

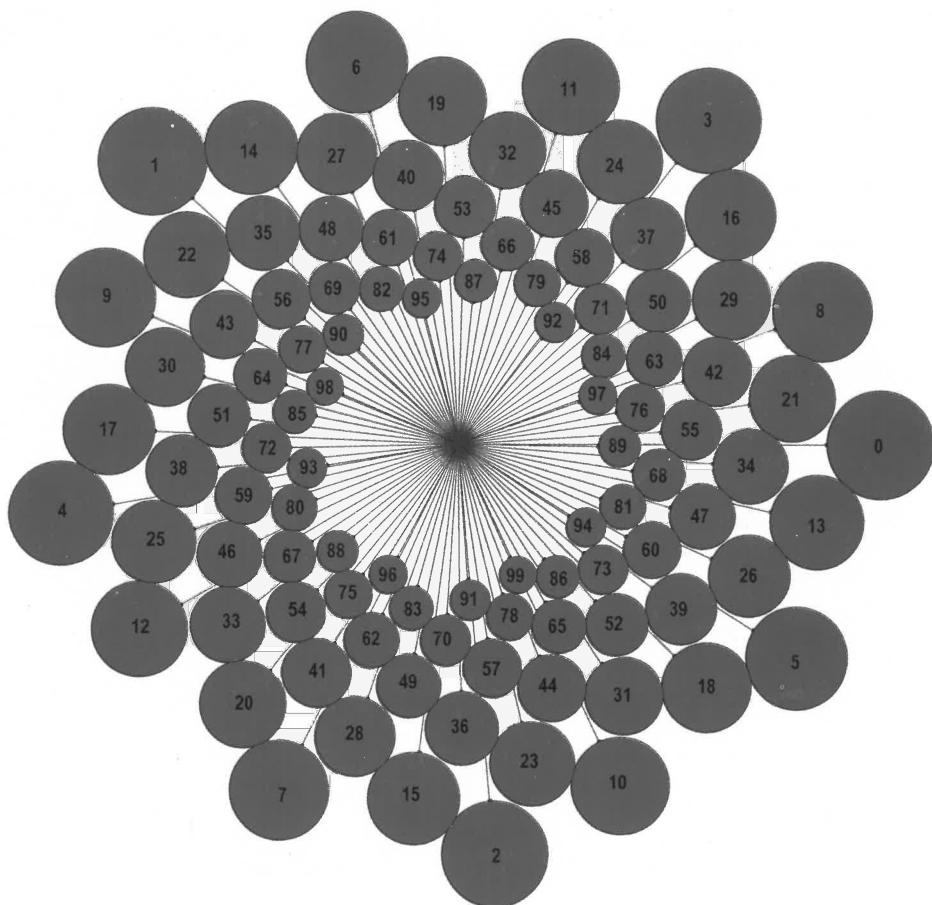
ODPISANO

2003

Letnik 50

2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2003, letnik 50, številka 2, strani 33–64

Naslov uredništva: DMFA-založništvo, Jadranska ul. 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana.
Spletna stran: <http://www.fmf.uni-lj.si/~zaloznistvo/omf/> **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460. **Telefaks:** (01) 2517281. **Devizna nakazila:** SKB banka d. d., Ajdovščina 4, Ljubljana. **SWIFT:** SKBASI2X. **Transakcijski račun:** 03100-1000018787.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Alenka Klokočovnik (društvene novice), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič. Natisnjeno v Tiskarni KURIR v nakladi 1450 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 4000 SIT, za študente 2000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 800 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

© 2003 DMFA Slovenije – 1533

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželen velikost črk je vsaj 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

DINAMIČNI MODEL SPIRALNE FILOTAKSE

PRISPEVEK K RAZUMEVANJU FILOTAKSE, 1. DEL

MILAN HLADNIK

Math. Subj. Class. (2000): 37 D 40; 92 C 15, 92 C 80

V članku predstavimo preprost geometrijski dinamični sistem v ravnini, pri katerem lahko opazujemo podobne značilnosti kot pri naravnih sistemih v rastlinski morfogenezi. Izhajajoč iz majhnega števila smiselnih predpostavk, skušamo matematično pojasniti nastanek konstantnega divergenčnega kota in pravilnih geometrijskih vzorcev v porazdelitvi elementov dane orbite.

A DYNAMICAL MODEL FOR SPIRAL PHYLLOTAXIS

A CONTRIBUTION TO UNDERSTANDING PHYLLOTAXIS, PART 1

In the article we present a simple geometrical dynamical system in the plane which reveals similar characteristics as we can observe in natural systems related to plant morphogenesis. Based on a small number of assumptions we try to explain mathematically the appearance of a constant angle of divergence and regular geometric patterns in the distribution of elements of an orbit.

1. Uvod

Pozorni opazovalci narave, zlasti tisti, ki so v njej iskali lepoto in globlje zakonitosti, kot sta bila npr. Leonardo da Vinci ali kasneje Johann Wolfgang Goethe, so že zdavnaj odkrili pravilne geometrijske vzorce v zgradbi določenih rastlin ali njihovih delov, npr. urejenost listov pri številnih drevesnih vrstah, spiralno mrežo v cvetni košarici sončnice ali marjetice ter spirale pri plodu ananasa ali pri češarku. Vzorci nastanejo kot posledica tvorbe listov, cvetov ali semenskih nastavkov v pravilnem zaporedju. Za opisovanje in proučevanje tovrstnih matematičnih zakonitosti v rastlinskem svetu se je uveljavil izraz *filotaksa*, ki dobesedno pomeni *urejenost listov*. O tem je v zadnjem času pisal *Presek* (glej [8]). Tu nas bo v glavnem zanimala spiralna simetrija.

Zgodovina raziskovanja pojava je dokaj stara in razgibana, posejana s pronicljivimi opažanji in dobrimi idejami, a tudi z mnogimi stranpotmi in napačnimi razlagami. Vsekakor je tema od nekdaj privlačila razmišljajoče ljudi ravno zaradi matematične pravilnosti. Presenetljivo je bilo npr. odkritje, da so nekatere numerične količine (denimo število spiral) pogosto v zvezi s členi Fibonaccijevega zaporedja. Prvi, ki je eksplicitno povezal filotakso s Fibonaccijevimi števili, je bil Johannes Kepler, za njim se je v 18. stoletju s problemom spiralne ureditve listov ukvarjal Charles Bonnet. Matematične osnove filotakse je poskušal podati Karl Friedrich Schimper leta 1830, ko je uvedel osnovne pojme, kot so osnovna spirala, divergenca, parastihija ipd.

Njegov sodelavec Alexander Braun je pokazal povezavo s končnimi verižnimi ulomki (predpostavljal je, da so vsa razmerja racionalna). Delo sta nadaljevala brata Auguste in Louis Bravais, začetnika kristalografije, ki sta obravnavala ravninsko mrežo in pravilno ugotovila, da je treba delati z racionalnimi približki iracionalnih števil. Leta 1837 sta ugotovila, da je t. i. *divergenčni kot* (tj. kot med časovno zaporednima semenskima nastavkoma) zelo blizu *zlatemu kotu*, tj. kotu $\theta = 2\pi(1 - \tau) \approx 137,5^\circ$, kjer je $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618$ razmerje zlatega reza. Dobro pa je znano (in lahko dokazljivo), da razmerje zaporednih Fibonaccijevih števil konvergira k številu τ . Leta 1868 je Wilhelm Hofmeister formuliral nekatere splošne predpostavke, iz katerih je mogoče izpeljati geometrijske lastnosti in do neke mere pojasniti pojave (primerjaj 1. razdelek). De Candolle pa je leta 1881 odkril, da se Fibonaccijeva filotaksa razlikuje od filotaks z drugimi možnimi divergencami po tem, da ustrezni verižni ulomki nimajo vmesnih konvergentov, kar omogoča botanično ugodno razporeditev listov.

Kasneje, v 20. stoletju, so se z razlago filotakse bolj ali manj uspešno ukvarjali številni znani in manj znani raziskovalci: biologi, fiziki in matematiki. Med njimi najdemo npr. D'Arcy Thompsona, Schouteja, Churcha, Turinga, M. in P. Snowa, Richardsa, Coxeterja, Adlerja in druge. Zanimanje za filotakso se je obnovilo v zadnjih petindvajsetih letih. Medtem ko jo biologi skušajo (za zdaj neuspešno) pojasniti na mikroskopskem nivoju, na osnovi dogajanj v zarodnih celicah, pa se matematiki in fiziki bolj ukvarjajo z dinamiko procesa v celoti. Nekateri predstavijo semena sončnice z enakimi ali različno velikimi krogi, ki se ne prekrivajo, in razlagajo njihovo razporeditev z največjo strnjenostjo (tj. z najbolj učinkovitim pakiranjem) teh krogov [7]. Seveda gre pri tem le za zunanji, geometrijski opis; želeli bi poznati notranje (biološke in fizikalne) razloge za nastanek pojava. Za fizike je filotaksa neke vrste eksotična kristalografija. Iščejo fizikalno razlago prostorske razporeditve semenskih nastavkov (v smislu, da se nov nastavek pojavi na mestu, kjer je skupni odbojni potencial dotedanjih nastavkov najmanjši). Tovrstne fizikalne modele so v začetku devetdesetih let 20. stoletja zgradili L. S. Levitov ter Y. Couder in S. Douady, matematično pa jih je utemeljil M. Kunz 1995 [4]. Našli so tudi sorodnosti z drugimi fizikalnimi pojavi (npr. z razporeditvijo namagnetjenih oljnih kapljic v magnetnem polju), s katerimi lahko eksperimentirajo ali jih računsko simulirajo [2]. Vsekakor je treba še enkrat poudariti, da ne poznamo bioloških mehanizmov, ki so pravi vzrok za nastanek geometrijskih vzorcev v rastlinski morfogenezi (odgovor na to vprašanje bo morda prinesel razvoj genetike). Na vprašanje, zakaj ravno tak razpored sestavnih delov, pa je do neke mere mogoče odgovoriti z matematiko in fiziko. Najbolj celovito je doslej problem filotakse, ki je

kompleksen pojav, obravnaval Roger V. Jean v svoji knjigi [3].

V tem sestavku bomo predstavili preprost ravninski geometrijski dinamični sistem, ki je precejšnja poenostavitev obstoječih fizikalnih modelov, a vendar omogoča opazovati in pojasniti podobne pojave, zlasti porazdelitev elementov sistema v spiralno mrežo. Poiskali bomo njegovo edino (privlačno) negibno točko, podrobnejšo obravnavo stacionarnega modela s konstantnim divergenčnim kotom pa bomo prihranili za naslednji članek (objavljen predvidoma v naslednji številki *Obzornika*).

2. Dinamični sistem in njegova stabilnost

Obravnavali bomo ravninski primer z danim središčem. Najbolje si ga je predstaviti v kompleksni ravnini in postaviti središče sistema v koordinatno izhodišče.

Privzemimo naslednji dve predpostavki (obe temeljita na botaničnih opazanjih):

(a) *Elementi sistema (v botaniki nastavki semen, listov ali cvetov) se pojavljajo periodično (tj. v enakih časovnih intervalih) na različnih mestih na majhni krožnici okrog središča.*

(b) *Ko se element enkrat pojavi, se radialno oddaljuje od središča tako, da je njegova hitrost proporcionalna oddaljenosti.*

Za zdaj si element predstavimo s točko v kompleksni ravnini (v polarni obliki) $z = re^{i\phi}$. Rodovna krožnica naj ima polmer kar 1 (z normalizacijo lahko to vedno dosežemo). Perioda pojavljanja je odvisna od zunanjih okoliščin in naj se med tvorbo sistema ne spreminja. Predpostavka (b) pomeni, da je radialno oddaljevanje točke od središča eksponentno ($r = e^{ct}$, $c > 0$) oziroma da radialne oddaljenosti zaporednih točk od središča tvorijo geometrijsko zaporedje. Če je namreč T perioda, se po n -korakih (tj. po preteku časa nT) začetna točka nahaja v oddaljenosti e^{ncT} od koordinatnega izhodišča. Označimo $a = e^{cT} > 1$, torej je razdalja enaka a^n . Elementi, ki so se pojavili kasneje, pa so zapovrstjo oddaljeni a^{n-1} , a^{n-2} , ..., a^2 , a in najnovejši 1.

