

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

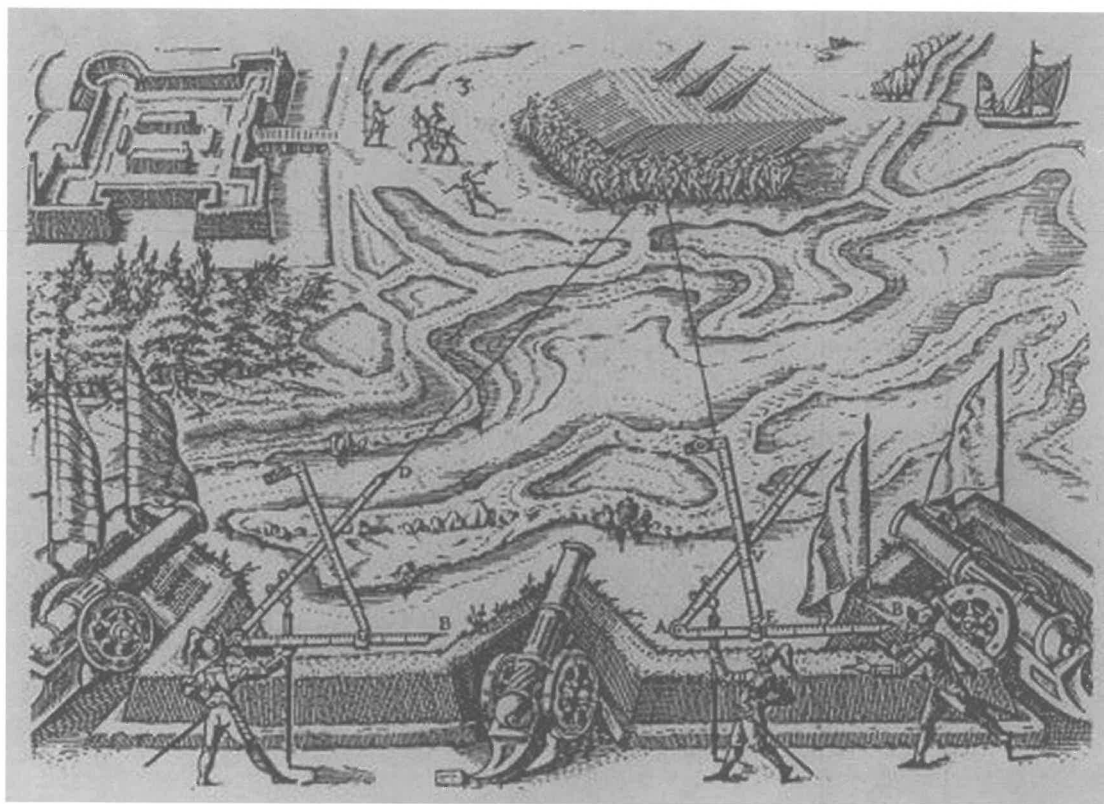
ISSN 0473-7466

2003

Letnik 50

1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2003, letnik 50, številka 1, strani 1–32

Naslov uredništva: DMFA-založništvo, Jadranska ul. 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana.
Spletna stran: <http://www.fmf.uni-lj.si/~zaloznistvo/omf/> **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460. **Telefaks:** (01) 2517281. **Devizna nakazila:** SKB banka d. d., Ajdovščina 4, Ljubljana. **SWIFT:** SKBASI2X. **Transakcijski račun:** 03100-1000018787.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Alenka Klokočovnik (društvene novice), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič. Natisnjeno v Tiskarni KURIR v nakladi 1450 izvodov.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 4000 SIT, za študente 2000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 800 SIT, stare številke 520 SIT.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

© 2003 DMFA Slovenije – 1525

Poštšina plačana na pošti 1102 Ljubljana.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Obzornik za matematiko in fiziko objavlja znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije in vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki morajo biti poslani v dvojniku, natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je vsaj 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje vsaj enemu anonimnemu recenzentu, ki mora predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo in če je besedilo napisano z računalnikom, potem urednik prosi avtorja za izvirno datoteko. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma L^AT_EX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

2-144/03
ODPISANO

NUMERIČNA ANALIZA IN LIEJEVE GRUPE

BOJAN OREL

Math. Subj. Class. (2000): 65L05, 34A45, 34A26

V članku predstavimo nov razred metod za numerično reševanje diferencialnih enačb, kjer rešujemo trivializirano diferencialno enačbo v Liejevi algebri s pomočjo Magnusovega razvoja.

NUMERICAL ANALYSIS AND LIE GROUPS

In this paper we review a new class of methods for the numerical solution of differential equations that advance the trivialised version of the differential equation in a Lie algebra in terms of the Magnus expansion.

1. Uvod

V tem članku se bomo lotili problema, ki je tako star kot sama računska matematika, pa je še vedno poln presenetljivih izzivov: numerično reševanje sistema navadnih diferencialnih enačb

$$y' = f(t, y), \quad t \geq t_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

kjer je $y(t) \in \mathbb{R}^d$ neznana funkcija, $t \in [t_0, \infty)$ in $f : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ dovolj gladka funkcija, da rešitev obstaja. Vsak, ki se je že srečal s tem problemom, pozna vsaj nekaj praktično uporabnih metod za izračun numerične rešitve (linearne veččlenske metode, metode Runge-Kutta, ekstrapolacija), ki so dostopne tudi v obliki različnih programskih paketov. Cilj tega članka je opisati nov razred metod, zasnovan na povsem drugačnem pristopu.

Pomembne kvalitativne in strukturne lastnosti rešitve sistema (1) lahko pogosto opišemo v jeziku diferencialne geometrije. Največkrat se zgodi, da rešitve ležijo na kakšni diferenciableni mnogoterosti, $y(t) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d$, $t \geq t_0$. To se zgodi natanko tedaj, ko je vektorsko polje $f(t, y)$ za vsak t v vsaki točki $y \in \mathcal{M}$ tangentno na mnogoterost $\mathcal{M}$ oziroma $f(t, y) \in T_{y(t)}\mathcal{M}$, $t \geq t_0$. Ohranitev te lastnosti rešitve tudi pri numeričnem reševanju je važna iz več razlogov. Prvič: dejstvo, da rešitev $y(t)$ leži na mnogoterosti, ima pogosto globok fizikalni ali matematični pomen, npr. ohranitev hamiltonske energije. Drugič: ohranitev določenih lastnosti rešitve sistema pogosto pomeni počasnejšo akumulacijo napak pri numeričnem računanju. Tretjič: nekatere invariante sistema (1) so lahko ključne za uspešno rešitev problema, kot npr. pri konstrukciji Toeplitzove matrike s predpisanimi lastnimi vrednostmi [1].

Novo področje numerične analize, ki se ukvarja z računanjem matematičnih količin, tako da se pri tem ohranijo kvalitativne lastnosti, je (predvsem v zvezi z diferencialnimi enačbami) dobilo ime *geometrijska integracija*. Ohranitev invariant Liejevih grup, s čimer se bomo v glavnem ukvarjali v tem članku, je trenutno glavna tema raziskav na tem področju.

Mnogoterosti, ki jih obravnavamo v tem članku, so predvsem *Liejeve grupe*, tj. gladke mnogoterosti, na katerih je definirana grupna operacija (množenje) in sta množenje in invertiranje gladki preslikavi. Liejeve grupe nastopajo pri problemih iz najrazličnejših področij, saj lahko z njimi lepo opišemo simetrije originalnih (matematičnih ali fizikalnih) problemov. Razvoj algoritmov za numerično reševanje sistemov diferencialnih enačb, ki ohranjajo strukturo, določeno z Liejevo grupo, je tako naloga, ki je hkrati zanimiva in praktično uporabna. Obenem pa nam metode Liejevih grup v območje geometrične integracije pripeljejo še precej večjo množico mnogoterosti. Če imamo numerično metodo, katere rešitve ležijo na Liejevi grupi G , jo lahko z majhnimi spremembami predelamo v metodo, katere rešitve ležijo na poljubnem homogenem prostoru, na katerega deluje G , in tako precej povečamo njeno uporabnost.

Obširen in dokaj podroben pregled metod, ki delujejo na Liejevih grupah, je objavljen v članku [3]. Namen tega članka pa je le pregled nekatereh osnovnih idej, zato se bomo omejili predvsem na obravnavo linearnih navadnih diferencialnih enačb in si ogledali metodo, ki je izpeljana iz *Magnusovega* razvoja. Le mimogrede omenimo, da imamo poleg Magnusovih metod na voljo tudi druge metode, ki ne pokrivajo le linearnih, niti ne samo navadnih diferencialnih enačb.

2. Liejeve grupe, Liejeve algebre in dexpin v enačba

Bralec, ki se mu zdi zgornja definicija Liejeve grupe preveč abstraktna, si lahko izbere enega izmed naslednjih primerov matričnih Liejevih grup (v vseh primerih je grupna operacija matrično množenje):

- splošna linearna grupa $GL_n(\mathbb{R})$ vseh nesusingularnih realnih $n \times n$ matrik;
- ortogonalna grupa $O_n(\mathbb{R})$ vseh ortogonalnih matrik v $GL_n(\mathbb{R})$;
- posebna linearna grupa $SL_n(\mathbb{R})$ vseh matrik v $GL_n(\mathbb{R})$ z determinanto 1;
- posebna ortogonalna grupa $SO_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$;
- posebna unitarna grupa $SU_n(\mathbb{C})$ vseh unitarnih kompleksnih $n \times n$ matrik z determinanto 1;
- simpleksična grupa Sp_{2n} vseh matrik iz $GL_{2n}(\mathbb{R})$, za katere velja

$$XJX^T = J, \quad \text{kjer je} \quad J = \begin{bmatrix} O & I \\ -I & O \end{bmatrix}.$$

Zanimajo nas take diferencialne enačbe, katerih rešitve potekajo znotraj neke Liejeve grupe G , zato mora vektorsko polje f , ki določa diferencialno enačbo $y' = f(t, y)$, v vsaki točki ležati v tangentnem prostoru grupe G [7].

Tangentni prostor Liejeve grupe G v enoti e skupaj z binarno operacijo $[\cdot, \cdot]$ (Liejev oklepaj), ki za vse $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ zadošča lastnostim

1. $[X, Y] + [Y, X] = 0$ (antikomutativnost);
2. $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]$ (bilinearnost);
3. $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ (Jacobijska identiteta),

je *Liejeva algebra* $\mathfrak{g}$. V primeru, ko je G matrična grupa, je Liejev oklepaj kar običajni matrični komutator $[X, Y] = XY - YX$. Vrnimo se še k primerom matričnih Liejevih grup.

- Liejeva algebra grupe $GL_n(\mathbb{R})$ je algebra $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ vseh realnih $n \times n$ matrik.
- Liejeva algebra grupe $O_n(\mathbb{R})$ je algebra $\mathfrak{o}_n(\mathbb{R})$ vseh poševno simetričnih matrik v $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$.
- Liejeva algebra grupe $SL_n(\mathbb{R})$ je algebra $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R})$ vseh matrik iz $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$, katerih sled je enaka 0.
- Liejeva algebra grupe $SU_n(\mathbb{C})$ je algebra $\mathfrak{su}_n(\mathbb{C})$ poševno hermitskih $n \times n$ matrik.
- Liejeva algebra grupe Sp_{2n} je algebra $\mathfrak{sp}_{2n}$ matrik iz $\mathfrak{gl}_{2n}(\mathbb{R})$, za katere je $XJ + JX^T = O$.

V primeru, ko je G matrična grupa, lahko tangentni prostor v enoti e z levim množenjem prenesemo v poljubno točko $x \in G$, torej ga lahko zapišemo kot $x\mathfrak{g}$. Diferencialno enačbo, katere rešitve ležijo v Liejevi grupi G , lahko zato vedno zapišemo kot

$$y' = A(t, y)y, \quad t \geq t_0, \quad y(t_0) = y_0 \in G. \quad (2)$$

Da bi se izognili težavam z obstojem rešitev, bomo privzeli, da funkcija $A : [t_0, \infty) \times G \rightarrow \mathfrak{g}$ zadošča Lipschitzovemu pogoju. Enačbe na Liejevih grupah (in homogenih prostorih), kot je (2), se pojavljajo na najrazličnejših področjih:

- na $O_n(\mathbb{R})$ in $SO_n(\mathbb{R})$ v mehaniki togih teles, robotiki, pri računanju eksponentov Ljapunova, v numerični linearni algebri, pri računanju izospektralnih tokov;
- na $SL_n(\mathbb{R})$ za računanje pretokov nestisljivih tekočin, pri reševanju Riccatijevih sistemov in Sturm-Liouvillovih problemov;
- na Sp_n za reševanje hamiltonskih problemov.

Več primerov uporabe lahko bralec najde v članku [3].

V primeru, ko je diferencialna enačba (2) skalarna (ko je $d = 1$), jo lahko poenostavimo z uvedbo nove spremenljivke $y(t) = e^{x(t)}y_0$. Tako dobimo enačbo

$$x' = A(t, e^x y_0); \quad x(t_0) = 0.$$

V posebnem primeru, ko je funkcija A odvisna le od spremenljivke t (enačba se v tem primeru glasi $y' = A(t)y$), dobimo enostavno enačbo $x' = A(t)$, ki jo lahko rešimo z enostavno integracijo.

