

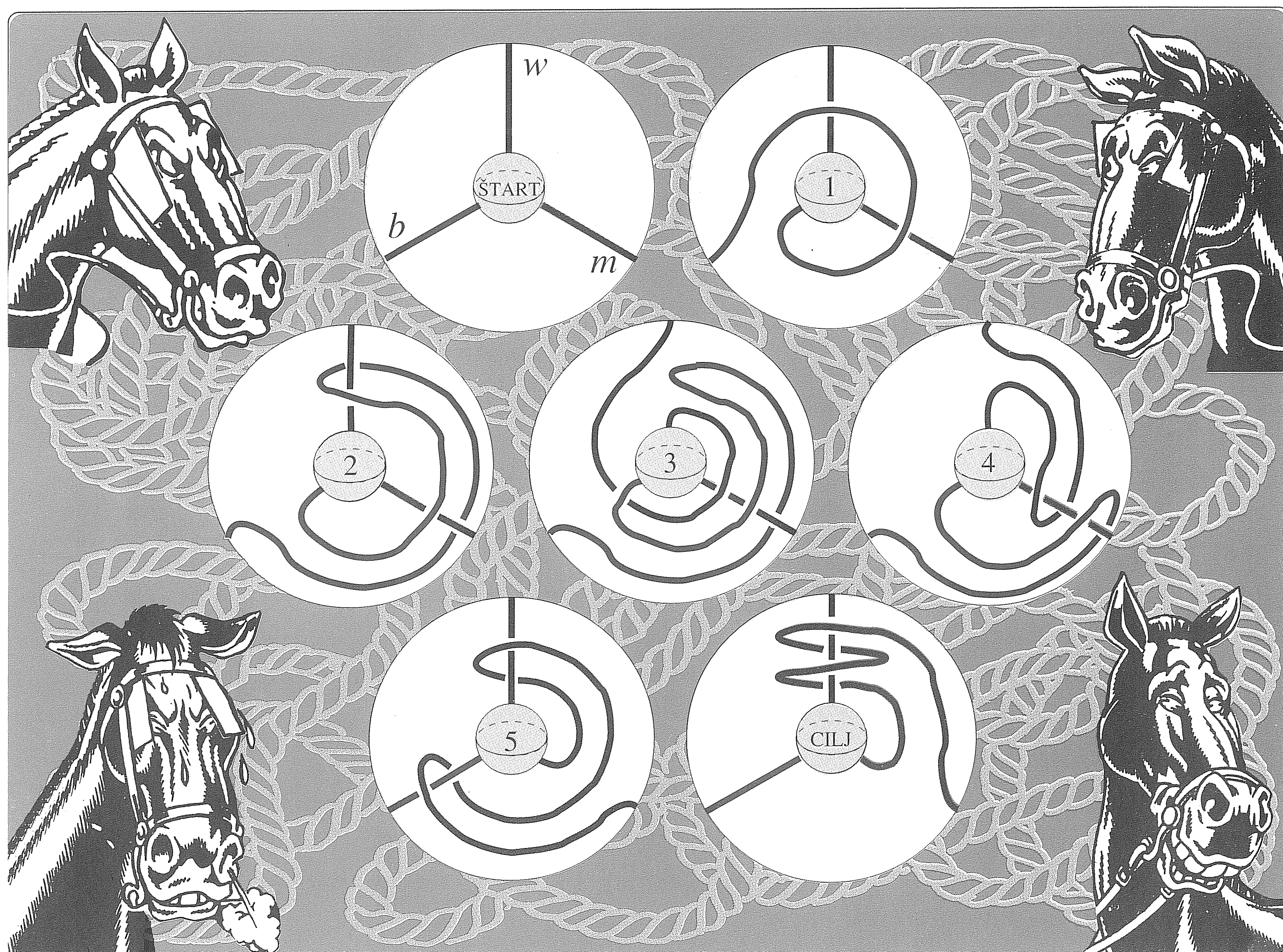
ODPISANO

2002

Letnik 49

2

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 2002

letnik 49, številka 2, strani 33–64

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, telefon (01) 476-65-53, telefaks (01) 251-72-81, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d. d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 042961, Ajdovščina 4, Ljubljana.

**Uredniški odbor:** Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Alenka Klokočovnik (društvene novice), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 4000 SIT, za študente 2000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 800 SIT, stare številke 520 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1450 izvodov.

Revijo sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2002 DMFA Slovenije – 1476

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

---

## VSEBINA — CONTENTS

### Članki — Articles

Str.—Page

Problem Mercedesovega vozla — The Mercedes knot problem (Aleksandar Jurišić) . . . . . 33–48

Ravnotežje — Equilibrium (Miran Černe) . . . . . 49–52

Stefanova sila — Stefan's force (Janez Strnad) . . . . . 58–61

### Vesti — News

Pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj (Zvonko Trontelj) . . . . . 62–63

Vabilo (Zvonko Trontelj) . . . . . 63

Vabilo na 3. konferenco fizikov v osnovnih raziskavah, strokovno srečanje

DMFA in 54. občni zbor društva (Zvonko Trontelj) . . . . . III–IV

### Nove knjige — New books

Sylvia Nasar, A Beautiful Mind (Peter Ross, prevod Marjan Jerman) . . . . . 52–57

Matija Cencelj, Dušan Repovš, Topologija (Petar Pavešić) . . . . . 63–III

Na naslovnici, ki jo je oblikoval Aleksandar Jurišić, je rešitev problema iz članka na strani 33.