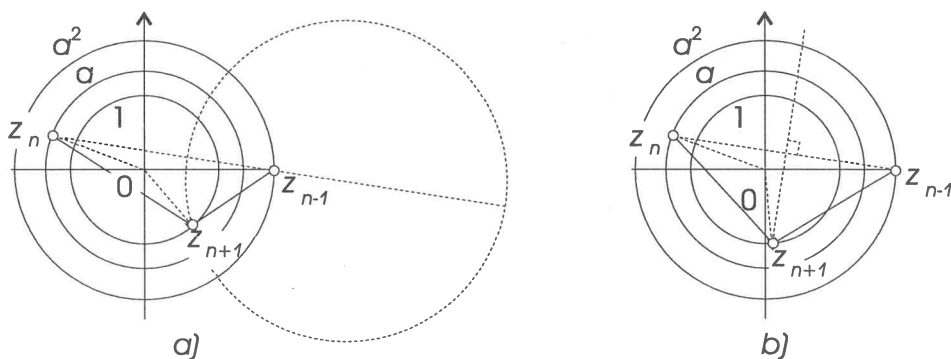
Označimo s ϕ_n kot, ki ga tvori vektor od izhodišča do n -te zaporedne točke z vektorjem do prejšnje točke. Ta kot imenujemo n -ti *divergenčni kot*. Izberimo začetno točko z_0 na realni osi. Potem je *polarni kot* n -te točke z_n enak $\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$. Kote bi seveda lahko reducirali po modulu 2π . Če je kot ϕ_1 za zdaj še poljuben, nastane vprašanje, kakšen naj bo naslednji divergenčni kot ϕ_2 . Podobno je na vsakem koraku: Če že imamo določene divergenčne kote prejšnjih točk, kakšen je divergenčni kot

naslednje točke? Predpostavili bomo, da predhodni elementi vplivajo na to, kje se bo pojavil naslednji element, vendar ne vsi enako. Najmočnejši odbojni potencial predstavlja zadnji generirani element, nato predzadnji, vpliv prejšnjih elementov pa zaradi lažjega računanja v našem modelu zanemarimo.

Naj bo razmerje med obema upoštevanima potencialoma ves čas konstantno. Odbojni potencial posameznega elementa na danem mestu je običajno obratno sorazmeren z oddaljenostjo od njega ali kaj podobnega, zato je smiselna naslednja predpostavka.

(c) *Nova točka naj se pojavi na enotski krožnici na mestu, kjer je razmerje med oddaljenostjo do zadnje točke in oddaljenostjo do predzadnje točke konstantno (enako $k \geq 1$).*

Matematično to zapišemo v obliki $|z_{n+1} - z_n| = k|z_{n+1} - z_{n-1}|$. Iščemo točko z_{n+1} na enotski krožnici, kjer velja ta zveza (slika 1a). To je očitno presečišče enotske krožnice z Apolonijevo krožnico, konstruirano nad točkama z_n in z_{n-1} pri danem razmerju k (vedno vzamemo tisto od presečišč, ki je od premice skozi z_n in z_{n-1} bolj oddaljeno, tako da je skupni potencial najmanjši možni).



Slika 1.

Ker nas zanimajo samo divergenčni koti, lahko z zasukom dosežemo, da je $z_{n-1} = a^2$ in $z_n = ae^{i\phi_n}$. Iščemo točko $z = z_{n+1} = e^{i(\phi_n + \phi_{n+1})}$ na enotski krožnici, kjer velja (slika 1a)

$$|z - ae^{i\phi_n}| = k|z - a^2|.$$

Kvadriramo in izrazimo ustrezno relacijo v realnem (s trigonometričnimi funkcijami), pa dobimo implicitno zvezo

$$a^2 - 2a \cos \phi_{n+1} + 1 = k^2(a^4 - 2a^2 \cos(\phi_{n+1} + \phi_n) + 1). \quad (1)$$

Če bi iz te zveze znali izraziti kot ϕ_{n+1} , bi dobili eksplicitno rekurzivno formulo za izračun naslednjega divergenčnega kota iz prejšnjega: $\phi_{n+1} = f(\phi_n)$. Upoštevajmo, da je prvi divergenčni kot poljuben, npr. $\phi_1 = \vartheta$, pa je pred nami preprost diskretni dinamični sistem. Poseben primer dobimo pri $k = 1$, ko Apolonijeve krožnice postanejo simetrane daljic med zaporednima točkama (glej sliko 1b).

Opomba 1. Dinamični sistem ni definiran pri vsakem začetnem kotu ϑ , saj npr. ne moremo izračunati naslednjega kota ϕ_2 , če je ϑ tako majhen, da se Apolonijeva krožnica (ali simetrana) ne seka z enotsko krožnico.

Z namenom, da pridemo do eksplicitnega dinamičnega sistema, uvedimo oznako

$$F(a, \phi) = \sqrt{a^2 - 2a \cos \phi + 1}.$$

Ker lahko zapišemo tudi

$$F(a, \phi) = \sqrt{(a - \cos \phi)^2 + \sin^2 \phi} = \sqrt{(a \cos \phi - 1)^2 + a^2 \sin^2 \phi},$$

pomeni $F(a, \phi)$ razdaljo točke $(\cos \phi, \sin \phi)$ od točke $(a, 0)$ ali razdaljo točke $(a \cos \phi, a \sin \phi)$ do točke $(1, 0)$. Očitno je $a - 1 \leq F(a, \phi) \leq a + 1$. Potem lahko (1) prepišemo v

$$F(a, \phi_{n+1}) = kF(a^2, \phi_{n+1} + \phi_n).$$

Če uporabimo adicijski izrek za funkcijo kosinus in preuredimo člene, lahko enakost (1) bolj na dolgo zapišemo tudi v obliki

$$(1 - ak^2 \cos \phi_n) \cos \phi_{n+1} + ak^2 \sin \phi_n \sin \phi_{n+1} = \frac{a^2 + 1 - k^2(a^4 + 1)}{2a}.$$

Obe strani te enačbe delimo z $F(ak^2, \phi_n)$:

$$\frac{1 - ak^2 \cos \phi_n}{F(ak^2, \phi_n)} \cos \phi_{n+1} + \frac{ak^2 \sin \phi_n}{F(ak^2, \phi_n)} \sin \phi_{n+1} = \frac{a^2 + 1 - k^2(a^4 + 1)}{2aF(ak^2, \phi_n)}.$$

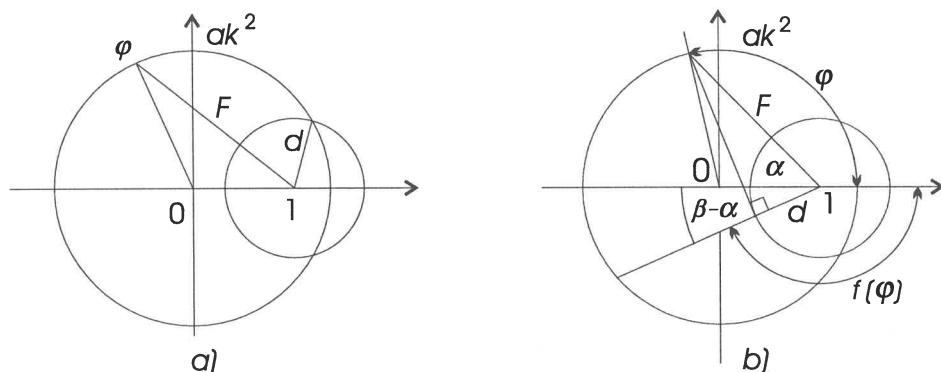
Izberimo kot α_n tako, da bo $\cos \alpha_n = \frac{1 - ak^2 \cos \phi_n}{F(ak^2, \phi_n)}$ in $\sin \alpha_n = \frac{ak^2 \sin \phi_n}{F(ak^2, \phi_n)}$, ter označimo $d = \frac{k^2(a^4 + 1) - a^2 - 1}{2a}$, tako da dobimo

$$\cos \alpha_n \cos \phi_{n+1} + \sin \alpha_n \sin \phi_{n+1} = -\frac{d}{F(ak^2, \phi_n)}$$

oziroma

$$\cos(\phi_{n+1} - \alpha_n) = -\frac{d}{F(ak^2, \phi_n)}.$$

Realen kot ϕ_{n+1} dobimo le v primeru $d/F(ak^2, \phi_n) \leq 1$ oziroma $F(ak^2, \phi_n) \geq d$. Geometrijsko to pomeni, da mora biti kot ϕ_n dovolj velik, da lahko dobimo naslednji kot ϕ_{n+1} , kar je v skladu z opombo 1. Upoštevajmo tudi dejstvo, da je zaradi $k > 1 > 1/(a+1)$ vedno $d > ak^2 - 1$ (glej tudi sliko 2a).



Slika 2.

Pri zgornjem pogoju lahko torej eksplicitno izračunamo

$$\phi_{n+1} = \alpha_n + \arccos\left(-\frac{d}{F(ak^2, \phi_n)}\right).$$

Upoštevajmo še definicijo kota α_n , pa vidimo, da je dinamični sistem podan s funkcijo (pri obeh arkuskosinusi vzamemo glavno vejo)

$$f(\phi) = \arccos \frac{1 - ak^2 \cos \phi}{F(ak^2, \phi)} + \arccos\left(-\frac{d}{F(ak^2, \phi)}\right).$$

Če označimo prvi arkuskosinus z α , drugega pa s $\pi - \beta$ (tako da je $\cos \beta = d/F(ak^2, \phi)$), lahko s slike 2b razberemo tudi geometrijski pomen enakosti $f(\phi) = \alpha + (\pi - \beta) = \pi - (\beta - \alpha)$.

Izračunajmo odvod funkcije f . Očitno je $f' = \alpha' - \beta'$. Na kratko označimo $F = F(ak^2, \phi)$. Odvajajmo enakost $\sin \alpha = ak^2 \sin \phi / F$ na ϕ in upoštevajmo, da je $F' = ak^2 \sin \phi / F = \sin \alpha$, pa dobimo $\alpha' = -1 + \cos \alpha / F$. Podobno z odvajanjem enakosti $\cos \beta = d/F$ najdemo $\beta' = \sin \alpha \cos \beta / (F \sin \beta)$, tako da imamo končno

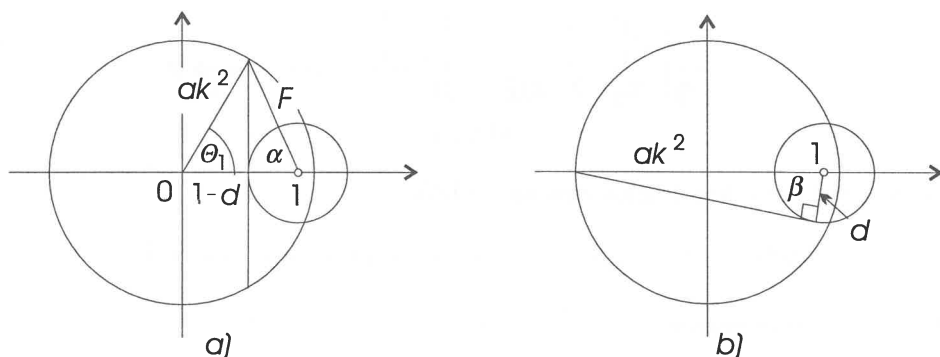
$$f' = -1 + \frac{1}{F \sin \beta} (\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha) = -1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{F \sin \beta}.$$

Odslej bomo privzeli, da je $d < 1$, kar je ekvivalentno dejstvu $k < (a+1)/\sqrt{a^4+1}$. (Ker je vedno $k \geq 1$, mora biti v tem primeru $a^3 < a+2$; to je izpolnjeno, če je $a < 3/2$ približno). To nam bo omogočilo pokazati, da je v drugem kvadrantu funkcija f dovolj položna in padajoča.

Trditev 1. Če je $d < 1$ in $\theta_1 = \arccos \frac{1-d}{ak^2}$, velja za $\theta_1 \leq \phi \leq \pi$ ocena

$$-1 \leq f'(\phi) \leq -ak^2/(1+ak^2).$$

Dokaz. Ocena je razvidna s slike 3. Ko je $\phi = \theta_1$, je $\alpha = \beta$ (slika 3a) in zato $f'(\theta_1) = -1$; pri $\phi = \pi$ pa je $\alpha = 0$ (slika 3b) in $f'(\pi) = -1 + 1/(1+ak^2) = -ak^2/(1+ak^2)$.



Slika 3.

Funkcija f je sicer definirana za $\phi \geq \theta_0$, kjer je $\cos \theta_0 = \frac{1+a^2k^4-d^2}{2ak^2}$ (tedaj je $F = d$ in $\beta = 0$, medtem ko doseže α svojo največjo vrednost $\alpha = \alpha_0$, odvod funkcije f pa je $-\infty$), in ves čas padajoča. Najmanjšo vrednost doseže funkcija f pri $\phi = \pi$, in sicer je tedaj njena vrednost enaka $\pi - \beta$, kjer je $\cos \beta = d/(1+ak^2)$ (slika 4).