Kadar pa imamo sistem z več kot eno enačbo ($d > 1$), je zamenjava spremenljivke zaradi nekomutativnosti matričnega množenja bolj zapletena. Zastavimo splošneje: naj bo preslikava $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow G$ bijektivna na neki okolici $0 \in \mathfrak{g}$ in naj bo $\phi(0)$ enota v grupi G . Diferencialno enačbo (2) lahko z zamenjavo spremenljivke $Y(t) = \phi(X(t))$ zapišemo kot $d\phi(X)/dt = A(t, \phi(X))\phi(X)$. V primeru, ko je $t - t_0$ dovolj majhen (pri numerični metodi to pomeni dovolj majhen 'časovni' korak), lahko to enačbo obrnemo (izpeljava je obsežna, bralec si lahko podrobnosti pogleda v [6]) in dobimo *levo trivializacijo* enačbe (2)

$$X' = d\phi^{-1}(X, A(., \phi(X))). \quad (3)$$

Najnaravnejša izbira preslikave ϕ je (enako kakor v skalarnem primeru) eksponentna preslikava $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$, ki je v primeru matrične Liejeve grupe kar običajna matrična eksponentna funkcija $e^X = \sum_{m=0}^{\infty} X^m/m!$. V tem primeru postane enačba (2) ti. *dexpinv enačba*

$$\begin{aligned} X' &= \text{dexp}_X^{-1} A(t, \exp(X)y_0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \text{ad}_X^k A(t, \exp(X)y_0), \quad t \geq t_0, \quad X(t_0) = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

kjer so $(B_k)_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ Bernoullijeva števila in je ad_X *adjungirani operator* v $\mathfrak{g}$:

$$\text{ad}_X^0 A = A, \quad \text{ad}_X^k A = [X, \text{ad}_X^{k-1} A], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dexpinv enačbo je prvi zapisal Hausdorff [2] na začetku dvajsetega stoletja.

3. Metode Runge-Kutta-Munthe-Kaas

Liejeva grupa je v splošnem nelinearen objekt (linearna kombinacija elementov iz G v splošnem ne leži v G), zato tudi rešitve, izračunane s 'klasičnimi' numeričnimi metodami (linearnimi veččlenskimi metodami ali z metodami Runge-Kutta) ne ostanejo na G . Nasprotno pa je linearna algebra $\mathfrak{g}$ *linearen prostor*! Dokler v numeričnem algoritmu uporabljamo le operacije iz $\mathfrak{g}$ (matrično seštevanje, množenje s skalarjem in komutator), rešitev ostaja v $\mathfrak{g}$. Zato je smiselno namesto Liejeve diferencialne enačbe (2) reševati njeno levo trivializacijo (3) oz. (4), izračunati en korak rešitve na $\mathfrak{g}$ in ga preslikati nazaj na G . S ponavljanjem te procedure nadaljujemo, dokler ne dobimo rešitve na celotnem območju, kjer nas ta zanima.

Za reševanje enačbe (3) v Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ lahko uporabimo katerekoli enočlensko metodo, najprimernejši kandidati so seveda metode iz družine Runge-Kutta. Tako dobimo metode *Runge-Kutta-Munthe-Kaas* (RK-MK) [3]. Vzemimo kot primer znano štiristopenjsko metodo Runge-Kutta 4. reda, ki jo, uporabljeno za reševanje enačbe (2), zapišemo kot

$$\begin{aligned}v_1 &= y_0, & k_1 &= A(t_0, v_1)v_1, \\v_2 &= y_0 + \frac{1}{2}hk_1, & k_2 &= A(t_0 + \frac{1}{2}h, v_2)v_2, \\v_3 &= y_0 + \frac{1}{2}hk_2, & k_3 &= A(t_0 + \frac{1}{2}h, v_3)v_3, \\v_4 &= y_0 + hk_3, & k_4 &= A(t_0 + h, v_4)v_4, \\ \Delta &= \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \\y_1 &= y_0 + \Delta.\end{aligned}$$

Čeprav je $y_0 \in G$ in $A(t, y) \in \mathfrak{g}$, y_1 v splošnem ne leži več v G . Če pa metodo Runge-Kutta uporabimo za reševanje dexpinv enačbe (4), kjer neskončno vrsto okrajšamo tako, da bo lokalna napaka izračunanega približka $\mathcal{O}(h^5)$, dobimo naslednjo RK-MK metodo:

$$\begin{aligned}V_1 &= O, & K_1 &= A(t_0, y_0), \\V_2 &= \frac{h}{2}K_1, & K_2 &= A(t_0 + \frac{h}{2}, e^{V_2}y_0) - \frac{1}{2}[V_2, A(t_0 + \frac{h}{2}, e^{V_2}y_0)], \\V_3 &= \frac{h}{2}K_2, & K_3 &= A(t_0 + \frac{h}{2}, e^{V_3}y_0) - \frac{1}{2}[V_3, A(t_0 + \frac{h}{2}, e^{V_3}y_0)], \\V_4 &= hK_3, & K_4 &= A(t_0 + h, e^{V_4}y_0) - \frac{1}{2}[V_4, A(t_0 + h, e^{V_4}y_0)], \\ \Delta &= \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \\y_1 &= e^{\Delta}y_0.\end{aligned}$$

Ker smo uporabili le operacije, ki so skladne s strukturo Liejeve algebre, je tudi $\Delta \in \mathfrak{g}$, zato nas eksponentna funkcija vrne nazaj v Liejevo grupo in $y_1 \in G$.

RK-MK metode so najbolj robustne med vsemi splošnimi metodami za reševanje Liejeve diferencialne enačbe (2). V nadaljevanju članka pa si bomo ogledali družino metod za reševanje linearne Liejeve enačbe, ki temeljijo na Magnusovem razvoju. Čeprav te metode niso tako splošne kot RK-MK, imajo kar nekaj zanimivih lastnosti.

4. Magnusov razvoj

Magnusov razvoj rešitve linearne Liejeve diferencialne enačbe

$$y' = A(t)y, \quad y(t_0) = y_0 \in G, \quad (5)$$

kjer je $A : [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{g}$, je bil prvič predstavljen v članku [5], kjer je Wilhelm Magnus pokazal, da lahko rešitev dexpinv enačbe (4) zapišemo v obliki neskončne vrste

$$\begin{aligned} X(t) = & \int_{t_0}^t A(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} [A(\xi_2), A(\xi_1)] d\xi_2 d\xi_1 \\ & + \frac{1}{12} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} \int_{t_0}^{\xi_1} [A(\xi_3), [A(\xi_2, A(\xi_1))]] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ & + \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} \int_{t_0}^{\xi_2} [[A(\xi_3), A(\xi_2)], A(\xi_1)] d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Čeprav je Magnus izračunal ta razvoj le vključno do členov s štirikratnimi integrali in ni nikoli objavil niti splošne formule niti dokaza za konvergenco, je bil Magnusov razvoj (oziroma nekaj njegovih začetnih členov) uporabljen v stotinah člankov, predvsem v teoretični fiziki in kvantni kemiji.

Začetek Magnusovega razvoja lahko izpeljemo s pomočjo Picardove iteracije iz dexpinv enačbe (4), kjer namesto neskončne vrste vzamemo le končno vsoto

$$X'_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \text{ad}_{X_n}^k A(t), \quad t \geq t_0, \quad X_0(t_0) = O,$$

tako je

$$X_1(t) = \int_0^t A(\xi) d\xi,$$

v naslednjem koraku pa

$$\begin{aligned} X_2(t) &= \int_0^t A(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t [X_1(\xi), A(\xi)] d\xi \\ &= \int_0^t A(\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^t \left[\int_0^{\xi_1} A(\xi_2) d\xi_2, A(\xi_1) \right] d\xi_1. \end{aligned}$$

Celovito analizo Magnusovega razvoja, predvsem s stališča uporabe v numerični analizi, sta pred kratkim objavila Iserles in Nørsett [4]. V njunem članku je izpeljana rekurzivna formula za izračun koeficientov Magnusovega razvoja, dokazana konvergenca (ki je bila kasneje še precej izboljšana [3]) in opisan učinkovit način za izračun večkratnih integralov, ki nastopajo v Magnusovem razvoju.

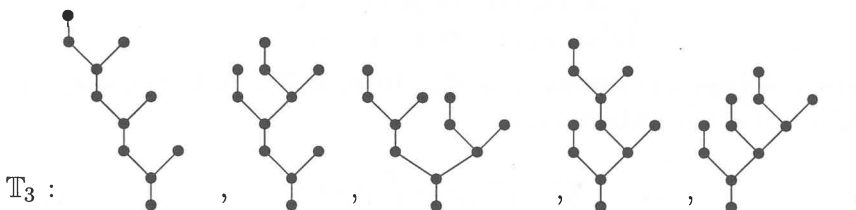
Členi Magnusovega razvoja funkcije X so ali integral $\int_{t_0}^t A(\xi) d\xi$ ali skalarni mnogokratniki izraza $\int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\xi_1} [F_1(\xi_1), F_2(\xi_2)] d\xi_2$, kjer sta F_1 in F_2 člena, ki sta že prej nastopila v razvoju. Zato lahko vsakemu členu razvoja funkcije X glede na naslednji pravili priredimo binarno drevo s korenino:

1. Funkciji A priredimo drevo z dvema vozloma .
2. Če sta členoma F_1 in F_2 prirejeni drevesi τ_1 in τ_2 , potem členu

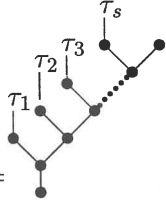
$$\int_{t_0}^t [F_1(\xi), F_2(t)] d\xi \quad \text{priredimo drevo} \quad \tau = \begin{array}{c} \tau_1 \quad \tau_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} \quad (7)$$

Preprosteje povedano: navpične črte v drevesu ustrezajo integraciji, razvejišča pa komutatorjem. Tako lahko vsakemu členu Magnusovega razvoja priredimo drevo, ki ga dobimo z iteriranjem predpisa (7).

Naj bo $\mathbb{T}_m$, $m \geq 0$ množica vseh dreves, ki jih dobimo po m iteracijah (7). Vsak $\tau \in \mathbb{T}_m$ ima natanko m točk stopnje 2 (ki ustrezajo navpičnim črtam, torej integraciji) in m točk stopnje 3 (ki ustrezajo 'razvejiščem' oziroma komutatorjem). Tako je



Naj bo $\tau \mapsto \mathcal{C}_\tau$, kjer je τ binarno drevo in $\mathcal{C}_\tau$ ustrezna funkcija v $\mathfrak{g}$, preslikava iz podmnožice binarnih dreves s koreninami v množico členov Magnusovega razvoja $\mathfrak{g}$. Koeficient pri $\mathcal{C}_\tau$ v Magnusovem razvoju je enak 1, če je $\tau \in \mathbb{T}_0$, sicer pa je

$$\alpha(\tau) = \frac{B_s}{s!} \prod_{i=1}^s \alpha(\tau_i), \quad \text{kjer je } \tau = \begin{array}{c} \tau_s \\ \vdots \\ \tau_1 \end{array} \quad (8)$$


Ker poznamo koeficiente (8), lahko zapišemo splošen Magnusov razvoj kot

$$X(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\tau \in \mathbb{T}_m} \alpha(\tau) \int_{t_0}^t \mathcal{C}_\tau(\xi) d\xi. \quad (9)$$

Dokazano je [3], da vrsta (9) konvergira za vse t , za katere je

$$\int_{t_0}^t \|A(\xi)\| d\xi \leq \int_0^{2\pi} \frac{dx}{4 + x(1 - \operatorname{ctg} \frac{x}{2})} \approx 1.0868687 \dots$$

Pri praktični uporabi seveda lahko upoštevamo le končno mnogo členov Magnusovega razvoja. Končna vsota

$$X_p(t) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{\tau \in \mathbb{T}_m} \alpha(\tau) \int_{t_0}^t \mathcal{C}_\tau(\xi) d\xi, \quad (10)$$

kjer je $p \geq 1$, se ponuja sama po sebi, ker je $X_p(t) = X(t) + \mathcal{O}((t - t_0)^{p+1})$ [4]. Ta izbira pa ni najboljša, saj se izkaže, da lahko red p dosežemo že z manjšim številom členov. S $\mathbb{F}_m$, $m \geq 0$ označimo množico dreves iz $\cup_{k=0}^m \mathbb{T}_k$, za katera velja

$$\tau \in \mathbb{F}_m \Rightarrow \mathcal{C}_\tau(t) = \mathcal{O}((t - t_0)^m)$$

za vse dovolj gladke funkcije $A : [t_0, \infty) \rightarrow \mathfrak{g}$. Množice $\mathbb{F}_m$ lahko konstruiramo rekurzivno: $\mathbb{F}_0 = \mathbb{T}_0$, $\mathbb{F}_1 = \emptyset$ in

$$\tau \in \begin{cases} \mathbb{F}_{m_1+m_2+1}, & \text{če je } \tau_1 \neq \tau_2 \\ \mathbb{F}_{m_1+m_2+2}, & \text{če je } \tau_1 = \tau_2, \end{cases}$$

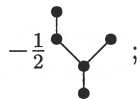
če je drevo τ dobljeno iz dreves $\tau_1 \in \mathbb{F}_{m_1}$ in $\tau_2 \in \mathbb{F}_{m_2}$ kot v enačbi (7). Sedaj lahko vsoto (10) nadomestimo z

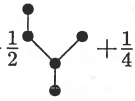
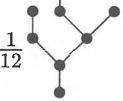
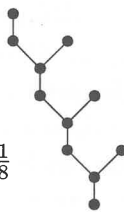
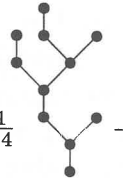
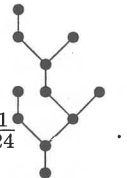
$$X_{[p]}(t) = \sum_{m=0}^{p-1} \sum_{\tau \in \mathbb{F}_m} \alpha(\tau) \int_{t_0}^t \mathcal{C}_\tau(\xi) d\xi, \quad (11)$$

kar je tudi aproksimacija reda p za Magnusov razvoj, število členov pa s p narašča počasneje kot pri (10). Število členov v (11) lahko še zmanjšamo: Iserles in Nørsett sta v [4] pokazala, da vrsta za $X_{[p]}(t)$ vsebuje le sode člene, z drugimi besedami: $X_{[p]}(t)$ je vedno aproksimacija sodega reda. Tako za $p = 2q - 1$ dobimo red $2q$, kar še dodatno zmanjša število členov v razvoju.