# PROBLEM MERCEDESOVEGA VOZLA\*

ALEKSANDAR JURIŠIĆ

Math. Subj. Class. (2000): 57M25

Članek obravnava naslednji topološki problem: sredi (okroglo) sobe si zamislimo žogo, ki je s tremi elastičnimi trakovi  $b$ ,  $m$  in  $w$  povezana s stenami. Ali je mogoče s premikanjem trakov (ne pa tudi njihovih koncev) naviti trak  $m$  enkrat okoli traku  $w$ , ne da bi pri tem premaknili žogo? Ta problem zaradi oblike, ki jo tvorijo žoga in trije trakovi, imenujemo „problem Mercedesovega vozla”.

Predstavljen je enostaven način, kako trak navijemo dvakrat (in zato tudi poljubno sodokrat). Nazorna (negativna) rešitev začetnega problema je podana s pomočjo pojma sučnega števila.

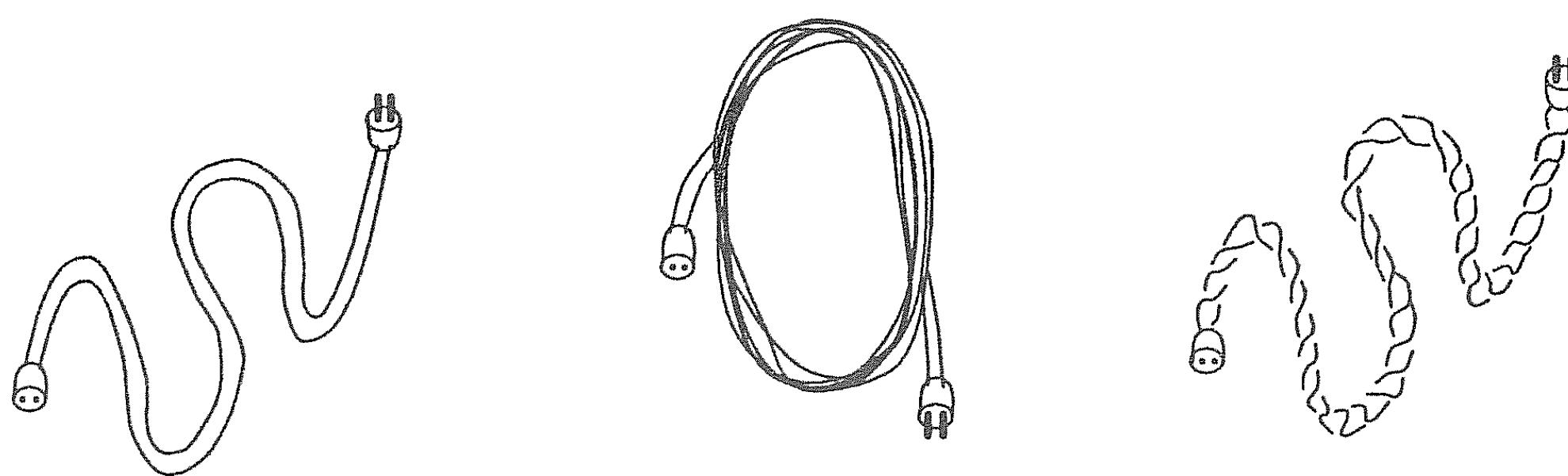
## THE MERCEDES KNOT PROBLEM

The paper is devoted to the following topological problem. Imagine a solid ball in the middle of a (round) room connected with three elastic bands  $b$ ,  $m$  and  $w$  to the walls. Is it possible to move the elastic bands (but not their ends) in such a way that the band  $m$  becomes wrapped precisely once around the band  $w$  without moving the ball? The problem is called „the Mercedes knot problem” because of the shape formed by the ball and the three bands.

A simple way to wrap the bands twice (and, therefore, any even number of times) is shown. A transparent (negative) solution of the initial problem based on the notion of twisting number is presented.

## 1. Uvod

Gotovo ste že pospravljali dolgo žico (podaljšek) in jo navili okoli rame (npr. po sesanju sobe ali košnji trave z električno kosilnico)? Ko ste jo naslednjič zopet razvili, ste morda ugotovili, da je večkrat zvita (glej sliko 1).