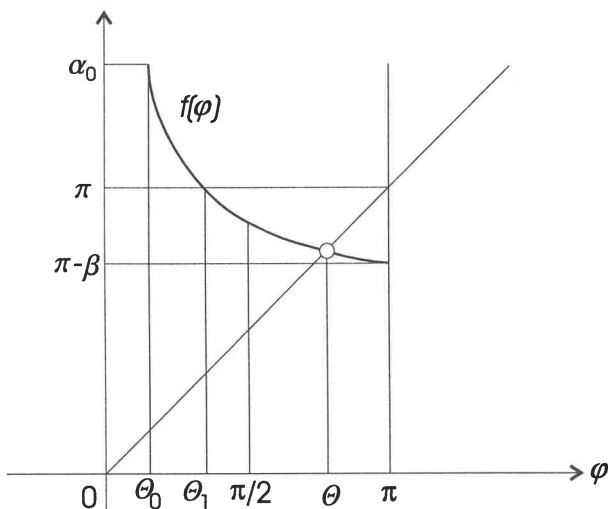
Iz slike je razvidno, da ima dinamični sistem eno samo negibno točko θ , ki je celo privlačna. To pomeni, da je sistem stabilen oziroma da zaporedje $\phi_{n+1} = f(\phi_n)$, $n \geq 1$, $\phi_1 = \vartheta$, konvergira k negibni točki θ ne glede na to, s katero vrednostjo ϑ začnemo, če je le $\vartheta \geq \theta_1$. Negibno točko θ lahko eksplisito izračunamo.

Enačbo $f(\phi) = \phi$ prepišimo v obliko $\phi - \alpha = \pi - \beta$. Z upoštevanjem adicijskega izreka za kosinus ter definicij za $\cos \alpha$ in $\sin \alpha$ dobimo zdaj iz $\cos(\phi - \alpha) = -d/F$ kvadratno enačbo za $\cos \phi$:

$$2ak^2 \cos^2 \phi - \cos \phi - (d + ak^2) = 0.$$

Spomnimo se, da je $2ad = k^2(a^4 + 1) - (a^2 + 1)$, in izračunajmo

$$d + ak^2 = (k^2(a^2 + 1) - 1)(a^2 + 1)/2a,$$



Slika 4.

pa je pred nami kvadratna enačba v obliki

$$4a^2k^2 \cos^2 \phi - 2a \cos \phi - (k^2(a^2 + 1) - 1)(a^2 + 1) = 0,$$

ki jo hitro razcepimo:

$$(2a \cos \phi - a^2 - 1)(2ak^2 \cos \phi + k^2(a^2 + 1) - 1) = 0.$$

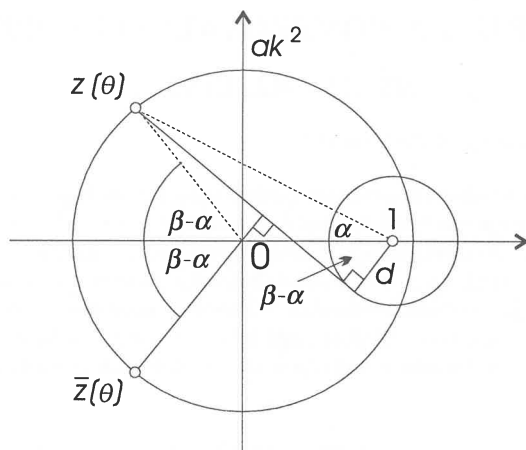
Prvi faktor nam ne da realnega kota ϕ , ker je $(a^2 + 1)/2a > 1$. Zato je negibna točka θ določena z enakostjo

$$\cos \theta = \frac{1 - k^2(a^2 + 1)}{2ak^2}.$$

Ker je izraz na desni negativen, leži θ v drugem kvadrantu. Njen pomen si lahko razložimo tudi geometrijsko (glej sliko 5).

Negibna točka je tisti kot θ , pri katerem je tangenta na manjši krog (s središčem v 1 in polmerom d), izhajajoča iz točke $z = z(\theta)$, pravokotna na radij vektor iz izhodišča do konjugirane točke $\bar{z}$ (v tem primeru je $\beta - \alpha = \pi - \theta$).

Iz dosedanje razlage je razvidno, da naš dinamični sistem deluje tako, da se čez čas divergenčni kot ustali pri neki vrednosti θ (ki je odvisna od izbire parametrov a, k). Po dovolj velikem številu korakov lahko torej predpostavimo, da je divergenčni kot konstanten. Elementi sistema se še vedno tvorijo na enotski krožnici, le da je zdaj pravilo bolj preprosto: vsak



Slika 5.

naslednji element je zasukan za isti kot θ v primeri s predhodnim. Tako vedenje je tipično pri oblikovanju strukturnih elementov določenih rastlin in je poleg tega zanimivo tudi s čisto matematičnega stališča. O tem pa več v novem sestavku, kjer bomo skušali pojasniti, kateri divergenčni koti pridejo v poštev.

LITERATURA

- [1] R. Dixon, *Fibonacci phyllotaxis: mathematically speaking*, International symposium on symmetry (2000, Stockholm), ur. I. Hargittai, T. C. Laurent, Portland Press, London 2002.
- [2] S. Douady, Y. Couder, *Phyllotaxis as a physical self-organized growth process*, Physical Review Letters **68** (1992), 2098–2101.
- [3] R. V. Jean, *Phyllotaxis, A Systemic Study in Plant Morphogenesis*, Cambridge University Press, 1994.
- [4] M. Kunz, *Some analytical results about two physical models of phyllotaxis*, Commun. Math. Phys. **169** (1995), 261–295.
- [5] M. Naylor, *Golden, $\sqrt{2}$, and π flowers: a spiral story*, Math. Magazine **75** (2002), 163–186.
- [6] F. Rothen, A.-J. Koch, *Phyllotaxis, or the properties of spiral lattices. I. Shape invariance under compression*, J. Phys. France **50** (1989), 633–657.
- [7] F. Rothen, A.-J. Koch, *Phyllotaxis, or the properties of spiral lattices. II. Packing of circles along logarithmic spirals*, J. Phys. France **50** (1989), 1603–1621.
- [8] M. Vencelj, *Urejena lepota rastlin – Filotaksa in Fibonaccijeva števila*, Presek **30** (2002), 5–11.

ZGORNJE MEJE ZA POVEZOVALNO KONSTANTO V $\mathbb{Z}^d$

MELITA HAJDINJAK

Math. Subj. Class. (1991): 82B41, 05A15

V članku bomo predstavili problem preštevanja mrežnih poti v celoštevilski mreži, torej sprehodov, ki so sestavljeni iz enotskih korakov v smereh koordinatnih osi in ne sekajo sami sebe. Število mrežnih poti z dolžino poti raste približno eksponentno. Osnova ustrezne eksponentne funkcije je odvisna od dimenzije prostora in se imenuje povezovalna konstanta. S pomočjo končnih avtomatov s končnim spominom bomo izpeljali zgornje meje za povezovalne konstante. Hitrost rasti števila obravnavanih sprehodov je določena z dominantno lastno vrednostjo pozitivne matrike, dobljene iz matrike prehajanja stanj končnega avtomata.

UPPER BOUNDS FOR THE CONNECTIVE CONSTANT IN $\mathbb{Z}^d$

In this article we will introduce the problem of counting self-avoiding walks in hypercubic lattices. The number of self-avoiding walks increases approximately exponentially with increasing length. The basis of the corresponding exponential function depends on the dimension of the lattice and is called the connective constant. We will obtain upper bounds for the connective constant of self-avoiding walks in a hypercubic lattice by finite automata for counting walks with finite memory. The dominant eigenvalue of a positive matrix that we get from the transfer matrix of the automaton determines how fast the number of self-avoiding walks increases.

1. Uvod

Preštevanje poti določene dolžine v d -razsežni celoštevilski mreži je eden izmed navidez zelo preprostih, a težko rešljivih matematičnih problemov. Izvor problema je seveda pravilo, da ne smemo sekati svoje sledi. To pravilo vodi v presenetljivo mračne in ozke ulice v matematiki in s tem hkrati v fiziki, kemiji, računalništvu in biologiji. Natančna matematična analiza preštevanja poti bega matematike že pol stoletja. Odgovor pa je preprost edino v 1-dimenzionalni mreži; v eni dimenziji namreč nimamo druge možnosti kot nadaljevati pot v smeri, ki smo si jo izbrali na začetku, zato za vsako naravno število n obstajata natanko dve poti dolžine n .

Običajno iščemo poti v neusmerjenem grafu. Mi se bomo osredotočili na d -dimenzionalno celoštevilsko mrežo $\mathbb{Z}^d$. Množico vozlišč takega grafa sestavljajo točke d -dimenzionalnega evklidskega prostora $\mathbb{R}^d$, katerih koordinate so vse celoštevilске, množico povezav pa pari sosednih točk (dve točki sta sosedni, če se razlikujeta za natanko 1 v natanko eni koordinati).

Z $f^{(d)}(n)$ bomo označevali število poti dolžine n v $\mathbb{Z}^d$ z začetkom v koordinatnem izhodišču celoštevilске mreže. Dogovorimo se, da je število poti dolžine 0 v $\mathbb{Z}^d$ enako 1, tj. $f^{(d)}(0) = 1$. Matematično idealno bi bilo za

poljubni naravni števili d in n določiti vrednost $f^{(d)}(n)$. Ker je pot sprehod brez ciklov, točne vrednosti $f^{(d)}(n)$ za zelo majhne n ni težko ugotoviti:

$$\begin{aligned} f^{(d)}(1) &= 2d, \\ f^{(d)}(2) &= 2d(2d - 1), \\ f^{(d)}(3) &= 2d(2d - 1)^2, \\ f^{(d)}(4) &= 2d(2d - 1)^3 - 2d(2d - 2). \end{aligned}$$

Ko n narašča, pa se kombinatorika močno zaplete in kmalu postane neobvladljiva. Trenutni rekord izračuna $f^{(2)}(n)$ imata Conway in Guttmann [2], ki sta s pomočjo računalniških metod izračunala vse vrednosti za $n \leq 51$.

2. Povezovalna konstanta

Vrednosti $f^{(d)}(n)$ torej v splošnem ne poznamo. Nekoliko manj zahtevno od preštevanja poti pa je vprašanje asimptotičnega vedenja števila vseh poti dolžine n , ko n narašča čez vse meje. *Povezovalna konstanta* je definirana takole

$$\mu^{(d)} = \inf_{n \in \mathbb{N}} (f^{(d)}(n))^{\frac{1}{n}}.$$

Trditev 1. *Naj bodo n , m in d naravna števila. Potem velja:*

- a) $d^n \leq f^{(d)}(n) \leq 2d(2d - 1)^{n-1}$
- b) $f^{(d)}(n + m) \leq f^{(d)}(n) \cdot f^{(d)}(m)$
- c) $\mu^{(d)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{(d)}(n))^{\frac{1}{n}}$
- č) $d \leq \mu^{(d)} \leq 2d - 1$

Dokaz. Najprej dokažimo trditev točke a). Če dovolimo le korake v pozitivnih smereh, dobimo spodnjo mejo d^n za $f^{(d)}(n)$. Zgornja meja $2d(2d - 1)^{n-1}$ pa je število sprehodov brez neposrednih obratov, tj. brez ciklov dolžine 2. Torej število poti $f^{(d)}(n)$ z rastjo dolžine n eksponentno narašča. Ker je produkt $f^{(d)}(n) \cdot f^{(d)}(m)$ enak moči množice sprehodov dolžine $n + m$, katerih začetki dolžine m so poti, niso pa nujno poti tudi kot celota, velja tudi trditev točke b). Iz b) sedaj sledi, da je zaporedje $\{\log f^{(d)}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ subaditivno. Posledica subaditivnosti pa je konvergenca zaporedja $\{(f^{(d)}(n))^{\frac{1}{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$, ko n narašča čez vse meje. Za dokaz točke c) glej [8,9]. Trditev točke d), torej omejitev povezovalne konstante d -dimenzionalne celoštevilске mreže s številoma d in $2d - 1$, pa je posledica točke a). ■

Točne vrednosti povezovalne konstante ne poznamo. Iz začetnih členov zaporedja $\{(f^{(d)}(n))^{\frac{1}{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ zgornjih mej za povezovalno konstanto pa je ugotovljeno, da to zaporedje zelo počasi konvergira k $\mu^{(d)}$. Trenutne najboljše zgornje meje za povezovalne konstante so rezultat računalniških metod [1, 6, 7, 10, 11].

André Pönitz in Peter Tittmann [11] sta leta 1999 zgornjo mejo za povezovalno konstanto v dveh dimenzijah znižala na 2,6792, v treh dimenzijah pa na 4,7387. Osnovno matematično orodje, ki sta ga pri tem uporabljala, so končni avtomati za štetje sprehodov s končnim spominom. Sprehod, ki ne vsebuje ciklov dolžine k in manj, imenujemo *pot s spominom vsaj k* . Število vseh poti s spominom vsaj k in dolžino n v $\mathbb{Z}^d$ bomo označevali z $f^{(d,k)}(n)$. *Sprehod s spominom manj od k* pa imenujemo sprehod, ki vsebuje vsaj en cikel dolžine k ali manj. Število vseh sprehodov s spominom manj od k in dolžino n v $\mathbb{Z}^d$ bomo označevali z $g^{(d,k)}(n)$.

