

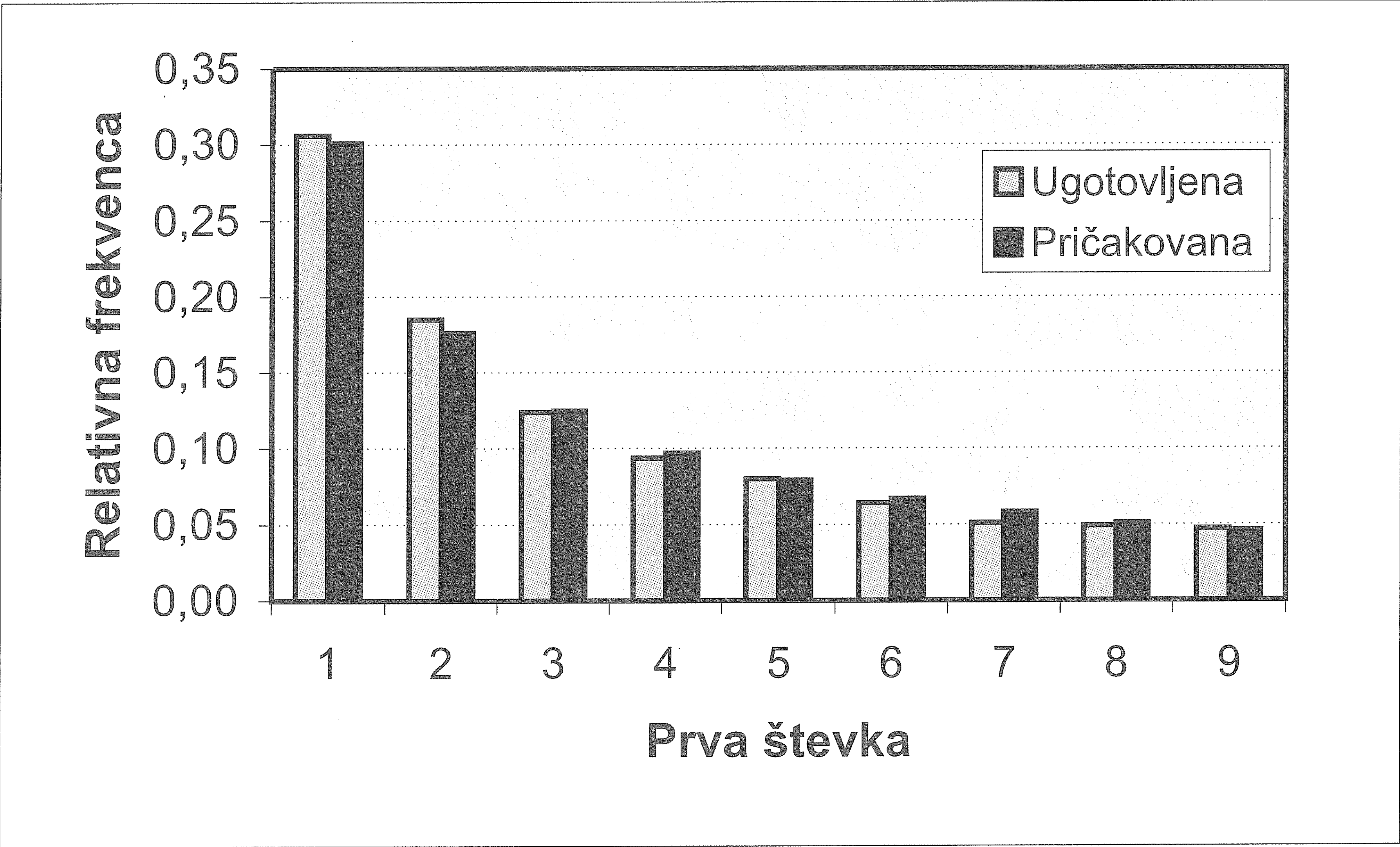
ODPISANO

2002

Letnik 49

5

OBZORNIK
ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 2002

letnik 49, številka 5, strani 129–160

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

Naslov uredništva:

DMFA – založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana.

Telefon (01) 4766 553, 4232 460 Telefaks (01) 2517 281

Devizna nakazila: SKB banka d. d., Ajdovščina 4, Ljubljana

SWIFT: SKBASI2X

Transakcijski račun: 03100-1000018787

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Alenka Klokočovnik (društvene novice), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 4000 SIT, za študente 2000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 800 SIT, stare številke 520 SIT.

Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1450 izvodov.

Revijo sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2002 DMFA Slovenije – 1509

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles

Str.–Page

Trikotljivost družin operatorjev na končnorazsežnih prostorih — Triangulizability of collections of operators on finite-dimensional spaces (Roman Drnovšek)	129–139
Benfordov zakon ali problem prve številke — Benford's law or the problem of the first digit (Milan Hladnik)	140–147
Interferenca elektronov na svetlobi — Interference of electrons on light (Janez Strnad)	148–150

Vesti — News

Andreji Prijatelj v slovo (Tomaž Pisanski)	151–152
Profesor Miroslav Adlešič (Janez Strnad)	152–153
Slavnostni govor na spominski prireditvi ob 200-letnici smrti barona Jurija Vege (Boštjan Žekš)	153–156

Nove knjige — New books

(Janko Bračič, Janez Strnad, Janez Strnad)	156–159, 159–160, 160–IV
Na naslovnici je histogram, ki prikazuje podatke iz tabele na strani 141.	

TRIKOTLJIVOST DRUŽIN OPERATORJEV NA KONČNORAZSEŽNIH PROSTORIH

ROMAN DRNOVŠEK

Math. Subj. Class. (2000): 15-02, 15A21, 15A30

V članku obravnavamo razcepnost in trikotljivost družin operatorjev na končno-razsežnih kompleksnih vektorskih prostorih. Zaporedoma obdelamo primere algebre operatorjev, para operatorjev in polgrupe operatorjev.

TRANGULIZABILITY OF COLLECTIONS OF OPERATORS ON FINITE-DIMENSIONAL SPACES

We study reducibility and triangularizability of collections of operators on finite-dimensional complex vector spaces. We treat separately the cases of algebras of operators, pairs of operators, and finally semigroups of operators.

1. Uvod

V tem članku predstavimo osnovne rezultate o razcepnosti in trikotljivosti družin operatorjev na končnorazsežnem kompleksnem vektorskem prostoru. Prispevek temelji na novejši monografiji [3], ki smo jo v Obzorniku že predstavili [1]. Osnove tega zanimivega dela operatorske teorije poskušamo obravnavati na čim bolj enostaven način. Tako je za razumevanje teksta potrebno le znanje osnov linearne algebre. Terminologija v slovenskem jeziku je bila uvedena v magistrskem delu [2], ki je v večji meri nastalo prav po osnutkih knjige [3].

V vsem članku naj bo X končnorazsežen kompleksen vektorski prostor z razsežnostjo $n \geq 2$. Linearno transformacijo na X imenujemo **operator**. Algebro vseh operatorjev na X zaznamujmo z $\mathcal{L}(X)$. V dani bazi prostora X vsakemu operatorju pripada matrika. Eden znanih rezultatov v linearni algebri je Schurov izrek, ki zagotavlja obstoj baze prostora X , v kateri danemu operatorju pripada zgornjetrikotna matrika. Pravzaprav lahko po Jordanovem izreku o dekompoziciji za pripadajočo matriko zahtevamo še, da je bločno diagonalna z (Jordanovimi) bloki oblike

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

kjer je λ lastna vrednost operatorja. Če imamo družino $\mathcal{D}$ operatorjev na X , potem lahko najdemo tako bazo prostora za vsak operator posebej,

malo verjetno pa je, da obstaja baza, v kateri so vse pripadajoče matrike zgornjetrikotne. Če taka baza prostora vendarle obstaja, pravimo, da je družina $\mathcal{D}$ **trikotljiva**.

Trikotljivost družine operatorjev je tesno povezana z invariantnimi podprostori družine. Podprostor L prostora X je **invarianten** za operator T , če iz $x \in L$ sledi $Tx \in L$. Če je podprostor L invarianten za vse operatorje dane družine $\mathcal{D}$, potem pravimo, da je L **invarianten** za $\mathcal{D}$. Imejmo trikotljivo družino $\mathcal{D}$ operatorjev na X in z $e_1, e_2, \dots, e_n$ označimo bazo prostora, v kateri imajo vsi operatorji zgornjetrikotne matrike. Potem je za vsak $k = 1, 2, \dots, n$ podprostor L_k , ki ga napenjajo vektorji $e_1, e_2, \dots, e_k$, invarianten za $\mathcal{D}$. Če postavimo še $L_0 = \{0\}$, potem je

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_n = X$$

veriga invariantnih podprostorov za $\mathcal{D}$, ki je maksimalna kot veriga podprostorov prostora X . Med dva zaporedna člena verige namreč ne moremo vstaviti še kakšnega. Velja pa tudi obratno. Če je

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_m = X$$

veriga invariantnih podprostorov za $\mathcal{D}$, ki je maksimalna kot veriga podprostorov prostora X , potem je zaradi maksimalnosti $m = n$ in $\dim L_k = k$ za vsak $k = 1, \dots, n$. Če za vsak $k = 1, \dots, n$ izberemo vektor e_k v L_k , ki ni v L_{k-1} , potem je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza prostora, v kateri so vse pripadajoče matrike zgornjetrikotne. Torej je družina $\mathcal{D}$ trikotljiva.

Vpeljimo še pojem razcepnosti. Podprostor L je **netrivialen**, če ni enak $\{0\}$ ali X . Družina operatorjev je **razcepna**, če obstaja netrivialen podprostor, ki je invarianten za vse operatorje družine. Če tak podprostor ne obstaja, je družina **nerazcepna**. Očitno je vsaka trikotljiva družina razcepna, obrat pa velja le za $n = 2$.

2. Razcepnost algebre operatorjev

Naj bo $\mathcal{D}$ družina operatorjev na X . Z $\mathcal{A}$ označimo najmanjšo algebro operatorjev, ki vsebuje $\mathcal{D}$. Potem je lahko videti, da imata $\mathcal{D}$ in $\mathcal{A}$ natanko iste invariantne podprostore. Zato je za temeljit študij razcepnosti in trikotljivosti družin treba vedeti, katere algebre operatorjev na X so razcepne. Na to vprašanje odgovarja Burnsideov izrek, ki je glavni rezultat tega razdelka.

Naj bo $\mathcal{A}$ algebra operatorjev na X . Hitro se prepričamo, da je za vsak $x \in X$ podprostor $\{Ax : A \in \mathcal{A}\}$ invarianten za $\mathcal{A}$. Imenujemo ga **ciklični podprostor** in ga zaznamujemo z $\mathcal{A}x$. Če $\mathcal{A}$ vsebuje identični operator I ,

potem je ta podprostor najmanjši invariantni podprostor, ki vsebuje vektor x .

Trditev 1. *Naj bo $\mathcal{A}$ algebra operatorjev na X . Potem je algebra $\mathcal{A}$ razcepna natanko tedaj, ko obstaja neničeln vektor $x \in X$, katerega ciklični podprostor je pravi podprostor prostora X .*

Dokaz. Če je L netrivialen podprostor prostora X , ki je invarianten za $\mathcal{A}$, potem je ciklični podprostor poljubnega neničelnega vektorja $x \in L$ vsebovan v L , torej je pravi podprostor.

Obratno, če ima neničeln vektor $x \in X$ ciklični podprostor, ki je pravi podprostor prostora X , potem je to netrivialen invarianten podprostor za $\mathcal{A}$, če le ni enak $\{0\}$. Toda tedaj je enorazsežen podprostor, napet na vektor x , invarianten za $\mathcal{A}$. ■

Izrek 2 (Burnside, 1905). *Edina nerazcepna algebra operatorjev na X je $\mathcal{L}(X)$.*

Dokaz. Dokaz nekoliko poenostavimo, če vzamemo $X = \mathbb{C}^n$. S tem nič ne izgubimo na splošnosti, saj je vsak kompleksen vektorski prostor razsežnosti n izomorfen prostoru $\mathbb{C}^n$. Običajni skalarni produkt na $\mathbb{C}^n$ označimo z $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Naj bo $\mathcal{A}$ nerazcepna algebra operatorjev na $\mathbb{C}^n$. Dokažimo najprej, da je algebra $\mathcal{A}^* := \{A^* : A \in \mathcal{A}\}$ nerazcepna. Naj bo L podprostor prostora $\mathbb{C}^n$, ki je invarianten za $\mathcal{A}^*$. Potem je njegov ortogonalni komplement $L^\perp$ invarianten za $\mathcal{A}$. Če je namreč $y \in L^\perp$ in $A \in \mathcal{A}$, potem za vsak $x \in L$ velja $\langle x, Ay \rangle = \langle A^*x, y \rangle = 0$, torej je $Ay \in L^\perp$. Ker je algebra $\mathcal{A}$ nerazcepna, je podprostor $L^\perp$ trivialen, zato je tak tudi L . Tako smo dokazali, da je algebra $\mathcal{A}^*$ tudi nerazcepna.

Naj bo $T \in \mathcal{A}$ operator, ki ima najmanjši rang izmed neničelnih operatorjev v $\mathcal{A}$. Dokažimo, da je ta rang enak 1. Predpostavimo nasprotno, da je razsežnost zaloge vrednosti $\text{im } T$ vsaj 2. Tedaj obstajata taka vektorja x_1 in x_2 v $\mathbb{C}^n$, da sta vektorja Tx_1 in Tx_2 linearno neodvisna. Ker je zaradi nerazcepnosti algebre ciklični podprostor $\mathcal{A}Tx_1$ enak $\mathbb{C}^n$, lahko najdemo tak operator $S \in \mathcal{A}$, da je $S(Tx_1) = x_2$. Naj bo λ lastna vrednost zožitve operatorja TS na njegov invariantni podprostor $\text{im } T$. Potem je rang operatorja $(TS - \lambda I)T \in \mathcal{A}$ manjši od ranga operatorja T , saj je njegova zaloga vrednosti pravi podprostor v $\text{im } T$. Za ta operator velja tudi $(TS - \lambda I)Tx_1 \neq 0$, saj sta vektorja $TSTx_1$ in Tx_1 linearno neodvisna. Ker je to v protislovju z izbiro operatorja T , mora T imeti rang enak 1.