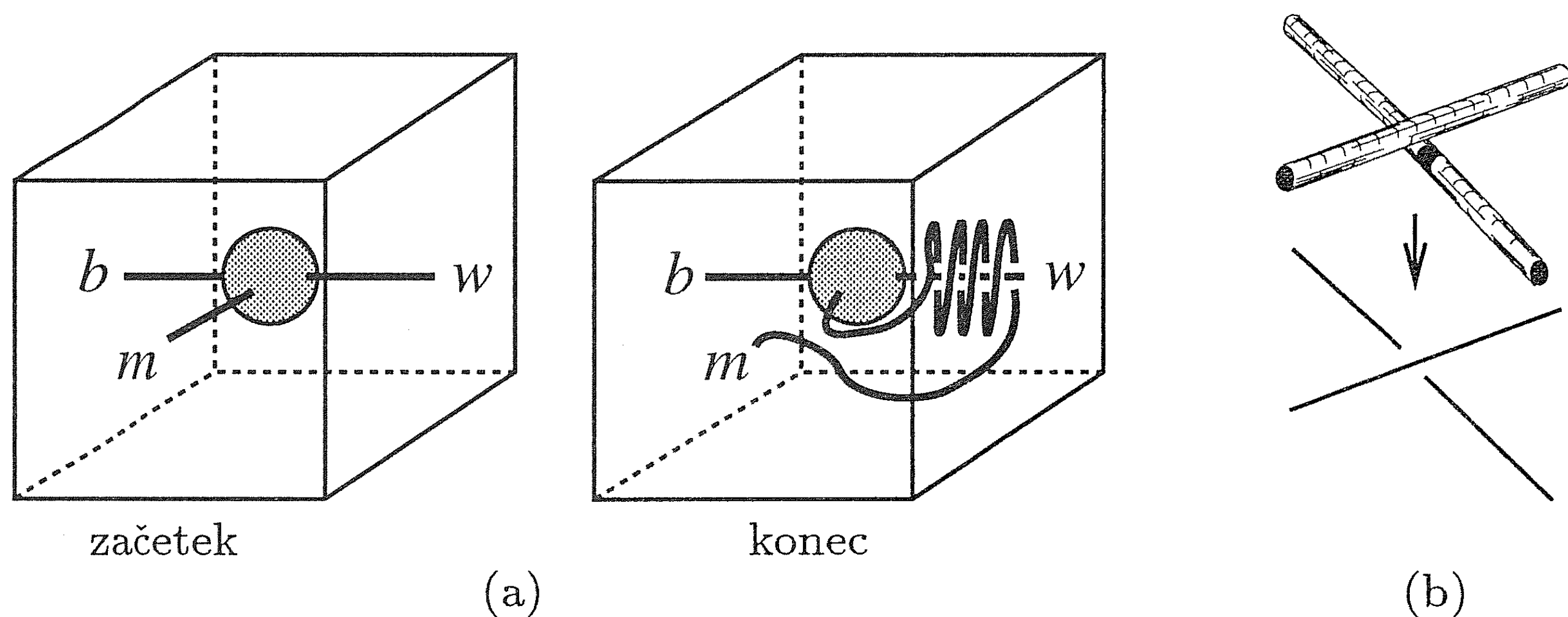


Slika 1. Zakaj se podaljški ponavadi zvijejo?

\* Opomba urednika: Članek je nekoliko prirejen prevod članka [14], ki je bil leta 1999 nagrajen s Hassejevo nagrado ([http://www.maa.org/awards/awards\\_mf99.html#hasse](http://www.maa.org/awards/awards_mf99.html#hasse)). To nagrado vsako drugo leto podeljuje *Mathematical Association of America* (MAA) kot priznanje avtorju pozornosti vrednega članka, ki je bil objavljen v eni od publikacij MAA in je namenjen širšemu krogu bralcev. V uradni obrazložitvi nagrajenega dela lahko preberemo:

Očarljiv članek Aleksandra Jurišića se prične z vprašanjem, zakaj se električni podaljški vedno zvijejo. To nas privede do vprašanja o navijanju elastik, pritrjenih na tri stene sobe in na žogo na sredi te sobe. Ta problem je v članku obravnavan s številnih zornih kotov, ki nas pripeljejo do globoke in zanimive matematike.

Naslednji matematični problem je tesno povezan s tem pojavom in utegne pritegniti tudi nematematike. Na sredo sobe postavimo žogo in jo s tremi elastičnimi trakovi  $b$ ,  $m$  in  $w$  povežemo s stenami. Z izjemo koncev, ki so fiksni, lahko trakove premikamo po sobi in jih raztegujemo po mili volji, ne da bi se strgali. Vprašanje je, *ali je mogoče s premikanjem trakov po sobi naviti trak  $m$  nekajkrat okoli traku  $w$ , ne da bi pri tem premaknili žogo* (glej sliko 2a).



Slika 2.

Gre za geometrijski problem, ki sodi sicer nekam med topologijo in teorijo vozlov, toda naša rešitev bo zasnovana predvsem na enostavni kombinatoriki.

Najprej bomo podali delno rešitev, nato prevedli problem v matematični jezik in omenili nekaj zgodovinskega ozadja. V četrtem razdelku se bomo s pomočjo teorije vozlov približali bistvu problema z obravnavo nekaterih enostavnejših primerov, nato pa sledi celotna rešitev. Na naši poti bomo spoznali nekatere zanimive povezave in na koncu omenili še nekaj možnosti za uporabo. Na svoj račun bodo prišli tudi reševalci ugank. Za naše vodilo je morda primerena Hilbertova misel:

*„Umetnost ustvarjanja matematike je v tem, da poiščemo tisti posebni primer, ki vsebuje vse zametke splošnosti.“*

## 2. Delna rešitev

Naš problem je poln presenečenj, saj nas utegne zavesti v napačno smer že na samem začetku. Pa poskusimo z nekaj naivnimi prijemi. Če bi dovolili vrtenje žoge, potem bi bil odgovor na zastavljeno vprašanje ‚DA‘, tj. trak  $m$  bi lahko navili okoli traku  $w$  tolikokrat, kolikorkrat bi želeli (že z vrtenjem žoge okoli osi, ki jo določata konca traku  $w$ ), in tako problem sploh ne bi bil zanimiv. Do podobne ugotovitve bi prišli tudi, če bi privzeli, da sta v sobi samo trakova  $w$  in  $m$ . (Zakaj?) Toda žoge ne smemo vrteti in v sobi so trije trakovi, tako utegne biti odgovor na naše vprašanje prej ‚NE‘ kot ‚DA‘.

Po drugi strani pa, če smo prepričani, da je odgovor pritrdilen, lahko privzamemo, da je želeni položaj možno doseči celo tedaj, ko trakov  $b$  in  $w$

sploh ne premikamo. To prepričanje lahko izvira iz dejstva, da sta trakova  $b$  in  $w$  na istem mestu v obeh primerih na sliki 2a ali pa da vrtenje žoge trakov  $b$  in  $w$  ne bi premaknilo (le zvilo). Če sta trakova  $b$  in  $w$  trdna in ju torej ne premikamo, je prostor, v katerem premikamo trak  $m$ , poln svitek (torus), v topološkem jeziku bi rekli, da je homeomorfen produktu krožnice in odprtega diska. Toda v polnem svitku ni možno navijati traku  $m$ , ne da bi premikali vsaj enega izmed njegovih koncev. Topologi bi rekli, da začetna in končna lega traku  $m$  ustrezata zaporedoma enoti in neenotskemu elementu fundamentalne grupe polnega svitka (glej npr. Neuwirth [19]). Iz slednjega razmisleka sklepamo, da je premikanje trakov  $b$  in  $w$  ključnega pomena za rešitev ali pa, da je odgovor ‚NE‘.

