematematičnih) področjih je bralcem vztrajno širila obzorja. Z natančno in jasno razlago jim je približala svet matematike. S smislom za lepo slovensko besedo je bralce vzgajala v kulturi izražanja, ne samo s svojimi članki, ampak tudi s prevodi Šporerjevega Matematičnega leksikona, recenzijami knjig drugih avtorjev in ne nazadnje tudi z vzorno sestavljenimi novimi učbeniki za triletno poklicne šole.

Po letu 1991 je v vlogi odgovorne urednice Preseka za vse našteje naloge lahko še bolje skrbela. Nenehno je, kljub občasnim kritikam, češ da je mesečnik prezahteven in namenjen bolj srednješolcem kot osnovnošolcem, vzdrževala njegovo pisano, interdisciplinarno in večnamensko vsebinsko podobo. Tudi v pokoju si še naprej neutrudno prizadeva za njegovo kvaliteto in dostopnost. Pri uredniškem delu uveljavlja še svoje druge odlike: praktičnost (kot le malo kateri drug urednik se je vživela v čisto tehnična vprašanja urejanja časopisa) in komunikativnost (odlično sodeluje z avtorji

in tehničnimi sodelavci).

Obema področjema, na katerih se je s svojim delom izkazala mag. Marija Vencelj, posveča Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije posebno skrb, zato je prav, da se ji člani društva za njen veliki prispevek, poleg priznanja, ki ga je prejela pred leti, oddolžimo tudi z imenovanjem za častno članico društva.

Agata Tiegl je diplomirala na Pedagoški smeri študija matematike na univerzi v Ljubljani. Zaposlila se je na Gimnaziji Moste, kjer je poučevala matematiko 13 let. Nato je 14 let poučevala matematiko in včasih tudi fiziko na Srednji elektrotehniški šoli v Ljubljani. V teh 27 letih se je intenzivno posvečala pedagoškemu delu. Poleg rednega dela v šoli je poučevala tudi na tečajih študija ob delu. Ves čas je vodila matematične krožke, pripravljala dijake za srednješolska tekmovanja iz znanja matematike in budila zanimanje za matematiko in študij matematike. Njeni učenci so se uvrščali tudi na takratno državno tekmovanje. Čeprav je študirala matematiko še v *predračunalniški* dobi, se je naučila računalniških veščin.

Dolga leta je bila vodja aktiva učiteljev matematike in fizike. Vodila je organizacijo in izvedbo 33. republiškega tekmovanja srednješolcev iz matematike in aktivno sodelovala v komisijah številnih drugih tekmovanj na različnih nivojih.

Leta 1991 se je prijavila na razpis za bibliotekarja Matematične knjižnice Oddelka za matematiko na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Kmalu je opravila bibliotekarski izpit in začela intenzivno delati pri prenosu katalogov na računalnik, predvsem v okviru informacijskega sistema CO-BISS. Zaradi njene izjemne vztrajnosti in delavnosti je prehod na računalniško obdelavo kljub nasprotovanju uspel. Po sedmih letih dela v Matematični knjižnici se je upokojila, še vedno pa pomaga pri vnosu starih knjig v CO-BISS.

Pedagoško delo kandidatke se kaže tudi v soavtorstvu zbirke nalog za srednje šole *Elementarne funkcije, kompleksna števila*. Doslej je izšlo že najmanj 15 ponatisov. Sodelovanje pri pripravi dijakov na tekmovanja in pri organizaciji tekmovanj se potrjuje tudi v soavtorstvu knjige *Rešene naloge iz matematike s šolskih in izbirnih tekmovanj*.

Profesorica Tieglova se je zlasti v času, ko je bila bibliotekarka, ukvarjala tudi z zgodovino pouka matematike v naših krajih. Zbirala je matematično učno literaturo od 19. stoletja naprej in temeljito obdelala doslej manj znanega pedagoga Blaža Matka. Prispevek o njem je izšel tudi v reviji *Matematika v šoli*.

V devetdesetih letih so se bližale obletnice: 200-letnica izdaje Vegovih logaritmov in drugih del. Kandidatka je zbrala mnogo Vegovih del, o Vegi

in o logaritmih je spisala več prispevkov: v soavtorstvu z dr. Gerlinde Faustmann članek Jurij Vega in njegovi sodobniki, dva prispevka leta 1997 in 1998 in Zgodovino logaritmov (vsi prispevki so izšli v *Matematiki v šoli*), za revijo Spika pa je pripravila članek Nastanek logaritmov. V reviji Presek je leta 1994 objavila prispevek Popolna zakladnica logaritmov.