Tako dobimo zaporedje približkov sodega reda za Magnusovo vrsto z relativno majhnim številom členov. Zapišimo jih kar z drevesi:

red 2: ;

red 4:  $-\frac{1}{2}$  ;

red 6:  $-\frac{1}{2}$  $+\frac{1}{4}$  $+\frac{1}{12}$  $-\frac{1}{8}$  $-\frac{1}{24}$  $-\frac{1}{24}$ .

Elementi matrične funkcije A so večkrat polinomi, trigonometrične, eksponentne ali kakšne druge funkcije, za katere bi lahko integrale $\int_{t_0}^t C_\tau(\xi) d\xi$ izračunali analitično, v splošnem pa moramo večkratne integrale računati numerično. Čeprav je numerično računanje vrednosti večkratnih integralov običajno zelo zamudno, lahko z upoštevanjem strukture integralov, ki nastopajo v (11), in upoštevanjem odvisnosti v Liejevi algebri $\mathfrak{g}$ ta postopek zelo pospešimo. Integrali $\int_{t_0}^t C_\tau(\xi) d\xi$ so vsi oblike

$$I(h) = \int_{\mathcal{S}(t_0, h)} \mathbf{L}(A(\xi_1), A(\xi_2), \dots, A(\xi_s)) d\xi, \quad (12)$$

kjer je $\mathbf{L}$ multilinearne forma in $\mathcal{S}(t_0, h)$ politop oblike

$$\mathcal{S}(t_0, h) = \{\xi \in \mathbb{R}^s : t_0 \leq \xi_1 \leq t_0 + h, t_0 \leq \xi_i \leq \xi_j, i = 2, 3, \dots, s \text{ in } j < i\}.$$

Na primer, za

$$I(h) = \int_{t_0}^{t_0+h} \int_{t_0}^{\xi_1} \int_{t_0}^{\xi_1} [A(\xi_3), [A(\xi_2), A(\xi_1)]] d\xi$$

je $s = 3$, $\mathbf{L}(E_1, E_2, E_3) = [E_3, [E_2, E_1]]$ in $j_2 = j_3 = 1$.

Naj bodo $c_1, c_2, \dots, c_\nu \in [0, 1]$ med seboj različne kolokacijske točke in naj bo $A_k = hA(t_0 + c_k h)$, $k = 1, 2, \dots, \nu$. Za izračun približne vrednosti

integrala (12) sta Iserles in Nørsett v članku [4] predlagala kvadraturno formulo

$$I(h) \approx h^s \sum_{\mathbf{k} \in P_s^\nu} b_{\mathbf{k}} \mathbf{L}(A_{k_1}, A_{k_2}, \dots, A_{k_s}), \quad (13)$$

kjer je P_s^ν množica vseh besed dolžine s , sestavljenih iz abecede $\{1, 2, \dots, \nu\}$ in

$$b_{\mathbf{k}} = \int_S \prod_{i=1}^s \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\nu} \frac{\xi_i - \xi_j}{c_{k_i} - c_j} d\xi, \quad \mathbf{k} \in P_s^\nu.$$

V formuli (13) nastopa le ν vrednosti funkcije A , ki se pojavljajo na različnih mestih v vseh različnih multilinearne formah, ki nastopajo v razvoju (11).

Za $s = 1$ in $\mathbf{L}(E) = E$ se kvadraturna formula (13) poenostavi v običajno kvadraturno formulo z interpolacijskimi utežmi. Pri tem je red kvadraturene formule *neodvisen od števila spremenljivk!* Če za kolokacijske točke $c_1, \dots, c_\nu$ izberemo ničle ν -tega Lagrangeovega polinoma na $[0, 1]$, dobimo za enodimenzionalni integral znano Gaussovo kvadraturno formulo reda 2ν , zato so vsi s formulo (13) izračunani približki za vrednost integralov reda 2ν , pri tem pa uporabimo le ν funkcijskih vrednosti.

Primer: Za $\nu = 2$ sta kolokacijski točki Gaussove kvadraturene formule $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ in $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ in

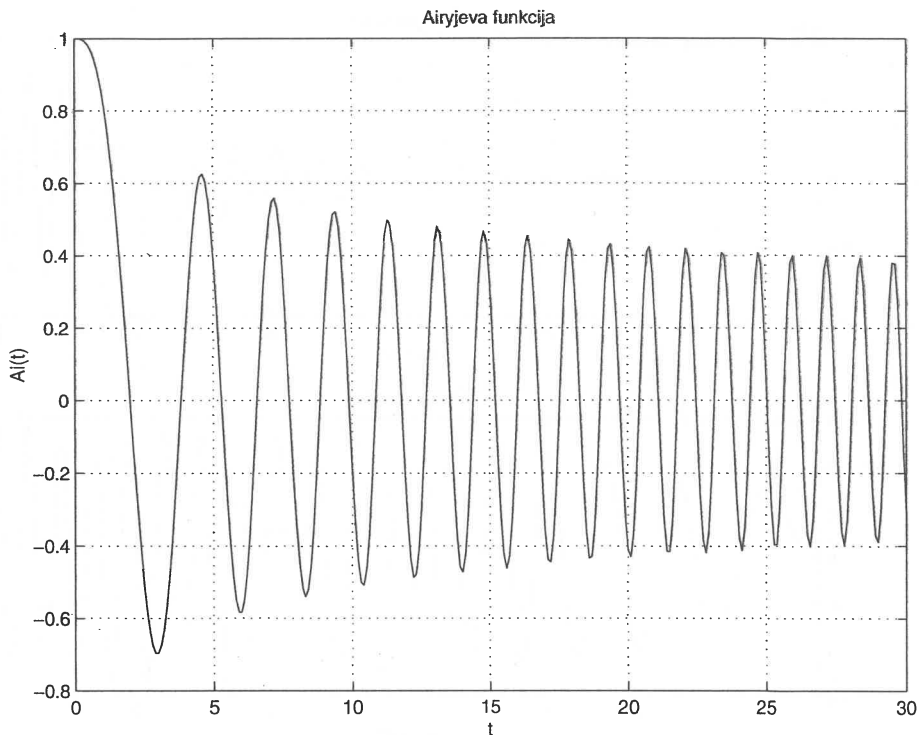
$$\int_{t_0}^{t_0+h} \int_{t_0}^{\xi_1} [A(\xi_2), A(\xi_1)] d\xi_2 d\xi_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} h^2 [A_2, A_1] + \mathcal{O}(h^5),$$

kjer je $A_i = A(t_0 + c_i h)$, $i = 1, 2$. Podobno dobimo za $\nu = 3$ kolokacijske točke $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ in $c_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$ ter kvadraturno formulo

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_0+h} \int_{t_0}^{\xi_1} [A(\xi_2), A(\xi_1)] d\xi_2 d\xi_1 \\ &= \frac{\sqrt{15}}{54} (2[A_1, A_2] + [A_1, A_3] + 2[A_2, A_3]) + \mathcal{O}(h^7), \end{aligned}$$

kjer je spet $A_i = A(t_0 + c_i h)$. ■

Kvadraturna formula (13) je izredno nezahtevna glede izračunov funkcijskih vrednosti, zato pa vsebuje toliko več komutatorjev, saj moč množice C_s^ν zelo hitro narašča z ν in z s . Število komutatorjev lahko zelo zmanjšamo z upoštevanjem simetrij v Liejevi algebri (antikomutativnost in Jacobijeva identiteta), s pametno izbiro baze in s pazljivim združevanjem členov.



Slika 1. Točna rešitev Airyjeve enačbe.

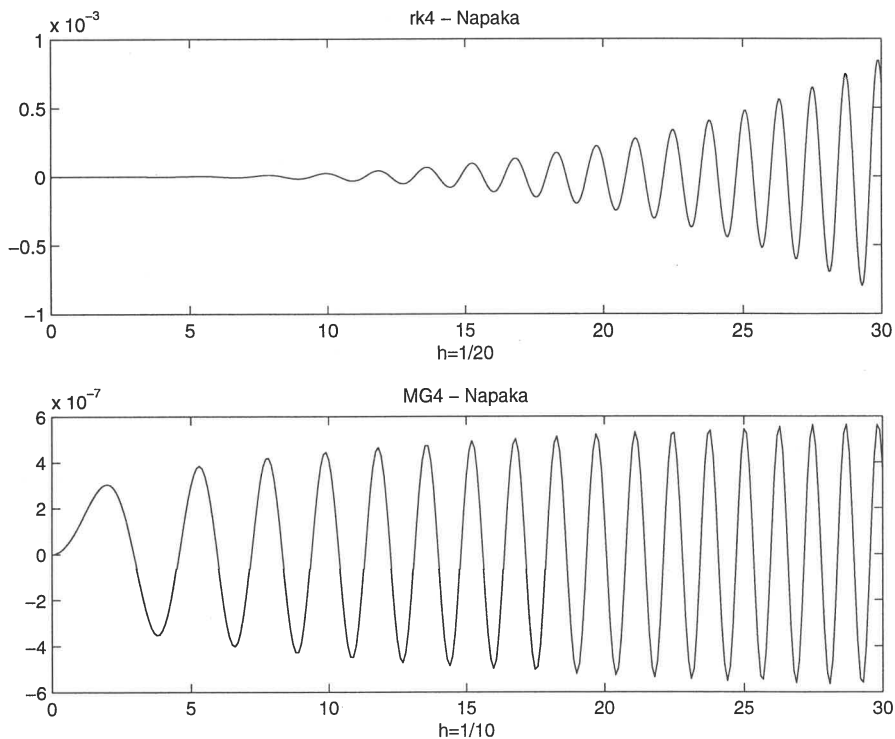
Primer: Pri metodi četrtega reda je dovolj samo en komutator:

$$\begin{aligned} X(t_0 + h) &= \frac{h}{2}(A_1 + A_2) - \frac{h^2\sqrt{3}}{12}[A_1, A_2] \\ y(t_0 + h) &= e^{X(t_0+h)}y(t_0). \end{aligned} \quad (14)$$

Za optimalno metodo šestega reda pa moramo bazo A_1, A_2, A_3 iz prejšnjega primera zamenjati z bazo

$$B_1 = A_2, \quad B_2 = \frac{\sqrt{15}}{3}(A_3 - A_1), \quad B_3 = \frac{10}{3}(A_3 - 2A_2 + A_1).$$

Tako pridemo do metode



Slika 2. Napaka metode Runge-Kutta pri koraku $h = 1/20$ (zgoraj) in Magnusove metode pri koraku $h = 1/10$ (spodaj).

$$\begin{aligned}
 P_1 &= [B_2, \frac{1}{12}B_1 + \frac{1}{240}B_3], \\
 P_2 &= [B_1, [B_1, \frac{1}{360}B_3 - \frac{1}{60}P_1]], \\
 P_3 &= \frac{1}{20}[B_2, P_1], \\
 X(t_0 + h) &= B_1 + \frac{1}{12}B_3 + P_1 + P_2 + P_3, \\
 y(t_0 + h) &= e^{X(t_0+h)}y(t_0).
 \end{aligned} \tag{15}$$

Za izračun vsakega približka po tej metodi moramo torej izračunati tri vrednosti funkcije A , štiri komutatorje in eno vrednost matrične eksponentne funkcije. ■

5. Numerični primer

Za primer vzemimo Airyjevo diferencialno enačbo $y'' + ty = 0$, ki jo zapišemo v obliki Liejeve diferencialne enačbe (5)

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{bmatrix} Y.$$

Izberimo si še začetni pogoj $Y(0) = I$. Rešitve tega problema z naraščajočim t vedno hitreje oscilirajo: $y(t) \approx Ct^{-1/4} \cos(\frac{2}{3}t^{3/2})$, $t \gg 1$, kjer je C konstanta, odvisna od začetnih pogojev (glej sliko 1). Zato je reševanje Airyjeve enačbe na daljših intervalih zelo zahtevno, običajne numerične metode zahtevajo vedno manjši korak in s tem vedno več računanja. Pri uporabi Magnusove metode pa ni skoraj nobenih težav.