Naj bo x_0 neničeln vektor v zalogi vrednosti operatorja T . Potem obstaja tak linearen funkcional f_0 na $\mathbb{C}^n$, da je $Tx = f_0(x)x_0$ za vsak $x \in \mathbb{C}^n$. Ker je vsak linearen funkcional podan kot skalarni produkt z nekim

vektorjem, obstaja natanko določen neničelni vektor y_0 , da je $f_0(x) = \langle x, y_0 \rangle$ za vsak $x \in \mathbb{C}^n$. Naj bo $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standardna baza prostora $\mathbb{C}^n$ in naj bodo $T_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq n$) matrične enote, tj. $T_{i,j}$ je podan s predpisom $T_{i,j}x = \langle x, e_i \rangle e_j$. Vse matrične enote sestavljajo bazo prostora $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, zato bo izrek dokazan, ko pokažemo, da so vsebovane v algebri $\mathcal{A}$. Izberimo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ker je $\mathcal{A}x_0 = \mathbb{C}^n$, obstaja tak operator $A \in \mathcal{A}$, da je $Ax_0 = e_j$. Ker je algebra $\mathcal{A}^*$ tudi nerazcepna, je $\mathcal{A}^*y_0 = \mathbb{C}^n$, zato obstaja tak operator $B \in \mathcal{A}$, da je $B^*y_0 = e_i$. Sedaj je lahko preveriti, da je $T_{i,j} = ATB$, torej $T_{i,j} \in \mathcal{A}$. ■

3. Od razcepnosti do trikotljivosti

V tem razdelku bomo najprej dokazali lemo, ki nam pogosto omogoča, da je za trikotljivost družine operatorjev dovolj pokazati le njeno razcepnost. Naj bo $\mathcal{D}$ družina operatorjev na X ter M in N taka njena invariantna podprostora, da je M pravi podprostor v N . Potem vsak $T \in \mathcal{D}$ s predpisom $\tilde{T}(x+M) = Tx+M$ inducira operator $\tilde{T}$ na kvocientnem prostoru N/M . Vsi dobljeni operatorji sestavljajo družino **induciranih operatorjev** glede na par podprostorov $\{M, N\}$. Za neko lastnost, ki je definirana za operatorje, pravimo, da se **deduje pri induciranju**, kadar imajo za vsako družino operatorjev s to lastnostjo tudi vse možne družine induciranih operatorjev to lastnost. Primer lastnosti, ki se deduje pri induciranju, je nilpotentnost operatorja. Če je namreč potenca $T^k = 0$, potem je tudi $\tilde{T}^k = 0$.

Lema 3 (lema o trikotenju). *Naj bo $\mathcal{L}$ množica lastnosti, ki se dedujejo pri induciranju. Če je vsaka družina operatorjev na vektorskem prostoru z razsežnostjo vsaj 2, ki imajo vse lastnosti iz množice $\mathcal{L}$, razcepna, potem je vsaka taka družina tudi trikotljiva.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{D}$ družina operatorjev X , ki imajo vse lastnosti iz množice $\mathcal{L}$. Zanja izberimo maksimalno verigo invariantnih podprostorov

$$\{0\} = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_m = X.$$

Potem je družina trikotljiva, če je ta veriga maksimalna tudi kot veriga vseh podprostorov prostora X . To pa je res le v primeru, ko je vsak od kvocientov M_k/M_{k-1} enorazsežen ($k = 1, \dots, m$). Denimo, da to ne velja za kvocient M_k/M_{k-1} . Potem $\mathcal{D}$ inducira družino operatorjev na M_k/M_{k-1} , ki je po predpostavki leme razcepna. Naj bo L njen netrivialni invariantni podprostor. Če s p označimo kvocientno projekcijo iz M_k na M_k/M_{k-1} , potem je podprostor $p^{-1}(L)$ invarianten za vse operatorje iz $\mathcal{D}$. Ker je ta podprostor strogo med M_{k-1} in M_k , nas to pripelje v protislovje z izbiro maksimalne verige invariantnih podprostorov. ■

Kot prvi primer uporabe leme 3 navedimo naslednjo posplošitev na začetku omenjenega Schurovega izreka.

Izrek 4. *Vsaka družina komutirajočih operatorjev je trikotljiva.*

Dokaz. Naj bo $\mathcal{D}$ družina komutirajočih operatorjev na X . Ker se komutativnost operatorjev deduje pri induciranju, je po lemi 3 dovolj pokazati razcepnost družine. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da v $\mathcal{D}$ obstaja operator T , ki ni večkratnik identitete. Naj bo λ njegova lastna vrednost. Potem je pripadajoči lastni podprostor M netrivialen. Če je $S \in \mathcal{D}$ in $x \in M$, potem je $T(Sx) = STx = \lambda Sx$, od koder sledi, da je M tudi invarianten podprostor za vse operatorje iz $\mathcal{D}$. ■

Nekomutativen polinom v operatorjih $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ je linearna kombinacija besed, sestavljenih iz teh operatorjev. Primer nekomutativnega polinoma v $\{T_1, T_2\}$ je $p(T_1, T_2) = T_1T_2 - T_2T_1$, kar imenujemo **komutator** operatorjev T_1 in T_2 .

Izrek 5. *Naj bo $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ trikotljiva družina operatorjev na X . Potem je za poljuben nekomutativen polinom p v operatorjih $\{T_1, T_2, \dots, T_m\}$ vsaka lastna vrednost operatorja $p(T_1, \dots, T_m)$ oblike $p(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, kjer je λ_k lastna vrednost operatorja T_k ($k = 1, \dots, m$).*

Dokaz. Po definiciji obstaja baza prostora, v kateri so pripadajoče matrike operatorjev $T_1, \dots, T_m$ zgornjetrikotne. Diagonalni elementi matrike so natanko vse lastne vrednosti operatorja. Vsak od diagonalnih elementov matrike, ki pripada operatorju $p(T_1, \dots, T_m)$, je zato oblike $p(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, kjer je λ_k lastna vrednost operatorja T_k ($k = 1, \dots, m$). ■

Naslednji izrek odgovarja na vprašanje, kdaj je algebra operatorjev trikotljiva.

Izrek 6 *Naj bo $\mathcal{A}$ algebra operatorjev na X . Naslednje trditve so ekvivalentne:*

- (a) *Algebra $\mathcal{A}$ je trikotljiva.*
- (b) *Vsak par $\{A, B\}$ iz algebre $\mathcal{A}$ je trikotljiv.*
- (c) *Za vsak par $\{A, B\}$ iz algebre $\mathcal{A}$ je komutator $AB - BA$ nilpotenten.*

Dokaz. Očitno iz (a) sledi (b). Če velja (b), potem je po izreku 5 vsaka lastna vrednost komutatorja $AB - BA$ oblike $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$, kjer je α lastna vrednost operatorja A in β lastna vrednost operatorja B . To pomeni, da je operator $AB - BA$ nilpotenten, kar pravi točka (c).

Naj sedaj velja (c). Najprej dokažimo obstoj operatorjev A in B na X , katerih komutator $AB - BA$ ni nilpotenten. Izberimo bazo prostora X ter A in B podajmo z matrikama $[a_{ij}]$ in $[b_{ij}]$, ki imata vse elemente enake 0,

razen $a_{12} = b_{21} = 1$. Lahko je preveriti, da njun komutator ni nilpotenten. Ker za $\mathcal{A}$ velja (c), ta primer zagotavlja, da je $\mathcal{A}$ prava podalgebra v $\mathcal{L}(X)$ in zato je po Burnsideovem izreku razcepna. Brez težav se prepričamo, da se lastnost „vsak komutator je nilpotenten” deduje pri induciranju, zato je $\mathcal{A}$ trikotljiva po lemi 3. ■

4. Razcepnost para operatorjev

Izrek 6 poraja vprašanje, kdaj je par operatorjev na X trikotljiv. Odgovor najdemo v naslednjem rezultatu, kjer je ekvivalentnost trditev (a) in (b) dokazal McCoy že leta 1936.

Izrek 7. *Naslednje trditve o paru $\{A, B\}$ operatorjev na X so ekvivalentne:*

- (a) *Par $\{A, B\}$ je trikotljiv.*
- (b) *Operator $p(A, B)(AB - BA)$ je nilpotenten za vsak nekomutativen polinom p v $\{A, B\}$.*
- (c) *Operator $b(A, B)(AB - BA)$ je nilpotenten za vsako besedo b , sestavljeno iz A in B .*

Dokaz. Če je par $\{A, B\}$ trikotljiv in p nekomutativen polinom v $\{A, B\}$, potem je po izreku 5 vsaka lastna vrednost operatorja $p(A, B)(AB - BA)$ oblike $p(\alpha, \beta)(\alpha\beta - \beta\alpha) = 0$, kjer je α lastna vrednost operatorja A in β lastna vrednost operatorja B . To pomeni, da velja (b).

Ker je beseda enočlen nekomutativen polinom, iz (b) sledi (c). Predpostavimo torej, da velja (c). Po lemi 3 je dovolj pokazati, da je par $\{A, B\}$ razcepen, kar je ekvivalentno s tem, da je algebra $\mathcal{A}$, generirana z A in B , razcepna. Če je $AB = BA$, potem je algebra komutativna in zato razcepna po izreku 4. Oglejmo si primer, ko je $AB \neq BA$. Denimo nasprotno, da je algebra $\mathcal{A}$ nerazcepna. Potem je po Burnsideovem izreku $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X)$. Naj za vektor $x \in X$ velja $y := (AB - BA)x \neq 0$. Potem lahko najdemo operator $C \in \mathcal{L}(X) = \mathcal{A}$ ranga 1, ki preslika vektor y v vektor x . Tedaj je operator $C(AB - BA)$ projektor na podprostor, napet na vektor x . Zato je $\text{sl}(C(AB - BA)) = 1$, kjer s sl označimo sled operatorja. Po drugi strani je C linearna kombinacija besed, sestavljenih iz A in B , tj.

$$C = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i(A, B).$$

Ker so po predpostavki operatorji $b_i(A, B)(AB - BA)$ nilpotentni, je

$$\text{sl}(C(AB - BA)) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{sl}(b_i(A, B)(AB - BA)) = 0.$$

To protislovje nas prepriča, da je algebra $\mathcal{A}$ razcepna in tako velja (a). ■

Navedimo še en zadostni pogoj za trikotljivost para $\{A, B\}$, ki ga je lažje preveriti kot pogoj (c) v izreku 7.

Izrek 8 (Laffey, 1978). *Naj bosta A in B operatorja na X , katerih komutator $AB - BA$ ima rang največ 1. Potem je par $\{A, B\}$ trikotljiv.*

Dokaz. Lastnost, da je rang komutatorja največ 1, se deduje pri induciranju, zato je po lemi 3 dovolj pokazati razcepnost para $\{A, B\}$. Če je $AB = BA$, potem je to res po izreku 4. Naj bo torej rang komutatorja $AB - BA$ enak 1 in naj bo y neničeln vektor v zalogi vrednosti komutatorja.

Oglejmo si najprej primer, ko operator A ni obrnljiv. Ker je $A \neq 0$, sta njegovo jedro $\ker A$ in zaloga vrednosti $\operatorname{im} A$ netrivialna invariantna podprostor za A . Dokažimo, da je vsaj eden izmed njiju invarianten tudi za B . Če podprostor $\ker A$ ni invarianten za B , potem lahko najdemo tak vektor $x \in X$, da je $Ax = 0$ in $A(Bx) \neq 0$. Tedaj je vektor $ABx = (AB - BA)x$ neničeln večkratnik vektorja y in potemtakem je $y \in \operatorname{im} A$. Za poljuben vektor $z \in X$ obstaja tako kompleksno število α , da je $(AB - BA)z = \alpha y$ oziroma $BAz = A(Bz) - \alpha y$. Od tod sklepamo, da je $BAz \in \operatorname{im} A$. S tem smo pokazali, da je podprostor $\operatorname{im} A$ invarianten za B . Torej je v tem primeru par $\{A, B\}$ razcepen.

Naj bo sedaj operator A obrnljiv. Potem za poljubno njegovo lastno vrednost λ operator $A - \lambda I$ ni obrnljiv. Ker je $(A - \lambda I)B - B(A - \lambda I) = AB - BA$ je po že dokazanem par $\{A - \lambda I, B\}$ razcepen. Ker se invariantni podprostori parov $\{A - \lambda I, B\}$ in $\{A, B\}$ očitno ujemajo, je tudi slednji par razcepen. Tako je izrek dokazan. ■

Posledica 9. *Naj bo $\mathcal{A}$ algebra operatorjev na X z lastnostjo, da je za vsak par $\{A, B\}$ iz $\mathcal{A}$ rang komutatorja $AB - BA$ največ 1. Potem je algebra $\mathcal{A}$ trikotljiva.*

Dokaz. Po izreku 8 je vsak par operatorjev iz $\mathcal{A}$ trikotljiv. Potem je algebra $\mathcal{A}$ trikotljiva po izreku 6. ■

5. Razcepnost polgrup operatorjev

V tem razdelku se ukvarjamo z razcepnostjo in trikotljivostjo polgrup operatorjev na X , kjer je polgrupna operacija množenje oziroma komponiranje operatorjev. Izkaže se, da ima v tej obravnavi pomembno vlogo sled operatorja.

Naj bo $\mathcal{D}$ družina operatorjev na X z lastnostjo, da je

$$\text{sl}(T_{\sigma(1)}T_{\sigma(2)}\dots T_{\sigma(m)}) = \text{sl}(T_1T_2\dots T_m)$$

za poljubne operatorje $T_1, T_2, \dots, T_m$ iz $\mathcal{D}$ ($m = 2, 3, \dots$) in za poljubno permutacijo σ števil $1, 2, \dots, m$. Tedaj pravimo, da je sled permutabilna na $\mathcal{D}$. Ker za poljubna operatorja S in T velja $\text{sl}(ST) = \text{sl}(TS)$, smemo v tej definiciji zahtevati, da je $m \geq 3$. Zaradi istega razloga se smemo omejiti le na permutacije, ki niso ciklične. Od tod sklepamo, da za $m = 3$ zadostuje preveriti le eno transpozicijo, na primer

$$\text{sl}(T_2T_1T_3) = \text{sl}(T_1T_2T_3).$$

Naslednja trditev zagotavlja, da je za permutabilnost sledi na polgrupi operatorjev pravzaprav treba preveriti samo to.

Trditev 10. *Naj bo $\mathcal{S}$ polgrupa operatorjev na X , za katero je*

$$\text{sl}(BAC) = \text{sl}(ABC)$$

za vse operatorje A, B in C iz $\mathcal{S}$. Potem je sled permutabilna na $\mathcal{S}$.