Po zgornji definiciji je $f^{(d,2)}(n) = 2d(2d-1)^{n-1}$ za $n \geq 1$, saj spomin $k = 2$ izključuje le korake nazaj (neposredne obrate). Za $k \geq n$ velja $f^{(d,k)}(n) = f^{(d)}(n)$, spomin $k = 0$ pa ustreza naključnemu sprehodu.

Podobno kot trditev 1c) za vsako naravno število k dokažemo [9] tudi

$$\mu^{(d,k)} = \inf_{n \in \mathbb{N}} (f^{(d,k)}(n))^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f^{(d,k)}(n))^{\frac{1}{n}}.$$

Ker velja $f^{(d,k)}(n) \geq f^{(d)}(n)$, je $\mu^{(d,k)}$ zgornja meja za $\mu^{(d)}$ za vsak $k \in \mathbb{N}$. Velja celo več, zaporedje $\{\mu^{(d,k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ monotonno konvergira k $\mu^{(d)}$ [8].

Sprehode s spominom manj od k lahko opišemo z regularnim jezikom in konstruiramo končni avtomat, ki bo ta jezik razpoznaval. Potem bo število poti s spominom vsaj k in dolžino n razlika števila vseh sprehodov dolžine n ter števila sprehodov dolžine n , ki jih avtomat razpozna,

$$f^{(d,k)}(n) = (2d)^n - g^{(d,k)}(n). \quad (1)$$

Avtomat za štetje sprehodov s spominom manj od k v d -razsežni celoštevilski mreži imenujmo $A^{(d,k)}$. Največjo razpoznano dolžino cikla k v avtomatu $A^{(d,k)}$ imenujemo *spomin avtomata*.

3. Konstrukcija končnih avtomatov za štetje sprehodov s končnim spominom

Naj bo $\mathcal{A}$ neprazna končna množica – *abeceda*. Elemente abecede $\mathcal{A}$ imenujemo *črke*. *Beseda* nad $\mathcal{A}$ je zaporedje $v = a_1 a_2 \dots a_n$ črk iz $\mathcal{A}$. Število n črk besede v imenujemo *dolžina besede*. Poseben primer besede je *prazna*

beseda ϵ . Množico vseh besed dolžine n nad $\mathcal{A}$ označimo z $\mathcal{A}^n$. Množica vseh besed nad $\mathcal{A}$ je

$$\mathcal{A}^* = \sum_{n \geq 0} \mathcal{A}^n.$$

Ko bomo znak za vsoto uporabljali na množicah, bo to pomenilo unijo množic. Končni avtomat $A = \{\mathcal{A}, \mathcal{S}, f\}$ naj sestavljajo vhodna abeceda $\mathcal{A}$, množica stanj $\mathcal{S}$ ter funkcija prehajanja stanj $f : \mathcal{S} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{S}$. Množica stanj $\mathcal{S}$ vsebuje dve posebni stanji, namreč *začetno stanje* 0 in pa *končno stanje* ω . Razširitev preslikave f na $\mathcal{S} \times \mathcal{A}^*$ definiramo takole:

$$\begin{aligned} f(x, \epsilon) &= x, \\ f(x, va) &= f(f(x, v), a) \end{aligned}$$

za $x \in \mathcal{S}$, $v \in \mathcal{A}^*$, $a \in \mathcal{A}$.

Vnos zaporedja črk iz $\mathcal{A}^*$ v avtomat lahko interpretiramo kot branje neke besede v iz jezika $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}^*$. Pravimo, da avtomat sprejme besedo v , če velja

$$f(0, v) = \omega.$$

Stanje x sprejme besedo v , če velja

$$f(x, v) = \omega.$$

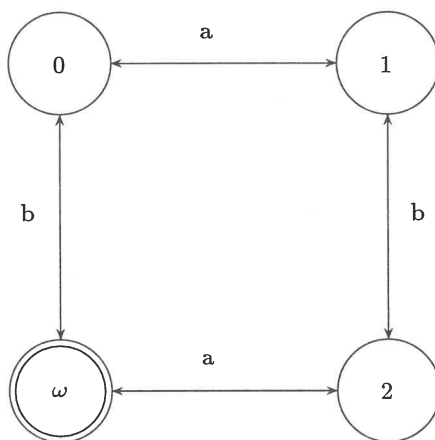
Končno stanje vedno sprejme tudi prazno besedo ϵ . Avtomat razpozna jezik $\mathcal{L}$ natanko takrat, ko sprejme vsako besedo iz $\mathcal{L}$ in nobene besede iz $\mathcal{A}^* - \mathcal{L}$. Končnemu avtomatu lahko priredimo *matriko prehajanja stanj* $M = [m_{ij}]_{i,j}$ dimenzije $|\mathcal{S}| \times |\mathcal{S}|$, kjer je

$$m_{ij} = \sum_{f(i,a)=j} a. \quad (2)$$

Primer končnega avtomata, ki razpozna jezik, sestavljen iz vseh besed nad abecedo $\mathcal{A} = \{a, b\}$, ki so sestavljene iz sodo mnogo a -jev in liho mnogo b -jev, je prikazan na sliki 1.

Začetno stanje 0 grafa avtomata s slike 1 predstavlja besede s sodo mnogo a -ji in sodo mnogo b -ji, stanje 1 predstavlja besede z liho mnogo a -ji in sodo mnogo b -ji, stanje 2 predstavlja besede z liho mnogo a -ji in liho mnogo b -ji, končno stanje ω pa vse besede, ki vsebujejo sodo mnogo a -jev in liho mnogo b -jev.

Velikost avtomata odločilno vpliva na hitrost izvedbe, zato bomo pri konstrukciji avtomata $A^{(d,k)}$, ki bo razpoznaval sprehode s spominom manj



Slika 1. Graf avtomata, ki sprejme natanko besede s sodo mnogo a -ji in liho mnogo b -ji.

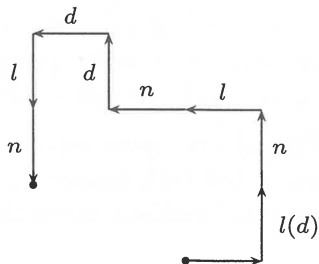
od k v $\mathbb{Z}^d$, vseskozi pazili, da bo avtomat ostal čim manjši in s tem seveda tem hitrejši. Eden izmed pomembnih virov izboljšave algoritma za izračun zgornjih mej povezovalne konstante je združevanje rotacijsko in zrcalno simetričnih sprehodov v istem stanju avtomata [8,11], kar imenujemo *simetrija v stanjih*.

Rotacijsko simetričnih predstavnikov stanj se znebimo tako, da že na začetku generiramo le sprehode z isto začetno smerjo. Zrcalno simetrične sprehode lahko nadomestimo s sprehodom, katerega prvi korak v katerokoli dimenzijo je korak v pozitivno smer te dimenzije. Obe opisani redukciji združimo tako, da za predstavnike stanj izbiramo le sprehode, ki sežejo v i -to dimenzijo šele, ko so segli že v vsako od i nižjo dimenzijo, prvi korak v novo dimenzijo pa je korak v pozitivno smer te dimenzije. Sprehod s to lastnostjo imenujemo *normalen sprehod*. Stanje, katerega predstavnik je normalen, imenujemo *normalno stanje*. Ker se da vsako stanje normalizirati (zaradi simetrije v stanjih lahko vedno izberemo predstavnika, ki je normalen), avtomat zmanjšamo tako, da konstruiramo le normalna stanja. Torej je sprehod, ki se razširja le v prvih $j < d$ izmed d možnih dimenzijah, dovolj nadaljevati (podaljšati za en korak) le v $2j$ smereh, ki sprehod ohranijo v teh j dimenzijah, in še v pozitivno smer dimenzije $j + 1$.

Velikost avtomata še dodatno zmanjšamo, če združimo tista stanja, katerih predstavniki se v nekaj zadnjih korakih po obliki ujemajo, njihovi začetki pa ne morejo postati del cikla dolžine k ali manj. Brez opisanega združevanja sprehodov v stanjih bi avtomat s spominom 4 že v dveh dimen-

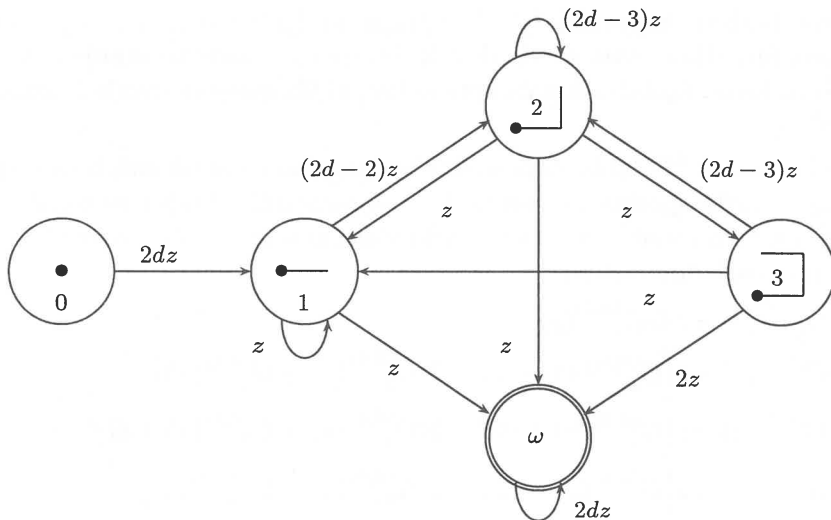
zijah sestavljalo 22 stanj, medtem ko tako preoblikovan avtomat sestavlja le 5 stanj [8].

Normalne predstavnike v dveh dimenzijah lahko opišemo z jezikom nad abecedo $\{l, d, n\}$, kjer črka l simbolizira zavoj na zadnjem koraku, črka d zavoj v drugo smer zadnjega zavoja in črka n nadaljevanje v isto smer [12]. Na sliki 2 je prikazan primer normalnega sprehoda v dveh dimenzijah, ki ga lahko opišemo z besedo $lnlnddln$ ali $dnlndddln$. V splošnem pa normalne predstavnike v $\mathbb{Z}^d$ opišemo z jezikom nad abecedo, katere moč je enaka $2d$ (za vsako smer po ena črka abecede).



Slika 2. Primer normalnega sprehoda v ravnini in njegov opis.

Na sliki 3 je prikazan graf avtomata $A^{(d,4)}$, v katerem smo vse črke omenjene abecede nadomestili s formalno kompleksno spremenljivko z , vse povezave z istim začetkom in koncem smo združili, oznake na njih pa seštel.



Slika 3. Graf avtomata $A^{(d,4)}$.

Nadaljnja možnost izboljšave algoritma je povečanje števila stanj v korist hitrosti izvedbe. Odgovor na vprašanje, ali je mogoče skleniti cikel v danem številu korakov ob dodatni zahtevi vsebovanja določenih točk, je namreč časovno najzahtevnejši del problema. Teoretično rešitev problema

daje *Dijkstrov algoritem najkrajše poti* (dolžina najkrajše poti od končne do začetne točke), ki pa v praksi ni uporaben, ker je prepočasen. Če dodatno zahtevo o vsebovanju določenih točk zanemarimo, algoritem sicer ustvari nekaj odvečnih stanj, kar pa popravimo z izračunom prve norme razlike začetne in končne točke sprehoda. V primeru, da se od začetne točke preveč oddaljimo, cikla omejene dolžine namreč ne moremo zaključiti.

Zgoraj omenjene izboljšave algoritma spremenijo tako množico stanj avtomata kot tudi množico prehodov med stanji [8], videli pa bomo, da ne vplivajo na izpeljavo zgornjih mej za povezovalno konstanto.

4. Zgornje meje za povezovalno konstanto

Naj bosta

$$F^{(d,k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(d,k)}(n)z^n,$$

$$G_0^{(d,k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{(d,k)}(n)z^n$$

rodovni funkciji zaporedij $\{f^{(d,k)}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{g^{(d,k)}(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$. $G_0^{(d,k)}(z)$ je rodovna funkcija števila sprehodov, ki jih sprejme začetno stanje avtomata $A^{(d,k)}$, rodovno funkcijo števila sprehodov, ki jih sprejme stanje i , označimo z $G_i^{(d,k)}(z)$.