Rešitev Airyjeve enačbe smo izračunali z Magnusovo metodo četrtega reda (14), za primerjavo pa še s klasično metodo Runge-Kutta četrtega reda. Na sliki 2 lahko primerjamo napaki obeh metod. Opazimo, da napaka metode Runge-Kutta narašča mnogo hitreje kot napaka Magnusove metode (merili na obeh slikah sta različni!). Na intervalu $[0, 30]$, na katerem smo rešitev računali, je napaka rešitve, izračunane z metodo Runge-Kutta pri koraku $h = 1/20$, približno tisočkrat večja, kot je napaka rešitve, izračunane z Magnusovo metodo pri koraku $h = 1/10$. Na daljših intervalih pa je razlika še večja.

LITERATURA

- [1] M. T. Chu, *Inverse Eigenvalue problems*, SIAM Review, **40** (1998), 1–39.
- [2] F. Hausdorff, *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie*, Berichte der Sächischen Akademie der Wissenschaften (Math. Phys. Klasse), **58** (1906), 19–48.
- [3] A. Iserles, H. Z. Munthe-Kaas, S. P. Nørsett, and A. Zanna, *Lie-group methods*, Acta Numerica, **9** (2000), pp. 215–365.
- [4] A. Iserles and S. P. Nørsett, *On the solution of linear differential equations in Lie groups*, Phil. Trans. Royal Society A, **357** (1999), 983–1020.
- [5] W. Magnus, *On the exponential solution of differential equations for a linear operator*, Comm. Pure Appl. Math, **VII** (1954), 649–673.
- [6] V. S. Varadarajan, *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, GTM 102, Springer, 1954.
- [7] J. Vrabec, *Vektorska polja na sferah*, Obzornik mat. fiz. **47** (2000), 97–120.

DUALNO EULERJEVI GRAFI

BRIGITTE IN HERMAN SERVATIUS,

prev. in prir. ARJANA ŽITNIK

Math. Subj. Class. (2000): 05C10, 05C45, 05C38, 05C85, 68R10

Graf v ravnini je dualno eulerjev, če lahko njegove povezave naštejemo v takšnem vrstnem redu, da predstavljajo eulerjev sprehod v grafu in hkrati tudi v njegovem dualu. Dualno eulerjevi grafi so bili uvedeni za potrebe elektrotehnike pri načrtovanju in realizaciji CMOS vezij visoke gostote. V tem sestavku pokažemo, da ima dualno eulerjev graf tudi vložitev v ravnino, pri kateri ima eulerjev petriejev sprehod, to je takšen sprehod, pri katerem izmenično zavijamo levo in desno.

DUAL-EULERIAN GRAPHS

A dual-eulerian graph is a plane graph which has an ordering defined on its edge set which forms simultaneously an Euler tour in the graph and an Euler tour in the dual graph. Dual-eulerian graphs were defined and studied in the context of silicon optimization of cmos layouts. We show that if a graph has a dual-eulerian trail, then it has, in some embedding, a dual-eulerian left-right trail.

1. Definicije

V sestavku obravnavamo neusmerjene grafe, ki imajo lahko tudi zanke in večkratne povezave ter so celično vloženi v neko ploskev, ponavadi v ravnino. Graf skupaj z vložitvijo v ravnino bomo imenovali *graf v ravnini*. Takšen graf lahko ponazorimo z risbo na listu papirja, kjer so točke majhni krožci, povezave pa črte, ki povezujejo ustrezne krožce in se nobeni dve črti ne sekata; dotikata se lahko le v skupnem krajišču. Če povezave in točke grafa odstranimo iz ravnine, ravnina razpade na več delov; vsako povezano komponento potem imenujemo *lice*. Če je vsako omejeno lice homeomorfno notranjosti kroga, neomejeno lice pa komplementu kroga, potem pravimo, da je graf v ravnini celični. V nadaljevanju se bomo ukvarjali le s takšnimi grafi v ravnini. Začnemo z najnujnejšimi definicijami. Sledili bomo oznakam iz [1], kjer lahko bralec najde podrobnejšo razlago za manjkajoče pojme. V slovenščini je na voljo učbenik iz teorije grafov [13].

Sprehod v grafu G med točkama v_0 in v_k je zaporedje $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$, kjer so v_i točke in e_i povezave grafa G . Pri tem ima povezava e_i za krajišči v_{i-1} in v_i , $i = 1, \dots, k$. Sprehod imenujemo *obhod*, če je $v_0 = v_k$. Pri obhodih nam je največkrat vseeno, v kateri točki začnemo. Zato ne bomo razlikovali med danim obhodom t in obhodom, ki ga dobimo iz t , če zaporedje točk in povezav ciklično zavrtimo. Sprehod v grafu G , ki vsebuje vsako povezavo natanko enkrat, imenujemo *eulerjev sprehod*. Graf,

ki ima eulerjev obhod, imenujemo *eulerjev graf*. Znano je, da je povezan graf eulerjev, če in samo če imajo vse njegove točke sodo stopnjo.

Pri grafih v ravnini lahko govorimo o geometričnem dualu. *Dualni graf* G^* grafa G v ravnini je graf, vložen v ravnino tako, da: v vsako lice f grafa G postavimo točko v_f grafa G^* in za vsako povezavo e iz $E(G)$ narišemo povezavo e^* čez e , ki povezuje točki G^* , ki ležita na vsaki strani e . Vsaki povezavi e v G ustreza natanko ena povezava e^* v G^* . Tako bomo večkrat privzeli, da imata G in G^* kar isto množico povezav. Vsakemu licu v G ustreza natanko ena točka v G^* , tako bomo tudi večkrat enačili lica grafa in točke njegovega duala.

2. Dualno eulerjevi grafi in petriejevi sprehodi

Sprehod $v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$ v grafu G v ravnini je *dualen*, če je $v_0^* e_1^* v_1^* \dots e_k^* v_k^* = f_0 e_1 f_1 \dots e_k f_k$ sprehod v dualnem grafu. Graf v ravnini je *dualno eulerjev*, če ima dualen eulerjev obhod (sprehod). Vzemimo sedaj povezan graf G v ravnini. Če želimo, da bo G^* eulerjev, morajo imeti vsa lica G sodo število povezav na svoji meji. Za grafe v ravnini pa ta pogoj pomeni, da so dvodelni.

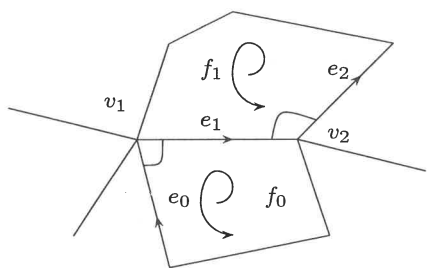
Dualno eulerjevi grafi so bili uvedeni v [11] kot pomoč pri načrtovanju in realizaciji CMOS vezij visoke gostote, pri čemer je zaželeno, da vezja zavzamejo čim manjši prostor. Če vezja predstavimo z neusmerjenimi grafi, lahko s pomočjo dualnih sprehodov v teh grafih poiščemo čim bolj ugodne položaje tranzistorjev. V več člankih obravnavajo dualne sprehode (ne nujno eulerjeve) v zaporedno-vzporednih grafih [5,6,8,11]. V [3] je opisan polinomski algoritem, ki za dani graf v ravnini preveri, ali ima dualno eulerjev sprehod ali ne. Glede na to, da to lahko storimo dosti enostavneje, kar bomo opisali v nadaljevanju, je članek zanimiv predvsem kot referenca, v kateri je bil problem dualno eulerjevih sprehodov predstavljen matematični javnosti. Ker nima vsak graf v ravnini dualno eulerjevega sprehoda, je zanimiv problem, določiti najmanjše število disjunktnih dualnih sprehodov. Izkaže se, da je NP-težak [12].

Dvema zaporednima povezavama na sprehodu, ki sta hkrati zaporedni povezavi na meji kakega lica, pravimo *zavoj*. Če skupno lice leži na desni strani, ko potujemo vzdolž sprehoda, zavoj imenujemo *desni zavoj*; če skupno lice leži na levi strani, ga imenujemo *levi zavoj*. Pri zaporednih povezavah s skupno točko stopnje 2 je zavoj hkrati desni in levi. Kadar je par povezav levi zavoj glede na sprehod t , potem je glede na nasprotni sprehod (ko potujemo po sprehodu v nasprotni smeri) to desni zavoj in obratno.

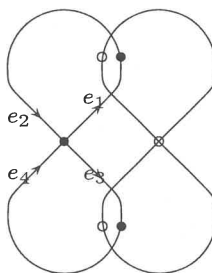
Sprehod imenujemo *petriejev sprehod*, če sta poljubni dve zaporedni povezavi zavoj in se vzdolž sprehoda izmenjujejo levi in desni zavoji. Zavoje pri petriejevih sprehodih označimo z loki kot na sliki 1.

Ni težko videti, da zaporedje povezav, ki ustreza petriejevemu sprehodu v nekem grafu v ravnini, hkrati določa petriejev sprehod v dualnem grafu v ravnini. Tako velja naslednja trditev:

Trditev 2.1. Če ima graf G v ravnini eulerjev sprehod t , ki je hkrati tudi petriejev sprehod, potem je t dualno eulerjev sprehod za G .



Slika 1. Petriejev sprehod z zaporedjem povezav e_0, e_1, e_2 .



Slika 2. Dualno eulerjev sprehod z zaporedjem povezav e_1, e_2, e_3, e_4 ni petriejev.

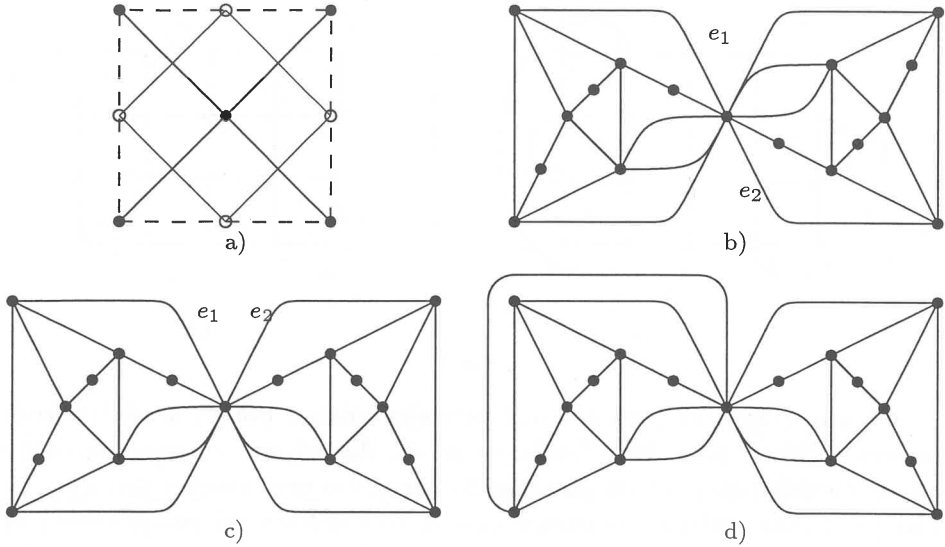
Obratno pa ne velja nujno. Če se sprehodimo po grafu na sliki 2, kot običajno rišemo osmico, dobimo dualno eulerjev sprehod, ki pa ni petriejev. Vendar pa ima ta graf tudi eulerjev petriejev sprehod, ki je še en dualno eulerjev sprehod. Namen tega sestavka je, da pokažemo delni obrat trditve 2.1:

Izrek 2.2. Če ima graf G v ravnini dualno eulerjev obhod t , potem ima G dualno eulerjev obhod t' , ki je hkrati tudi petriejev obhod.

S pomočjo tega izreka ni težko ugotoviti, ali je dani graf v ravnini dualno eulerjev. Dovolj je, da preverimo petriejeve sprehode, kar lahko storimo takole: začnemo s poljubno povezavo in nadaljujemo tako, da izmenično zavijamo levo-desno-levo-... dokler ne pridemo do začetne povezave. Maksimalen petriejev sprehod je določen z izbiro začetnega levega ali desnega zavoja. Če smo obhodili vsako povezavo natanko enkrat, smo končali. Sicer pa moramo preveriti še petriejev sprehod, ki se začne v drugo smer, desno-levo-desno-...