Presenetljivo je odgovor (DA ali NE) odvisen od tega, kolikokrat želimo naviti trak  $m$  okoli traku  $w$ . Začnimo preučevati obstoj. Izdelamo realni model in nepričakovano hitro ugotovimo, kako je mogoče naviti trak  $m$  dvakrat okoli traku  $w$ . Glej naslovnico (začetek in konec), ki pojasni tudi naslov tega članka. V teoriji vozlov je navada, da raje rišemo diagrame. Pravzaprav gre za projekcije (glej sliko 2b, ki ponazarja, kaj se zgodi pri križanju), te vsebujejo vse potrebne informacije za gradnjo trirazsežnih objektov, ki jih opisujejo. Obravnava ne izgubi na splošnosti, če nadomestimo kocko/sobo s kroglo. Radovednega bralca vabimo, da se poigra s svojim modelom, preden preveri našo rešitev na naslovnici. Bralcu obljubimo tudi, da bo ob koncu članka bolje razumel našo rešitev.

Ni se težko prepričati, da lahko že naviti del traku premaknemo v bližino ene od sfer in nato znova ponovimo postopek z naslovnice. Na ta način lahko navijemo trak  $m$  okoli traku  $w$  sodokrat. Problem pa je precej težji, če želimo naviti trak  $m$  okoli traku  $w$  za lihokrat.

### 3. Modeliranje in zgodovina problema

Čas je, da prevedemo naš problem v matematični jezik. Ker opisujemo geometrijski problem, bomo potrebovali nekaj topološke terminologije (čeprav naša rešitev ne bo temeljila zgolj na topologiji). Torej sledimo topologom, ki raje govorijo o deformaciji prostora, imenujejo jo *ambientna izotopija*, kot o pomiku objektov v njej. Za boljše razumevanje si mislimo, da je soba napolnjena z medom (ali kakšno drugo lepljivo snovjo). Potem bi premikanje elastičnih trakov povzročilo deformacijo medu. Po drugi strani pa deformacija medu premika elastične trakove. Torej se običajno sprašujemo, ali obstaja ambientna izotopija, ki premakne objekte iz enega položaja v drugega.

Naj bosta  $S_1$  in  $S_2$  dvorazsežni sferi s središčema v izhodišču prostora  $\mathbb{R}^3$  in zaporedoma z radijema ena in dva. Naj bo  $H$  prostor med sferama  $S_1$  in  $S_2$  (tj. votla krogla  $S^2 \times [1, 2]$ ) in naj bodo  $b$ ,  $m$ ,  $w$  zaporedoma odseki, v katerih  $H$  seka pozitivne koordinatne osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . V pogovoru z Johnom Milnorjem je Jože Vrabec zastavil naslednje vprašanje:

**Vprašanje 1.** *Ali obstaja ambientna izotopija votle krogle  $H$ , ki fiksira*

sferi  $S_1$  in  $S_2$  ter navije trak  $m$  dvakrat okoli traku  $w$  (glej naslovnico – začetek in konec)?

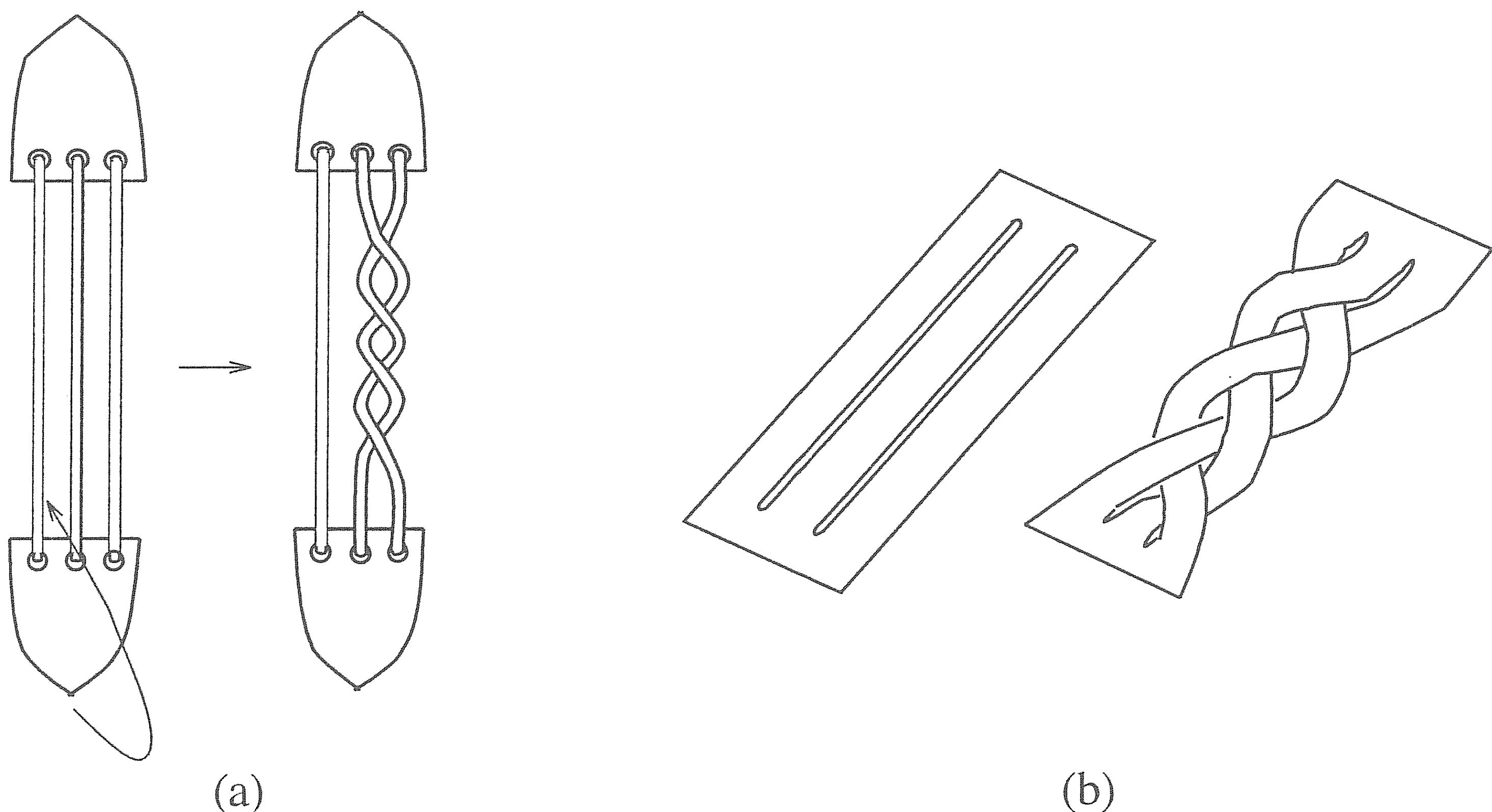
Na koncu prejšnjega razdelka smo si ogledali grafično rešitev. Na predavanjih pri predmetu Topologija I (1985/86) je profesor Vrabec predstavil topološko rešitev Johna Milnorja, v kateri je iskana ambientna izotopija konstruirana s pomočjo netrivialnega elementa fundamentalne grupe  $SO(3)$  ( $\cong RP^3$ ) (glej Jurišić [14] ali Bredon [7, str. 164–167]). Presenetljivo pa ne znamo ne naše grafične ne Milnorjeve rešitve prirediti še za odgovor o drugem delu problema.