Dokaz. Dokažimo z indukcijo na m . Pred trditvijo smo ugotovili, da je sled permutabilna na besedah dolžine 3. Predpostavimo, da je sled permutabilna na besedah dolžine manjše od m ($m > 3$), in dokažimo, da je permutabilna na besedah dolžine m . Naj bo U beseda dolžine m , recimo $U = T_1 \dots T_m$ za neke $T_1, \dots, T_m$ iz $\mathcal{S}$. Naj bo σ permutacija števil $1, 2, \dots, m$ in $V = T_{\sigma(1)}T_{\sigma(2)}\dots T_{\sigma(m)}$. Zaradi permutabilnosti sledi na besedah dolžine 2 smemo privzeti, da je $\sigma(m) = m$. Sedaj predpostavka trditve zagotavlja, da smemo predpostaviti, da je tudi $\sigma(m-1) = m-1$, torej $V = T_{\sigma(1)}\dots T_{\sigma(m-2)}T_{m-1}T_m$. Ker je $T_{m-1}T_m \in \mathcal{S}$, je $\text{sl}(V) = \text{sl}(U)$ po indukcijski predpostavki. S tem je dokaz končan. ■

Trditev 11. *Naj bo $\mathcal{D}$ družina operatorjev na X . Če je sled permutabilna na $\mathcal{D}$, potem je takšna tudi na algebri, generirani z $\mathcal{D}$.*

Dokaz. Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{S}$ zaporedoma algebra in polgrupa, ki ju generira družina $\mathcal{D}$. Permutabilnost sledi na $\mathcal{S}$ je neposredna posledica definicije. Njeno permutabilnosti na $\mathcal{A}$ pa zlahka dokažemo, če upoštevamo še to, da

je vsak operator iz $\mathcal{A}$ linearna kombinacija operatorjev iz $\mathcal{S}$ in da je sled linearen funkcional na $\mathcal{L}(X)$. ■

V dokazu glavnega izreka tega razdelka bomo uporabili naslednja algebraična dejstva, ki jih dokažemo drugače kot v [3] ali [2], kjer dokazi temeljijo na zvezah med elementarnimi simetričnimi polinomi in vsotami k -tih potenc. Naši dokazi uporabljajo Lagrangeov interpolacijski izrek, ki ga navajamo kot točko (a). Omeniti pa moramo, da se v [3] pri trditvi, ki ustreza naši točki (c), predpostavlja veljavnost enakosti za $k = 1, 2, \dots, n$.

Lema 12. *Naj bosta $a_1, \dots, a_n$ in $b_1, \dots, b_n$ n -terici kompleksnih števil. Potem veljajo trditve:*

(a) *Če so $\{a_1, \dots, a_n\}$ različna števila, potem obstaja tak polinom p stopnje največ $n - 1$, da je $p(a_i) = b_i$ za vsak $i = 1, \dots, n$.*

(b) *Če je*

$$\sum_{i=1}^n a_i^k = 0$$

za vsak $k = 1, \dots, n$, potem je $a_i = 0$ za vse i .

(c) *Naj bo m število različnih elementov v zaporedju $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$. Če je*

$$\sum_{i=1}^n a_i^k = \sum_{i=1}^n b_i^k$$

za vsak $k = 1, 2, \dots, m$, potem obstaja taka permutacija σ števil $1, \dots, n$, da je $b_i = a_{\sigma(i)}$ za vse i .

(d) *Če je*

$$\sum_{i=1}^n a_i^k = c$$

za vsak $k = 1, 2, \dots, n + 1$, kjer je c fiksno kompleksno število, potem je c celo število in vsak a_i je enak 0 ali 1.

Dokaz. (a) Za vsak $i = 1, \dots, n$ definirajmo polinom p_i s predpisom

$$p_i(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \cdots (x - a_n).$$

Potem je iskani polinom podan s

$$p(x) = \frac{b_1}{p_1(a_1)} p_1(x) + \dots + \frac{b_n}{p_n(a_n)} p_n(x).$$

(b) Iz predpostavke sledi, da je $\sum_{i=1}^n p(a_i) = 0$ za vsak polinom p stopnje največ n , za katerega je $p(0) = 0$. Naj bo r število neničelnih števil v

$a_1, \dots, a_n$. Potem po (a) lahko najdemo tak polinom stopnje največ n , ki 0 preslika v 0 in vse točke a_i , ki niso 0, preslika v 1. Za ta polinom velja hkrati $\sum_{i=1}^n p(a_i) = r$ in $\sum_{i=1}^n p(a_i) = 0$, torej je $r = 0$.

(c) Vzemimo poljubno kompleksno število z_0 . Naj bosta r in s zaporedoma števili njegovih pojavitev v zaporedju $a_1, \dots, a_n$ in v zaporedju $b_1, \dots, b_n$. Po (a) lahko najdemo tak polinom p stopnje največ m , da je $p(z_0) = 1$ in $p(a_i) = p(b_j) = 0$ za vse a_i in b_j , ki so različni od z_0 . Ker iz predpostavke sledi $\sum_{i=1}^n p(a_i) = \sum_{i=1}^n p(b_i)$, dobimo $r = s$. To pa že pomeni, da zaporedje $b_1, \dots, b_n$ dobimo iz zaporedja $a_1, \dots, a_n$ z neko permutacijo.

(d) Glede na (b) se lahko omejimo na primer, ko je $c \neq 0$. Ker lahko vse a_i , ki so enaki 0, zavržemo, smemo privzeti, da so vsi a_i različni od 0. Dokazati moramo, da so enaki 1. Po (a) obstaja tak polinom p stopnje največ $n + 1$, da je $p(0) = 0$, $p(1) = 1$ in $p(a_i) = 1$ za vse $i = 1, \dots, n$. Ker iz predpostavke sledi

$$\sum_{i=1}^n p(a_i) = c \cdot p(1),$$

imamo torej $n = c$. Če sedaj v (c) postavimo $b_1 = \dots = b_n = 1$, dobimo $a_1 = \dots = a_n = 1$. ■

V jeziku operatorjev lahko zadnjo trditev zapišemo takole:

Izrek 13. *Naj za operatorja A in B na X velja $\text{sl}(A^k) = \text{sl}(B^k)$ za vsako naravno število k . Potem imata A in B enake lastne vrednosti, upoštevajoč njihovo kratnost. V posebnem primeru je operator A nilpotenten, če je $\text{sl}(A^k) = 0$ za vsako naravno število k .*

Dokaz. Če so $a_1, \dots, a_n$ lastne vrednosti operatorja A in $b_1, \dots, b_n$ lastne vrednosti operatorja B , potem enakost $\text{sl}(A^k) = \text{sl}(B^k)$ pomeni, da je $\sum_{i=1}^n a_i^k = \sum_{i=1}^n b_i^k$. Izrek sedaj sledi iz trditve 12 (c). ■

Glavni izrek tega razdelka je naslednja zanimiva karakterizacija trikotljivosti polgrupe operatorjev na X .

Izrek 14 (Radjavi, 1986). *Naj bo $\mathcal{D}$ družina operatorjev na X . Potem je $\mathcal{D}$ trikotljiva natanko tedaj, ko je sled permutabilna na $\mathcal{D}$. V posebnem primeru je polgrupa $\mathcal{S}$ operatorjev na X trikotljiva natanko takrat, ko velja $\text{sl}(BAC) = \text{sl}(ABC)$ za vse operatorje A, B in C iz $\mathcal{S}$.*

Dokaz. Očitno je pogoj potreben. Za dokaz njegove zadostnosti z $\mathcal{A}$ označimo algebro, generirano z $\mathcal{D}$. Potem je po trditvi 11 sled permutabilna na $\mathcal{A}$. Torej za poljubne operatorje A, B in C iz $\mathcal{A}$ velja $\text{sl}(ABC) = \text{sl}(BAC)$ oziroma

$$\text{sl}((AB - BA)C) = 0.$$

Če tu za C vstavimo $(AB - BA)^{k-1}$, dobimo $\text{sl}((AB - BA)^k) = 0$ za vsako naravno število k . Po izreku 13 je tako komutator $AB - BA$ nilpotenten za vsak par $\{A, B\}$ iz algebre $\mathcal{A}$. Sedaj nam izrek 6 zagotavlja, da je $\mathcal{A}$ trikotljiva. Drugo trditev izreka dobimo, če upoštevamo še trditev 10. ■

Iz izreka 14 sledi nekaj rezultatov, ki so bili znani že prej.

Izrek 15 (Kaplansky, 1977). *Vsaka polgrupa operatorjev na X , na kateri je sled konstantna, je trikotljiva. Diagonalni elementi v pripadajočih matrikah so enaki 1 ali 0. Še več, število 1 se pri vseh matrikah pojavlja na istih mestih na diagonalah.*

Dokaz. Ker je sled permutabilna na polgrupi, je polgrupa trikotljiva po izreku 14. Po trditvi 12 (d) so diagonalni elementi v pripadajočih matrikah enaki 1 ali 0. Če matriki, ki pripadata operatorjema S in T iz polgrupe, ne bi imeli enic na natanko istih mestih na diagonalah, bi veljalo $\text{sl}(ST) < \text{sl}(S)$, kar bi nasprotovalo predpostavki. Tako je izrek dokazan. ■

Posledica 16 (Levitzki, 1931). *Vsaka polgrupa nilpotentnih operatorjev na X je trikotljiva.*

Posledica 17 (Kolchin, 1948). *Če je 1 edina lastna vrednost operatorjev iz polgrupe, potem je polgrupa trikotljiva.*

Za konec prispevka dokažimo naslednjo posplošitev Kolchinovega izreka.

Izrek 18. *Naj bo $\mathcal{S}$ polgrupa operatorjev na X , v kateri ima vsak operator število 1 za lastno vrednost z algebraično kratnostjo vsaj $n - 1$. Potem je $\mathcal{S}$ trikotljiva.*

Dokaz. Za vsak $S \in \mathcal{S}$ velja naslednja zveza med njegovo sledjo in determinanto

$$\text{sl } S = n - 1 + \det S.$$

Ker je determinanta produkta enaka produktu determinant, od tod zlahka vidimo, da je sled permutabilna na $\mathcal{S}$. Po izreku 14 je zato polgrupa $\mathcal{S}$ trikotljiva. ■

LITERATURA

- [1] R. Drnovšek, H. Radjavi, P. Rosenthal: *Simultaneous Triangularization*, prikaz nove knjige, Obzornik mat. fiz. 48 (2001), 55–57.
- [2] M. Kramar, *Trikotljivost družine operatorjev*, magistrsko delo, Ljubljana 1999.
- [3] H. Radjavi, P. Rosenthal, *Simultaneous Triangularization*, Springer-Verlag, New York 2000.

BENFORDOV ZAKON ALI PROBLEM PRVE ŠTEVKE

MILAN HLADNIK

Math. Subj. Class. (2000): 60F05, 42A16

V članku predstavimo razlago Benfordovega zakona, po katerem se pri dokaj splošnih predpostavkah vodilne številke v zbranih numeričnih podatkih iz realnega sveta ne pojavljajo enako pogosto, ampak so porazdeljene po logaritemskem zakonu. Po kratkem zgodovinskem pregledu formuliramo pojav matematično in ga pojasnimo z uporabo (preprostih) metod Fourierove analize.

BENFORD'S LAW OR THE PROBLEM OF THE FIRST DIGIT

In the article we present an explanation of Benford's law according to which under quite general assumptions the leading digits in collected numerical data from the real world does not emerge equally often but are distributed according to logarithmic law. After a short historical survey a mathematical formulation of the phenomenon is given and explained with the help of (simple) methods from Fourier analysis.

1. Zgodovina problema

Kolikor je znano, se zgodba o prvi številki pričinja leta 1881, ko je Simon Newcomb¹ opazil, da so logaritemske tabele bolj obrabljene na začetku kot proti koncu. Sklepal je, da uporabniki tabel pogosteje potrebujejo desetiške logaritme števil, ki se začenjajo z nižjo številko. Postavil je celo domnevo, da se prva značilna številka c pogosto pojavlja v skladu z logaritmičnim zakonom, tj. z verjetnostjo $P(c = n) = \log(n + 1) - \log n = \log(1 + 1/n)$, $n = 1, 2, 3, \dots, 9$.

Newcombovo odkritje je bilo dalj časa pozabljeno, ponovno so se ga spomnili čez več kot petdeset let. Leta 1938 se je Frank Benford, fizik, zaposlen v nekem podjetju za distribucijo električne energije, ponovno lotil pojava. Zbral je 20 229 numeričnih podatkov in jih raziskal glede pogostnosti pojavljanja prve številke. Podatki so bili z zelo različnih področij realnega sveta: statistični podatki v baseballu, površina porečij 355 rek, številke domačih naslovov 342 znanih ameriških znanstvenikov, nadalje podatki iz različnih

¹ Simon Newcomb (1835–1909) je znamenita osebnost iz zgodovine ameriške znanosti, direktor ameriškega pomorskega laboratorija, profesor matematike in astronomije na univerzi Johns Hopkins (1884–1893), ustanovni član in prvi predsednik ameriškega astronomskega društva (1899–1905), predsednik ameriškega matematičnega društva (AMS) v letih 1897–98 in več let urednik časopisa American Journal of Mathematics.

Zanimivo je, da se je poleg matematike in astronomije ukvarjal tudi s politično ekonomijo in pisal o financah, teoriji denarja, posojilnicah in davkih. Bil je poliglot, gladko je npr. govoril francosko in nemško, znal pa je tudi italijansko in švedsko. Zanimal se je za filozofijo, družbena vprašanja, zgodovino in poezijo, odlično igral šah in bil telesno aktiven do pozne starosti (pri sedemdesetih letih je menda še plezal na Matterhorn). Bil je član različnih tujih znanstvenih ustanov, društev in akademij. Za svoja dela je prejel številna priznanja.

fizikalnih (atomske teže elementov, specifične toplote) in matematičnih tabel (potence naravnih števil) itd. Nekateri podatki so se glede pojavljanja prve številke bolj, nekateri manj, v celoti pa kar dobro ujemali z logaritemskim zakonom. V naslednji tabeli je podana primerjava med ugotovljeno relativno frekvenco prve številke pri Benfordovih empiričnih podatkih in med pričakovano relativno frekvenco prve številke po logaritemskem zakonu. Ti podatki so prikazani tudi na naslovnici te številke.

Prva številka	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ugotovljena frekvenca	0.306	0.185	0.124	0.094	0.080	0.064	0.051	0.049	0.047
Pričakovana frekvenca	0.301	0.176	0.125	0.097	0.079	0.067	0.058	0.051	0.046

Vidimo, da se številka 1 pojavlja v približno 30 % vseh primerov, številka 2 v približno 18 % primerov itd. Benford pojava ni znal razložiti, z objavo svojih podatkov v Proc. Amer. Phil. Soc. leta 1938 pa je dosegel njegovo popularnost. V javnosti je postal znan kot *problem prve številke*. Kasneje so se pojavile številne bolj ali manj utemeljene razlage. Roger Pinkham je npr. leta 1961 sklepal, da se mora Benfordov zakon, če res velja za vse tabele, pokazati tudi v primeru, ko vse podatke pomnožimo s pozitivno konstanto (računamo npr. Benfordova porečja v kvadratnih kilometrih in ne kvadratnih miljah, se pravi, da spremenimo merski sistem). To se je na danih podatkih pokazalo kot resnično. Edina porazdelitev, ki je neobčutljiva za spremembo skale (množenje s konstanto), pa je logaritemska. Če torej v naravi obstaja nekaj takega kot Benfordov zakon, mora biti to logaritemski zakon. Toda ali res obstaja? Pri kakšnih pogojih? O različnih pristopih k temu problemu je leta 1976 daljši pregleden članek objavil R. Raimi [4].