Zahteva, da je G graf v ravnini, je v izreku 2.2 potrebna, kar vidimo iz slike 3a, na kateri ima graf na torusu dualno eulerjev obhod, vendar pa nima nobenega eulerjevega petriejevega obhoda. V izreku 2.2 se moramo

Dualno Eulerjevi grafi



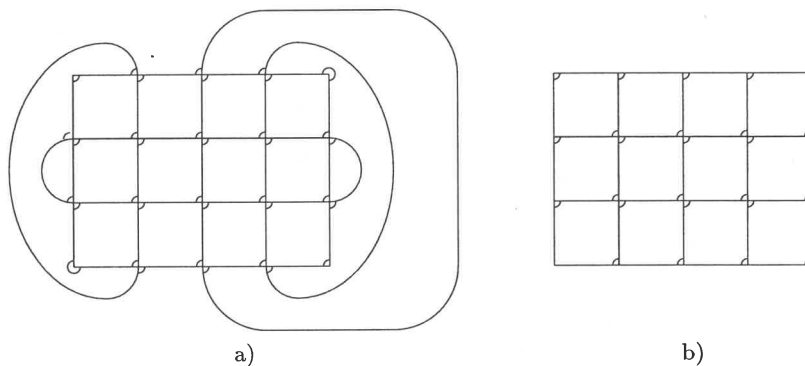
Slika 3

nujno omejiti na obhode, saj obstajajo grafi v ravnini, ki imajo dualno eulerjev sprehod, nimajo pa eulerjevega petrievega sprehoda. Takšen je graf na sliki 3b, ki ima dualno eulerjev sprehod, pri katerem povezavi e_1 sledi povezava e_2 , nima pa eulerjevega petrievega sprehoda. Na sliki 3c graf vložimo nekoliko drugače in dobljeni graf v ravnini ima eulerjev petriejev sprehod, medtem ko vložitev na sliki 3d ni niti dualno eulerjeva.

Povezanost grafa G , ki ni polni graf, je najmanjše število točk, brez katerih graf postane nepovezan. Če je povezanost grafa vsaj 2, pravimo, da je graf *2-povezan*. Pri 2-povezanih grafih v ravnini so edini možni dualno eulerjevi sprehodi le petriejevi sprehodi.

Izrek 2.3. Če ima 2-povezan graf G v ravnini dualno eulerjev sprehod (obhod) t , je t tudi eulerjev petriejev sprehod (obhod).

Dokaz. Recimo, da ima G dualno eulerjev sprehod t . Naj bo $v_{k-2}, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_k, e_{k+1}, v_{k+1}$ del sprehoda t in naj bo $f_{k-2}, e_{k-1}, f_{k-1}, e_k, f_k, e_{k+1}, f_{k+1}$ ustrezen del sprehoda v dualnem grafu. Ker je G 2-povezan, vemo, da sosednji lici f_i in f_{i+1} nista isto lice in da zaporedje e_k, v_k, e_{k+1} dobro definira smer obhoda na meji lica f_k , saj se na meji istega lica lahko pojavi samo enkrat. Recimo, da se zaporedje e_{k-1}, v_{k-1}, e_k pojavi na meji f_{k-1} v smeri urinega kazalca. Potem se v_k, e_{k+1}, v_{k+1} pojavi na meji f_k v nasprotni smeri urinega kazalca, kar pomeni, da je desnemu zavoju sledil levi zavoj, glej sliko 1. ■



Slika 4

Če ima 2-povezan graf eulerjev petriejev obhod, potem je seveda tudi nasprotni obhod petriejev. Lahko se zgodi, da dobimo eulerjev petriejev obhod, če začnemo pri neki povezavi in naredimo prvi zavo v desno, prav tako pa dobimo eulerjev petriejev obhod, če začnemo pri isti povezavi in naredimo prvi zavo v levo. To se zgodi na primer pri grafu iz slike 4a, pri katerem sta zaradi simetrije leva in desna stran enakovredni. Slika 4b prikazuje ta pojav pri grafu na torusu. Tako imamo naslednjo posledico.

Posledica 2.4. *Graf v ravnini, ki je 2-povezan, ima največ 4 dualno eulerjeve obhode.*

Če graf G ni 2-povezan, je sestavljen iz 2-povezanih komponent – *blokov*, ki se stikajo v *prerezni točki*. Graf na sliki 3b ima na primer eno prerezno točko in dva bloka, ki se stikata v tej točki. Graf, v katerem so točke bloki nekega grafa in sta dve točki sosednji, če imata ustrezna bloka skupno točko, je vedno drevo; imenovali ga bomo *drevo blokov*. Dualno eulerjev obhod t grafa G , ki gre skozi prerezno točko v iz enega bloka v sosednji blok, mora uporabiti dve povezavi, ki ležita na meji nekega skupnega lica $f = v^*$, da bo isto zaporedje povezav tudi sprehod v dualu. Del sprehoda t v bloku, ki predstavlja list (točko stopje 1) v drevesu blokov, je zato dualno eulerjev obhod oziroma kar petriejev obhod, saj so bloki 2-povezani grafi.

Sedaj je dokaz izreka 2.2.jasen, saj lahko tedaj, ko imamo v grafu G obhod, spojimo obhode ali njihove nasprotne obhode v blokih v poljubnem vrstnem redu, da dobimo dualno eulerjev obhod v grafu G . Tako lahko izberemo, da je prehod čez v zavo, ki se ujema z eulerjevimi petriejevimi obhodi na listih drevesa blokov, ki obstajajo po indukcijski predpostavki.

Sprehod se lahko konča v drugem bloku, kot se začne, kot na primer v grafu iz slike 3b. Če želimo, da bi graf imel eulerjev petriejev sprehod, je morda v tem primeru treba poiskati novo vložitev grafa, pri kateri se bloki drugače stikajo, čeprav je vsak blok zase dualno eulerjev. Kadar pa

samo iščemo dualno eulerjev sprehod, je dovolj, če v vsakem bloku posebej poiščemo eulerjev petriejev sprehod in potem te sprehode spojimo. Ker lahko bloke in prerezne točke grafa najdemo v linearnem času, glej [10], imamo sedaj enostaven linearen algoritem, ki preveri, ali je dani graf v ravnini dualno eulerjev. Algoritem iz [3] ne uporablja petriejevih sprehodov in drevesne strukture drevesa blokov ter je precej bolj zapleten.

3. Sklep

V [3] so postavili vprašanje, ali obstaja polinomski algoritem, ki bi prepoznal grafe, ki imajo kakšno dualno eulerjevo vložitev v ravnino, in bi takšno vložitev, če obstaja, tudi poiskal. Pred kratkim so na to vprašanje pritrdilno odgovorili v [2] in neodvisno v [9]. Algoritem iz [9] uporabi rezultate pričujočega članka in kanonično dekompozicijo grafa na 3-povezane komponente. Dekompozicijo grafa na 3-povezane komponente lahko opravimo v linearnem času z algoritmom Hopcrofta in Tarjana [4], v [7] pa je predstavljen tudi paralelen algoritem v ta namen. Tako je lahko algoritem iz [9] tudi praktično uporaben, medtem ko je tisti iz [2] preveč zapleten za implementacijo.

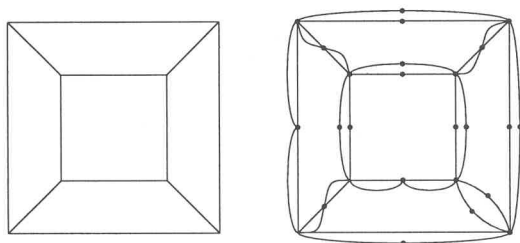
Za konec naj še pripomnimo, da lahko o petriejevih sprehodih govorimo tudi pri grafih, ki so vloženi v orientabilne ploskve višjega roda. Definiramo lahko *eulerjevo-petriejev rod grafa* kot najmanjši rod ploskve, v katero ima graf dualno eulerjevo vložitev. Zanimivo bi bilo ta rod podrobneje raziskati.

Zaporedno-vzporedno razširitev grafa G dobimo s podvajanjem in subdivizijo povezav; na vsaki od povezav grafa G naredimo eno od naslednjih operacij:

- povezavo pustimo pri miru;
- povezavo *podvojimo* – zamenjamo jo z dvojno povezavo;
- povezavo *subdividiramo* – na sredo povezave dodamo novo točko in takó povezavo nadomestimo z dvema zaporednima povezavama;
- povezavo najprej subdividiramo in potem obe novi povezavi podvojimo;
- povezavo najprej podvojimo in potem obe novi povezavi še subdividiramo.

Takšna razširitev grafa ohrani enako „topologijo ciklov“, vsak graf G v ravnini pa lahko zaporedno-vzporedno razširimo tako, da ima dualno eulerjev obhod. To lahko storimo na naslednji način: v grafu G poiščemo vpeto drevo T ; povezave T najprej podvojimo in nato subdividiramo, povezave $G \setminus T$ pa najprej subdividiramo in nato podvojimo, glej sliko 5. Dobljeni graf ima štirikrat toliko povezav kot prvotni in ima dualno eulerjev obhod.

Seveda pa bi bila zaželeno zaporedno-vzporedna razširitev s čim manjšim številom dodatnih povezav. S tem problemom se deloma ukvarja disertacija [14].



Slika 5. Dualno eulerjeva zaporedno-vzporedna razširitev grafa kocke.

LITERATURA

- [1] J. A. Bondy, Basic graph theory: Paths and circuits, v: *Handbook of Combinatorics*, ur. R. Graham, M. Grottschel in L. Lovasz, Elsevier, str. 3–110, 1995.
- [2] Zhi-Zhong Chen, Xin He in Chun-Hsi Huang, *Finding double-Euler trails of planar graphs in linear time*, FOCS, str. 319–329, Oct 17–19, 1999.
- [3] B. Carlson, C. Chen in C. Meliksetian, *Dual eulerian properties of plane multigraphs*, IAM J. Disc. Math. **8** (1995) 33–50.
- [4] J. E. Hopcroft in R. E. Tarjan, *Dividing a graph into triconnected components*, SIAM J. Comput. **2** (1973) 135–158.
- [5] Y. Huang in M. Sarrefzadeh, *A parallel algorithm for minimum dual cover with application to cmos layout*, J. Circuits, Systems Comput. **1** (1991) 177–204.
- [6] R. Maziasz in J. Hayes, *Layout optimization of static cmos functional cells*, IEEE Trans. on Computer Aided Design of Integrated Circuits and Systems, **9** (1990) 708–719.
- [7] G. L. Miller in V. Ramachandran, *A new graph triconnectivity algorithm and its parallelization*, Combinatorica **12** (1992) 53–76.
- [8] R. Nair, A. Bruss in J. Reif, *Linear time algorithms for optimal cmos layout*, v: *VLSI: Algorithms and Architectures*, ur. P. Bertolazzi in F. Luccio, Elsevier, North Holland, Amsterdam, str. 327–338, 1985.
- [9] B. Servatius in H. Servatius, *A polynomial time algorithm for determining zero Euler Petrie genus of a graph*, Discrete Math. **244** (2002), 445–454.
- [10] R. E. Tarjan, *Depth-first search and linear graph algorithms*, SIAM J. Comput. **1** (1972) 146–160.
- [11] T. Uehara in W. Van Cleemput, *Optimal layout of cmos functional arrays*, IEEE Trans Comput., C-30, str. 305–314, 1981.
- [12] S. Ueno, K. Tsuji in Y. Kajitani, *On dual eulerian paths and circuits in plane graphs*, v: *Proc. of International Symposium on Circuits and Systems*, str. 1835–1838, 1988.
- [13] R. J. Wilson in J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, DMFA, Ljubljana 1997.
- [14] A. Žitnik, *Eulerjevi sprehodi s predpisanimi zavoji*, doktorska disertacija, Fakulteta za matematiko in fiziko, Ljubljana 2001.

LOGARITMOVNIKI V LJUBLJANI V ČASU VEGOVEGA ŠOLANJA

STANISLAV JUŽNIČ

Math. Subj. Class (2000): 01A45, 01A50

Obravnavali smo matematična dela, ki so jih uporabljali v Ljubljani v času Vegovega študija. Posebno pozornost smo namenili knjigam v Vegovi šolski knjižnici. Iz lastniških zapisov ob naslovnicaх smo ugotovili leta nabav posameznih del. Raziskali smo vsebino knjig, v katerih je Vega prvič spoznal logaritme.

TABLES OF LOGARITHMS IN LJUBLJANA IN THE TIME OF GEORG VEGA'S STUDY

We discussed the mathematical works that were on Vega's disposal during his studies in Ljubljana. The special concern was put on the books in Vega's school library. From the ex libris we established the years when the particular books were bought. We researched the books which influenced Vega's early interest in the logarithms.

Uvod

Poldrugo stoletje pred Vegovim rojstvom sta Joost Bürgi (1552–1632) in John Neper (Napier, 1550–1617) prva pisala o logaritmih. Oba sta si želela predvsem olajšati delo astronomom. Mehanik samouk Bürgi je zelo dobro vedel, za kakšno tlako gre, saj je v Pragi pomagal Keplerju pri računanju. Logaritmi so podvojili življenjsko dobo astronomov, posebno pri preračunavanju trigonometričnih funkcij. Podobno kot Vega dve stoletji pozneje, je tudi Bürgi uporabljal matematiko v balistiki. Njegova naprava za določanje razdalje od topniškega cilja je prikazana na naslovnici.

Škot Neper je bil že star mož, ko ga je na njegovi graščini obiskal londonski profesor Henry Briggs (1561–1630). Po Neperjevem nasvetu je objavil preglednice desetiških logaritmov celih števil. Znamenito posmrtno izdajo Briggsovih logaritmov je izdal nizozemski matematik in knjigarnar Adriaan Vlacq (1600–1666).

Vlacq je takoj spoznal, da se obeta dober posel. Logaritmovnike je tiskal obenem v več jezikih v nakladah po tisoč izvodov. Bili so dobro sprejeti in večkrat ponatisnjeni. Dodatni zaslužek je navrgla „žepna“ izdaja za poslovneže in znanstvenike. Leta 1721 so jo jezuiti prevedli v kitajščino in po njej poučevali cesarja v Pekingu.