**Vprašanje 2.** *Ali obstaja ambientna izotopija votle krogle  $H$ , ki fiksira sferi  $S_1$  in  $S_2$  ter navije trak  $m$  enkrat okoli traku  $w$ ?*

Obe vprašanji imata zanimivo zgodovino. Na primer E. D. Bolker [5] je pred dvajsetimi leti podal še eno topološko rešitev prvega vprašanja. Kljub temu pa so se fiziki prvi zanimali za prvo vprašanje. Rešitev so uporabili za boljšo razlago kvantne narave elektronov. Leta 1925 je švicarski fizik W. Pauli pokazal (star komaj 25 let), da dva elektrona ne moreta biti na istem mestu in imeti enak spin. Iz njegovega modela sledi, da se mora elektron zavrteti za  $4\pi$ , preden se vrne v svoj začetni položaj. Leta 1928 je angleški fizik P. A. M. Dirac v svojem 26. letu opisal gibanje elektronov z enačbo, ki je združila *kvantno mehaniko* in *specialno teorijo relativnosti*. Da bi prepričal svoje študente, da je Paulijev model naraven, je vzel ključ (namesto naše žoge na sredi sobe), ga povezal s tremi vrvicami za stol in ga zavrtel za  $4\pi$ , nato pa razpletel vrvice, ne da bi premaknil ključ oziroma stol. Več o analizi spinorjev in teoriji kotnih momentov (angl. angular momentum) lahko najdete v knjigi Biedenharna in Loucka [4, Ch. 2]. V začetku tridesetih let prejšnjega stoletja je bila na inštitutu Nielsa Bohra to tako vroča tema, da so v povezavi z njo izumili celo nekaj igrice. Danski poet, pisatelj in matematik Piet Hein je poimenoval svojo igro *tangloidi*. Igrali so jo več let po vsej Evropi. Glej Gardner [12, str. 28].

Vsak izmed dveh igralcev drži v roki kos lesa s tremi luknjami, ki so povezane s tremi vezalkami (glej sliko 3a). Eden izmed igralcev zavrti svoj kos okoli katere koli osi za  $4\pi$ , drugi pa skuša v čim krajšem času razplesti vezalke (seveda brez vrtenja kosov lesa). Nato pa zamenjata vlogi. Zmaga tisti, ki v krajšem času razplete vezalke. (Zakaj je to dober model za prvo vprašanje?) Omenimo še eno uganko (glej Berlekamp, Conway in Guy [3] ali Gardner [13, str. 101]), kjer spletemo papir, ne da bi trgali in lepili (namig: začnite plesti na enem koncu, hkrati pa razpletajte na drugem). Ta trik je verjetno zelo star, saj ga poznajo številni usnjarji, peki, taborniki in verjetno še marsikdo.

Drugo vprašanje pa se v primeri s prvim ne ukvarja s konstrukcijo, pač pa z *neobstojem* in je zato vsekakor v domeni matematike. Rešeno je bilo vsaj na dva načina (Newman [18] je uporabil Artinovo teorijo kit, prim. Fadell in Van Buskirk [11], Fadell [9] pa konfiguracijske prostore).



**Slika 3.** Igra tangloidi in uganka, ki jo že dolgo poznajo usnjarji, peki in taborniki.

Na prvi pogled je videti, da je že vse rešeno in da ni več kaj dodati. Pa vendar ni očitne povezave med rešitvami prvega in drugega vprašanja. Še vedno se lahko vprašamo, zakaj grafična rešitev na naslovnici sploh deluje. (Njeno preverjanje spominja na vpreženega konja, ki vidi le predse.) Ali bi jo lahko bolje razumeli, ali pa našli naravnejšo rešitev in jo nato uporabili še za rešitev drugega vprašanja?<sup>1</sup>