Kot rezultat študija matematika Blaža Matka je ob 48. občnem zboru DMFA Slovenije v Postojni pripravila razstavo Ob stoletnici učbenikov Blaža Matka 1896–1996. Hkrati je izšla tudi njena publikacija o Blažu Matku. V njej je podala natančen pregled vseh učbenikov, ki jih je Matek spisal, opis vsebin in ponatise nekaj strani nekaterih učbenikov, nadalje je v publikaciji podala kratek življenjepis in okoliščine, v katerih je Matek deloval. V okviru I. kongresa matematikov, fizikov in astronomov Slovenije oktobra 1994 je prispevala referat 200-letnica Thesaurusa Jurija Vege, Zgodovinski pregled nastajanja logaritmov. V prostorih Cankarjevega doma, kjer je kongres potekal, je pripravila izredno bogato in lepo razstavo o Juriju Vegi in njegovih delih. S tem je bistveno pripomogla, da so učitelji matematike, pa tudi širša javnost, bolje spoznali Jurija Vego, tega enkratnega matematika slovenskega rodu.

Končno naj omenimo še delovanje profesorice Tieglove v okviru našega društva. V letih od 1974–1976 ter 1991–1992 je opravljala v splošno zadovoljstvo dela blagajnika društva, v letih 1978–1980 pa je bila članica nadzornega odbora.

Iz zgoraj zapisanega povzemamo, da je bila profesorica Agata Tiegl zavzeta pedagoginja, aktivna sodelavka društva, oseba, najbolj zaslužna za modernizacijo Matematične knjižnice, raziskovalka zgodovine pouka matematike na Slovenskem in oseba, ki je znatno prispevala k osvetlitvi lika in dela Jurija Vege in Blaža Matka.

Društvena priznanja so prejeli Marjeta Košak, Dragica Kurillo, Alojz Robnik, Milena Štuklek in Diomira Tkalič.

Marjeta Košak je profesorica matematike na Gimnaziji Center Celje in ima naziv svetovalke. V letih od 1994 do 1996 je vodila celjsko podružnico DMFA Slovenije. Bila je odgovorna za izvedbo državnega tekmovanja iz matematike za zlato Vegovo priznanje v celjski regiji. Kot članica državne komisije za tekmovanje iz matematike je sodelovala tudi pri sestavljanju nalog. Kot zunanja sodelavka Zavoda RS za šolstvo je kot samostojna svetovalka organizirala študijske skupine za matematiko na osnovnih in srednjih šolah in na njihovih srečanjih tudi predavala, med drugim o uporabi žepnega računalnika pri pouku matematike. S svojim delom je pripomogla k izdaji zbirke *Naloge za intenzivno utrjevanje v srednjih šolah*.

Vodila je skupino za vrednotenje nalog zunanjega preverjanja znanja iz matematike za osnovno šolo na Zavodu RS za šolstvo na področju organizacijske enote Celje. Sodelovala je tudi pri uvajanju devetletne osnovne šole. Osem let sodeluje z državnim izpitnim centrom kot zunanja ocenjevalka za matematiko na maturi. Kot regijski vodja zunanjih ocenjevalcev za celjsko regijo vodi ocenjevanje in menjavo maturitetnih nalog.

Profesorica Marjeta Košak zna navdušiti učence za matematiko, zato ni čudno, da njeni dijaki na tekmovanjih dosegajo nadpovprečne rezultate. Hkrati pa zna svoje znanje in izkušnje o poučevanju prenašati tudi na druge poklicne kolegice in kolege.

Dragica Kurillo je predmetna učiteljica matematike na OŠ Orehek Kranj. Ima izjemen smisel za oblikovanje izvirnih didaktičnih igrice, plakatov, prosojnic in raznih učnih sredstev, kar je prikazala tudi na izobraževalnih seminarjih. Sproti se seznanja z novimi metodami poučevanja in v pouk vpleta tudi drobce iz zgodovine matematike. Na šoli vodi dopolnilni in dodatni pouk, zato njeni učenci dosegajo vidne rezultate na tekmovanjih za Vegova priznanja in tekmovanjih iz logike.