Vlacqovo delo je bilo po poslovni in po strokovni plati zadetek v polno. Naselil se je v Londonu in tam odprl knjigarno. Od mlajših Boyla in Newtona se je razlikoval po tem, da je je podpiral kraljevo stranko, vendar se je pred grozečo državljansko vojno raje preselil v Pariz in nato domov na Nizozemsko. Drugače od poklicnega vojaka Vege se je Vlacq izogibal duhu smodnika.

Prve preglednice logaritmov v Ljubljani

V času iznajdbe logaritmov se je začel pouk v vseh šestih gimnazijskih razredih jezuitskega kolegija v Ljubljani. V naslednjih desetletjih se je izšolalo dovolj Ljubljančanov, da je postalo mesto po koncu tridesetletne vojne zanimivo za večjo ponudbo matematičnih knjig. Najstarejši popis matematične literature je jeseni leta 1678 natisnil knjigarnar Mayr v prvem ljubljanskem knjižnem katalogu. Ob otvoritvi svoje tiskarne in knjigarne je ponudil okoli dva tisoč petsto različnih razmeroma novih knjig, med njimi 2 % matematičnih in astronomskih. Seveda ni ponujal Keplerjevih ali celo Galilejevih kopernikanskih knjig, ki niso bile dovoljene v katoliški Ljubljani. Ljubljančani so pri njem lahko kupili dve manj izpostavljeni Keplerjevi deli.

Johannes Kepler (1571–1630) je hitro sprejel izum logaritmov. Sestavil je preglednice logaritmov celih števil in jih objavil leta 1624. Tri leta pozneje je tabele z logaritmi kosinusov dodal k podatkom o gibanju planetov in dopolnjenemu zemljevidu zvezd Tychoja Braheja (1546–1601). Tabele je imenoval po cesarju Rudolfu II (1552–1612), posvetil pa jih je tudi Tychoju.

Keplerjeve preglednice položajev planetov so nadomestile Pruske tabele, ki so jih prav tako imeli ljubljanski jezuiti. Rudolfinske preglednice so šteje skoraj šeststo strani, zato so jih tiskali kar devet mesecev. Kepler je pri preračunavanju leg planetov prvi uporabil logaritme za astronomske namene. To je bila sploh prva pomembnejša uporaba logaritmov. Zato je na naslovni risbi levo od srede kupole hrama postavil muzo Logaritmiko, ki je ponazarjala izum nove računske metode za reševanje znanstvenih problemov.

Mayr je Rudolfinske tabele ponujal Ljubljančanom osem desetletij po Keplerjevem odhodu iz Gradca in iz dežel, poseljenih s Slovenci. Knjiga je bila seveda kopernikanska, saj je Kepler že v skici nakazal dotrajanost razpokanega Ptolomejevega stebra. Morda jo je zato Mayr prodajal kar pod imenom Rudolfinske tabele, brez omembe Keplerja. Ljubljanski jezuiti so jo verjetno nabavili šele po Vegovem rojstvu, ko so po Boškovičevem posegu v katoliških deželah dovolili pisanje o resničnem gibanju Zemlje [1].

V končni umetniški obdelavi je bila Keplerjeva skica nekoliko spremenjena, saj so popravili razpoke na Ptolomejevemu stebri. Tycho in Kopernik sta seveda podpirala povsem nova stebra. Najzanimivejša muza je bila Logaritmika, ki je držala v rokah dve različno dolgi ravnili z logaritemskima meriloma. To je bila zgodnja različica znamenitega „rehnšibra”, ki so ga Angleži prvič uporabili pet let pred natisom Keplerjeve knjige. Zdi se, da je simpatična muza Logaritmika z daljšo palico nekoliko zbadala cesarskega orla in ga tako spodbujala k bljuvanju zlatnikov. Nekateri bolj redki cekini so padali celo na mizo, za katero sedi Kepler čisto spodaj in računa ob siju sveč. Kepler je bil znamenit pisec horoskopov in tudi ta prerokba se mu je dobro obnesla. Nekaj mesecev po natisu tabel je Rudolfov naslednik cesar Ferdinand II (1578–1637) bogato obdaroval Keplerja ob njegovem obisku v Pragi.

Rudolfske preglednice in z njimi Keplerjeve logaritme so astronomi in mornarji uporabljali več kot sto let, vse do Vegovega časa. Keplerjeva muza Logaritmika je bila prava lepotica. Zato ni čudno, da je poldrugo stoletje po Keplerju omrežila še Vego.

Poleg Keplerjevih Rudolfskih preglednic z logaritmi je Mayr ponujal tudi njihove popravke v prvi knjigi o astronomiji, napisani z žensko roko Marije Kunic. Tako je Ljubljana že zelo zgodaj spoznala uspešno matematičarko, kar je zbudilo zanimanje za znanost pri damah v tedanjih ljubljanskih salonih.

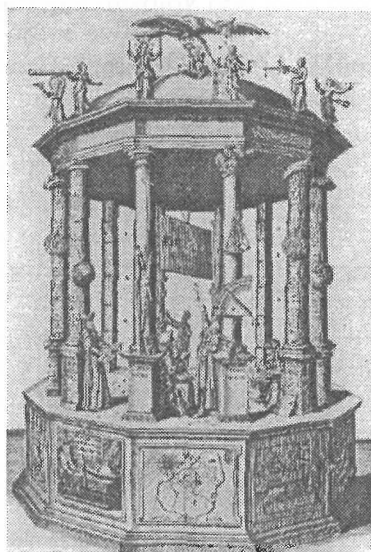
Marija Kunic (Cunitz, † 1664) se je rodila v poljski Šleziji. Študirala je jezike in si dopisovala z astronomom Heveliusom iz Gdanska. Ko je dopolnila devetnajst let, je njeno mesto obiskal sloviti nemški matematik Elias von Love. Z njim se je po očetovi smrti poročila, seveda tudi zaradi njegovega prisrčnega priimka.

Marija ni hotela izdelati horoskopa za poljskega kralja, kar bi njen vzornik Kepler gotovo storil. V vojni vihri je požar uničil vse njeno imetje razen rokopisa knjige s popravki Rudolfskih preglednic. Ko se je tridesetletna vojna nekoliko unesla, se je Marija preselila na deželo in pozneje na posest poljskih princev blizu Varšave.

Mayr je Ljubljančanom ponujal tudi pisma Keplerjevega prijatelja Wilhelma Schickarda (1592–1635). Schickard je bil sprva luteranski pridigar, nato pa profesor matematike in astronomije na univerzi v Tübingenu. Za Keplerja je sestavil prvo mehansko računalno. Z njim je lahko sešteval in odšteval, medtem ko je množil in delil s pomočjo preglednic. Napravo je uničil požar, še preden jo je Kepler lahko uporabil.

Pri Mayru je bilo mogoče kupiti le Keplerjeve in Kunickine preglednice logaritmov. Čeprav so bili logaritmi znani že nad osem desetletij, je bilo v Ljubljani bržkone premalo astronomov, da bi se izplačalo prodajati logaritmovnike, denimo najbolj uporabljane Vlacqove. Ljubljanski trgovci so pri svojih računih shajali brez logaritmov.

Mayr je Ljubljančanom prodajal še druge knjige pomembnih raziskovalcev logaritmov. Med njimi je bil belgijski jezuit Grégoir de Saint-Vincent (1584–1667), ki je študiral matematiko pri Christophorusu Claviusu (1537–1612) v Rimu. V Pragi je napisal razpravo o kvadraturi kroga, go-



Slika 1. Muza Logaritmika levo od orla na naslovnici Keplerjevih Rudolfskih tabel, najstarejših ohranjenih preglednic logaritmov v Vegovi šolski knjižnici.

tovo tudi pod vplivom srečanja s Keplerjem, ki je prav tedaj prišel v Prago po zaslužen plačilo za svoje Rudolfske tabele. Claviusov naslednik, jezuitski cenzor Christoph Grienberger (1564–1636), ni dovolil objave Saint-Vincentove knjige zaradi matematičnih napak. Med pogajanji so švedski protestanti napadli Prago, Saint-Vincent pa je pobegnil na Dunaj. Več kot tisoč strani neobjavljenega rokopisa je moral pustiti doma, da si je rešil golo življenje.

Saint-Vincent se je vrnil v rodno Belgijo in postal profesor matematike na univerzi Louvaine. Po Grienbergerjevi smrti je dal svoje zapiske prepelejati iz Prage in jih natisniti. Za naslovnico si je privoščil najbolj fantastično alegorijo v zgodovini matematike. Kazala je Arhimeda, kako riše skico za svoj dokaz ploščine kroga. V ozadju sta bila Evklid in Neptun ob geslu „še naprej“ mimo Heraklejevih stebrov, ki sta omejevala plovbo (in kvadraturu kroga) v antiki.

Podobno kot Grienberger je tudi Huygens našel napako pri integriranju v Saint-Vincentovi kvadraturi kroga. Pomota je zmanjšala Saint-Vincen-tov ugled, vendar so njegovo knjigo kljub temu veliko brali. Z geometrijskimi prijemi je odkril imenitne lastnosti logaritmov in utemeljil kasnejše računanje logaritmov z vrstami. Zapisal je zvezo med naravnimi logaritmi in hiperbolo, s katero še danes definiramo logaritem.

Preglednice logaritmov v Vegovi šolski knjižnici

Četrto stoletje po odprtju Mayrove knjigarne so v Ljubljani svečano začeli višje študije. Največ sodobnejših knjig o astronomiji in matematiki so ljubljanski jezuiti dobivali z Dunaja, Pariza, Nizozemske in Bologne. Med njimi je bila matematika bolonjskega profesorja Marija Bettinija (1582–1657), ki so si jo priskrbeli takoj po začetku višjih študijev.

Jezuit Bettini si je dve desetletji po Keplerju že precej sodobneje zamislili gmotno podporo šolam. Bogati princ je prinesel učitelju skrinjo zlatnikov, ta mu pa z roko kaže svoje študente, ki se pridno učijo. Vegova ljubljanska šola je bila podobna Bettinijevi. Ko se je Vega vpisal v prvi letnik višjih študijev, so jezuitski red sicer ukinili, vendar profesorjev matematičnih predmetov niso zamenjali, saj drugih ni bilo na voljo.

Ob koncu Vegovega prvega letnika višjih študijev je požar uničil večino knjig v šolski knjižnici. Pred ognjem so rešili okoli tisoč del, med njimi desetino o fiziki, astronomiji in matematiki. Dve tretjini ohranjenih knjig so popisali čez osem mesecev, druge pa pozneje. Tako imamo natančen pregled nad šolskimi knjigami, s katerimi se je Vega v času popisa pripravljval za končni izpit. Pri izpitu je moral odgovarjati tudi na vprašanja o logaritmih, ki so mu desetletje pozneje prinesli nesmrtno slavo. Katere tabele logaritmov je Vega uporabljal v Ljubljani?

Po Keplerjevih Rudolfskih tabelah so bile najstarejše preglednice logaritmov v Vegovi šolski knjižnici objavljene v „Matematičnem svetu“ francoskega jezuita Clauda François Milleta Dechalesa (1621–1678). Knjigo so goriški jezuiti podarili ljubljanskim kolegom. Ima najstarejši datiran jezuitski zapis med matematičnimi knjigami iz Vegovih šolskih dni [2].

Dechales je najprej navedel pravila za računanje logaritmov. Nato je zapisal preglednice sinusov, tangensov in sekansov ter njihovih logaritmov. Končno je objavil še logaritme celih števil. Sprva je bil misijonar v Turčiji, nato pa je poučeval v Lyonu, Marseillesu in Torinu.

Vega je v šolski knjižnici uporabljal preglednico logaritmov jezuita Schotta, ki je ob razlagi pravil za računanje objavil še logaritme števil do tisoč [3]. Kaspar Schott (1608–1666) je bil najpogostejši pisec v Mayrovi ponudbi, več njegovih del pa so nabavili tudi ljubljanski jezuiti.

Ljubljanski profesor matematike Bernard Ferdinand Erberg (1718–1773) si je kmalu po Vegovem rojstvu priskrbel pol stoletja staro Trigonometrijo s preglednicami logaritmov jezuita Goodena, profesorja matematike na angleškem kolegiju v Liègeu [4]. Jacob Gooden (James, 1670–1730) je objavil tabele sinusov, tangensov in njunih logaritmov ter naravne logaritme celih števil. Nadaljeval je vrsto odličnih angleških matematikov in fizikov v Liègeu, ki so bili kot jezuiti pregnani iz protestantske domovine.

Leta 1768 je ljubljanski profesor matematike Jožef Kauffmann (1725–1791) za šolsko knjižnico najprej nabavil Vegovega najljubšega avtorja Eulerja. Zbirko je naslednje leto dopolnil z novo izdajo Vlacqovih preglednic, ki so spodbudile Vego k pisanju logaritmovnikov [5]. Vega je imel Vlacqa kot svojega predhodnika. Ljubljanska licejska knjižnica je hranila štiri različne Vlacqove logaritmovnike. Dva med njimi so dobili iz knjižnice župnika Ivana Dizme Florjančiča de Grienfelda (1691–po 1757), ki je logaritme uporabljal pri svojih matematičnih, astronomskih in kartografskih delih. Malo pred Vegovim rojstvom je blizu Vegovega rojstnega kraja opremil zvezdarno in napisal lasten logaritmovnik. Zgledoval se je po Keplerju in dodal navodila za uporabo, vendar dela ni natisnil.