Kot se zdi, je najbolj sprejemljivo (in preprosto) razlago pojava leta 1994 ponudil J. Boyle v časopisu The American Mathematical Monthly [1]. V svojem izvajanju se je naslonil na teorijo Fourierovih vrst. V nadaljevanju sestavka bomo povzeli Boylov članek. Uporabili bomo preprosta sredstva iz Fourierove analize in pri dovolj splošnih predpostavkah pokazali, da lahko govorimo o limitnem porazdelitvenem zakonu, ki se pojavi kot rezultat velikega števila množenj (ali deljenj oziroma potenciranj). Ta zakon je, kot bomo videli, nekakšna analogija Gaussovega normalnega zakona, ki ga pogosto dobimo kot rezultat seštevanja velikega števila med seboj neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk (glej npr. [3]).

2. Matematična formulacija

Pozitivno realno število x zapišimo v t.i. znanstvenem načinu, tj. v obliki

$$x = m_x \cdot 10^{n_x},$$

kjer je m_x realno število z lastnostjo $1 \leq m_x < 10$, tako imenovana *mantisa*, in n_x celo število, tako imenovana *karakteristika*. *Vodilno števko* števila x izračunamo kot celi del mantise, se pravi

$$c_x = [m_x].$$

Če izberemo x naključno iz neke velike množice podatkov (populacije), imamo lahko x za slučajno spremenljivko. Tudi m_x , n_x in c_x so slučajne spremenljivke, m_x morda zvezna z vrednostmi med 1 (vključno) in 10, n_x in c_x pa diskretni, prva s celimi vrednostmi in druga z vrednostmi iz množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Porazdelitev za c_x izrazimo s porazdelitvijo za x oziroma za desetiški logaritem $\log x$. Upoštevajmo, da je $\log x = \log m_x + n_x$ oziroma $\log m_x = \{\log x\}$, kjer z $\{y\} = y - [y]$ označimo decimalni del števila $y > 0$. Za verjetnost, da je prva števka števila x enaka n , dobimo:

$$\begin{aligned} P(c_x = n) &= P(n \leq m_x < n + 1) = P(\log n \leq \log m_x < \log(n + 1)) = \\ &= P(\log n \leq \{\log x\} < \log(n + 1)). \end{aligned}$$

Gre torej za to, kako je porazdeljena slučajna spremenljivka $\log x$, izračunana po modulu 1. Če je npr. $\{\log x\}$ porazdeljena enakomerno na intervalu $[0, 1)$, torej $P(\log n \leq \{\log x\} < \log(n + 1)) = \log(n + 1) - \log n = \log(1 + 1/n)$, je enako porazdeljena tudi prva števka: $P(c_x = n) = \log(1 + 1/n)$. Problem prve števke smo torej reducirali na problem, kdaj ima spremenljivka $\{\log x\}$ na intervalu $[0, 1)$ enakomerno porazdelitev.

Opozorilo. Že na prvi pogled je jasno, da pozitivne rešitve ne smemo pričakovati vedno in v vseh primerih. Enakomerna porazdelitev seveda ni nujna, če si vrednosti za x preprosto izmislimo ali (na slepo) izberemo iz specifične populacije. Predstavljajmo si npr., da nas zanima vodilna števka v množici meritev telesne višine, izražene v centimetrih. Očitno bomo skoraj vedno za rezultat dobili 1, redko 2, nikoli (?) pa 3 ali več. Poleg tega podatki iz te populacije niso neobčutljivi na spremembo merske enote. Če bi npr. višino merili v čevljih, bi bila vodilna števka najbolj pogosto 5 ali 6. Še bolj drastičen primer nastopi, če opazujemo vodilno števko med podatki, izraženimi v dvojiškem sistemu. Tedaj je prva od 0 različna števka vedno enaka 1. Toda do vrednosti za x pogosto pridemo po naravni poti, ko izvedemo predpisan postopek, ki vsebuje večje število operacij, npr. seštevanj in množenj. V tabelah tretjih potenc moramo npr. dvakrat zapored opraviti množenje z n , da dobimo n^3 .

Poglejmo, kako se spremeni mantisa, če zmnožimo dve števili. Naj bosta $x = m_x \cdot 10^{n_x}$ in $y = m_y \cdot 10^{n_y}$ zapisa dveh števil x in y . Potem je $xy = m_x m_y \cdot 10^{n_x + n_y}$. Toda mantisa produkta, m_{xy} , je enaka produktu mantis,

$m_x m_y$, samo če je $1 \leq m_x m_y < 10$. Če pa je $10 \leq m_x m_y < 100$, je $m_{xy} = m_x m_y / 10$. Za logaritme mantis torej dobimo $\log m_{xy} = \log m_x + \log m_y$, če je ta vsota med 0 in 1, sicer pa od nje odštejemo 1. Skratka, $\log m_{xy} = \{\log m_x + \log m_y\}$ oziroma nekoliko drugače:

$$\{\log xy\} = \{\{\log x\} + \{\log y\}\}.$$

Kasneje bomo videli, da je vsota, reducirana po modulu 1, lahko enakomerno porazdeljena, čeprav to ne velja za nobenega od sumandov.

Kaj pa, če je množenj zelo veliko? Ali porazdelitev za logaritem produkta, reduciran po modulu 1, konvergira proti enakomerni porazdelitvi, kadar se število faktorjev veča čez vse meje? Pokazali bomo, da je pri določenih dokaj šibkih in splošnih predpostavkah to res.

3. Uporaba Fourierove analize

Ker nas bodo očitno zanimale vsote slučajnih spremenljivk, reducirane po modulu 1, bomo vse porazdelitve opazovali samo na intervalu $[0, 1)$. Zaradi enotnega pristopa obravnavajmo samo zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke. Predpostavimo, da so njihove gostote verjetnosti tudi zvezne funkcije na $[0, 1)$ (ali da vsaj pripadajo razredu $L^2(0, 1)$ s kvadratom integrabilnih funkcij na tem intervalu). Taka gostota je torej nenegativna zvezna (ali integrabilna) funkcija f , definirana na $[0, 1)$, z lastnostjo $\int_0^1 f(t) dt = 1$, funkcija $F(z) = \int_0^z f(t) dt$, $z \in [0, 1)$, pa je pripadajoča porazdelitvena funkcija. Za enakomerno porazdelitev na intervalu $[0, 1)$ je npr. verjetnostna gostota enaka $f(t) = 1$ za vsak $t \in [0, 1)$ in $F(z) = z$ za vsak $z \in [0, 1)$.

Mislimo si, da gostoto f nadaljujemo z intervala $[0, 1)$ na vso realno os periodično s periodo 1. Tudi za tako razširjeno funkcijo ohranimo isto oznako. Zanja lahko izračunamo t.i. Fourierove koeficiente po formuli:

$$\hat{f}(n) = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

in iz njih sestavimo ustrezno Fourierovo vrsto

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x},$$

ki konvergira po normi v Hilbertovem prostoru $L^2(0, 1)$, ki jo porodi skalarni produkt $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$. To je t.i. srednja kvadratična konvergenca Fourierove vrste. Znano je, da iz konvergence v $L^2(0, 1)$ sledi tudi konvergenca v prostoru $L^1(0, 1)$, se pravi po normi $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Dobro je tudi znano, da sestavljajo funkcije $e_n(t) = e^{2\pi i n t}$, $n \in \mathbb{Z}$, kompleten ortonormiran sistem v prostoru $L^2(0,1)$ in da velja t.i. Parsevalova enakost:

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Iz Parsevalove enakosti takoj sledita dve pomembni ugotovitvi: prvič, Fourierovi koeficienti konvergirajo proti 0, ko pošljemo $|n|$ v neskončnost, in drugič, v primeru, da so vsi Fourierovi koeficienti enaki 0, je tudi funkcija f skoraj povsod enaka 0 (povsod enaka 0, če je zvezna). Zadnja ugotovitev pomeni, da je s svojimi Fourierovimi koeficienti funkcija f natanko določena: iz $\hat{f}(n) = \hat{g}(n)$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$ sledi $f = g$ skoraj povsod (povsod, če je zvezna).

Doslej povedano je veljalo za Fourierove koeficiente poljubne zvezne (ali s kvadratom integrabilne) funkcije na $[0,1)$. Fourierovi koeficienti za gostoto verjetnosti pa imajo poleg splošnih še dodatne lepe lastnosti; nekaj jih združimo v naslednji trditvi:

Trditev 1. *Za Fourierove koeficiente verjetnostne gostote f velja:*

- (a) $\hat{f}(0) = 1$,
- (b) $|\hat{f}(n)| < 1$ za vsak $n \neq 0$,
- (c) $c = \sup_{n \neq 0} |\hat{f}(n)| < 1$.

Dokaz. (a) Očitno je $\hat{f}(0) = \int_0^1 f(t) dt = 1$.

(b) Vedno je $|\hat{f}(n)| = |\int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt| \leq \int_0^1 f(t) dt = 1$. Tu smo absolutno vrednost preprosto premaknili pod integralski znak. Do istega rezultata pa bi (nekoliko bolj nerodno) lahko prišli tudi z uporabo Cauchy-Schwarzeve neenakosti:

$$|\hat{f}(n)| = |\int_0^1 \sqrt{f(t)} \cdot \sqrt{f(t)} e^{-2\pi i n t} dt| \leq (\int_0^1 f(t) dt)^{1/2} (\int_0^1 f(t) dt)^{1/2} = 1.$$

Toda iz te ocene je lažje videti, kdaj v njej namesto enačaja nastopi neenačaja. Znano je namreč, da v Cauchy-Schwarzevi oceni velja enakost natanko takrat, ko je drugi vektor večkratnik prvega. Vidimo, da v tem primeru obstaja kompleksno število λ z absolutno vrednostjo 1, tako da je $\sqrt{f(t)} e^{2\pi i n t} = \lambda \sqrt{f(t)}$ skoraj za vsak t . Ker mora biti $f(t) > 0$ na množici s pozitivno mero (celo na podintervalu, če je f zvezna funkcija), lahko tam pokrajšamo s $\sqrt{f(t)}$ in dobimo $e^{2\pi i n t} = \lambda$ na množici s pozitivno mero, kar pa ni mogoče, razen v primeru $n = 0$ in $\lambda = 1$.

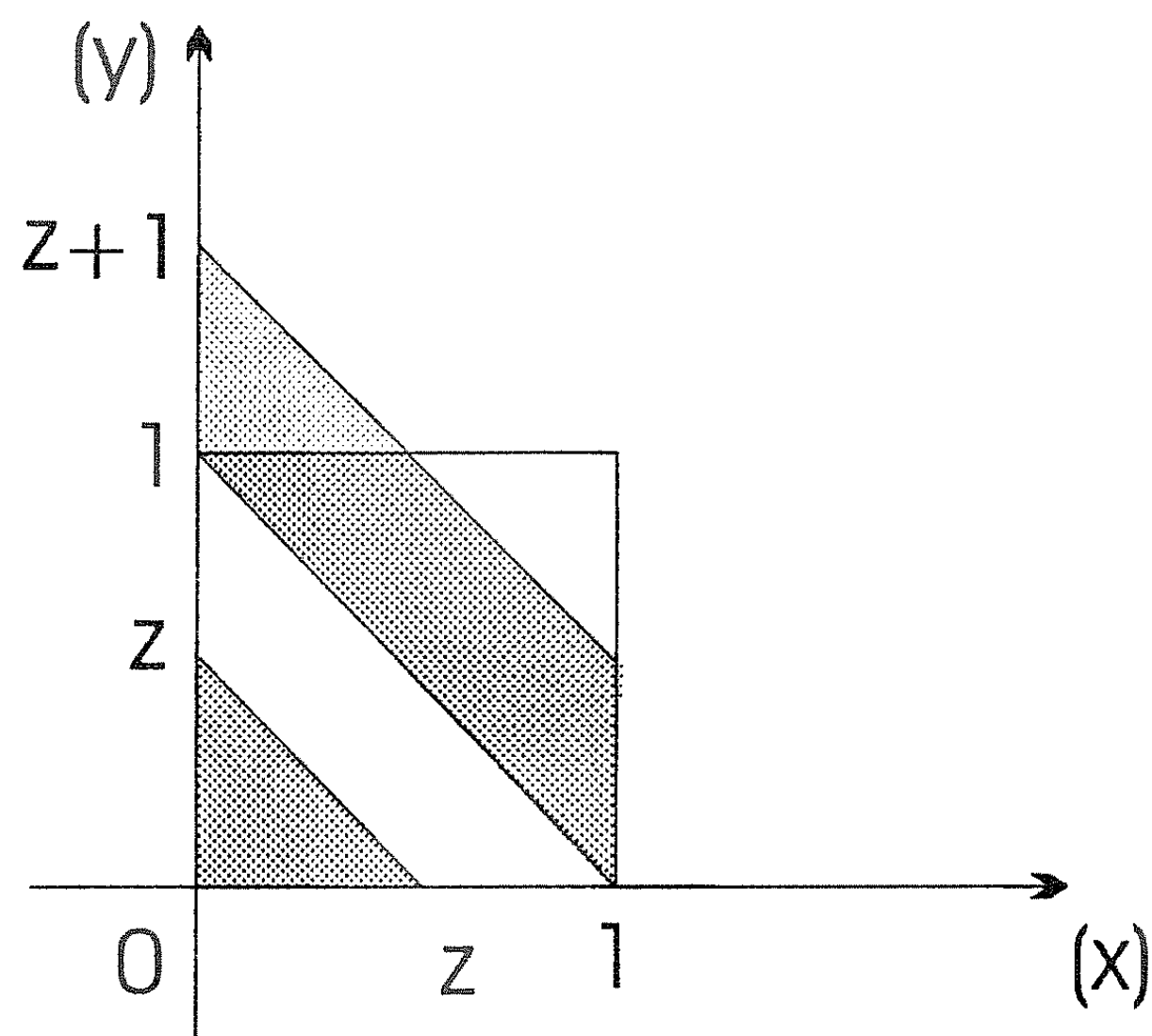
(c) Ker $\hat{f}(n) \rightarrow 0$ ($|n| \rightarrow \infty$), je supremum dosežen: obstaja tak $n \neq 0$, da je $c = |\hat{f}(n)|$. Toda tedaj je $|\hat{f}(n)| < 1$. ■

Potrebovali bomo porazdelitveni zakon za vsoto dveh neodvisnih zvezno porazdeljenih slučajnih spremenljivk na $[0,1)$, reducirano po modulu 1. Kot

običajno je ta zakon povezan s konvolucijo $h = f * g$ obeh gostot, ki je za periodične funkcije s periodo 1 definirana s predpisom:

$$h(z) = \int_0^1 f(x)g(z-x)dx.$$

Brez posebnih težav ugotovimo, da je Fourierov koeficient za konvolucijo enak produktu Fourierovih koeficientov za posamezna faktorja, torej $\hat{h}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$.