Njena vsestranskost se kaže tudi pri drugih dejavnostih, saj je na OŠ Lucijana Seljaka v Kranju (kjer je prej poučevala) vodila fotografski in lutkovni krožek ter krožek ročnih del, sedaj pa pod njenim vodstvom učenci pripravljajo in izdajajo šolski matematični časopis. Kot mentorica študentom Pedagoške fakultete pomaga tudi bodočim profesorjem matematike, saj pri njej študenti hospitirajo in imajo nastope. Sodeluje tudi z regijskim aktivom matematikov. Napisla je zbirko matematičnih nalog, priročnik in brošuro *Z Jurijem Vego na pot v svet matematike* z nalogami za ponavljanje za 8. razred. V mednarodnem letu matematike je sodelovala s plakati in prejela nagrado, plakat je bil natisnjen tudi na naslovnici Preseka. Bila je tudi recenzentka matematičnih učbenikov za osnovno šolo in zanje naredila tudi letno razporeditev snovi. S tremi soavtoricami je pripravila komplet didaktičnih pripomočkov za 5. in 6. razred.

S svojim delom pomaga učencem osvojiti matematično znanje, jih navdušuje za matematiko, hkrati pa svoje bogate izkušnje prenaša tudi na druge profesorje.

Mag. Alojz Robnik je profesor matematike na I. Gimnaziji v Celju. Po končanem magistrskem študiju pedagoške matematike je bil nekaj časa tudi asistent za Analizo I na Pedagoški fakulteti v Mariboru, po izvolitvi v maturitetno predmetno komisijo pa je to delo opustil. Poučuje že več kot 20 let.

Sodelavci, učenci in starši ga spoštujejo in cenijo predvsem zaradi njegovih jasnih, razumljivih ter skrbno načrtovanih in izvedenih ur pouka. Njegove priprave na pouk obsegajo vsak korak razlage in utrjevanja učne snovi ter postopno in metodično dognano razlago nalog, kar kaže na njegovo zavzeto in strokovno delo v šoli. Pri svojem delu je dosleden in natančen, a se zna približati dijakom, zato se njegovim učencem matematika ne zdi nedostopna in dosegajo dobre rezultate tudi na maturi. Nekaj njegovih dijakov se vsako leto vpiše na študij matematike.

Dijake navaja na branje matematične literature (Presek, Logika in razvedrilna matematika) in jih spodbuja k udeležbi na matematičnih tekmovanjih.

S svojimi recenzijami učbenikov prispeva k njihovim izboljšavam, sodeluje pa tudi kot soavtor pri pisanju zbirk matematičnih nalog, naj med njimi omenimo le zbirko *Priprava na maturo*, ki je izšla lani.

Milena Štuklek je predmetna učiteljica matematike in fizike. Poučuje na OŠ Ludvika Pliberška v Mariboru. Ima naziv svetovalke in poleg poučevanja opravlja tudi naloge pomočnice ravnatelja.

S svojim delom v šoli spodbuja k delu tudi tiste učence, ki jim matematika dela težave, a hkrati ne pozabi na tiste, ki jim matematika dobro gre, zato se vsako leto njeni učenci uspešno udeležujejo tekmovanj za Vegova priznanja. Sodeluje tudi pri organizaciji in izvedbi regijskih tekmovanj iz matematike. Nekaj let je vodila tudi področno študijsko skupino za matematiko ter za uspešno in zavzeto delo v vzgoji in izobraževanju prejela Šilihovo plaketo. Od leta 2001 sodeluje v predmetni komisiji za pripravo nacionalnih preizkusov iz matematike za devetletke. Sodelovala je tudi pri pripravi *Katalogov učnih ciljev za 6. razred* ter pri preučevanju nevralgčnih učnih mest pri pouku matematike. Sodelovala je pri poskusnem uvajanju alternativnega učbenika za matematiko (Presečišče 5). Njene kritične in tehtne pripombe so pripomogle k izboljšavi kompleta učbenikov Presečišče in ustreznih gradiv, ki so spremljala učbenike. Kot soavtorica je sodelovala tudi pri pripravi enega od didaktičnih gradiv pri tem kompletu.

Kot mentorica študentom Pedagoške fakultete pomaga pri prvih korakih v razredu in svoje znanje prenaša na mladi rod učiteljev. Svoje znanje in izkušnje rada prenaša na svoje kolegice in kolege na številnih seminarjih po vsej Sloveniji, a se hkrati tudi sama udeležuje različnih seminarjev in si tako dopolnjuje svoje znanje.

Diomira Tkalcíč je profesorica matematike in fizike na osnovni šoli Vojke Šmuc v Izoli, kjer je zadnjih sedem let tudi ravnateljica. Ima naziv svetnik.