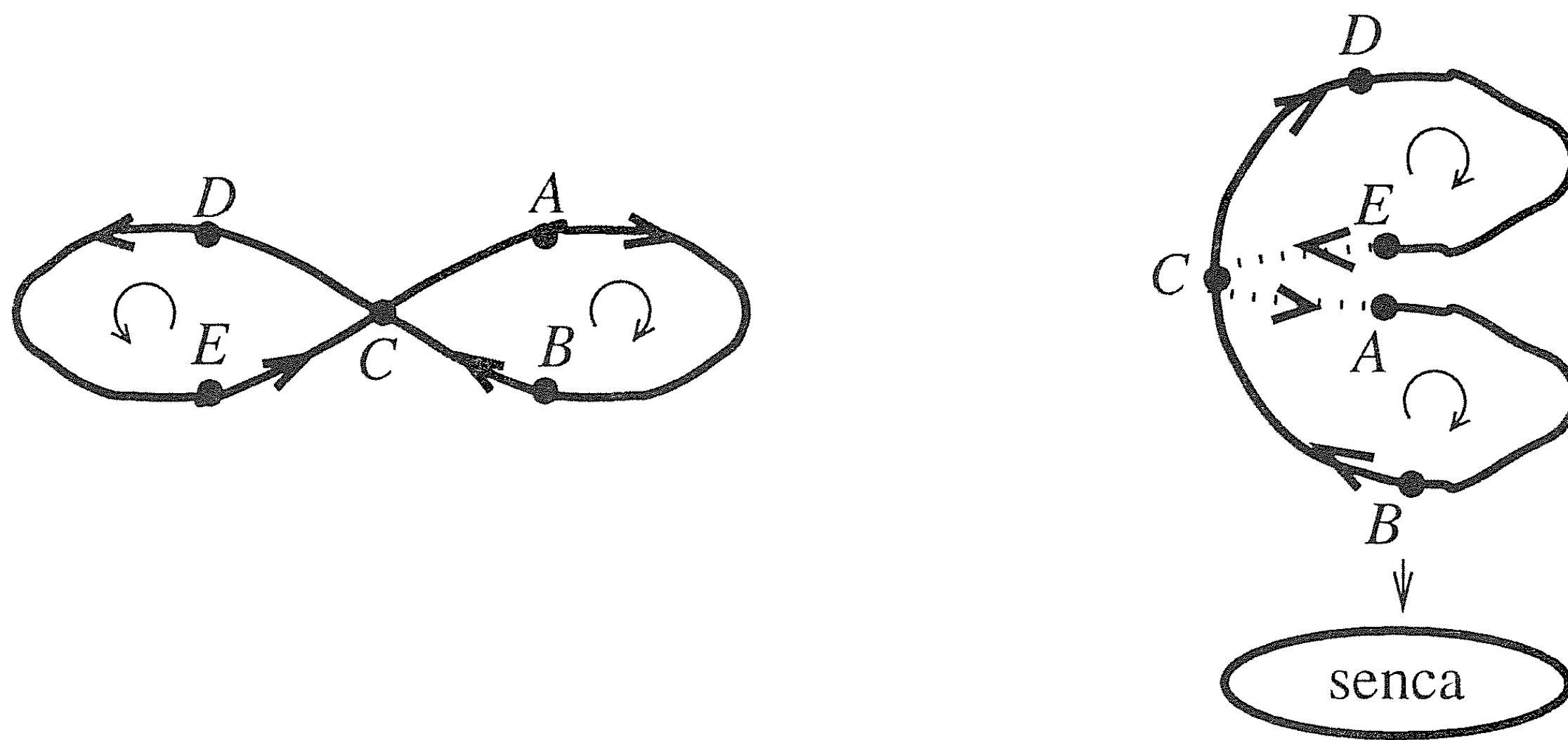
Uporabimo svojo domišljijo (če že ne gre za obujanje spominov iz otroštva) in si predstavljajmo otroka, ki sedi za mizo v upanju, da bo z branjem debele knjige ustregel svojim staršem. Otrok kmalu postane utrujen in se prične igrati z modelom letala:

- letalo mora leteti naprej dlje časa (letala ne letijo nazaj, kajne!), medtem pa ga otrok želi držati čvrsto v roki, vendar pa se ne bi bilo modro premakniti s stola (parket namreč zelo škripa in starši bi opazili, da ne bere več);
- letala tudi ni dobro obrniti na glavo, saj si je otrok zamislil, da je pilot potniškega letala in bi se lahko razjezili vsaj tisti potniki, ki ne uporabljajo varnostnih pasov.