Logaritme so uporabljali tudi pisci astronomskih knjig. Profesor Erberg je nabavil nemški prevod astronomskih preglednic pariškega akademika Phi-



Slika 2. Naslovnica ene od Bettinijevih knjig.

lipa de la Hira (1640–1718). Hire je objavil logaritme razdalj med posameznimi planeti. Matematik Erberg je gotovo svetoval svojemu sorodniku baronu Erbergu, da je nabavil poznejši latinski prevod Hirevih preglednic za svojo ljubljansko knjižnico.

Vlacq, Kepler in Gooden so poleg preglednic logaritmov objavili logaritme kotnih funkcij. Ob koncu Vegovih študijev so bile, razen Vlacqove, vse ohranjene tabele logaritmov iz Vegove šolske knjižnice že razmeroma stare. Razen Keplerja in Vlacqa so vse druge preglednice objavili jezuiti. Ti so organizirali skoraj četrtno astronomskih observatorijev, ki so delovali sredi 18. stoletja. Zato so logaritmovnike tiskali za lastna astronomska opazovanja in za svoje študente. Vegov spovednik matematik B. F. Erberg in drugi profesorji so nadarjenega Vego gotovo priporočili baronu Erbergu, graščaku v Dolu blizu Vegove rodne vasi. Baron Erberg je v svoji ljubljanski knjižnici hranil logaritmovnik Christiana Wolffa (1679–1754), ki je bil podoben Vlacqovemu iz ljubljanske jezuitske knjižnice [6].

Sklep

Požar ob koncu Vegovega prvega letnika nam je zastrl popoln pregled nad matematičnimi in astronomskimi deli, ki jih je Vega uporabljal ob svojih prvih korakih v znanost. Po drugi strani imamo srečo, da so knjige popisali prav v času, ko se je Vega pripravljala za končni izpit s poudarkom na čisti in uporabni matematiki. Ohranjene knjige pričajo, da je imel Vega v Ljubljani dovolj priložnosti za študij logaritmov. V šolski knjižnici je uporabljal razmeroma stare preglednice. Nov je bil le Vlacqov logaritmovnik, ki je Vego spodbudil, da se je pozneje lotil lastnih izdaj.

Četrto stoletje po koncu študija v Ljubljani je Vega zapisal v uvodu k svojemu matematično-fizikalnemu učbeniku, da je „postavil temelj svoji književni izobrazbi na ljubljanskem liceju”. Trditev se je nanašala tudi na Vegovo uporabo logaritmov v ljubljanskih šolskih klopeh. Imel je dovolj možnosti za preučevanje logaritmov že med študijem v Ljubljani in pozneje v petih letih sodelovanja pri urejevanju kranjskih voda s tri dni mlajšim sošolcem Jožefom Marijo Šemerlom (1754–1844) in njunim učiteljem Gabrijelom Gruberjem (1740–1805). Gruber je zapustil Ljubljano nekaj let za Vego. Medtem ko je Vega naredil vojaško kariero, se je Gruber uveljavil v politiki in v času Vegove smrti postal general jezuitskega reda.

LITERATURA

- [1] J. Kepler, *Tabulae Rudolphinae*, Sauris, Ulm 1627.
- [2] C. F. M. Dechales, *Cursus seu mundus mathematicus*, Anisson, Lyon 1674.
- [3] K. Schott, *Cursus mathematicus*, Schönwetter, Frankfurt 1699.
- [4] J. Gooden, *Trigonometria Plana et Sphaerica*, Broncart, Liège 1704.
- [5] A. Vlacq, *Tabulae sinuum, tangentium, et secantium: Logarithmi sinuum, tangentium et numerorum ab unitate ad 10000*, Fleischer, Leipzig 1768.
- [6] C. Wolff, *Zu der Geometrie und Ausziehung der Wurzeln nöthige Tafeln*, Rengerichter, Halle 1711.

VEGA O OBLIKI ZEMLJE

JANEZ STRNAD

PACS 01.65.+g
45.40Gj

Pred več kot dvesto leti je slovenski matematik, inženir in topničar Jurij Vega objavil zapis o obliki vrteče se Zemlje. V njem se je s svojim matematičnim znanjem in računsko spretnostjo lotil naloge, ki je bila zanimiva tudi s fizikalnega vidika.

VEGA ON THE FORM OF THE EARTH

More than two hundred years ago the Slovenian mathematician, engineer, and artillery-man Jurij (George) Vega published a work with the title *Mathematical reflections on the form of a solid sphere uniformly rotating around a fixed axis and the consequences of this assumption for astronomy, geography, and mechanics with respect to our earth's spheroid*. In it he used his mathematical knowledge and computational skill to treat a problem which was interesting also from the viewpoint of physics.

Uvod

Nekdanji astronomi so se do prvih podatkov o oddaljenostih v Osončju dokopali potem, ko so premerili Zemljo. Tako je bilo nekdanj merjenje Zemlje bolj povezano z merjenji v Osončju, kot mislimo v času umetnih satelitov in radarja. Poleg tega je bilo pomembno tudi za določitev metra. Vega se je ukvarjal z enotami in z gravitacijo, ki je bila od Newtonovih časov v ospredju fizike [1],[2]. Že pred tem je objavil razpravo z dolgim naslovom *Matematična razglabljanja o obliki trdne krogle, enakomerno se vrteče okoli nepremične osi, in posledicah tega privzetka za astronomijo, zemljepis in mehaniko glede na naš zemeljski sferoid* [3], ki je bila povezana z obojim.

Za določitev polmera Zemlje kot krogle je bilo treba poznati dolžino stopinje. Okoli leta 1671 je Jean Picard za dolžino stopinje na pariškem poldnevniku izmeril 111,12 km.¹

Leta 1673 je Jean Richer poročal o merjenjih na odpravi v Cayenne v Francoski Gvajani. Natančno merjenje je pokazalo, da se smer proti Marsu iz Cayenna za 23 kotnih sekund razlikuje od smeri proti Marsu, ki jo je v Parizu določil Giovanni Domenico Cassini. Z znano razdaljo

¹ Tedaj so uporabljali v zemljemerstvu pariški seženj (toise) 1,949 metra. Enota je morebiti izvirala še od Karla Velikega in pogosto v njej vidijo nekakšnega predhodnika metra. Picard je za dolžino stopinje na primer navedel 57.060 pariških sežnjev. Obseg Zemlje je 360-krat večji in deljenje z 2π da polmer. S Picardovim podatkom dobimo za obseg Zemlje 40.036 km in za njen polmer 6372 km, kar se znatno ne razlikuje od današnjih približnih vrednosti 40.000 km in 6380 km. Vsekakor je bilo merjenje precej natančnejše od Eratostenovega 19 stoletij pred tem. Čeprav je seženj uporabljal tudi J. Vega, bomo vse podatke preračunali v bolj domače metre.

Cayenna od Pariza so tako prvič določili oddaljenost Zemlje od Marsa in z njo oddaljenost Zemlje od Sonca. Richer je opazil tudi, da je nihalo v Cayennu bliže ekvatorja nihalo počasneje kot enako nihalo v Parizu.²

Zaradi tega je Isaac Newton po odkritju gravitacijskega zakona sklepal, da je Zemlja na tečajih sploščena. Newtonova zamisel je spodbudila daljšo razpravo. Sploščena Zemlja je na tečajih manj ukrivljena kot na ekvatorju. Dolžina poldnevniške stopinje, ki jo izmerijo po legi zvezd na nebu, je tedaj na tečajih daljša kot na ekvatorju. Cassini je ugovarjal in trdil, da ima Zemlja podolgovato obliko, kakor naj bi kazala njegova merjenja. Drugi so majhno razliko dolžin stopinje na poldnevniku in vzporedniku, ki jo je ugotovil pri merjenjih v Franciji, večinoma pripisali merskim napakam. Da bi vprašanju prišli do dna, so pripravili dve odpravi, ki so se ju udeležili znani fiziki. Odpravo na Laponsko je vodil Pierre Louis Moreau de Maupertuis, odpravo v današnji Ekvador pa sta vodila Pierre Bouguer in Charles Marie de la Condamine. Po daljšem času, v katerem so morali premagati številne težave, ob ekvatorju precej večje kot na severu, so 1736 podprli Newtonovo domnevo. Za dolžino poldnevniške stopinje na severu so navedli 111,9 km, ob ekvatorju pa 110,6 km. Podobne izide so dobili tudi na drugih odpravah, na primer Edmund Halley na odpravi na Sveto Heleno. Potrditev zamisli, da je Zemlja sploščena, je bila pomembna opora Newtonovega gravitacijskega zakona, ki so ga ob objavi leta 1687 nekateri odklonili.

Vegov model

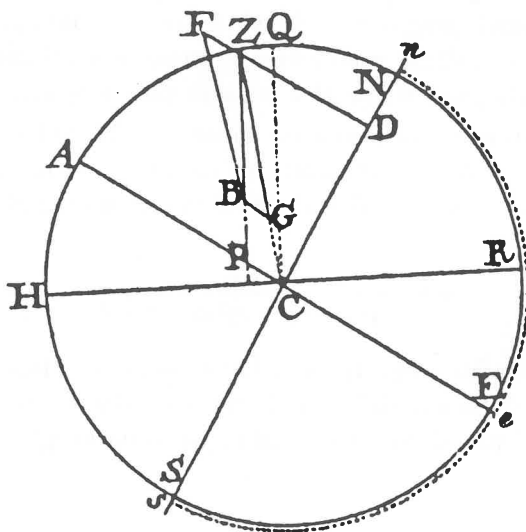
Na začetku zapisa je Vega za mirujočo togo kroglo s konstantno gostoto, ki se ujema s povprečno gostoto Zemlje, navedel polmer 6376 km. Podatek je zapisal z osmimi mesti in mu dodal osemestni logaritem, ne da bi se oziral – taka je bila tedaj navada – na nenatančnost merjenja. Na površju krogle je teža v vseh točkah enaka in usmerjena proti središču. *Višina nebesnega tečaja* je tedaj enaka *pravi zemljepisni širini*. Gladino vode v ozkem kanalu v smeri poldnevnika opiše krog. Nato je Vega privzel, da se krogla vrti in traja vrtljaj $t_0 = 23$ ur 56 minut 4,1 sekunde, to je 86.164,1 sekunde. Zvezdni dan, merjen glede na zvezde, je namreč za približno 4 minute na dan ali za 1 dan na leto krajši od povprečnega sončnega dne. Vega se je vprašal, kakšne spremembe izzove vrtenje. *Zaznana teža* razen na tečajih in na ekvatorju ni več usmerjena proti središču in njena velikost pojema od

² Tedaj so pogosto navajali dolžino sekundnega nihala, nitnega nihala z nihajnim časom 2 s. Tako nihalo je bilo samo malo krajše od metra. (Nihalo z nihajnim časom 1 s bi bilo štirikrat krajše.) To dolžino je uporabljal tudi J. Vega. Poleg tega je Vega z *g* zaznamoval pot v prvi sekundi pri enakomernem pospešenem gibanju [2],[3]. Tu bomo z *g* zaznamovali, kot je v navadi danes, težni pospešek, to je dvakratno Vegovo količino, dolžini sekundnega nihala pa se bomo izognili.

tečajev proti ekvatorju. Prava višina nebesnega tečaja se ne ujema več s pravo širino b , ampak je enaka *navidezni širini* B . Gladine vode v kanalu v smeri poldnevnika ne opiše več krog.

Vegova risba (sl. 1) kaže osni presek krogle s polmerom R z vrtilno osjo NS in presekom AE pri ekvatorsko ravnino, ki je pravokotna na vrtilno os. V točki Z s pravo širino b je težni pospešek g_0 usmerjen proti središču C in centrifugalni pospešek $(2\pi/t_0)^2 R \cos b = \omega^2 R \cos b$ v smeri pravokotno na os od točke D. Težnemu pospešku ustreza daljica ZG proti središču, centrifugalnemu pospešku daljica ZF pravokotno na os, njuni vsoti pa diagonala ZB paralelograma. Črta *pravega obzorja* HR je pravokotna na daljici ZP in QC, ki določata smer zaznane teže. Lok AZ podaja pravo širino b , lok AQ navidezno širino B , lok QZ njuno razliko $B - b$, to je odklon zaznane teže od smeri proti središču, in lok RN pravo višino nebesnega tečaja. Težni pospešek ima vodoravno komponento $-g_0 \cos b$ in navpično komponento $-g_0 \sin b$, vsota težnega in centrifugalnega pospeška pa vodoravno komponento $-g_0 \cos b + \omega^2 R \cos b$ in navpično komponento $-g_0 \sin b$ (sl. 1). Pri tem z g_0 zaznamujemo približno vrednost težnega pospeška na površju krogle. Za nagib zaznane teže sledi

$$\tan B = \frac{\sin b}{\cos b(1 - \omega^2 R/g_0)} = \frac{\tan b}{1 - \omega^2 R/g_0}. \quad (1)$$



Slika 1. Osni presek vrteče se krogle [3].