Avtomat $A^{(d,k)}$ lahko neposredno prevedemo v sistem enačb za rodovne funkcije števila sprehodov, sprejetih v posameznih stanjih avtomata. Dimenzija sistema enačb je enaka številu stanj avtomata. Za avtomat na sliki 3 dobimo naslednji sistem:

$$\begin{aligned} G_0^{(d,4)}(z) &= 2dzG_1^{(d,4)}(z) \\ G_1^{(d,4)}(z) &= z \left[G_1^{(d,4)}(z) + (2d-2)G_2^{(d,4)}(z) + G_\omega^{(d,4)}(z) \right] \\ G_2^{(d,4)}(z) &= z \left[G_1^{(d,4)}(z) + (2d-3)G_2^{(d,4)}(z) + G_3^{(d,4)}(z) + G_\omega^{(d,4)}(z) \right] \\ G_3^{(d,4)}(z) &= z \left[G_1^{(d,4)}(z) + (2d-3)G_2^{(d,4)}(z) + 2G_\omega^{(d,4)}(z) \right] \\ G_\omega^{(d,4)}(z) &= 2dzG_\omega^{(d,4)}(z) + 1 \end{aligned}$$

Iz (1) sledi, da je rodovna funkcija števila poti s spominom vsaj k razlika rodovne funkcije števila vseh sprehodov in rodovne funkcije števila sprehodov, ki jih sprejme začetno stanje avtomata

$$F^{(d,k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (2d)^n z^n - G_0^{(d,k)}(z) = \frac{1}{1-2dz} - G_0^{(d,k)}(z). \quad (3)$$

Z rastjo k število stanj v avtomatu $A^{(d,k)}$ eksponentno narašča, zato postaneta tako določitev rodovne funkcije števila poti s spominom vsaj k kakor tudi redukcija grafa avtomata težka problema. Problema se bomo zato lotili nekoliko drugače. Pokazali bomo, da je dovolj opisati le asimptotično obnašanje števila $f^{(d,k)}(n)$ poti s spominom vsaj k in dolžino n v $\mathbb{Z}^d$.

Matriko, ki jo dobimo iz matrike prehajanja stanj M tako, da vse črke abecede $\mathcal{A}$ nadomestimo s formalno kompleksno spremenljivko z , označimo z $N(z)$. Definirajmo matriko P prehodov med stanji avtomata $A^{(d,k)}$ takole

$$P := \frac{1}{z}N(z) = \begin{matrix} & s_0 & s_1 & \dots & s_n & s_\omega \\ \begin{matrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \\ s_\omega \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2d & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{11} & \dots & p_{1n} & p_{1\omega} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & p_{n1} & \dots & p_{nn} & p_{n\omega} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 2d \end{pmatrix} \end{matrix},$$

kjer je p_{ij} moč množice m_{ij} , definirane v (2), torej število vseh črk, ki v stanju i avtomata sprožijo prehod v stanje j . Sedaj zapišimo sistem linearnih enačb za rodovne funkcije $G_i^{(d,k)}(z)$ avtomata $A^{(d,k)}$:

$$\begin{aligned} G_0^{(d,k)}(z) &= 2dzG_1^{(d,k)}(z) \\ G_1^{(d,k)}(z) &= z[p_{11}G_1^{(d,k)}(z) + \dots + p_{1n}G_n^{(d,k)}(z) + p_{1\omega}G_\omega^{(d,k)}(z)] \\ &\dots \dots \\ G_n^{(d,k)}(z) &= z[p_{n1}G_1^{(d,k)}(z) + \dots + p_{nn}G_n^{(d,k)}(z) + p_{n\omega}G_\omega^{(d,k)}(z)] \\ G_\omega^{(d,k)}(z) &= 2dzG_\omega^{(d,k)}(z) + 1 \end{aligned}$$

V matrični obliki ga lahko zapišemo kot

$$(I - zP) \begin{bmatrix} G_0^{(d,k)} \\ G_1^{(d,k)} \\ \vdots \\ G_n^{(d,k)} \\ G_\omega^{(d,k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor na desni strani zgornje matrične enačbe imenujmo b , matriko $I - zP$ pa $A(z)$. Torej

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & -2dz & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 - zp_{11} & -zp_{12} & \dots & -zp_{1n} & -zp_{1\omega} \\ 0 & -zp_{21} & 1 - zp_{22} & \dots & -zp_{2n} & -zp_{2\omega} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -zp_{n1} & -zp_{n2} & \dots & 1 - zp_{nn} & -zp_{n\omega} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - 2dz \end{pmatrix}$$

in elementi matrike $A(z)$ so polinomi formalne kompleksne spremenljivke z . Ker je $A(0) = I$, je v okolici točke 0 determinanta $A(z)$ od nič različna in po Cramerjevem pravilu velja

$$G_0^{(d,k)}(z) = \frac{\det[bA^{(2)}(z) \dots A^{(n+2)}(z)]}{\det A(z)},$$

kjer smo z $A^{(i)}(z)$ označili i -ti stolpec matrike $A(z)$. Iz enakosti (3) zato sledi

$$F^{(d,k)}(z) = \frac{\det A(z) - (1 - 2dz) \det[bA^{(2)}(z) \dots A^{(n+2)}(z)]}{(1 - 2dz) \det A(z)}. \quad (4)$$

Obe determinanti v (4) sta polinoma formalne spremenljivke z , zato je rodovna funkcija $F^{(d,k)}(z)$ racionalna funkcija spremenljivke z . Pokazali bomo, da želeno informacijo $\mu^{(d,k)}$ dobimo s pomočjo najmanjše ničle polinomskega imenovalca rodovne funkcije $F^{(d,k)}(z)$.

Po Hadamardovi formuli je konvergenčni radij potenčne vrste $F^{(d,k)}(z)$ enak

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f^{(d,k)}(n)}} = \frac{1}{\mu^{(d,k)}}.$$

Ker pa je $F^{(d,k)}(z)$ racionalna funkcija spremenljivke z , je njen konvergenčni radij R enak $|\zeta|$, kjer je ζ pol $F^{(d,k)}(z)$ z najmanjšo absolutno vrednostjo. Ker je $\det A(0) = 1$, je $\zeta \neq 0$ in

$$\mu^{(d,k)} = \frac{1}{|\zeta|}.$$

Zaradi monotone konvergence zaporedja $\{\mu^{(d,k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ proti μ^d po točkah a) in d) trditve 1 za vsako sodo naravno število k sledi

$$d \leq \mu^{(d)} \leq \mu^{(d,k)} \leq 2d - 1 < 2d. \quad (5)$$

Torej je $|\zeta|$ strogo večje od $\frac{1}{2d}$ in po absolutni vrednosti najmanjši pol rodovne funkcije $F^{(d,k)}(z)$ je ničla determinante $A(z)$.

Sedaj naj bo η ničla $\det A(z)$ z najmanjšo absolutno vrednostjo. Če je racionalna funkcija $F^{(d,k)}(z)$ v (4) zapisana v okrajšani obliki, je ζ enak η , sicer je $|\zeta|$ kvečjemu večji od $|\eta|$. Ker je $\det A(0) = 1$, število $z = 0$ ni ničla $\det A(z)$. Potem je $\det A(z) = \det(I - zP)$ enaka 0, če in samo če obstaja tak neničeln vektor x , da velja $Px = \frac{1}{z}x$.

Naj bo sedaj λ po absolutni vrednosti največja lastna vrednost matrike P . Potem je $|\lambda|$ zgornja meja za $\mu^{(d,k)}$

$$\mu^{(d,k)} = \frac{1}{|\zeta|} \leq \frac{1}{|\eta|} = |\lambda|. \quad (6)$$

Iščemo torej največjo lastno vrednost matrike P , kar nas pripelje na idejo o uporabi potenčne metode [3].

Vzemimo za začetni vektor $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ in *stanju* i pripišimo $(i + 1)$ -vo koordinato iteracijskega vektorja, potem je $(i + 1)$ -va koordinata n -tega iteracijskega vektorja potenčne metode za matriko P^T enaka številu sprehodov v *stanju* i avtomata po n -ti iteraciji. V algoritmu potenčne metode je n -ti iteracijski vektor

$$y_n = (P^T)^n e_1$$

prvi stolpec matrike $(P^T)^n$, torej vektor števila sprehodov dolžine n v posameznih stanjih ($(P^T)^n$ je matrika števila prehodov dolžine n med stanji). Ker pa matrika P^T nima nujno dominantne lastne vrednosti, konvergenca potenčne metode ni zagotovljena. V nadaljevanju bomo pokazali, da lahko to pomanjkljivost odpravimo.

Usmerjeni graf imenujemo *krepro povezan*, če za vsak urejen par vozlišč (v_i, v_j) obstaja usmerjena pot $v_i v_{k_1} \dots v_{k_n} v_j$, ki povezuje vozlišče v_i z v_j . Opazimo lahko [8,11], da ima graf končnega avtomata $A^{(d,k)}$ krepko povezano komponento, ki jo sestavljajo vsa stanja, razen začetnega in končnega ter tistih stanj, katerih predstavnik je raven sprehod, krajši od $\frac{k}{2} - 1$. V začetno *stanje* 0 ne vodi nobena usmerjena pot, iz končnega *stanja* ω pa ni usmerjene poti v nobeno drugo stanje. Edina usmerjena pot v stanja, katerih predstavnik je raven sprehod, krajši od $\frac{k}{2} - 1$, je usmerjena povezava iz stanja, katerega predstavnik je za eno enoto krajši raven sprehod.

Vrh tega pa je *stanje* r , katerega predstavnik je raven sprehod dolžine $\frac{k}{2} - 1$ (več korakov v isto smer ne bi omogočalo cikla dolžine k), absorbirajoče – na njem obstaja zanka. Torej, po $\frac{k}{2} - 1$ iteracijah avtomata je število sprehodov v tem stanju različno od 0. Še več, *stanje* r služi kot črpalka, tako da po največ $k - 1$ iteracijah nobeno stanje krepko povezane komponente ni prazno (predstavnik stanj so dolgi največ $k - 1$). Po $k - 1$ iteracijah avtomata dobimo strogo pozitivno matriko P^* prehodov med stanji krepko povezane komponente grafa avtomata. Perronov izrek [5,8] pa zagotavlja geometrijsko konvergenco potenčne metode na matriki $(P^*)^T$.

Po Perronovem izreku ima namreč pozitivna matrika $(P^*)^T$ dominantno pozitivno realno lastno vrednost. K dominantni lastni vrednosti pripadajoči

lastni vektor pa ima same pozitivne koordinate. V nadaljevanju bomo pokazali, da je dominantna lastna vrednost matrike $(P^*)^T$ prehodov med stanji krepko povezane komponente grafa avtomata $A^{(d,k)}$ zgornja meja za $\mu^{(d,k)}$ in s tem zgornja meja za povezovalno konstanto $\mu^{(d)}$.

Pokažimo najprej, da redukcija avtomata na stanja krepko povezane komponente ne vpliva na izpeljavo zgornjih mej za $\mu^{(d,k)}$. V ta namen poiščimo zvezo med ničlami $\det(I - zP)$ in $\det(I - zP^*)$. Najprej $\det(I - zP)$ razvijmo po prvem stolpcu, takoj za tem po zadnji vrstici, saj začetno in končno stanje nista del krepko povezane komponente grafa avtomata. Nadaljujmo z zaporednim razvojem determinante po tistih stolpcih, ki pripadajo prehodom v preostala stanja, ki niso del krepko povezane komponente grafa avtomata. Ko bomo determinanto $\det(I - zP)$ želeli razviti po nekem stolpcu, bo edini neničelni element tega stolpca enica na diagonalni, ker bomo vrstico, v kateri je bil zapisan edini prehod v to stanje, prečrtali v prejšnjem koraku. Rezultat opisanega razvoja determinante $\det(I - zP)$ po stolpcih in vrsticah je

$$\det(I - zP) = (1 - 2dz) \det(I - zP^*). \quad (7)$$

Vidimo, da so ničle $\det(I - zP)$ unija ničel $\det(I - zP^*)$ in vrednosti $\frac{1}{2d}$.

Predpostavimo sedaj, da je $\frac{1}{2d}$ po absolutni vrednosti najmanjši pol rodovne funkcije $F^{(d,k)}(z)$. Potem iz (6) sledi $\mu^{(d,k)} = 2d$, kar je v protislovju s (5). Predpostavka, da je $\frac{1}{2d}$ po absolutni vrednosti najmanjši pol funkcije $F^{(d,k)}(z)$, je bila napačna. Sledi, da je po absolutni vrednosti najmanjši pol rodovne funkcije $F^{(d,k)}(z)$ kvečjemu večji od po absolutni vrednosti najmanjše ničle $\det(I - zP^*)$ in po absolutni vrednosti največja lastna vrednost matrike $(P^*)^T$ je zgornja meja za $\mu^{(d,k)}$. Perronov izrek pa zagotavlja, da je pozitivno realno število.

Iskano največjo lastno vrednost matrike $(P^*)^T$ dobimo s potenčno metodo. Za začetni vektor spet vzemimo $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$. Zaradi redukcije avtomata na stanja krepko povezane komponente pa sedaj *stanju* i pripišimo i -to koordinato iteracijskega vektorja. Teda je i -ta koordinata n -tega iteracijskega vektorja enaka številu sprehodov v *stanju* i avtomata po n -ti iteraciji in število $f^{(d,k)}(n)$ vseh poti s spominom k in dolžino n je enako vsoti koordinat n -tega iteracijskega vektorja.