Slika 1

Trditev 2. Če sta f in g verjetnostni gostoti neodvisnih slučajnih spremenljivk X in Y z vrednostmi na intervalu $[0, 1)$, je verjetnostna gostota slučajne spremenljivke $Z = \{X + Y\}$ enaka njuni konvoluciji $h = f * g$.

Dokaz. Izračunajmo najprej porazdelitveno funkcijo za slučajno spremenljivko $Z = \{X + Y\}$. To je funkcija

$$\begin{aligned} F(z) &= P(Z < z) = P(\{X + Y\} < z) = \\ &= P(X + Y < z, X + Y < 1) + P(X + Y - 1 < z, X + Y \geq 1) = \\ &= P(X + Y < z) + P(1 \leq X + Y < z + 1) = \\ &= \int \int_{x+y < z, 0 \leq x, y < 1} f(x)g(y)dx dy + \\ &\quad + \int \int_{1 \leq x+y < z+1, 0 \leq x, y < 1} f(x)g(y)dx dy = \\ &= \int_0^1 f(x) \left(\int_{1-x}^{z+1-x} g(y)dy \right) dx. \end{aligned}$$

V zadnji enakosti smo upoštevali, da je funkcija g periodična s periodo 1 (glej sliko 1). Z odvajanjem na z dobimo

$$h(z) = F'(z) = \int_0^1 f(x)g(z+1-x)dx = \int_0^1 f(x)g(z-x)dx,$$

če spet upoštevamo periodičnost funkcije g . Torej je res $h(z) = (f * g)(z)$ za vsak $z \in [0, 1)$. ■

Opomba. Čisto lahko se zgodi, da ima slučajna spremenljivka $Z = \{X+Y\}$ enakomerno porazdelitev na intervalu $[0, 1)$, čeprav je spremenljivki X in Y nimata. Zgled: naj bo $f(x) = 1 + \sin(2\pi x)$ in $g(x) = 1 + \sin(4\pi x)$. Potem so Fourierovi koeficienti za f različni od 0 samo pri $n = 0, 1, -1$, Fourierovi koeficienti za g pa samo pri $n = 0, 2, -2$. Torej so vsi Fourierovi koeficienti za konvolucijo $h = f * g$ enaki 0, razen $\hat{h}(0) = 1$. Ker je gostota s svojimi Fourierovimi koeficienti natanko določena, mora biti $h(z) = 1$ za vsak $z \in [0, 1)$ in spremenljivka Z je enakomerno porazdeljena na intervalu $[0, 1)$.

V navedenem zgledu sta bili obe porazdelitvi različni od enakomerne, vendar zelo posebni. Če pa je npr. X že enakomerno, Y pa poljubno porazdeljena, pride porazdelitev za $\{X + Y\}$ vedno enakomerna. To vidimo iz primerjanja Fourierovih koeficientov, saj je tedaj $\hat{h}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$ enako 1 za $n = 0$ in enako 0 za $n \neq 0$. Torej je $h(z) = 1$ za vsak $z \in [0, 1)$ in imamo enakomerno porazdelitev.

Glavni izrek, ki določa limitno porazdelitev za logaritme, reducirane po modulu 1, in, kot smo videli, potem tudi limitno porazdelitev prve številke, je naslednji:

Izrek 1. *Naj bodo $X_1, X_2, \dots, X_k$ neodvisne identično porazdeljene zvezne slučajne spremenljivke z vrednostmi na intervalu $[0, 1)$ in s skupno verjetnostno gostoto $f \in L^2(0, 1)$. Potem konvergira porazdelitev slučajne spremenljivke $Z_k = \{\sum_{i=1}^k X_i\}$ pri pogoju $k \rightarrow \infty$ proti enakomerni porazdelitvi na intervalu $[0, 1)$.*

Dokaz. Slučajna spremenljivka Z_k je porazdeljena z gostoto $h_k = f * f * \dots * f$ (k -kratna konvolucija funkcije f same s seboj). Torej je $\hat{h}_k(n) = \hat{f}(n)^k$ za $n \in \mathbb{Z}$. Upoštevajmo, da je $(f - 1)^\wedge(n) = \hat{f}(n)$ za $n \neq 0$ in $(f - 1)^\wedge(0) = 0$ (isto velja za h_k) in dobimo po Parsevalovi enakosti

$$\begin{aligned} \|h_k - 1\|_2^2 &= \int_0^1 (h_k(t) - 1)^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(h_k - 1)^\wedge(n)|^2 = \sum_{n \neq 0} |\hat{h}_k(n)|^2 = \\ &= \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^{2k} = \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^2 |\hat{f}(n)|^{2k-2} \leq c^{2k-2} \sum_{n \neq 0} |\hat{f}(n)|^2 = \\ &= c^{2k-2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |(f - 1)^\wedge(n)|^2 = c^{2k-2} \int_0^1 |(f(t) - 1)|^2 dt = \\ &= c^{2k-2} \|f - 1\|^2. \end{aligned}$$

Konstanta c v tej oceni je iz trditve 1. V limiti ($k \rightarrow \infty$) torej velja $\|h_k - 1\|_2^2 \rightarrow 0$, se pravi, da se verjetnostna gostota h_k spremenljivke Z_k

približuje konstantni funkciji 1 po normi v $L^2(0,1)$ in zato tudi po normi v $L^1(0,1)$. To pa že pomeni konvergenco porazdelitvenih funkcij $F_{Z_k}(z) = \int_0^z h_k(z) dz \rightarrow \int_0^z 1 dz = z$ ($k \rightarrow \infty$). Torej porazdelitvena funkcija za Z_k konvergira proti porazdelitveni funkciji enakomerne porazdelitve. ■

Opomba. Ta konvergenca je celo monotona. Za vsak $n \in \mathbb{Z}$ in vsak k namreč velja $|\hat{h}_{k+1}(n)| = |\hat{h}_k(n)| |\hat{f}(n)| \leq |\hat{h}_k(n)|$ s strogo neenakostjo, če vsaj za en $n \neq 0$ velja $\hat{h}_k(n) \neq 0$ (ker je $|\hat{f}(n)| < 1$). Odtod sledi neenakost $\|h_{k+1} - 1\|_2 \leq \|h_k - 1\|_2$ s strogo neenakostjo vedno, razen ko je že $h_k(z) = 1$ za vsak z (tedaj so vse nadaljnje porazdelitve že enakomerne).

Brez posebnih težav bi lahko po isti metodi dokazali tudi soroden izrek, kjer neodvisnih slučajnih spremenljivk ne bi samo seštevili, ampak tudi odštevali in množili s konstantami (vse po modulu 1). Tudi v tem primeru bi pri enako šibkih predpostavkah ugotovili enakomerno limitno porazdelitev rezultata po modulu 1.

Z antilogaritmiranjem lahko potem izrek 1 ali ravnokar omenjeno njegovo posplošitev takoj prevedemo v rezultat, ki nekaj pove o porazdelitvi mantis oziroma posledično o porazdelitvi prvih števk. Po vsem, kar smo povedali, si velja zapomniti osnovno spoznanje, ki je podobno kot pri centralnem limitnem zakonu, da je namreč limitna porazdelitev *mantise* slučajne spremenljivke, ki jo dobimo kot rezultat velikega števila množenj, deljenj in potenciranj neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk, logaritmična. Odtod sledi Benfordov zakon porazdelitve prve števk.

3. Sklep

Benfordov zakon lahko uporabljamo kot hitri test pri preverjanju, ali so numerični podatki, s katerimi nam postrežejo in ki naj bi bili rezultati znanstvenega ali drugačnega računanja (velikega števila množenj, deljenj ali potenciranj) zanesljivi (verodostojni) ali izmišljeni (se pravi, da je posredi goljufija). S testom lahko posumimo, da gre za prevaro, če so prve števk porazdeljene drugače, kot bi morale biti, če bi bile res rezultat izračunov. Seveda pa za dokaz goljufije na sodišču to ne zadošča; tako dobimo le osnovo za nadaljnje preiskave. Menda se je test obnesel tudi pri ugotavljanju davčnih utaj (glej npr. [2]).

LITERATURA

- [1] J. Boyle, *An application of Fourier series to the most significant digit problem*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), 879–885.
- [2] J. Walthoe, R. Hunt, M. Pearson, *Looking out for number one*, Plus Magazine, 9. sept. 1999 (<http://plus.maths.org.uk/issue9/features/benford/index.html>).
- [3] M. Perman, *Centralni limitni izrek*, Obzornik mat. fiz. **40** (1993), 144–154.
- [4] R. R. Raimi, *The first digit problem*, Amer. Math. Monthly **83** (1976), 521–538.

INTERFERENCA ELEKTRONOV NA SVETLOBI

JANEZ STRNAD

PACS 33.80.-b

Pred kratkim so naredili poskus, ki sta ga pred sedemdesetimi leti predlagala P. L. Kapica in P. A. M. Dirac. Opazovali so interferenco curka elektronov na stoječem elektromagnetnem valovanju.

INTERFERENCE OF ELECTRONS ON LIGHT

Recently an experiment was performed which was proposed by P. L. Kapitza and P. A. M. Dirac seventy years ago. Interference of an electron beam on a standing light wave was observed.

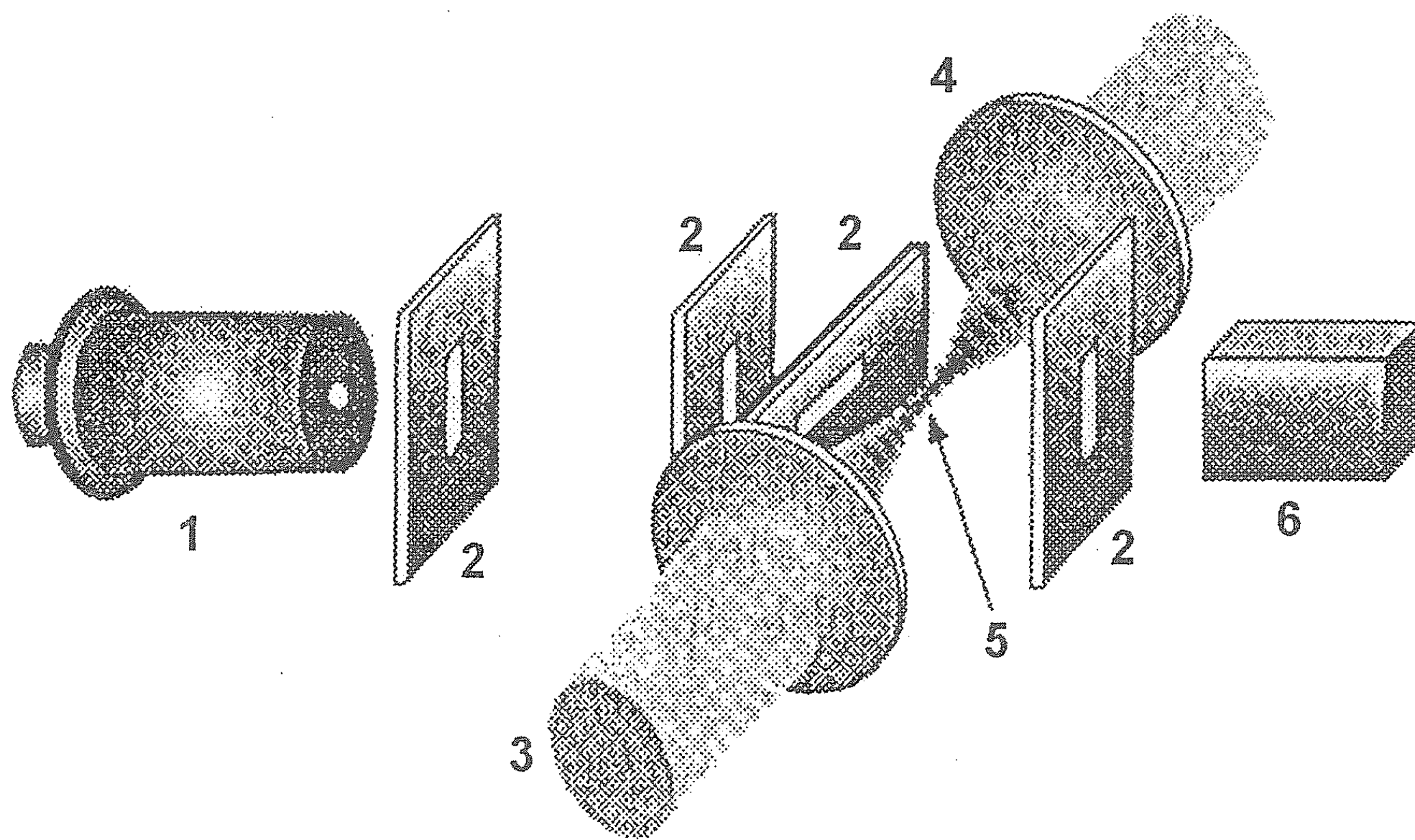
Obzornik je poročal o predlogu P. L. Kapice in P. A. M. Diraca, da bi kot uklonsko mrežico za curek elektronov uporabili stoječe elektromagnetno valovanje [1]. Stoječe valovanje nastane iz dveh potujočih valovanj v nasprotnih smereh. V takem valovanju z valovno dolžino λ so vozli, ki ustrezajo režam v uklonski mrežici, v razmiku $\frac{1}{2}\lambda$. Curku elektronov priredimo de Broglievo valovno dolžino $\lambda_B = h/mv$. Enačba za uklon na mrežici $a \sin \beta = N\lambda_B$ se v tem primeru glasi

$$\frac{1}{2}\lambda \sin \beta = Nh/mv. \quad (1)$$

Stoječe elektromagnetno valovanje le šibko deluje na elektrone. Kapica in Dirac sta izračunala, da se na stoječem valovanju, ki nastane, ko se curek enobarvne svetlobe iz živosrebrne svetilke na ravnem zrcalu odbije vase, sipa samo vsak 10^{14} -ti elektron s kinetično energijo 25 eV. Tedaj pojava ni bilo mogoče opazovati.