Iz enačbe elipse z veliko polosjo A in malo polosjo a

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

dobimo za strmino tangente ($dy/dx = -a^2x/A^2y$) in iz tega za strmino normale na elipso v točki (x, y) :

$$\left(-\frac{dx}{dy} = \right) \frac{A^2y}{a^2x} = \tan B = \frac{A^2}{a^2} \tan b. \quad (2)$$

Enačbi (1) in (2) kažeta, da je zaznana teža na Zemlji v vsaki točki Z pravokotna na površje, če ima Zemlja obliko elipse z razmerjem polosi:

$$\frac{a}{A} = \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0}\right)^{1/2} = 0,9983 = \frac{578}{579} \quad (3)$$

in sploščenostjo³ $s = (A - a)/A = \frac{1}{578}$. Čeprav se nismo tega držali Vegove poti, smo pazili, da se glavne enačbe in številski podatki ujemajo z njegovimi.

Gladino vode v kanalu v smeri poldnevnikarja v tem primeru opiše elipsa. Voda stoji na ekvatorju za 11 km višje kot na tečajih. Če bi obstajala vrhnja plast krogle iz „mehke, skoraj tekoče snovi in bi bilo preostalo jedro popolnoma trdno, bi prav tako lahko domnevali“, da je pri dani hitrosti vrtenja Zemlja rotacijski elipsoid z navedeno sploščenostjo. Račune je Vega pospremil z obsežno preglednico prave širine b , odklona $B - b$, dolžine sekundnega nihala, dolžine poldnevniške stopinje v stopinjah in v sežnjih od navidezne zemljepisne širine B v korakih po 1 stopinjo.

Vega je zapisal nenavadno enačbo elipse v središčni legi v polarni obliki. Kvadrat razdalje od osi v odvisnosti od navidezne širine izrazimo s pravo širino: $r^2 = x^2 + y^2 = A^2 \cos^2 B + a^2 \sin^2 B$ in z zvezo $\tan B = (A^2/a^2) \tan b$ dobimo nazadnje

$$r = \frac{aA}{(a^2 \cos^2 b + A^2 \sin^2 b)^{1/2}}. \quad (4)$$

Enačbi je dodal krajšo preglednico, v kateri je za navidezne širine 0° in 1° , 15° in 16° in tako dalje navedel prave širine, razdalje od izhodišča ter dolžine loka, ki ustreza 1° navidezne širine, na elipsi in na krogli.

³ (Numerična) ekscentričnost je $\varepsilon = [1 - (1 - s)^2]^{1/2}$, če privzamemo, da je Zemlja rotacijski elipsoid. $s = 1/298,23$ ustreza $\varepsilon = 0,0818$.

Vegova opomba

Obsežnim računom v okviru opisanega modela je Vega dodal kratko trditev, da gladine vode v kanalu v smeri poldnevnik v resnici ne opiše elipsa. Za drugo krivuljo „se po osnovnih enačbah hidrostatike zaznane smeri teže sicer povsod ujemajo z normalami v točkah, [...] morajo pa po omenjenih osnovnih enačbah hidrostatike biti razdalje ali ordinate te krivulje v smeri normal, računano od kroga, obratno sorazmerne z zaznanimi težnimi pospeški v teh točkah”. Na risbi (sl. 1) je pri danih količinah N_n ali S_s tedaj $eE = 1 - \omega^2 R/g_0$, tako da je razmerje polosi $\frac{577}{579}$ ali $\frac{289}{290}$. „Ljubitelji višje geometrije lahko za tako krivuljo, ki se le zelo malo razlikuje od kroga, poiščejo enačbo, ji dajo ime in določijo njene lastnosti.” To in nič več, potem se je vrnil k enačbam svojega prvotnega modela in določil še ukrivljenost elipse.

Bouguer in Maupertuis sta že leta 1738 določila sploščenost Zemlje $\frac{1}{217}$. Tako se je Vegu sploščenost $\frac{1}{578}$ utegnila zdeti premajhna in je iskal možnost, da bi dobil večjo. Z osnovnimi enačbami hidrostatike je najbrž mislil enačbo, po kateri dobimo prirastek tlaka v mirujoči tekočini, ko zmnožimo gostoto, težni pospešek in globino. V tem primeru velja $ag_0 = A(g_0 - \omega^2 A)$ in $a/A = (g_0 - \omega^2 A)/g_0$ ali $(A - a)A = \omega^2 A/g_0$. Toda prva enačba se ne sklada z Vegovo trditvijo, da je treba ordinate računati od kroga. a in A sta namreč razdalji tečaja in ekvatorja od središča ter g_0 in $g_0 - \omega^2 A$ pospeška na tečaju in na ekvatorju. Enačba za tlak v mirujoči tekočini z oddaljenostjo od središča krogelno simetričnega telesa, ki ne upošteva, da se težni pospešek spreminja z oddaljenostjo od središča, lahko da le oceno. Vendar je ta ocena za nekatere planete dokaj uporabna [4] (tabela 1).

Planet	Mars	Zemlja	Jupiter	Saturn
izmerjena	$\frac{1}{135}$	$\frac{1}{298,3}$	$\frac{1}{15,4}$	$\frac{1}{10,2}$
izračunana	$\frac{1}{217}$	$\frac{1}{289}$	$\frac{1}{11,2}$	$\frac{1}{6,5}$

Tabela 1. Izmerjene in izračunane sploščenosti za nekatere planete. Podatki so vzeti iz K. R. Lang, *Astrophysical Data. Planets and Stars*, Springer, New York 1992.

Clairautova enačba

Razmere so v resnici bolj zapletene, kot si je zamislil J. Vega s svojim modelom. Že Newton je pripomnil, da nihalo na ekvatorju niha počasneje zaradi centrifugalnega pospeška in zato, ker je bolj oddaljeno od središča Zemlje kot na tečaju. Vegova opomba je pokazala, da sta oba prispevka

približno enaka. Vega je v računih količin, za katere je sestavil preglednice, upošteval samo prvega. Obdelajmo oba prispevka v najnižjem približku, da pridemo do enačb, ki jih je leta 1743 izpeljal Alexis Clairaut, udeleženec odprave na Laponsko.

Vpeljemo *potencial*, to je potencialno energijo majhnega telesa, preračunano na enoto njegove mase, v bližini velikega telesa z maso m :

$$V = -\frac{m\mathcal{G}}{r} - \frac{k}{r^3}(3\sin^2 b - 1) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \cos^2 b. \quad (5)$$

Prvi člen z gravitacijsko konstanto $\mathcal{G}$ je potencial krogelno simetričnega telesa z maso m . Drugi člen z drugim Legendrovim polinomom $P_2 = \frac{1}{2}(3\sin^2 b - 1)$ v prvem približku upošteva odklik od krogelne simetrije. Konstanto k bomo še določili. Tretji člen je centrifugalni potencial, ki upošteva, da opazujemo v vrtečem se koordinatnem sistemu. Težni pospešek dobimo kot negativni gradient potenciala:

$$g = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{m\mathcal{G}}{r^2} - \frac{3k}{r^4}(3\sin^2 b - 1) + \omega^2 r \cos^2 b. \quad (6)$$

Obliko telesa v prvem približku izrazimo s funkcijo

$$r = A(1 - s \sin^2 b), \quad (7)$$

ki jo lahko dobimo iz funkcije (4) z majhno sploščenostjo s , če upoštevamo samo še člene z njeno prvo potenco.

Vstavimo (7) v enačbo (5) in upoštevajmo samo člen s sploščenostjo v prvi potenci:

$$V = -(\mathcal{G}m/A)(1 + e \sin^2 b) - (k/A^3)(3\sin^2 b - 1) - \frac{1}{2}\omega^2 A^2(1 - \sin^2 b).$$

Potencial ne sme vsebovati odvisnosti od kota b , zato zahtevamo, da je koeficient člena s $\sin^2 b$ enak nič. Iz zahteve dobimo konstanto $k = \frac{1}{6}\omega^2 A^5 - \frac{1}{3}\mathcal{G}mA^2s$. To in (7) vstavimo v enačbo (6) in izračunamo težni pospešek v odvisnosti od širine

$$g = -g_e \left[1 + \left(\frac{5A^3\omega^2}{2\mathcal{G}m} - s \right) \sin^2 b \right]. \quad (8)$$

Pri tem je $g_e = g(b = 0) = -(\mathcal{G}m/A^2)(1 + s - \frac{3}{2}\omega^2 A/\mathcal{G}m)$ pospešek na ekvatorju.

Z merjenjem težnega pospeška na različnih zemljepisnih širinah so določili koeficient člena s $\sin^2 b$ v enačbi (8): 0,005286. Z gravitacijsko konstanto in podatki o planetih dobimo potem za sploščenost $\frac{1}{297,0}$.⁴ To se zelo

⁴ Pri približnem računanju smemo $A^3\omega^2/\mathcal{G}m = 0,003461$ nadomestiti z $A\omega^2/g_e$, saj je $m\mathcal{G} = A^2g_e$, ali celo z $\omega^2 R/g_0 = 0,00356$.

malo razlikuje od vrednosti $\frac{1}{298,25}$, ki jo je leta 1964 sprejela Mednarodna astronomska unija skupaj z ekvatorskim polmerom 6378,144 km. Clairautov račun so v 19. stoletju izpopolnili s tem, da so vključili četrti Legendrov polinom in so tako zadovoljivo pojasnili izmerjene podatke. Do dandanes so obliko Zemlje in z njo povezano gravitacijsko polje podrobno premerili z umetnimi sateliti. Preglednice navajajo koeficiente za krogelne funkcije do reda 15 in več. Pri tem upoštevajo tudi prispevke, ki niso osno simetrični.

Sklep

Zdi se, da se je Vega, ki je vseskozi izhajal iz krogle, zavedal slabosti svojega modela. Morda je poznal Bouguerov in Maupertuisov podatek za sploščenost Zemlje iz leta 1738. Najbrž pa ni poznal Clairautovega dela iz leta 1743, sicer se ne bi spustil v dolgo računanje v neustreznem modelu. Ne glede na to preseneča, da ni uporabil dvakrat večje sploščenosti, čeprav jo je s težavo utemeljil, in je vztrajal pri sploščenosti $\frac{1}{579}$. Poleg tega je v razpravi z nekima novima podatkomoma za dolžino poldnevniške stopinje na ekvatorju in na tečaju izračunal še sploščenost $\frac{1}{415}$. V dodatku pa je po merjenjih M. du Sejoura preračunal, kako sploščenost Zemlje vpliva na zemljepisno dolžino in širino Bresta.

Po tem je mogoče sklepati, da Vega ni v podrobnostih spremljal razvoja teorije o obliki Zemlje in da njegov zapis bolj kaže veselje do reševanja nalog, do računanja z modeli in do numeričnega računanja. Na to sklepamo še posebej po obsežnih tabelah s podatki z veliko mesti.

LITERATURA

- [1] G. Vega, *Natürliches, aus der wirklichen Grösse unserer Erdkugel abgeleitetes, in ganz Frankreich und in einigen angrenzenden Ländern zum allgemeinen Gebrauche gesetzmässig eingeführtes Mass-Gewichts- und Münz-System ...*, J. V. Degen, Dunaj 1803 (po Vegovi smrti izdal A. Kreil).
- [2] G. Vega, *Versuch über Enthüllung eines Geheimnisses in der bekannten Lehre der allgemeinen Gravitation*, Joh. Th. von Trattner, Dunaj 1800, 39 strani majhnega formata; J. Strnad, *Premo centralno gibanje J. Vege*, Obzornik mat. fiz. **47** (2000) 20.
- [3] G. Vega, *Mathematische Betrachtungen über eine sich um eine unbewegliche Achse drehende feste Kugel, und die Folgen dieser Voraussetzung für Astronomie, Geographie und Mechanik, in Beziehung auf unser Erdsphäroid*, Beyer und Maring, Erfurt 1798, 31 strani majhnega formata.
- [4] M. Prosen, *Oblika vesoljskih teles*, Obzornik mat. fiz. **35** (1988) 119.
- [5] H. Spencer Jones, *Dimensions and Rotation v The Earth as Planet*, G. P. Kuiper (ur.), University of Chicago Press, Chicago 1954.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO

LJUBLJANA, JANUAR 2

Letnik 50, številka 1

ISSN 0474-7466, UDK 51+

R 177/03



100001170,1

COBISS

ODPISANO

VSEBINA

Članki

Strani

Numerična analiza in Liejeve grupe, Bojan Orel	1–13
Dualno Eulerjevi grafi, Brigitte in Herman Servatius, prev. in prir. Arjana Žitnik	14–20
Logaritmovniki v Ljubljani v času Vegovega šolanja, Stanislav Južnič . . .	21–26
Vega o obliki Zemlje, Janez Strnad	27–III

CONTENTS

Articles

Pages

Numerical analysis and Lie groups, Bojan Orel	1–13
Dual-Eulerian graphs, Brigitte and Herman Servatius, transl. and adapted by Arjana Žitnik	14–20
Tables of logarithms in Ljubljana in the time of Georg Vega's study, Stanislav Južnič	21–26
Vega on the form of the Earth, Janez Strnad	27–III

Na naslovnici: Slika k članku na strani 21. Na njej je prikazana Bürgijeva naprava z dvema kotomeroma za določanje razdalje od topniškega cilja.