Pri pouku matematike je posvečala veliko pozornost nadarjenim učencem, zato so njeni učenci dosegali prva mesta na mednarodnem tekmovanju *matematični izziv* (Disfida mathematica) v Palmanovi ter najvišja mesta na tekmovanjih za Vegova priznanja. Kot ravnateljica skrbi tako za temeljito izobrazbo svojih učencev kot za pravilno vzgojo, zato je kot mentorica spodbudila učence k izdelavi raziskovalne naloge *Razširjenost drog med osnovnošolci na izolskem področju*.

Je članica organizacijskega odbora tekmovanja Matematični izziv, ki poteka izmenično v treh državah: Italiji, Avstriji in Sloveniji. Med prvimi se je vključila v postopno uvajanje devetletke in pripravila seminarje in predavanja za ravnatelje osnovnih šol. Sodeluje tudi pri drugih seminarjih, ki jih organizira Zavod RS za šolstvo. Napisala je tudi štiri knjige o diferenciaciji pouka matematika od 5. do 8. razreda. Eno leto je vodila tudi podružnico DMFA Koper.

Diomira Tkalcíč je pri svojem delu uspešna ne le zato, ker se neprestano izobražuje in sprejema nove izzive, ampak tudi zato, ker s svojo vedrino in zagnanostjo pritegne k delu tudi druge ravnatelje, profesorje, učence in starše.

Na podlagi predlogov zapisali:

*Anton Suhadolc, Janez Krušič, Milan Hladnik,
Maja Manohin in Nada Razpet*

PROFESORJA ZVONIMIR BOHTE IN ANTON SUHADOLC POSTALA ZASLUŽNA PROFESORJA

V okviru tedna Univerze v Ljubljani (UL) so bila 3. 12. 2002 podeljena priznanja UL za leto 2002. Naziv **zaslužni profesor Univerze v Ljubljani** sta prejela tudi upokojena redna profesorja matematike Zvonimir Bohte in Anton Suhadolc. Povzemimo utemeljitvi, ki sta bili predstavljeni na podelitvi.

Profesor **Zvonimir Bohte** je kot prvi s področja matematike začel svoje znanstveno in pedagoško delo na UL na novih področjih matematike – uporabni in računalniški matematiki, s poudarkom na numerični analizi, matematičnem modeliranju in programiranju. Kot izredno dobremu pedagogu in sposobnemu organizatorju mu je uspelo okoli sebe zbrati skupino mladih in navdušenih kolegov in postaviti temelje ljubljanski šoli za uporabno matematiko. Večina matematikov, učiteljev, ki poučujejo predmete te vrste na UL, je njegovih študentov. Bil je tudi ustanovitelj in vodja seminarja iz numerične analize na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko.

Prof. Bohteta štejemo tudi med očete programerskega dela računalništva pri nas. Leta 1964 je izdelal elaborat: študij numeričnih metod in izdelava osnovnih podprogramov za računalnik Z-23 in bil s tem pobudnik ustanovitve prvega računalniškega centra na UL. Ko je računalnik Z-23 prispel v Ljubljano, je bil dan v uporabo tudi novoustanovljenemu Računskemu centru Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko. Prof. Bohte je kot eden prvih vodij tega centra začrtal smernice njegovega delovanja. Ob tem je imel velik posluh za probleme, ki so nastajali v gospodarstvu, pa naj je šlo za razne optimizacijske naloge, kot npr. linearno programiranje, bodisi za reševanje povsem tehnično obarvanih problemov, kot je npr. načrtovanje turbin.

Po doktoratu je svoje pedagoško delo opravljal ne samo na vrsti fakultet UL, ampak je sodeloval na večini podiplomskih študijev s področja numerike na raznih univerzah takratne Jugoslavije. Prav njemu gre zasluga, da je dobila solidno poznavanje numeričnih metod vrsta podiplomskih študentov tehniških fakultet. Kot mentor in človek je bil izredno priljubljen. Bil je mentor kar 87 dodiplomskim študentom, enajstim magistrantom in šestim doktorandom. K pedagoškemu delu sodijo tudi številni objavljeni učbeniki, ki so študentom omogočili preprost vpogled v numerično matematiko. Tudi zato ga imamo za ustanovitelja (nestorja) slovenske numerične matematike.

Prof. Bohte je bil ploden tudi na raziskovalnem področju. Izpopolnjeval se je večkrat v tujini, najraje je obiskoval National Physical Laboratory v Angliji, kjer je bil dobrodošel gost. V širšem (svetovnem) merilu so pomembni njegovi prispevki predvsem na področju numerične analize. Njegova dela so bila tudi velikokrat citirana.