Po uvedbi laserjev najprej ni bilo dosti bolje. Pri elektronih s kinetično energijo nekaj elektronvoltov so motili naboji, ki so se zaradi segrevanja nabrali na zrcalu. Pri elektronih z večjo kinetično energijo te nevšečnosti ni bilo, a je bil sipalni kot neprijetno majhen. Zaradi neuspeha pri poskusih z elektroni so vso pozornost preusmerili na poskuse s curkom atomov, pri katerih se verjetnost za sipanje poveča, če je energija fotona blizu energije vzbujenega stanja atoma. Sipanje atomov blizu resonance na stoječem elektromagnetnem valovanju je postalo uporabno raziskovalno orodje.

Pred kratkim pa je raziskovalni skupini na oddelku za fiziko in astronomijo univerze zvezne države Nebraska v Lincolnu v ZDA uspel interferenčni poskus z elektroni na stoječem elektromagnetnem valovanju [2]. Poskus je naletel na precejšnje zanimanje [3],[4]. Ob dovolj močnem in stabilnem laserju in novem načinu zaznavanja elektronov so odpadle vse težave, ki so pestile prejšnje eksperimentatorje. Uporabili so laser na itrijev aluminijev granat s primesjo neodima. Laserski curek s podvojeno frekvenco so razdelili na dva delna curka, ki so ju z zrcali usmerili drugega proti drugemu. Pri valovni dolžini 532 nm so sunki trajali po 10 ns in vsebovali energijo



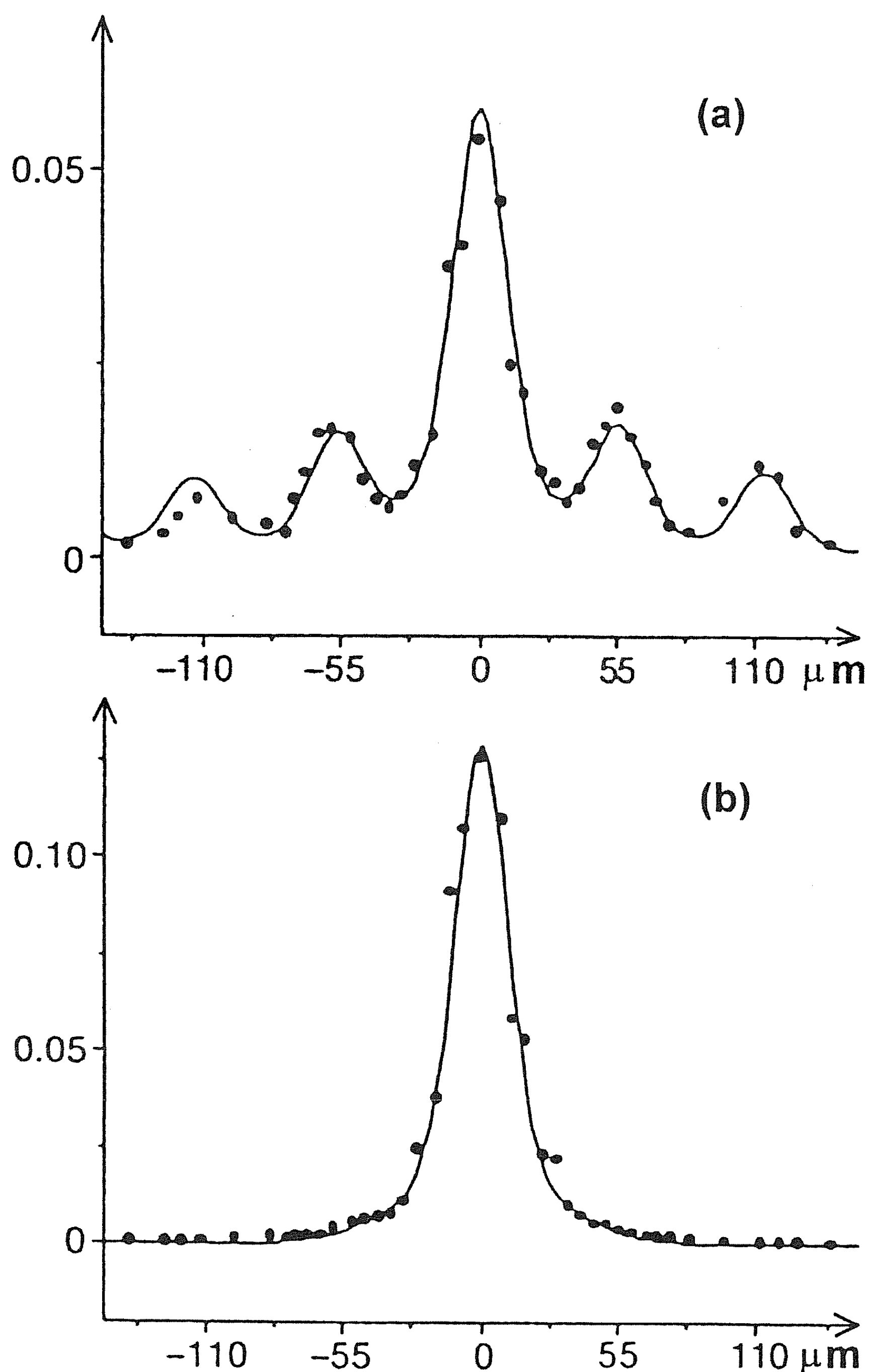
Slika 1. Poenostavljena risba merilne naprave: izvir elektronov 1, reže 2, laserski curek 3, leči 4, stojče valovanje 5, merilnik elektronov 6 [2]. Profesor Herman Batelaan in uredništvo revije Nature sta ljubeznivo dovolila ponatis te in naslednje slike.

po 0,2 J. Curka so zbrali z lečama, da je premer na najožjem delu meril 0,125 mm. Največja gostota svetlobnega toka v stoječem valovanju je dosegla $5 \cdot 10^{14} \text{ W/m}^2$. Koherenčna dolžina laserskega curka je merila 5 mm, kar je zadostovalo, saj sta se poti delnih curkov na območju stoječega valovanja razlikovali kvečjemu za 1 mm. Curek elektronov s kinetično energijo 380 eV, hitrostjo $1,16 \cdot 10^7 \text{ m/s}$ in de Broglievo valovno dolžino 0,063 nm je iz izvira šel najprej skozi dve navpični reži v razmiku 24 cm. Nato ga je vodoravna reža zožila na širino laserskih curkov, preden je 1 cm za režo zadel stojče valovanje. V razdalji 24 cm za laserskima curkoma so namestili navpično zadnjo, četrto režo, ki jo je bilo mogoče premikati v vodoravni smeri. Vse reže so bile iz molibdena in široke po 0,01 mm.

Elektrone so zaznavali z elektronsko pomnoževalko. Pri danem položaju zadnje reže so izmerili porazdelitev števila elektronov po zakasnitvi glede na laserski sunek. Merjenje so ponovili za različne lege zadnje reže in iz časovnih porazdelitev izluščili interferenčno sliko (slika 2a). S tem načinom so dosegli, da so zaznavali le elektrone, ki so se sipali na stoječem valovanju. Curek elektronov so otipali na enak način, le da tedaj ni bilo stoječega valovanja. Polna širina curka na polovični višini je merila 0,025 mm (slika 2b).

V interferenčni sliki so si interferenčni vrhovi zaporednih redov $N = 0, \pm 1, \pm 2$ sledili v razmiku po $\beta l \approx (2h/mv\lambda)l = 55 \mu\text{m}$ z $l = 24 \text{ cm}$. Višina vrhov je nekoliko odstopala od običajne krivulje za mrežico iz rež, ki so po vsej širini enako prepustne. Numerični račun, v katerem so upoštevali, da so se elektroni na stoječem valovanju sipali v odvisnosti od amplitude jakosti električnega polja, pa je dal zadovoljivo ujemanje. Majhno nesimetrijo so pripisali temu, da laserska curka nista bila natanko nasprotno usmerjena.

Delni curki elektronov, ki prispevajo k interferenčni sliki, so koherentni. Pri svetlobi je take curke mogoče dobiti že s polprepustno ploščico. Pri elektronih in drugih delcih pa ni polprepustne ploščice. Poleg uklonskih mrežic, ki jih ni lahko izdelati, le stojče elektromagnetno valovanje ponuja tako možnost. Izkoristiti jo nameravajo za nadaljnje interferenčne poskuse



Slika 2. Interferenčna slika priča o uklonu elektronov na stoječem elektromagnetnem valovanju (a). Na vodoravno os je nanescena lega $l \sin \beta$ in na navpično os število sunkov v kanalu na sekundo. Krivuljo so dobili z numerično rešitvijo Schrödingerjeve enačbe. Curek elektronov, ki so ga posneli, ko ni bilo stoječega valovanja, je imel polno širino na polovični višini 0,025 mm (b) [2].

in merjenja s curki ionov in s curki molekul. S tremi pari laserskih curkov so že ustvarili tri vzporedna stoječa elektromagnetna valovanja in z njimi naredili interferometer Mach-Zehnderjeve vrste za elektrone [5]. Pričakujemo lahko, da bo pojav omogočil nadaljnja zanimiva merjenja v laboratorijih.

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Interferenčni poskus s curkom atomov na svetlobi*, Obzornik mat. fiz. **34** (1987) 87.
- [2] D. L. Freimund, K. Aflatoon, H. Batelaan, *Observation of the Kapitza-Dirac effect*, Nature **413** (2001) 142.
- [3] M. Arndt, *Freie Elektronen im sichtbarem Licht gebeugt*, Phys. Blätter **57** (2001) 20.
- [4] S. K. Blau, *Electron diffraction by light, envisioned 70 years ago, is observed at last*, Phys. Today **55** (2002) 15 (1).
- [5] H. Batelaan, *The Kapitza-Dirac effekt*, Contemporary physics **41** (2000) 369.

ANDREJI PRIJATELJ V SLOVO

Nagovor na žalni seji senata Fakultete za matematiko in fiziko

Kar smo in so Ti prizadejali, se ne da izbrisati. Česar nismo pravočasno storili, pa bi morali, se ne da več popraviti. Nedojemljiv absurd je, da stojimo mi tu in govorimo Tebi, ko bi morala po vsej logiki Stvarstva stati nekoč v bodočnosti Ti tu in govoriti nam, starejšim.

In vendar nam govorijo spomini nate in govori nam Tvoj življenjepis. Čeprav je bila Tvoja pot tesna, vijugasta in marsikje s trnjem nastlana, pa veje iz Tvoje biografije jasna in odločna smer, ki si si jo zgodaj začrtala in si ji ostala zvesta vse življenje. Tvoj kompas in Tvoje sidro so bile in ostajajo osnove matematike. Tvoje krmilo, ki Te je vodilo po življenjski strokovni poti, je bil pouk. Sedem let po diplomi si se kalila na Elektrotehniški šoli v Ljubljani. Šest let si asistirala pri pouku matematike na Fakulteti za elektrotehniko in računalništvo.

Ljubezen do matematične logike Te je peljala študirat v Beograd, kjer si magistrirala 1984. leta. Zavzeto si sodelovala na seminarjih iz osnov matematike v Ljubljani, Zagrebu in Beogradu. Razumljiv in konsistenten korak na Tvoji akademski poti je bil doktorski študij, pri katerem si zatohlo slovenclarsko okolje za šest let zamenjala s svetovljanskim Amsterdamom. Tvoj doktorat je bil dobra osnova za bliskovit vzpon. Predavanjem iz „logike za umetno inteligenco“ na Oddelku za matematiko in računalništvo univerze v Amsterdamu so sledila daljša gostovanja na slovitom Cambridgeu, na Stanfordu ter v Parizu.

V domačem okolju si se neutrudljivo lotila uvajanja osnov matematike in matematične logike na vseh ravneh. Na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko si vpeljala raziskovalni seminar iz logike s teorijo množic, predavala si na Fakulteti za matematiko in fiziko, na Fakulteti za računalništvo in informatiko (podiplomski predmet logika) ter na Pedagoški fakulteti. Med



Tvojimi diplomantkami so tudi take s Prešernovimi nagradami. Kar dve med njimi sta tudi magistrirali pri Tebi.

Prva si bila, ki ji je uspelo v Sloveniji med raziskovalne smeri v matematiki zapisati tudi tisto najpomembnejšo, na kateri temelji vsa mogočna matematična zgradba: osnove matematike z matematično logiko.

Še bi lahko razpredal in govoril, če bi poskušali zapolniti praznino, ki ostaja za Teboj in ki se je ne bo dalo nikoli zapolniti. Pa nam ni treba. Tvoje delo in Tvoje bivanje med nami Te je neizbrisljivo zapisalo v naša srca in v zgodovino slovenske matematike. Zaradi Tebe smo boljši. Pogrešali Te bomo, Tvojim najdražjim pa naše iskreno sožalje.

Tomaž Pisanski

PROFESOR MIROSLAV ADLEŠIČ

1907–2002

Februarja je umrl Miroslav Adlešič, učitelj fizike, pisec učbenikov ter člankov in knjig za širši krog bralcev. Rojen je bil leta 1907 v Postojni. Po maturi je študiral na tedanji filozofski fakulteti in leta 1930 končal študij z diplomom iz fizike, fizikalne kemije, matematike in mineralogije. To je bila sploh prva diploma iz fizike na Univerzi v Ljubljani. Že med študijem je sodeloval na filozofski fakulteti in na fizikalnem inštitutu tehniške fakultete pri vodenju fizikalnega praktikuma in pripravi vaj. Dvakrat se je izpopolnjeval na fizikalno-kemijskem inštitutu tehniške visoke šole na Dunaju.

Po diplomi je poučeval na gimnazijah v Jagodini in Celju in po profesorskem izpitu leta 1933 po vrsti na ženski in moški gimnaziji in učiteljišču v Ljubljani. Leta 1947 se je vrnil na I. gimnazijo, leta 1962 pa je kot višji predavatelj prešel na Filozofsko fakulteto. Glasbeno akustiko je predaval že od leta 1940 na Akademiji za glasbo, po letu 1964 pa je s predavanjem nadaljeval na muzikološkem oddelku filozofske fakultete. Poleg tega je predaval o merilnih metodah za študente psihologije, fiziko za biologe in veterinarje na Biotehniški fakulteti ter vodil več krajših tečajev. Tudi po upokojitvi leta 1972 je še nekaj časa predaval glasbeno akustiko za študente Filozofske fakultete in Akademije za glasbo.