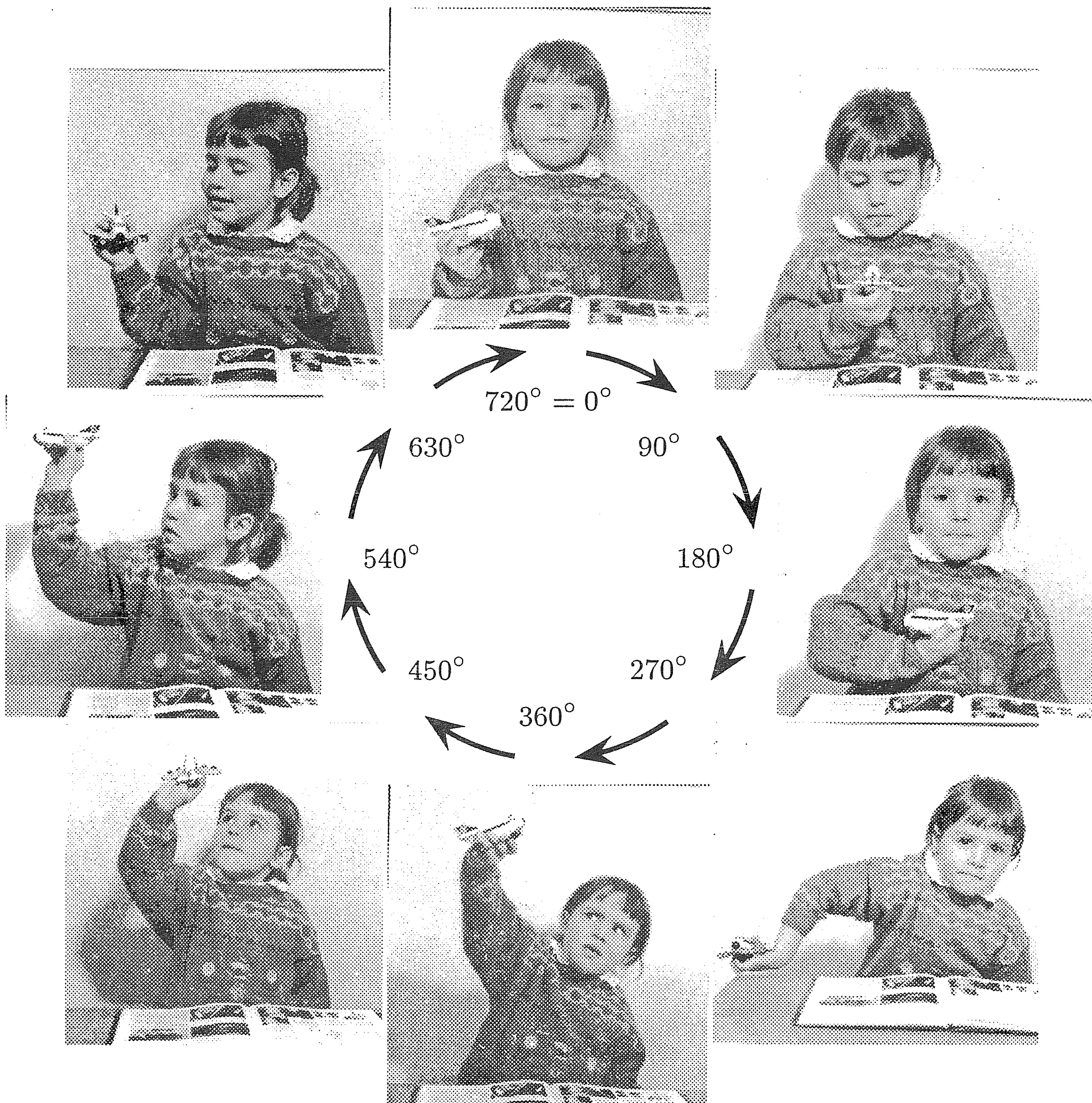
Kar naenkrat pa otrok ugotovi, da lahko leti po osmici (8). „Neverjetno!!!“ pomisli otrok, „če bi letel po krožnici, bi se mi roka zapletla in bi se moral zaustaviti, osmica pa deluje.“ Ali bi lahko uporabili to „genialno“ rešitev pri našem problemu? Prepognimo to osmico tako, da vidimo od zgoraj samo „krožnico“ (matematiki bi rekli, da je takšna osmica krov nad krožnico, glej sliko 4).

Otroku ni težko leteti z letalom niti po prepognjeni osmici. Poskusimo sami, slika 5 nam utegne pomagati (podobne slike lahko najdemo v številnih

<sup>1</sup> V času reševanja avtor ni vedel, da je bilo drugo vprašanje že rešeno.



Slika 4. Osmica nad krožnico.



Slika 5. Eva Jurišić vrti letalo, medtem ko ga drži čvrsto v roki. Za podobno demonstracijo Uroša Jurišića glej <http://valjhun.fmf.uni-lj.si/~ajurisic/>.

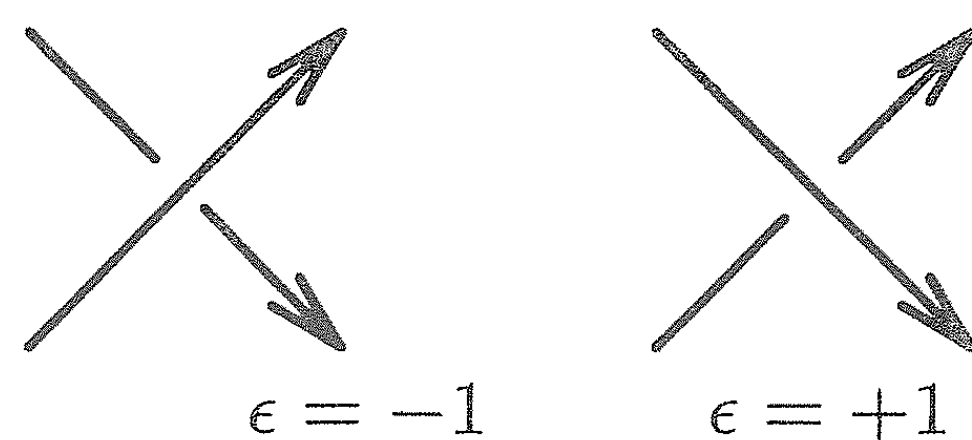
revijah in knjigah, npr. [21], [24], [7, str. 166]). Toda otrokovo letalo sedaj leti po krožnici (v ta namen popolnoma prepognemo osmico), njegova roka

pa se vrača v začetno stanje le po vsakem drugem krogu (vmes pa gre komolec okoli letala). Ni težko zmanjšati krožnice, dokler se letalo samo še vrti. Torej lahko otrok *nepretrgoma vrti letalo v isti smeri, medtem ko ga drži čvrsto v roki*. Pravzaprav lahko brez prestanka vrti celo svojo dlan, medtem ko je ves čas obrnjena navzgor. Ta fenomen bo vodilna ideja pri našem reševanju drugega vprašanja, pripomogla pa bo tudi k ‚boljši‘ rešitvi prvega vprašanja. Ste presenečeni? Pomislite – če bi bilo letalo pri miru, mi pa bi še vedno izvajali iste gibe, bi bila roka večkrat zvita. Da bi bolje razumeli, kaj se dogaja med premikanjem elastičnih trakov, sledimo njihovemu zvijanju.