Rezultat potenčne metode za pozitivno matriko $(P^*)^T$ je pozitivna dominantna lastna vrednost λ . Matrika $(P^*)^T$ je odvisna od spomina k avtomata $A^{(d,k)}$, zato za vsako sodo naravno število k dobimo drugačen rezultat λ_k potenčne metode. Lastne vrednosti λ_k matrik $(P^*)^T$ so zgornje meje za povezovalno konstanto $\mu^{(d)}$. Za vsako sodo naravno število k velja

$$\mu^{(d)} \leq \mu^{(d,k)} \leq \lambda_k.$$

Razpredelnica 1 podaja zgornje meje $\mu^{(d,k)}$ za povezovalne konstante $\mu^{(d)} (d \in \{2, 3, 4, 5\})$, ki so rezultat opisanega algoritma [11].

k	$\mu^{(2,k)}$	$\mu^{(3,k)}$	$\mu^{(4,k)}$	$\mu^{(5,k)}$
2	3,000000000	5,000000000	7,000000000	9,000000000
4	2,831177207	4,864536512	6,891670938	8,910420361
6	2,775591142	4,807410857	6,851215530	8,881554012
8	2,744458210	4,777969893	6,830290488	8,867888066
10	2,724799018	4,759837615	6,817855856	8,860158834
12	2,711252339	4,747525092	6,809695214	
14	2,701374268	4,738630774	6,803959696	
16	2,693848922			
18	2,687924410			
20	2,683138865			
22	2,679192494			

Preglednica 1. Zgornje meje za povezovalne konstante $\mu^{(2)}$, $\mu^{(3)}$, $\mu^{(4)}$ in $\mu^{(5)}$.

LITERATURA

- [1] S. E. Alm, *Upper bounds for the connective constant of self-avoiding walks*, Combinatorics, Probability and Computing, **2** (1993), 115–136.
- [2] A. R. Conway, A. J. Guttmann, *Square lattice self-avoiding walks and corrections to scaling*, Physical Review Letters, **77** (1996), 5284–5287.
- [3] J. W. Demmel, *Uporabna numerična linearna algebra*, DMFA – založništvo, Ljubljana 2000.
- [4] F. R. Gantmacher, *Matrizenrechnung I, Allgemeine Theorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1958.
- [5] F. R. Gantmacher: *Matrizenrechnung II, Spezielle Fragen und Anwendungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1959.
- [6] A. J. Guttmann, *Bounds on connective constants for self-avoiding walks*, J. Phys., **A 16** (1983), 2233–2238.
- [7] A. J. Guttmann, *Bounds on self-avoiding walks on directed square lattices*, J. Phys., **A 16** (1983), 3885–3984.
- [8] M. Hajdinjak, *Zgornje meje za povezovalno konstanto v $\mathbb{Z}^d$* , diplomsko delo, Ljubljana 2001.
- [9] N. Madras and G. Slade, *The Self-Avoiding Walk*, Birkhäuser, Boston, 1993.
- [10] J. Noonan, *New upper bounds for the connective constants of self-avoiding walks*, Journal of Statistical Physics, **Vol. 91** (1998), 871–888.
- [11] A. Pönitz, P. Tittmann, *Improved upper bounds for self-avoiding walks in $\mathbb{Z}^d$* , The Electronic Journal of Combinatorics, **7 #R21** (2000).
- [12] P. Tittmann, *Wörter, Automaten und erzeugende Funktionen*, <http://www.htwm.de/peter/publikat.htm>.

NOVICE IZ EVROPSKEGA MATEMATIČNEGA DRUŠTVA (EMS)

1. Občni zbor EMS

Občni zbor EMS je potekal 1. in 2. junija 2002 na Univerzi v Oslu na Norveškem. Predsedniško mesto bo od sedanjega energičnega Rolfa Jeltscha z ETH v Zürichu prevzel sir John Kingman, direktor na Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences. Novi predsednik ima v svoji bibliografiji 5 knjig in okrog 100 člankov s področja verjetnosti, operacijskih raziskav in genetike populacij. Pod vladavino dosedanjega predsednika je bil precejšen poudarek dan uporabni matematiki; verjetno bo tako tudi v prihodnje.

Navedimo tri pomembnejše sklepe občnega zbora.

Naslednji evropski kongres bo leta 2004 v Stockholmu.

Evropske nagrade za matematične dosežke, ki jih bodo podelili na tem kongresu, so še naprej namenjene matematikom, mlajšim od 35 let. Vendar se starostna meja lahko zviša (za največ tri leta) zaradi prekinitev kariere, ki jo povzroči npr. obvezno služenje vojaškega roka ali rojstvo otrok.

Letna članarina za individualne člane je zvišana na 20 EUR.

Večji del članarine gre za revijo Newsletter of the EMS, ki ima naklado 2200 izvodov. Revija je čedalje bolj zanimiva. Poleg zelo dobrih recenzij novih knjig (za kar so zaslužni češki kolegi) prinaša intervjuje s slavnimi matematiki, predstavitve starejših matematikov, dostopno napisane primere uporabe matematike itd. Zadnjo številko si lahko ogledate na [1].

Zelo razveseljiva je bila novica, da je norveška vlada uresničila več kot sto let staro idejo in ustanovila Abelovo nagrado, ki naj bi bila v matematiki ekvivalent Nobelovi nagradi. Glavnica ustreznega sklada znaša 27 milijonov EUR.

(Norveška akademija znanosti je 3. aprila 2003 oznanila, da je letošnjo Abelovo nagrado v vrednosti približno 750.000 EUR prejel Jean-Pierre Serre, zaslužni profesor na Collège de France v Parizu, za življenjsko delo v topologiji, algebraični geometriji in teoriji števil. Nagrajenec je bil rojen leta 1926. Že leta 1954 je dobil Fieldsovo medaljo in je najmlajši dobitnik te medalje doslej.)

V letu 2003 bomo praznovali stoletnico rojstva dveh velikih matematikov: Johna von Neumanna in Nikolaja Kolmogorova.

Diderotov matematični forum, dvodnevni dogodek, ki hkrati poteka v treh mestih, ima za prihodnja srečanja (vsako drugo leto) naslednje predloge: matematika in fizika, nelinearni pojavi; matematika in medicina;

matematika in genomika; matematika in vizualna umetnost. Dodatni predlogi zadevajo povezavo matematike s temami: trajnostni razvoj in globalne spremembe; tehnologija informacijske družbe; varnost na cesti; državljeni in oblast; nanotehnologije; aeronavtika.

EMS vsako leto organizira tudi poletne šole, ki trajajo vsaj teden in naj ne bi bile konference.

Odbor za popularizacijo matematike v javnosti bi rad organiziral izmenjavo informacij o zanimivih delih s tega področja, saj vlada precejšnje pomanjkanje idej in bi si vsi lahko pomagali s prevajanjem kakovostnih člankov. EMS prosi, naj ji pomembne informacije (o konferencah, izmenjavi študentov, popularizaciji matematike, nagradah in priznanjih) pošljemo na naslov [2].

Portugalski kolegi bodo uresničili novo idejo: skupen kongres njihovega društva z EMS.

V švicarskem letoviškem kraju Berlingen ob Bodenskem jezeru sta bili organizirani dve tridnevni delavnici Evropskega matematičnega društva. Na prvi, kjer nas je zastopal Mihael Perman, so govorili o vlogi uporabne matematike. Omenimo dva sklepa: Študenti matematike naj se srečajo z uporabo matematike v drugih znanostih. Profesorji matematike v srednjih šolah naj imajo zadovoljivo izobrazbo iz uporabne matematike in matematičnega modeliranja.

Druga delavnica, ki sem se je udeležil tudi sam, pa se je ukvarjala z elektronskim dostopom do starejše matematične literature in založniško dejavnostjo v EMS. Obema temama sem posvetil posebna razdelka.

Obe delavnici sta, čisto po švicarsko, maksimalno izkoristili razpoložljivi čas. Na naši smo dva dni delali tudi po večerji, do 22. ure.

2. Standardizirana domača stran

Svetovna matematična zveza (IMU) prosi vse matematične oddelke, inštitute in druge ustanove, naj na medmrežju poleg že obstoječe postavijo standardizirano domačo stran. Obrazci so na [3].

3. Digitalizacija starejše matematične literature

Evropsko matematično društvo (EMS) poskuša pridobiti financiranje Evropske zveze za velikanski projekt: digitalizacijo starejše matematične literature.

Marsikaj je bilo že narejeno. Tako je bil letos pretipkan v elektronsko obliko Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (1868–1930). To je referativna revija, v kateri so objavljeni povzetki in recenzije takratnih matematičnih publikacij. Najdemo jo na [4].

Če v ustrezno okence vtipkamo priimek Plemelj, najdemo recenzije 18 del (v formatu $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$). Za 6 od teh člankov imamo tudi povezave do faksimilov, ki so na drugih elektronskih naslovih. Nekateri od teh posnetkov so zelo kakovostni. Eden je slabši, skoraj gotovo zato, ker original ni bil več v najboljšem stanju. Vendar je vse še zmeraj berljivo.

Veliko je bilo narejenega tudi v Franciji. Na naslovu [5] (okrajšava za Numérisation de documents anciens mathématiques) najdemo reviji Annales de l'institut Fourier (1949–1997) in Journées Équations aux dérivées partielles (1974–2000). Zaradi interesov založnika dostop do zadnjih petih letnikov prve revije ni prost. Tudi tu najdemo (v formatu pdf) faksimile vseh 44 strani članka Francija Forstneriča iz leta 1987.

Univerzitetna knjižnica na Cornellu je v elektronsko dostopno obliko spravila več sto starejših knjig. Američani so ocenili, da bi digitalizacija vse starejše matematične literature stala 100 do 200 milijonov dolarjev. Pri tem naj bi nastalo okrog 50 Tbytov (se pravi 5×10^{13} bytov) arhiva. EMS zdaj namerava zaprositi Evropsko skupnost za približno 40 milijonov EUR sredstev. Obenem poteka koordinacija z Ameriškim matematičnim društvom, kitajskimi sogovorniki in drugimi.

EMS si prizadeva da bi referativna revija Zentralblatt MATH postala še bolj vseevropski projekt. Revija ima okrog 10.000 recenzentov v srednji in vzhodni Evropi, ki v zameno dobijo prost dostop do baze podatkov. Sredstva dobiva od Evropske skupnosti, Nemčije, Francije. Partner v Zentralblattu je založba Springer Verlag (ki jo je zdaj prevzel koncern Bertelsmann). Finančno je vse tako zapleteno, da predstavnik revije nedavno ni želel odgovoriti na vprašanje, koliko Zentralblatt MATH pravzaprav stane. Dejstvo je tudi, da se Zentralblatt MATH in ameriški Mathematical Reviews približno 60-odstotno prekrivata, vendar se je zelo težko dogovoriti, kako bi obe reviji z zelo dolgo tradicijo povezali ali uskladili.

Omenim naj še, da ima Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen (kratko SUB Göttingen) arhiv zapuščin matematikov (tudi pisem in podobnega). Ta knjižnica je veliko starejše matematične literature spravila v elektronsko obliko.

4. Založništvo Evropske matematične zveze (EMS Publishing House)

Vsi se soočamo s strmo naraščajočimi cenami strokovne literature, ki so lep odsev nove, tako imenovane finančne ekonomije, ki ne sloni več na proizvodnji, ampak na trgovanju s pričakovanji. Če se hočete bolje poučiti o tem, kako je bil del matematike izrabljen za to, da v nekem smislu drži vrečo pri tem poslu, si preberite predavanje [6], ki ga je imela Mary Poovey na Svetovnem matematičnem kongresu v Peking.

V pogovorih v Berlingenu smo slišali naslednje: Ko je medijski koncern pred kratkim prevzel dve znani založbi matematične literature, so novi šefi podrejenim povedali, da morajo v enem letu povečati prihodke za 15 odstotkov.

V prej omenjenem članku [6] piše, da je Jack Welch, direktor General Electrica, sredi devetdesetih izjavil, da mora dobro podjetje vsako leto imeti 15 odstotno rast. Da takrat skoraj ni bilo podjetja, ki bi zadoščalo tej zahtevi, očitno nikogar ni motilo, ta številka je postala za mnoge poslovneže sveta.

Posledica pa je, da smo pred kratkim morali že drugič skržiti naročila v Matematični knjižnici za 10 odstotkov.

Ni čudno, da je prišlo do spontanega upora proti tem metodam. Nemško matematično društvo je tako ustanovilo revijo *Documenta Mathematica*, ki je prosto dostopna na medmrežju. Za 80 EUR se lahko naročimo na tiskano različico, ki izide enkrat na leto v obsegu okrog 700 strani. Vsak članek je recenziran, revija je zelo kakovostna, urednik Ulf Rehmann z Univerze v Bielefeldu pa je povedal, da tudi po tehnični plati ni težav. Ima poseben program, ki spravi avtorjev TeX ali LaTeX dokument v primerno obliko. Združenje SPARC [7] akademskih izdajateljev revij ima za cilj „vrniti znanost znanstvenikom”.