Na začetku tridesetih let je M. Adlešič raziskoval kinetiko kislinske in encimatske hidrolize polisaharidov, a je obsežno delo ostalo v rokopisu. Po vojni je raziskoval akustiko prostorov in dvoran, med njimi Postojnske jame. Izdelal je predloge za zmanjšanje hrupa in za izboljšanje razmer na delovnem mestu.

Najbolj je bil znan med učenci po svojih učbenikih. Leta 1939 je sodeloval kot soavtor pri prvem, v letih 1941 in 1946 pa sta prvič izšla prvi in drugi del *Fizike za nižje razrede srednjih šol*, ki sta doživela več izdaj,

med njimi predelani izdaji leta 1948 kot dva dela *Fizike za nižje srednje in strokovne šole*. V teh učbenikih so učno snov spremljala berila, ki smo jih tedanji „nižjegimnazijci“ z zanimanjem prebirali. Za širši krog bralcev je napisal več knjig, od katerih so bile nekatere zelo dobro sprejete. Omenimo *Naravoznanstvo in svetovni nazor* iz leta 1939, bogato ilustrirano knjigo *Od mehanike do elektronike* iz leta 1952, *Mladega vedeža* iz let 1961 in 1965 ter obsežni monografiji *Svet svetlobe in barv* iz leta 1957 in *Svet zvoka in glasbe* iz leta 1964.

S številnimi članki je sodeloval v predvojnem Življenju in svetu in potem v Elektrotehniškem vestniku, Koledarjih Prešernove družbe in drugih koledarjih, Obzorniku ter drugih revijah in časopisih. Veliko je predaval pred vojno in še več po njej: na radiu, v okviru Prirodoslovnega društva, strokovnega aktiva profesorjev matematike in fizike ter kemije, Društva inženirjev in tehnikov in drugod. V poznejših letih se je zavzeto ukvarjal s slikarstvom. Obvladal je različne tehnike od olja do akvarela in svoja dela pokazal na več razstavah. Prejel je tri Levstikove nagrade, več pohval in dve državni odlikovanji.

Delo profesorja Adlešiča so člani Društva matematikov, fizikov in astronomov dobro poznali, čeprav je potekalo zunaj Društva. Z njim si je v slovenskem okolju zagotovil trajen spomin.

Janez Strnad

SLAVNOSTNI GOVOR NA SPOMINSKI PRIREDITVI OB 200-LETNICI SMRTI BARONA JURIJA VEGE (rojstna hiša Jurija Vege v Zagorici, 21. september 2002)

Spoštovani!

Res je lepo, da smo se danes zbrali v rojstnem kraju Jurija VEGA v počastitev dvestote obletnice njegove smrti. Vse bi vas rad najlepše pozdravil, obenem pa bi se rad zahvalil Občini Dol in Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije za organizacijo tega srečanja in za organizacijo Vegovih dni, ki potekajo oziroma so potekali v tem tednu v Tehniškem muzeju Slovenije v Bistri, na Slovenski akademiji znanosti in umetnosti, v Graščini Dol, tukaj ob rojstni hiši v Zagorici in na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani.

Jurij Vega je gotovo eden najpomembnejših mož v naši zgodovini. Na žalost pa v širši javnosti ne vemo kaj dosti o njem in o njegovem delu, ga ne cenimo dovolj in nismo dovolj ponosni nanj. Pa to ni nič nenavadnega, isto se nam dogaja tudi z drugimi velikimi možmi in ženami iz naše preteklosti.

Sicer je o Juriju VEGI, o njegovem življenju in o njegovem delu precej

znanega. Ve se, da se je rodil 23. marca 1754 v skromnem okolju, tu v Zagorici in da je umrl v skrivnostnih okoliščinah septembra 1802 na Dunaju. Bil je iz kmečke družine, oče mu je kmalu umrl, delal je na kmetiji, obiskoval je nedeljsko šolo v Moravčah, kjer so mu domači izobraženci, ki so opazili njegovo nadarjenost, tudi sicer pomagali pri pridobivanju izobrazbe. Pri trinajstih letih je bil sprejet v jezuitsko šolo v Ljubljani, ki jo je pri devetnajstih zelo uspešno končal, potem pa je šel na licej, kjer je po dveh letih diplomiral kot navigacijski inženir. Pet let je deloval v Ljubljani v tem poklicu in sodeloval pri urejanju rečnih korit za plovbo. Toda njegove ambicije so bile večje. Leta 1780, 26-leten, je odšel na Dunaj in vstopil v vojsko, v artilerijo. Potem je v oficirski artilerijski in bombarderski šoli poučeval matematiko, fiziko in balistiko in se začel ukvarjati z znanostjo. V tistih časih, ob začetku industrijske revolucije je balistika, artilerijska balistika, začela postajati znanost in tudi po svetu so vrhunski znanstveniki (npr. Euler, Lagrange, Laplace) delovali v artilerijskih šolah. Vegova znanost ni bila znanost zaradi znanosti, ampak je bila predvsem namenjena razvoju računskih metod in mehanskih strojev, ki so jih tedaj v artileriji potrebovali. Vega je bil eden od začetnikov znanstvene balistike - tako notranje balistike, ki študira gibanje in pospeševanje izstrelka v cevi, kot zunanje balistike, ki jo zanima gibanje izstrelka v zraku. Ukvarjal se je z uporabno mehaniko in z načrtovanjem mehanskih strojev, ki so se uprabljali tudi za prevažanje in prenašanje topov. Njegova znanost je bila zelo uporabno usmerjena, saj mu je npr. uspelo izdelati možnar, ki je z isto težo, kot so jo imeli dotedanji, imel dvakrat večji domet. Tudi zelo natančne desetmestne logaritemske tablice je po matematičnih metodah, ki jih je sam razvil, izdelal zato, ker so bili logaritmi nujno potrebno orodje pri vseh balističnih izračunih in so to ostali do najnovejše, računalniške dobe. Znamenita popolna izdaja logaritemskih tabel, po katerih je Vega najbolj znan, je izšla leta 1794 in bila potem večstokrat ponatisnjena v skoraj vseh jezikih; izdaja, ki naj bi bila zadnja, je izšla 1969. Vega je bil tudi aktiven zagovornik desetiškega merskega sistema, ki se je v Avstriji uveljavil šele desetletja po njegovi smrti, saj je hitro dojel njegov pomen za prakso. Vega je bil znan tudi po svojih učbenikih matematike in fizike, ki so se še dolgo po njem uporabljali v Avstriji in tudi drugod po Evropi. Od drugih uspehov Jurija Vege naj omenim le še izračun števila π na 140 mest in njegova dela na področju astronomije.

Bil je tudi pravi vojak in je s svojimi artilerci sodeloval v vojnah. Pri Beogradu se je boril s Turki, na Moravskem s Prusi in ob Renu s Francozi. Od navadnega vojaka je napredoval do podpolkovnika in je bil za svoj pogum in za svoje vojnotehnične veščine odlikovan z najvišjim vojaškim odlikovanjem, z redom Marije Terezije, leta 1800 pa je dobil naziv barona. Tudi na znanstvenem področju je prejel mnogo priznanj. Naj omenim le,

da je bil član petih evropskih akademij znanosti: v Göttingenu, v Mainzu, v Erfurtu, v Pragi in v Berlinu, na Luni pa ima tudi svoj krater, krater, ki se imenuje po njem.

Naj omenim le še to, da Vega, čeprav je živel in delal na Dunaju, ni pozabil, od kod prihaja, saj je bil povezan s kranjskimi deželnimi stanovi, ki jim je poslal svoja dela, oni pa so ga izbrali za svojega člana. Po značaju Vega ni bil tipičen Slovenec. Ni bil skromen. Zavedal se je pomembnosti svojega dela in je bil morda celo malo agresiven. Ko so ga prvič predlagali za red Marije Terezije in ga ni dobil, se je pismeno pritožil samemu cesarju.

Iz uspešnega in zanimivega, čeprav kratkega življenja barona Jurija Vege lahko posnamemo nekaj nauk in napotil ter postavimo nekaj vprašanj, ki so aktualna tudi danes. Saj so končno take proslave zaradi nas in ne le zaradi davno pokojnih slavlencev.

Vega se je povzpел iz skromnega okolja na sam vrh – postal je mednarodno uveljavljen znanstvenik, visoki oficir, baron. Ali je to sedaj pri nas še možno? Ali imamo mehanizme, ki nadarjenim in ambicioznim mladim ljudem pomagajo pri njihovem razvoju? Bojim se, da jih nimamo dovolj.

Vegovo formalno šolanje je trajalo le osem let, od njegovega trinajstega do enaindvajsetega leta, pa mu je dobljeno znanje zadostovalo za vzpon na vrh. Seveda bi lahko kdo dejal, da pravi talenti ne potrebujejo šole, saj jih ta le omejuje in ovira. Toda vendarle je Vega potreboval pri svojem delu operativna znanja s področja matematike, inženirstva in fizike, ki jih je moral med šolanjem pridobiti. Ali imamo pri nas danes dovolj dobre šole, ki diplomantu omogočijo neovirano kariero v svetu? Najbrž ne!

Vega je kot navigacijski inženir pri šestindvajsetih letih prišel do tega, da mu ta kariera ne zadošča, pustil delo, zapustil Ljubljano in odšel na Dunaj. Ali imamo pri nas danes tako ambiciozne ljudi? Nekaj jih gotovo imamo. Bojim pa se, da nas je vse preveč takih, ki smo zadovoljni s tistim, kar nas je doletelo, in ker nam je še kar dobro, ob stalnem tarnanju nad zaplankanostjo in ozkostjo svoje domovine čakamo na pokoj.

Jurij Vega je med svojo kariero v tujini ohranil stike z domovino, kranjski deželni stanovi pa so ga izbrali za svojega člana. Kako je s tem danes? Tudi danes je mnogo Slovencev, ki so uspešni v tujini in ki se počutijo Slovence in bi radi svoji domovini tako ali drugače pomagali in z njo sodelovali. Vendar te povezave nekako ne zaživijo. Mi, ki smo tukaj, gledamo na uspešne zdomce skorajda kot na ubežnike – „mi se tukaj trudimo, oni pa tam uživajo” – njihovo ponudbo za pomoč pa nekateri vidijo kot konkurenco. To bomo morali spremeniti in slovensko diasporo jemati kot integralni del slovenskega narodnega telesa.

Morda bi morali mi vsi prevzeti tudi nekaj Vegovega značaja in njegovega zavedanja sebe in svojega dela. Skromnost je seveda lepa čednost,

pretirana skromnost pa to ni. Slovenci bi se morali bolje zavedati svojih dosežkov in jih ceniti, včasih pa bi morali, tako kot Jurij Vega, tudi napisati pismo kakemu cesarju.

Naj sklenem. Verjamem, da bomo po teh Vegovih dnevih bolje poznali in bolj cenili Jurija Vego in da nam bo postal vzor, ki mu bomo sledili tudi v teh naših časih, ki so drugačni od njegovih, vendar ne tako zelo, kot se zdi.

Akad. prof. dr. *Boštjan Žekš*,
predsednik
Slovenske akademije znanosti in umetnosti

NOVE KNJIGE

William Dunham: Euler, The Master of Us All, The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical Expositions št. 22, 1999, xxviii + 185 strani.

Leta 1909 se je Švicarska akademija znanosti odločila, da bo, ne glede na obseg, izdala zbrana dela (*Opera Omnia*) enega največjih matematikov v zgodovini – Leonharda Eulerja (1707–1783). Pogumna odločitev! Malo je ustanov, ki bi prevzele nase takšno breme: prva knjiga zbranih del je izšla leta 1911, doslej jih je izšlo že prek 70, skupaj več kot 25 000 strani, a Eulerjeva zapuščina še ni izčrpana.

Zelo dobro je znano, da je Euler avtor več kot 850 knjig in razprav, a le malokdo si predstavlja, kako hitro in v kakšnih količinah je ta *matematični stroj* proizvajal matematiko (in druge sorodne znanosti). Na primer, leta 1775 je v svojem 68. letu, ko je bil že skoraj popolnoma slep, ustvaril povprečno en članek na teden. Poleg tega je v tem obdobju napisal 775 strani dolgo razpravo o gibanju Lune, knjigo o algebri in masivno monografijo o integralih v treh delih.

Namen pričujoče knjižice Williama Dunhama, profesorja na Muhlenbergovem Collegeu v Allentownu, Pennsylvania, je, da izobraženemu laiku prikaže Eulerja *pri delu*. Kako iz ogromne zapuščine izbrati nekaj izrekov in dokazov, ki bodo po eni strani dostopni laiku, po drugi strani pa bodo dovolj nazorno predstavili Eulerjevo širino in genialnost? Čeprav naloga ni enostavna, ji je Dunham bil kos. To niti ni presenetljivo, saj je izkušen pisec poljudnih tekstov o matematiki in dobitnik dveh pomembnih nagrad za takšno pisanje: leta 1993 je za knjigo *Journey Through Genius: The Great Theorems of Mathematics* dobil nagrado Georga Pólye, za knjigo *The Mathematical Universe* pa je leta 1997 prejel nagrado Treworja Evansa.

Dunham je svojo knjižico razdelil v osem poglavij, v vsakem je predstavil po en ali dva Eulerjeva prispevka k določenemu matematičnemu področju: teoriji števil, logaritmom, neskončnim vrstam, analitični teoriji števil, kompleksnim spremenljivkam, algebri, geometriji in kombinatoriki. Dodal je še kratek Eulerjev življenjepis, sklepni komentar in dodatek, kjer predstavi *Opero Omnio*. Zanimiva je Dunhamova zgradba poglavij. Vsako se začne s prologom, kjer avtor vpelje problem in pove, kaj je bilo o njem znanega pred Eulerjem. Sledi del z Eulerjevim nastopom, kjer *vidimo* matematika pri delu. Poglavje sklene epilog – tu izvemo še marsikatero zanimivost o obravnavanem problemu.

Euler je v celoti živel znotraj 18. stoletja, torej v obdobju, ko še ni bilo zahtev po matematični strogosti. Zato ni čudno, da so njegovi dokazi včasih pomanjkljivi – še posebej *žongliranje* z neskončnimi vrstami je velikokrat vprašljivo. Zanimivo pa je, da so Eulerjeve trditve le redkokdaj napačne – njegova intuicija je bila izredna. Kot zgled navedimo njegovo rešitev *Baselskega problema*.