Prof. Bohte je tudi izredno mnogo prispeval k razvoju matematike na Slovenskem. Pri DMFA je sodeloval v komisiji za popularizacijo matematike, prispeval vrsto poljudnejših sestavkov v Preseku in Obzorniku za matematiko in fiziko. Tudi odgovornih funkcij se ni branil. Tako je bil npr. direktor Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko v letih 1982–1990, ko je moral prebroditi tudi težke čase najhujše inflacije.

Profesor **Anton Suhadolc** je 39 let, od 1960 do 1998, poučeval na UL, od tega 18 let kot redni profesor. Večinoma je predaval študentom matematike, in sicer je stalno poučeval najmanj en predmet, ki je bil med ključnimi v študijskem programu matematikov, vseh njegovih dodiplomskih predmetov skupaj pa je bilo kar 13. Predaval je tudi na podiplomskem študiju in dolga leta je bil vodja tedaj enotnega podiplomskega seminarja. Tako je bistveno zaznamoval vzgojo matematikov na UL v drugi polovici 20. stoletja. Poleg tega je poučeval skupaj kakih 10 dodiplomskih in podiplomskih predmetov na drugih, nematematičnih študijskih smereh. Njegova predavanja so bila na visoki strokovni ravni, vedno pa se je zelo potrudil, da so bila

kolikor mogoče dostopna. Pri ustnih izpitih je bil strog izpraševalec, vendar skrajno korekten in prijazen in ocenjeval je pravično.

Prof. Suhadolc je bil mentor pri 66 diplomskih in 6 magistrskih delih. Dobesedno neizmerna pa je količina neformalnega mentorskega dela, ki ga je opravil v svojem življenju. Tako matematiki kot univerzitetni delavci drugih strok so pogosto prihajali k njemu na pogovor o svojih matematičnih problemih. To zaupanje si je pridobil s svojo široko matematično kulturo in izobrazbo, izjemno sposobnostjo in voljo za vživljanje v tuje probleme in z zelo korektnim odnosom do sogovornikov.

Svoje raziskovalno delo je prof. Suhadolc posvetil predvsem matematični analizi. Med njegovimi najpomembnejšimi deli je 11 znanstvenih člankov, ki so izšli v mednarodnih znanstvenih revijah zgornjega kakovostnega razreda. Poleg znanstvenih del je objavil še 18 člankov v domači strokovni literaturi, šest dodiplomskih učbenikov manjšega obsega, dva podiplomska učbenika in veliko število recenzij. Za svoje znanstveno delo je leta 1974 dobil Kidričevo nagrado, za svojo mnogostransko aktivnost pri DMFA Slovenije pa leta 1983 posebno priznanje in leta 2001 častno članstvo v tem društvu.

Prof. Suhadolc je bil dve leti predsednik DMFA Slovenije, dvakrat po dve leti predstojnik Oddelka za matematiko in mehaniko na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo in na koncu svoje aktivne dobe dekan novoustanovljene Fakultete za matematiko in fiziko.

Jernej Kozak in Jože Vrabec

MEDNARODNO PRIZNANJE BORU PLESTENJAKU

Na XV. Householderjevem simpoziju v kraju Peebles na Škotskem so lansko leto junija podelili 11. Householderjevo nagrado za najboljšo disertacijo v zadnjih treh letih s področja numerične linearne algebre. Nagrado je dobila Jing-Rebecca Li (MIT, Boston). Žirija pa je podelila tudi tri druge nagrade (honorable mentions). To priznanje so dobili Bor Plestenjak (Univerza v Ljubljani), Andrea Tosselli (Courant Institute, New York) in Hao-Min Zhou (UCLA, Los Angeles). Vsi imenovani so bili povabljeni na simpozij. Lijeva in Plestenjak sta tam tudi poročala o svojih rezultatih.