Marsikje si poskušajo pomagati tudi z ustanavljanjem tako imenovanih konzorcijev naročnikov. Več knjižnic se poveže v konzorcij, ki se potem pogaja z velikimi založniki za ugodnejše pogoje. Pri tem na žalost večkrat pride do prodaje paketa, ki vsebuje tudi nepotrebne stvari. Kolega iz Beograda je povedal, da je pri njih takšen zajeten paket izbral (in iz državnih sredstev plačal) kar ustrezni minister.

Evropska matematična zveza je pred kratkim, da bi izboljšala neza-vidljive razmere na področju matematične literature, ustanovila neprofitno Evropsko matematično fundacijo (European Mathematical Foundation, EMF) s sedežem v Švici. Taka ustanova je oproščena davkov. Začetna sredstva so prispevali: EMS (10.000 EUR), njen predsednik Rolf Jeltsch (23.000 EUR) in univerza ETH (donacija okrog 200.000 EUR, s katero si je zagotovila mesto v nadzornem svetu). V okviru EMF bo delovalo Založništvo evropske matematične zveze: *EMS Publishing House*.

Nova založba bo leta 2004 od Springerja prevzela revijo *Journal of the European Mathematical Society* (JEMS), predvideni pa sta tudi dve knjižni zbirki: iz teoretične in uporabne matematike.

Ob tem sem slišal, da so knjižne zbirke lahko problematične, saj uredniki včasih postanejo diktatorji.

Založba naj bi knjige in revije prodajala po zmernih cenah, morebitni dobiček pa naj bi šel v razširjanje matematičnega znanja. Poskušali bodo tudi posredovati izdelke manjših založb matematične literature.

Kolegi iz srednje Evrope, ki so neprevidno prepustili pravice do nekaterih revij zahodnoevropskim založnikom, si želijo, da bi nova založba prevzela tudi te revije.

Peter Legiša

LITERATURA

- [1] <http://www.emis.de/newsletter/>
- [2] emis@math.tu-berlin.de.
- [3] <http://www.math-net.org/Math-Net-Recommendation.html>
- [4] <http://www.emis.de/MATH/JFM/JFM.html>
- [5] <http://www.numdam.org>
- [6] Mary Poovey, *Can numbers ensure honesty*, Unrealistic expectations and the U. S. accounting scandal, Notices of the AMS 50(1) 2003, 27–35.
- [7] <http://www.arl.org/sparc/>

STROKOVNO SREČANJE IN OBČNI ZBOR DMFA SLOVENIJE

Zadnje strokovno srečanje in občni zbor društva sta bila 11. in 12. oktobra 2002 v Laškem. Čeprav vreme ni bilo ravno spodbudno, pa tudi prijave profesorjev niso prihajale v velikem številu, se je izkazalo, da je zanimanje za društvene seminarje in srečanja še vedno veliko in da se večina udeležencev odloči za odhod zadnji hip.

Tako kot smo se dogovorili lansko leto, se je strokovno srečanje pričelo v petek dopoldne in je potekalo na štirih nivojih: matematiki so se razdelili v dve skupini (osnovna in srednja šola), fiziki pa so se lahko udeležili srečanja fizikov v osnovnih raziskavah ali pa so prišli na predavanja za profesorje fizike osnovnih in srednjih šol. Predavanja so bila v sklopu seminarja Elementi vzgoje in izobraževanja pri diferenciranem pouku matematike in fizike.

Fizikom so v petek dopoldan predavali: G. Šega o uporabi statističnih metod pri analizi rezultatov tekmovanj, B. Golli o tekmovanjih kot spodbudi za individualno delo z nadarjenimi učenci, N. Razpet pa o samostojnem učenju in uporabi svetovnega spleta. Popoldanski del je pričel J. Strnad s pogledom na diferenciacijo pouka fizike v gimnazijah, nadaljeval je M. Hribar, ki je govoril o pomenu in smislu reševanja računskih nalog, sledila je razprava o organizaciji tekmovanj za zlato Stefanovo priznanje, ki sta ga vodila M. Čepič in M. Cvahte. Udeleženci razprav so predvsem želeli, da bi lahko prišlo na državno tekmovanje več učencev in da bi se povečalo tudi število nagradencev. C. Dominko je popoldan sklenil s predavanjem o delu z nadarjenimi dijaki v krožkih.

Matematiki so bili razdeljeni v dve skupini: za osnovno in srednjo šolo. Dopoldanske teme so bile po naslovih enake, so pa bile prilagojene osnovni oziroma srednji šoli. C. Rojko je govorila o ciljih in smislu tekmovanj, G. Šega o uporabi statističnih metod pri analizi rezultatov tekmovanj,

D. Felda pa o delu z nadarjenimi učenci. Osnovnošolski profesorji so z N. Razpet zgibali papir in uporabljali Pitagorov izrek, z A. Potočnikom pa zlagali polinomine. Srednješolskim profesorjem pa je G. Dolinar govoril o mednarodnih izkušnjah pri diferenciaciji pouka matematike, M. Željko pa o reševanju problemskih nalog iz matematike na različnih nivojih.

Med odmorom za kosilo pa je L. Kračun udeležence odpeljala na ogled pivovarne Laško.

V soboto sta vsem udeležencem predavala Zoisova nagrajenca za vrhunske znanstvene dosežke M. Omladič o invariantnih podprostorih in J. Dolinšek o kvazikristalih. Oba sta bila nagrajena za odlično pripravljeno predavanje z burnim aplavzom, saj sta svoje znanstveno delo znala približati poslušalcem.

Dopoldanski del smo sklenili z občnim zborom DMFA Slovenije.

Po kosilu je S. Kocijančič fizikom govoril o eksperimentalnih projektih za nadarjene učence in nekaj primerov tudi prikazal z računalnikom, G. Planišič pa je pokazal nekaj zanimivih poskusov.

Matematikom je M. Vencelj pripovedovala o urejeni lepoti rastlin in pokazala nekaj zanimivih slik, L. Željko pa je predstavila analizo uspešnosti reševanja nalog s tekmovanja Evropski matematični kenguru. Potem so se matematiki razdelili v dve skupini. Srednješolski profesorji so poslušali M. Razpeta, ki je govoril o Delannoyjevih številih, L. Kračun, ki je govorila o Zrcaljenju malo drugače, in M. Prosen, ki je govoril o geometriji Luninih men. Osnovnošolski profesorji so z D. Feldo reševali preproste nelinearne diofantske enačbe.

M. Prosen je na posterju predstavil astronomijo v času Jurija Vege in obeležil 500. obletnico Pergerjeve smrti.

Žal smo imeli nekaj težav s prostori, saj se večina profesorjev ni prijavila na strokovno srečanje tako, da bi vedeli, katera predavanja nameravajo obiskati, fizikalna ali matematična. Zato se je potem zgodilo, da je bila soba za fizike premajhna, saj nismo računali na tako veliko udeležbo. Uradno je bilo prijavljenih le enajst udeležencev.

Občnega zbora se je udeležilo 108 članov. V zadnjem obdobju nas je zapustilo kar veliko članov; o Francetu Križaniču, Pavletu Zajcu in Egonu Zakrajsku so govorili Anton Suhadolc, Aleksander Potočnik in Marija Vencelj.

Za častni članici društva* sta bili imenovani Agata Tiegl in Marija Vencelj. Društvena priznanja* za delo z mladimi pa so prejeli: Marjeta Košak (Gimnazija Center Celje), Dragica Kurillo (Osnovna šola Orehek Kranj), Alojz Robnik (I. gimnazija Celje), Milena Štuklek (Osnovna šola Ludvika Pliberška Maribor) in Diomira Tkalcich (OŠ Vojke Šmuc v Izoli).

* Op. urednika: Obrazložitve nagrad in priznanj DMFA 2002 bodo objavljene v naslednji številki OMF.

Na poročila o delu društva, ki so bila objavljena v biltenu, ni bilo pripomb.

Tomaž Pisanski je poročal o poteku Vegovih dni v letu 2002 in povedal, da bodo nekatera predavanja s teh dni predstavljena tudi v Državnem zboru Republike Slovenije. Hkrati je vse sodelujoče povabil k sodelovanju pri pripravah na praznovanje 250-letnice rojstva Jurija Vege (2004).

Sprejeti so bili naslednji predlogi in sklepi:

1. Tomaž Pisanski je predlagal, da upravni odbor ustanovi sekcijo za zgodovino slovenske matematike.
2. Na predlog Tomaža Pisanskega je bil sprejet sklep, da upravni odbor pripravi in posreduje pristojnim predlog upoštevanja najvišjih dosežkov pri srednješolskih tekmovanjih (osvojena državna prvenstva, sodelovanje na olimpijadah) pri vpisu na univerzo in podeljevanju Zoisove štipendije.
3. Marija Vencelj predlaga, da DMFA imenuje Egona Zakrajška posmrtno za častnega člana DMFA.
4. Na izbirnih srednješolskih matematičnih tekmovanjih – tekmovanje A, bo po novem 5 nalog (ena lažja, da bo vsak udeleženec lahko zbral nekaj točk).
5. Sprejete so bile nekatere spremembe tekmovanja za Stefanovo priznanje:
 - Ljubljanska regija se razdeli na tri dele: Ljubljana, Domžale – Kamnik, Zasavje.
 - Šola, ki ima med učenci vsaj 121 možnih tekmovalcev v določeni skupini (7. in 8. razred), lahko na področno tekmovanje pošlje 3 ekipe za to skupino.
 - Za osvojeno priznanje je treba doseči 50 % točk na ustreznem tekmovanju. Število srebrnih priznanj ne sme presegati 15 %, število zlatih priznanj pa ne sme presegati 2% števila učencev, ki so se udeležili šolskih tekmovanj.
6. Člani tekmovalnih komisij na regijskih tekmovanjih iz fizike za srednje šole so lahko tudi fiziki, ki niso zaposleni v vzgojno-izobraževalnih organizacijah.
7. DMFA prevzame organizacijo tekmovanj v znanju poslovne matematike za srednje šole.
8. Prijavnina za tekmovanja v letu 2003 je 170 SIT na tekmovalca.

Po sprejetem poročilu nadzornega odbora je občni zbor razrešil stari odbor društva. Po sprejetju sklepa, da bodo volitve javne, je občni zbor soglasno izvolil člane novih organov DMFA. Novi predsednik DMFA je Peter Petek.

Člani organov društva so objavljeni na spletni strani DMFA.

Nada Razpet

MILANU MIKU PINTARJU V SPOMIN

The Man of Tao¹

The man in whom Tao
Acts without impediment
Harms no other being
By his actions
Yet he does not know himself
To be "kind", to be "gentle."

The man in whom Tao
Acts without impediment
Does not bother with his own interests
And does not despise
Others who do.
He does not struggle to make money
And does not make a virtue of poverty.
He goes his way
Without relying on others
And does not pride himself
On walking alone.

While he does not follow the crowd
He wont complain of those who do.
Rank and reward
Make no appeal to him;
Disgrace and shame
Do not deter him.
He is not always looking
For right and wrong
Always deciding "Yes" and "No."
The ancients said, therefore:
*"The man of Tao
Remains unknown
Perfect virtue
Produces nothing
'No-Self'
Is 'True-Self.'
And the greatest man
Is Nobody."*

Thomas Merton:
The Way of Chuang Tzu, Shambala (Boston & London, 1992).

Milan Mik Pinter, profesor fizike na univerzi Waterloo v Kanadi in znanstveni svetnik Instituta Jožef Stefan, je umrl 2. februarja 2003 v Ljubljani. Še posebej ga bodo pogrešali vsi njegovi študentje, ki jih spomini vežejo na mnoge dneve in noči, napore in prijetne trenutke, ki so jih preživeli skupaj z njim v laboratoriju za jedrsko magnetno resonanco v Waterlooju.

Milan Mik Pinter se je rodil 17. januarja 1934 v Celju. Leta 1948 se je preselil v Ljubljano, kjer je po maturi leta 1952 pričel študirati fiziko na Tehniški fakulteti. Že med študijem je delal pri prof. Dušanu Hadžiju na Kemijskem inštitutu v Ljubljani in je za svoje raziskovalno delo na področju infrardeče spektroskopije, skupaj z R. Blincem, prejel studentsko Prešernovo nagrado. Leta 1958 se je zaposlil na tedanjem Nuklearnem inštitutu Jožef Stefan, kjer je v laboratoriju za magnetno resonanco raziskoval feroelektrike z vodikovo vezjo. Diplomiral je leta 1959 s študijo NMR rotatorja CH₃. K metilnim grupam in njihovem vrtenju ter tuneliranju se je vračal vedno znova skozi vse obdobje svoje znanstvene kariere.