Jakob Bernoulli (1654–1705) je bil velik ljubitelj neskončnih vrst. Ne samo da je dokazal divergenco harmonične vrste

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots,$$

za marsikatero konvergentno vrsto je poiskal točno vsoto. Na primer, ugotovil je, da ima neskončna vrsta

$$\frac{a}{b} + \frac{a+c}{bd} + \frac{a+2c}{bd^2} + \frac{a+3c}{bd^3} + \dots,$$

ki jo dobimo tako, da člene aritmetičnega zaporedja $a, a+c, a+2c, \dots$ podelimo z istoležnimi členi geometrijskega zaporedja $b, bd, bd^2, \dots$ in potem količnike seštejemo, vsoto

$$\frac{ad^2 - ad + cd}{bd^2 - 2bd + b}.$$

A naj se je še tako trudil, vsote preproste vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \quad (1)$$

ni znal najti. O njej je vedel le to, da konvergira – primerjal jo je z vrsto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots,$$

ki ima vsoto 2. Ker je Jakob živel v Baslu, je določitev točne vsote vrste (1) postala znana kot Baselski problem.

Okrog leta 1730 se je problema lotil mladi Euler. Kar nekaj časa je trajalo, da je uspel – a rešitev mu je leta 1735 prinesla svetovno slavo. Razmišljal je takole:

Naj bo $p(x) = 0$ polinomska enačba n -te stopnje, z rešitvami $a_1, a_2, \dots, a_n$, in naj še velja $p(0) = 1$. Potem je

$$p(x) = \left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \left(1 - \frac{x}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right).$$

Razvijmo $\sin x$ v potenčno vrsto

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

in pogledjmo na

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} - \cdots$$

kot na *neskončen polinom*. Iz

$$P(x) = \frac{\sin x}{x}$$

izhaja, da je $P(0) = 1$ in da so rešitve enačbe $P(x) = 0$ natanko vsa števila $x = \pm k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Velja torej

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{-\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{-2\pi}\right) \left(1 - \frac{x}{3\pi}\right) \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \cdots \\ &= 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \cdots\right) x^2 + \cdots \end{aligned}$$

Primerjajmo koeficienta pri x^2 v dveh različnih zapisih neskončnega polinoma $P(x)$. Dobimo

$$-\frac{1}{3!} = -\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \cdots\right),$$

od koder sledi

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

V tretjem poglavju Dunhamove knjige je moč najti še en Eulerjev dokaz zadnje enakosti – mogoče še lepši od navedenega. Zato, kot je vzkliknil Laplace,

Berite Eulerja, berite Eulerja!

On je učitelj nas vseh.

Janko Bračič

Wilfried Kuhn: Ideengeschichte der Physik, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 2001, 512 strani.

Po nemških knjigah o razvoju fizike je prijetno listati, ker se odlikujejo po jasnem pregledu in sistematičnosti. Taki knjigi sta na primer Maxa von Laueja *Kratka zgodovina fizike* iz let 1947 in 1950, ki jo imamo v slovenskem prevodu, in Friedricha Hunda *Zgodovina fizikalnih pojmov* iz leta 1972. Tema knjigama se je lani pridružila Wilfrieda Kuhna *Zgodovina idej v fiziki* s podnaslovom *Analiza razvoja fizike v zgodovinski povezavi*.

Vsak pisec se loti nelahke in obsežne naloge s svojih izhodišč. W. Kuhna je vodila misel Maxa Jammerja, da je „še le v zgodovinski zvezi mogoče priti do polnega razumevanja fizike“. V tej zvezi se lahko raziskovalec ali učitelj prepriča, da fizika ni le orodje za obvladovanje narave, ampak po piščevem mnenju pomemben duhovni pojav, tesno povezan z razvojem človeštva. Zgodovina ima tudi pomembno povezovalno vlogo med tistimi, ki so jim domače matematika, naravoslovje in tehnika, in tistimi, ki so jim te dejavnosti tuje. Tako je po mnenju Bernarda Cohena v zgodovini naravoslovja mogoče videti povzetek vseh ustvarjalnih sil človeka in sredstvo, s katerim se naravoslovje zopet lahko približa človeku, od katerega se je oddaljilo s prehodom v formalizem.

Zgodovina idej v fiziki gre nasploh po novih poteh, ne da bi pri tem samo novo gradivo nalagala na staro. Pač pa gradivo na osnovi teorije znanosti predela in razgradi po tematičnih smernicah, kakršne so na primer zgradba snovi, prostor in čas, ohranitveni zakoni, ekstremalni principi. S tem posreduje globlje razumevanje fizikalnega razmišljanja od antike do danes. K temu prispevajo tudi širše analize o nastanku in razvoju fizikalnih pojmov, domnev in teorij pred ozadjem spreminjajočih se predstav o svetu. Pomemben sestavni del so podatki o življenju in delu raziskovalcev in deli njihovih originalnih besedil. To poživi pripoved in pokaže usodno povezanost posameznika z duhovnimi gibanji in prelomi njihovega časa.

Knjiga vsebuje poglavja: Slika sveta v antiki, Naravoslovje v antiki, Novoveška astronomija, Nastanek klasične fizike, Analitična mehanika, Razvojne usmeritve optike, Naboji in tokovi, Elektromagnetno polje, Razvoj termodinamike, Relativnost in zgradba prostora-časa, Kvanti in atomi, Kvantnomehانيčno prevrednotenje mehaničnih principov, Kvantizacija kot problem lastnih vrednosti, Interpretacijska vprašanja kvantne mehanike, Kozmologija.

Približno dve petini knjige sta namenjeni prednewtonskemu obdobju in približno toliko predkvantnemu obdobju, če k slednjemu štejemo še relativnost. Knjiga namenja precej pozornosti prehodom iz obdobja v drugo obdobje in spremembam, ki se ob teh prehodih dogajajo z idejami. To je pomembna značilnost. Skrbno so na primer obdelani Kopernikov obrat ter Keplerjev in Galilejev prispevek, Newtonova mehanika in njena uveljavitev, Faradayeva in Maxwelllova uvedba pojma polja. Termodinamika in njena dva zakona se zdijo po obsegu nekoliko zapostavljeni. V manjši meri velja to tudi za posebno in splošno teorijo relativnosti. Planckovo delo in rojstvo kvantne fizike, model atomov pred uveljavitvijo kvantne mehanike in razvoj kvantne mehanike ter razvoj pogledov na novo mehaniko so obdelani podrobneje. Naslova odločilnih člankov W. Heisenberga in E. Schrödingerja sta hkrati naslova poglavij, kar kaže, da sta oba prispevka skrbno obdelana. Prva polovica knjige se zdi bolj razgibana, vsebuje več podrobnosti in omenja več raziskovalcev kot druga. Verjetno se za tem – kot ponavadi – skriva strah, da ne bi obseg preveč narasel.

Knjigo kaže priporočiti tudi slovenskim bralcem. Predvsem utegne koristiti učiteljem fizike in študentom pedagoške smeri.

Janez Strnad

Stephen Hawking: Vesolje v orehovi lupini, prevedla Mirjam Galičič, Učila, Tržič 2002, 216 strani.

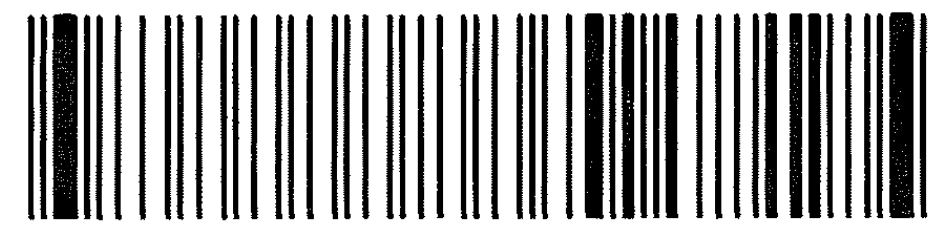
Stephen Hawking je znan po uspehih v astrofiziki in po bolezni, ki ga je prikovala na invalidski voziček in ga prisilila, da se pogovarja s svetom prek računalnika in sintetizatorja, zadnje čase pa tudi po knjigah za širši krog bralcev. Pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov so izšle tri njegove knjige, *Kratka zgodovina časa* (druga izdaja, prva pri Cankarjevi založbi), *Berilo h Kratki zgodovini časa* in *Črne luknje in otroška vesolja*. *Berilo* je prirejeno po televizijskem filmu, ki smo ga videli tudi pri nas, *Ilustrirana kratka zgodovina časa* pa ni dočakala slovenskega prevoda. *Kratka zgodovina časa* je potolkla vse knjigotrške rekorde in se več kot štiri leta obdržala na lestvici knjig, ki so jih največ kupovali.

Berilo navede veliko pojasnil in podatkov o Hawkingu, njegovih bližnjih, sodelavcih in drugih astrofizikih. *Vesolje v orehovi lupini* vsebuje nekaj novih spoznanj, se dotakne širšega niza vprašanj in je sploh bolj razgibano ter razkošno ilustrirano in opremljeno. Vendar jasnosti in premišljenosti skromno opremljene *Kratke zgodovine* ne dosežeta. Hawking si je s temi knjigami in oddajami o sebi pridobil zelo veliko zaslug za popularizacijo astrofizike, astronomije in fizike. Od leta 1988, ko je prvič izšla prva knjiga, se je razvil v pisca za širši krog bralcev.

Vesolje v orehovi lupini ima naslov po verz iz Hamleta – v prevodu Milana Jesiha – „O Bog, v orehovi lupini bi se štel za kralja brezmejnega prostora, ko le ne bi imel slabih sanj”. Verz naj bi svobodo misli, tudi pri raziskovanju vsega vesolja, postavil v nasprotje s fizično omejenostjo raziskovalcev in sploh ljudi. Hawking zagotavlja, da je *Vesolje v orehovi lupini* „drugačna knjiga, taka, ki je lažje razumljiva”. V prvi knjigi „so poglavja sledila drugo drugemu in je bilo vsako poglavje logično vezano na prejšnja”. Zato so nekateri bralci obtičali „že pri začetnih poglavjih in se do razburljivejših tem v naslednjih poglavjih nikoli niso uspeli prebiti”. V tej knjigi pa prvi dve poglavji vpeljeta dovolj pojmov, da naslednja gradijo na njih. Iz „trupa” poganjajo „veje”, ki jih je mogoče brati v poljubnem vrstnem redu. Trup sestavljata poglavji *Kratka zgodovina relativnosti* in *Oblika časa*, veje pa poglavja *Vesolje v orehovi lupini*, *Napovedovanje prihodnosti*, *Zavarovanje preteklosti*, *Prihodnost – Zvezdne steze?* in *Branski novi svet*. Dodatek vsebuje slovarček izrazov in predloge za nadaljnje branje. Barvne slike, ki zavzamejo več kot polovico obsega knjige, in napisi pod njimi so „alternativna pot do razumevanja”. Dodatna pojasnila dajejo tudi besedila v okvirčkih.

Prvo poglavje je pregleden uvod v posebno in splošno teorijo relativnosti z običajno relativnostjo časa in z njo povezanimi poskusi, energijo mase kot vzrokom za energijo, ki se sprosti ali porabi pri jedrskih reakcijah, prosto padajočimi opazovalci, ki ne zaznajo teže, in ukrivljenim prostorom. Drugo poglavje obravnava čas v splošni teoriji relativnosti, povezan s prostorom in skupaj z njim ukrivljen ne obstaja neodvisno od vesolja ter ima začetek in konec. Kvantna mehanika, ki velja v svetu delcev, prinese novost: energija kvantnomehničnega sistema v osnovnem stanju ni enaka nič. Elektromagnetno polje fluktuirajo. To velja tudi za gravitacijsko polje v kvantni teoriji gravitacije. Ali bo to teorija superstrun v 10 ali 11 razsežnostih, v kateri delcu priredimo struno z eno razsežnostjo ali p -brano s p razsežnostmi? Mogoče je privzeti, da je čas imaginaren. Tak čas je po Hawkingovem mnenju koristno pomagalo za opis načina, kako kvantna teorija oblikuje prostor in čas.

Sledi opis širjenja vesolja in njegovega razvoja – tudi obdobja inflacije.



Na vrsto pridejo še Feynmanova vsota po vseh tropično načelo in mikrovalovno ozadje. Če so z narnem času zaprte ploskve, ne potrebujemo za tno mehaniko je značilno, da pojavov ni mogoče izgubljena informacija ob padanju snovi v črno luknjo.

Črna luknja tudi seva in ji je mogoče prirediti temperaturo, kot je odkril Hawking. Potovanje v preteklost je sicer mogoče, a vse kaže, da makroskopska telesa nimajo te možnosti, četudi bi obstajale črvice, ki bi povezovale dele vesolja.

Hawking domišljiji pušča čedalje bolj prosto pot. Med drugim napove, da smo na začetku novega časa, ko bomo znali povečati kompleksnost dednih zapisov v DNA, „ne da bi nam bilo treba čakati na počasni biološki razvoj”. S tem naj bi si človeštvo popravilo umske in fizične zmogljivosti, če naj elektronski sistemi ne prehitijo bioloških. Nazadnje poskuša napovedati razvoj fizike in se sprašuje, ali je teorija M , ki zajame pet različnih teorij superstrun v enoten okvir, „teorija vsega”. Pri tem naniza nekatera eksperimentalna spoznanja, na primer o temni snovi, skupaj z ugibanji. Tako ima fizik pri branju vtis, da se pisec včasih pusti predaleč zapeljati iskrivi misli. Najbrž bi bilo dobro izraziteje ločiti ugibanje od dejstev, posebno zato, ker Hawkingova beseda nekaj zaleže. Dobrodošla bi bila tudi večkratna opozorila, da številne slike kažejo le prispodobne. Ne glede na te pripombe bodo zagotovo tudi matematiki, fiziki in astronomi z zanimanjem brali *Vesolje v orehovi lupini* in čisto mogoče je, da se jim bo odprl kak nov pogled z drugačnega zornega kota.

Janez Strnad

„Dobra teorija opiše celo vrsto pojavov, in to na podlagi majhnega števila preprostih privzetkov. Poleg tega iz nje sledijo povsem določene napovedi, ki jih je mogoče preizkusiti. Če se napovedi skladajo z opazovanji, je teorija prestala preizkus, seveda pa ne moremo dokazati, da je popolnoma pravilna. Po drugi strani moramo teorijo opustiti ali jo spremeniti, če se njene napovedi ne skladajo z opazovanji. [...] Če [...] zavzamete [...] to] stališče, ne morete reči, kaj dejansko čas je. Lahko le opišete tisto, kar se je izkazalo kot zelo dober matematični model časa, in poveste, kakšne napovedi izhajajo iz njega.”

S. Hawking

Enačbo za entropijo črne luknje $S = Pkc^3/(4G\hbar)$, v kateri je P površina dogodkovnega horizonta, k Boltzmannova konstanta, $\hbar$ Planckova konstanta, deljena z 2π , c hitrost svetlobe in G gravitacijska konstanta, želi Hawking imeti napisano na nagrobniku.