Nastejmo nekaj podatkov iz Plestenjakovega življenjepisa. Rojen je bil leta 1970 v Ljubljani. V letih 1990–1993 je študiral matematiko na uporabni smeri visokošolskega študija na FMF. Leta 1993 je za delo *Optimalni cirkulantski operatorji* prejel Prešernovo nagrado Univerze v Ljubljani. Istega leta je diplomiral pri prof. dr. Matjažu Omladiču. Leta 1997 je magistriral na raziskovalni smeri Oddelka za matematiko in mehaniko. Magistrsko nalogo *O numeričnem reševanju večparametričnega problema lastnih vrednosti* je izdelal pod vodstvom prof. dr. Zvonimirja Bohteta. Doktoriral

je leta 1999 z uspešnim zagovorom disertacije *Metode zveznega nadaljevanja za večparametrične probleme lastnih vrednosti*. Njegov mentor je bil prof. dr. Tomaž Košir. To Plestenjakovo delo je bilo nominirano za Householderjevo nagrado. Od leta 1994 do leta 1999 je bil kot mladi raziskovalec zaposlen na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko, potem pa je postal asistent za matematiko na FMF. V naziv asistenta je bil prvič izvoljen leta 1994, ponovno pa leta 1997. Leta 2000 je postal docent in na FMF predava razne numerične predmete. Ob numerični linearni algebri se uspešno ukvarja tudi s teorijo grafov. Doslej je objavil že 11 znanstvenih člankov v priznanih mednarodnih matematičnih revijah.

Pomembnost Plestenjakovega priznanja je razvidna iz kratkega opisa zgodovine teh simpozijev. Organizator srečanj, ki so se sprva imenovala Gatlinburški simpoziji, je bil Alston S. Householder (1904–1993). Vsem, ki so se kdaj srečali z numerično linearno algebro, je poznan po svojih – Householderjevih transformacijah ali zrcaljenjih. Njegovi knjigi *Principles of Numerical Analysis* in *The Theory of Matrices in Numerical Analysis* sta monografiji, ki sta dali numerični analizi status znanosti. Gatlinburški simpoziji so bili organizirani vsaka tri leta od 1961 dalje. Na njih je vsakokrat sodelovalo le omejeno število povabljenih specialistov s področja numerične linearne algebre. Leta 1987, ko se je Householder upokojil, so simpozij poimenovali po njem. Od leta 1972 dalje so na vsakem simpoziju podelili t. i. Householderjevo nagrado. Med prejšnjimi dobitniki so najbolj znani: Paul van Dooren, James M. Demmel, Nicholas J. Higham in Alan Edelman. Zadnjo mednarodno komisijo za podelitev nagrade so sestavljali: James Demmel, Ludwig Elsner, Volker Mehrman, Charles Van Loan in Olof Widlund.

Za odmevno priznanje, s katerim si je utrl pot med svetovno elito na področju numerične linearne algebre, Boru Plestenjaku iskreno čestitam.

Zvonimir Bohte

VABILO

Čebelarska zveza Slovenije in Apimondia vabita na svetovni čebelarski kongres APIMONDIA 2003, ki bo v Ljubljani od 24. do 29. avgusta 2003, z veliko mednarodno čebelarsko razstavo čebelarskih pridelkov in opreme ter drugimi spremljajočimi dogodki. Več informacij o tem lahko preberete na spletni strani kongresa na internetu v šestih tujih jezikih – <http://www.apimondia2003.com>, ali pa vam jih lahko posreduje g. Peter Kozmus, Cankarjev dom, tel. (01) 2417 364.

Janez Grad

OBZORNIK ZA MATEMATIKO II

LJUBLJANA, MAJ 2003

Letnik 50, številka 3

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52

R 177/03



100001170,3

COBISS

VSEBINA

ODPISANO

Članki

Strani

Asociativne sheme, Aleksandar Jurišić in Štefko Miklavič	65–81
O elektronih v atomu, Janez Strnad	82–85

Nove knjige

Uvod v analitično teorijo števil, Milan Hladnik	86–87
Tekoči kristali, Irena Drevenšek-Olenik	87–88

Vesti

Nagrade in priznanja DMFA Slovenije za leto 2002, Anton Suhadolc, Janez Krušič, Milan Hladnik, Maja Manohin in Nada Razpet	88–94
Profesorja Zvonimir Bohte in Anton Suhadolc postala zaslužna profesorja, Jernej Kozak in Jože Vrabec	94–96
Mednarodno priznanje Boru Plestenjaku, Zvonimir Bohte	96–III
Vabilo, Janez Grad	III

CONTENTS

Articles

Pages

Association schemes, Aleksandar Jurišić and Štefko Miklavič	65–81
On electrons in atom, Janez Strnad	82–85

New books	86–88
---------------------	-------

News	88–III
----------------	--------

Na naslovnici Maurits Cornelis Escher, *Relativnost*, 1953; glej uradno spletno stran www.mcescher.com.