¹ V zgodnjih sedemdesetih letih sva se z Mikom oba navdušila nad taoizmom. Pred nekaj leti mi je podaril žepno izdajo knjižice Thomasa Mertona „The Way of Chuang Tzu“, iz katere sem izbral gornjo pripoved. Z njo bi se rad poslovil od njega (J. P.).

V študijskem letu 1961/62 se je vpisal na magistrski študij fizike na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani, kjer je magistriral decembra 1964 in bil dve leti kasneje tudi promoviran za doktorja fizikalnih znanosti z NMR študijo strukture in dinamike feroelektrikov. Leta 1967 je prejel kanadsko štipendijo za 18-mesečno izpopolnjevanje na univerzi McMaster v Hamiltonu v Kanadi. Konec leta 1967 je sprejel mesto profesorja na Univerzi Waterloo v Waterlooju (Ontario), kjer je leta 1975 postal redni profesor na oddelku za fiziko; 17. decembra 2002 mu je univerza v Waterlooju podelila naziv zaslužnega profesorja (Distinguished Professor Emeritus). NMR laboratorij na oddelku za fiziko univerze v Waterlooju je kmalu postal eden najpomembnejših centrov za NMR spektroskopijo v Kanadi. V njem se je izšolalo 15 njegovih doktorandov in 9 magistrov. Vrata njegovega laboratorija so bila vedno odprta tudi za raziskovalce iz Slovenije. Kljub odhodu v Kanado, kjer si je ustvaril svoj novi dom in družino, ni prenehal znanstveno sodelovati z IJS. Od leta 1986 pa vse do svoje smrti je bil sodelavec (znanstveni svetnik) laboratorija za magnetne resonance na Odseku za fiziko trdne snovi na IJS.

Mik Pintar je ustanovitelj mednarodne poletne šole za NMR v Waterlooju, ki jo je organiziral 23-krat. Šola je kmalu pridobila velik ugled in je bila zato tudi vedno dobro obiskana. Je edina tovrstna šola v Severni Ameriki. Mik Pintar je bil tudi med pobudniki za ustanovitev mednarodne delavnice „Quantum Atomic and Molecular Tunneling in Solids“, ki je bila na začetku organizirana vsako leto, sedaj pa so ta srečanja vsako drugo leto. Letošnja delavnica bo potekala od 22. do 25. junija na University of Florida v Gainesvillu in bo posvečena spomenu na Mika Pintarja.

Znanstvena bibliografija Mika Pintarja iz obdobja 1958–2003 obsega 114 del, od tega 79 člankov, objavljenih v uglednih mednarodnih revijah. Na začetku svoje raziskovalne poti se je ukvarjal s preučevanjem faznih prehodov v feroelektrikih z vodikovo vezjo, študijem dinamike molekul v trdnih protonskih prevodnikih, fiziko ledu, NMR karakterizacijo spojin urana ter strukturo in dinamiko tekočih kristalov. Težišče njegovega raziskovalnega dela pa je prav gotovo analiza rotacijskega tuneliranja skupin CH_3 in NH_4 v molekularnih kristalih z metodo jedrske magnetne resonance. Pri tem je treba še posebej poudariti NMR torzijsko spektroskopijo v rotirajočem koordinatnem sistemu, ki so jo do popolnosti razvili prav v Waterlooju. V tej zvezi je zgovoren podatek, da je več kot tretjina Mikovih objavljenih člankov posvečena tej tematiki. Na področju aplikativnih raziskav je Mik z uporabo NMR metod študiral proces hidratacije cementa. Pri tem je vpeljal posebno metodo „spinskega razvrščanja“, ki omogoča nov način sprotne karakterizacije več hidratacijskih komponent cementa med strjevanjem. V zadnjih letih je precej pozornosti namenil NMR karakterizaciji strukture in dinamike vode v poroznih sistemih. Koliko je bil pri tem uspešen, naj pove

naslednji zapis, ki je bil objavljen v Alumni Newsletter univerze v Waterlooju julija 2001: „Mik Pintar, Physics, led a group of nine professors in Physics, Earth Sciences, Mathematics and Engineering, who received funding of more than \$2 million for a 500 MHz micro-magnetic resonance imager to study the microscopic structure of porous media and the application of Nuclear Magnetic Resonance techniques in material and biomedical sciences.”

V številnih svojih raziskavah je Mik Pintar razvil in utemeljil povsem nove načine uporabe metod jedrske magnetne resonance, zato ga smemo upravičeno šteti med pionirje na področju NMR spektroskopije.

Mik Pintar je bil prijeten in nevsiljiv sogovornik in kot učitelj vedno pripravljen pomagati tako strokovno kakor tudi nasploh. Zato ne preseneča dejstvo, da je imel velik krog prijateljev in znancev ne samo v strokovnem svetu, ampak tudi med slovenskimi gorniki in ljubitelji morja.

Vsi ga bomo pogrešali kot iskrenega prijatelja, kot znanstvenika in kot poštenega človeka.

G. Lahajnar in J. Peternej

NOVE KNJIGE

Borut Zalar: Strukturna algebra za podiplomce in nespécialiste, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2002, 163 strani.

Z izrazom „strukturna algebra” avtor označuje tisti del algebre, ki se ukvarja z množicami, v katerih so vpeljane določene algebrske operacije in ki imajo tudi kakšne dodatne analitične lastnosti. Primeri takih razredov so na primer kompleksne Liejeve algebre, grupe s končno mnogo elementi, asociativne realne algebre s končno dimenzijo, C^* -algebre in podobno.

V naslednjem odstavku povzemimo kar avtorja: „Eden od zgodovinskih virov strukturne algebre so poskusi posplošitve pojma števila. Običajno števila razumemo kot strukturo s seštevanjem, odštevanjem, množenjem in deljenjem. Direktna abstraktna posplošitev tega pojma je razred, ki mu danes rečemo algebre z deljenjem. Primeri takih algeber so kvaternioni in oktonioni. Raziskovanje tega razreda algeber v njegovi največji možni splošnosti je še danes aktivno.”

Knjiga je nastala na podlagi priprav za podiplomska predavanja pri predmetu Algebra na Pedagoški fakulteti v Mariboru. Veliko slušateljev podiplomskega študija izobraževalne smeri je srednješolskih profesorjev. Zanje je pomembno, da poznajo poleg izrekov in njihovih dokazov tudi njihovo motivacijo, umestitev v čas in povezavo z drugimi vejami matematike. Zato knjiga v uvodnem delu obnovi zgodovino algebre. Zelo zanimivo napisano prvo poglavje ima naslednje razdelke: Razmišljanja o vlogi algebre

v matematiki; Obdobje geometrijske algebre; Obdobje iskanja ničel polinomov; Evolucija grup; Evolucija algeber, kolobarjev in modulov.

V drugem poglavju avtor obravnava algebre z deljenjem in absolutno vrednostjo. Študij algeber z deljenjem se je začel leta 1843 s Hamiltonovim odkritjem kvaternionov. Kmalu po tem so skonstruirali algebro oktonionov. Teorija deljenja se je izkazala za zelo zahtevno in je prišla v stik z analizo, teorijo števil, algebraično geometrijo in celo algebraično topologijo. Ker oktonioni niso asociativni, je teorija algeber z deljenjem v bistvu del neasociativne algebre. V tem poglavju avtor dokaže Hurwitzev in Frobeniusov izrek. Prvi pravi, da je vsaka realna algebra z enoto in absolutno vrednostjo izomorfná realnim številom, kompleksnim številom, kvaternionom ali pa oktonionom. Frobeniusov izrek pa pove, da je vsaka končnodimenzionalna asociativna algebra z deljenjem izomorfná realnim številom, kompleksnim številom ali pa kvaternionom.

V tretjem poglavju avtor začne obravnavo jedra svojega dela. V njem je precej zgledov raznih algebraičnih struktur, ki jih avtor izbere iz algebraične geometrije, diferencialne geometrije in teorije distribucij, topologije, kompleksne analize. Doda tudi nekaj matričnih zgledov.

V četrtem poglavju avtor opravi pripravo za strukturno teorijo realnih asociativnih algeber končne dimenzije. Kot pravi avtor, je Wedderburnov izrek izbran kot model za ilustracijo strukturne algebre zato, ker je zgodovinsko pomemben, tehnično dovolj enostaven in hkrati bogat z idejami.

V petem poglavju avtor dokaže Wedderburnov izrek z lokalnimi metodami, v šestem pa posplošitev tega izreka z globalnimi metodami. V modernih raziskavah se še vedno pojavljata oba načina.

Namen sedmega poglavja je razložiti prehod iz končne dimenzije v neskončno.

V osmem in devetem poglavju avtor na kratko predstavi del modernjšega dela strukturne algebre, ki želi pri vsaki algebri poleg osnovne idealske strukture poznati tudi strukturo odlikovanih preslikav na tej algebri. Na primer multiplikatorji tvorijo algebro, avtomorfizmi grupo, odvajanja pa Liejevo algebro.

Podiplomski predmet in ta knjiga nista bila mišljena kot priprava na samostojno raziskovalno delo na področju algebre. Zato večina izrekov ni formuliranih v največji splošnosti. V dokazih je avtor želel predstaviti nove ideje in metode tako, da je uporabljal kar najmanj tehničnih zapletov in računanja.

Knjiga je primeren in ne pretežek uvod v zanimivo in uporabno področje matematike, zato jo lahko priporočim vsem z osnovnim znanjem (dodiplomske) algebre: študentom višjih letnikov, diplomantom, podiplomskim študentom in tudi raziskovalcem na nealgebrajskih področjih, ki jih zanima (mogoče drugačen) pogled na algebro, ki se pojavlja na njihovih področjih.

Mirko Dobovišek

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi svoje članice in člane k sodelovanju na strokovnem srečanju in 55. občnem zboru, ki bosta 7. in 8. novembra 2003 v Hotelu Zlatorog v Bohinju.

Člani društva lahko predstavijo raziskovalno delo, s katerim se ukvarjajo, zanimivosti s tega področja, nove metode dela in novosti pri pouku matematike, fizike in astronomije (pripomočke, nove vsebine, zanimive eksperimente in posebne prilagoditve).

Predstavitev je možna v treh oblikah:

- s 25- do 30-minutnim prispevkom,
- s posterjem,
- s predstavitvijo učila, pripomočka, gradiva.

Na voljo bodo grafoskop, projekcijsko platno, videoprojektor za prenos slike z računalnika in panoji za posterje. Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesiti s seboj.

Prijave lahko pošljete pisno ali po elektronski pošti. Obvezno morajo vsebovati:

- naslov prispevka,
- ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen, oziroma domač naslov,
- kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12pt naj ne presega ene strani A4).

Prijave sprejemamo do **10. oktobra 2003** na naslov:

**Društvo matematikov, fizikov
in astronomov Slovenije, Janez Krušič,
Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana**

ali na elektronski naslov: **Janez.Krusic@fmf.uni-lj.si**. Povzetkom, ki jih boste poslali po pošti, dodajte zapis v elektronski obliki (disketo).

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora.

Predsednik DMFA:
Peter Petek

Obvestila o dejavnostih društva so objavljena na internetski domači strani DMFA: <http://www.dmfa.si>

OBZORNIK ZA MATEMATIKO I

LJUBLJANA, MAREC 20

Letnik 50, številka 2

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52

R 177/03



100001170,2

COBISS

VSEBINA

ODPISAN

Članki

Strani

Dinamični model spiralne filotakse. Prispevek k razumevanju filotakse, 1. del, Milan Hladnik	33–41
Zgornje meje za povezovalno konstanto v $\mathbb{Z}^d$, Melita Hajdinjak	42–53

Vesti

Novice iz Evropskega matematičnega društva (EMS), Peter Legiša	54–58
Strokovno srečanje in občni zbor DMFA Slovenije, Nada Razpet	58–60
Milanu Miku Pintarju v spomin, G. Lahajnar in J. Peternelj	61–63
Vabilo	III

Nove knjige

Strukturna algebra za podiplomce in nespecialiste, Mirko Dobovišek . . .	63–64
--	-------

CONTENTS

Articles

Pages

A dynamical model for spiral phyllotaxis. A contribution to understanding phyllotaxis, part 1, Milan Hladnik	33–41
Upper bounds for the connective constant in $\mathbb{Z}^d$, Melita Hajdinjak	42–53

News	54–63
----------------	-------

New books	63–64
---------------------	-------

Na naslovnici, ki jo je izdelal avtor članka na strani 33, je shematski prikaz spiralne filotakse po 99 korakih s konstantnim divergenčnim kotom 137.5 in 1% rastjo. Ker je divergenčni kot približek zlatega kota, je filotaksa Fibonaccijeva; dobro je vidnih 13 spiral, ki zavijajo levo, in 21 spiral, ki so usmerjene rahlo v desno. Številčenje teče od najstarejšega elementa k najmlajšemu: vzdolž vsake vidne spirale si sledijo števila v aritmetičnem zaporedju, v prvi družini z diferenco 13 in v drugi z diferenco 21.