#### 4. Sučno število

Intervale  $b$ ,  $m$ ,  $w$  zamenjajmo z ozkimi trakovi. Tak postopek je danes precej običajen v teoriji vozlov, možne pa so tudi številne praktične uporabe. Na primer, ko preučujemo molekule DNK, ki so podobne dolgim ozkim (dvojnim) pramenom, običajno sledimo njihovemu zvijanju. Preden začnemo reševati drugo vprašanje v razširjeni obliki (s trakovi), si pogledjmo nekaj poenostavitev (skromnost ni nikoli odveč). Roko, ki je držala letalo, si lahko zamislimo kot trak. Poskusimo ugotoviti, kaj se zgodi z enim trakom v 3-razsežni krogli (lema 1) in kaj v votli krogli  $H$  (lema 2). Še pred tem pa vpeljimo eno izmed najenostavnejših invariant ambientne izotopije v teoriji vozlov. Gre za spletno število, ki ga definiramo za dve orientirani, sklenjeni krivulji v  $\mathbb{R}^3$  (glej npr. Kauffman [15] ali [16]).

Vsakemu križišču v 2-razsežni projekciji danih krivulj priredimo „predznak“, tako kot kaže slika 6. Potem je *spletno število* enako polovici vsote „predznakov“ pri križiščih ene krivulje z drugo (predznaki križišč, pri katerih krivulja seka samo sebe, ne štejejo). V



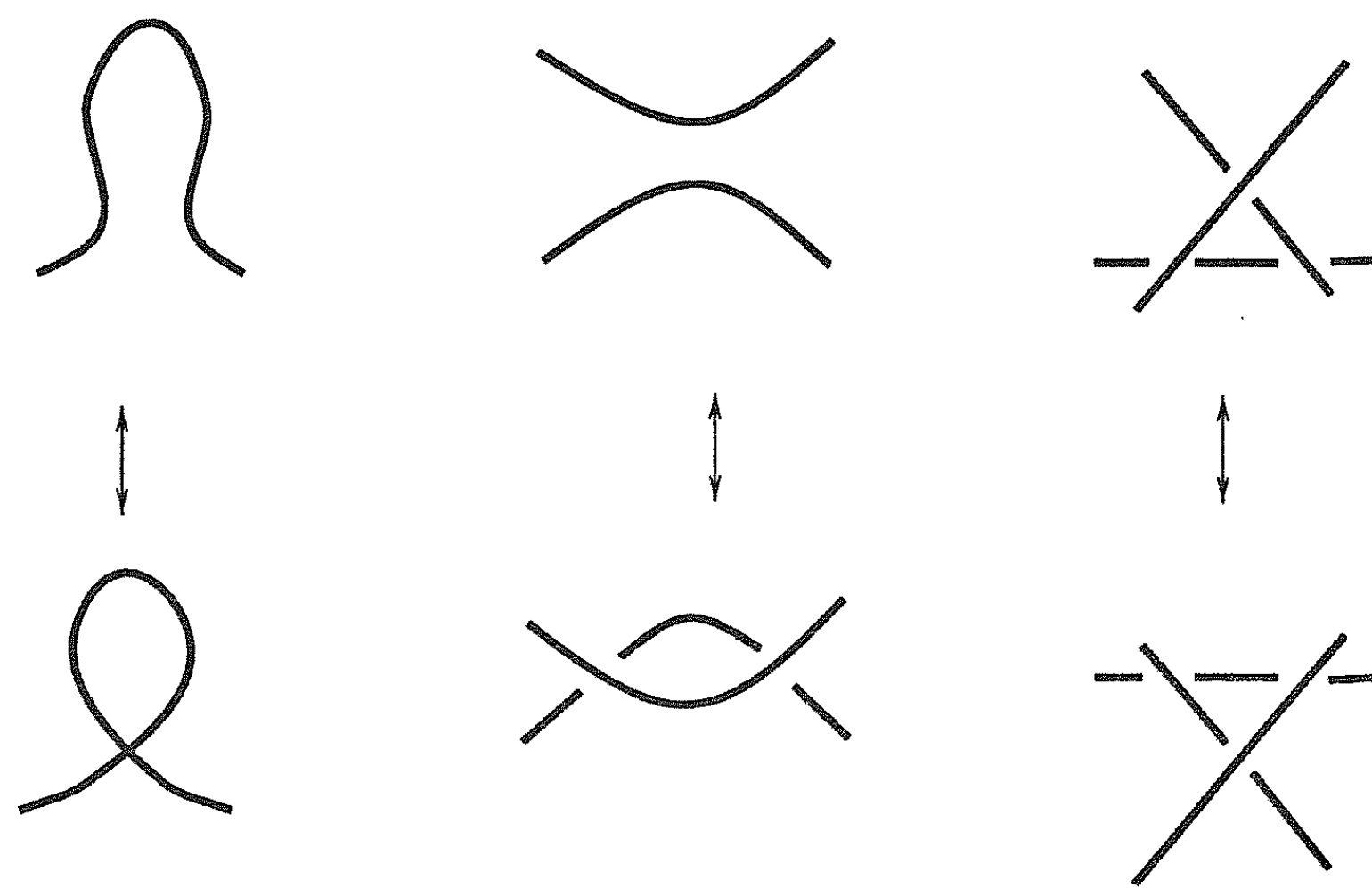
Slika 6. Pravilo desne roke/vijaka.

19. stoletju, ko je bila teorija vozlov še v povojih, je Karl F. Gauss izračunal spletna števila sistema sklenjenih krožnih žic. Ker je spletno število invarianta ambientne izotopije, ni odvisno od izbrane 2-razsežne projekcije (glej sliko 7).

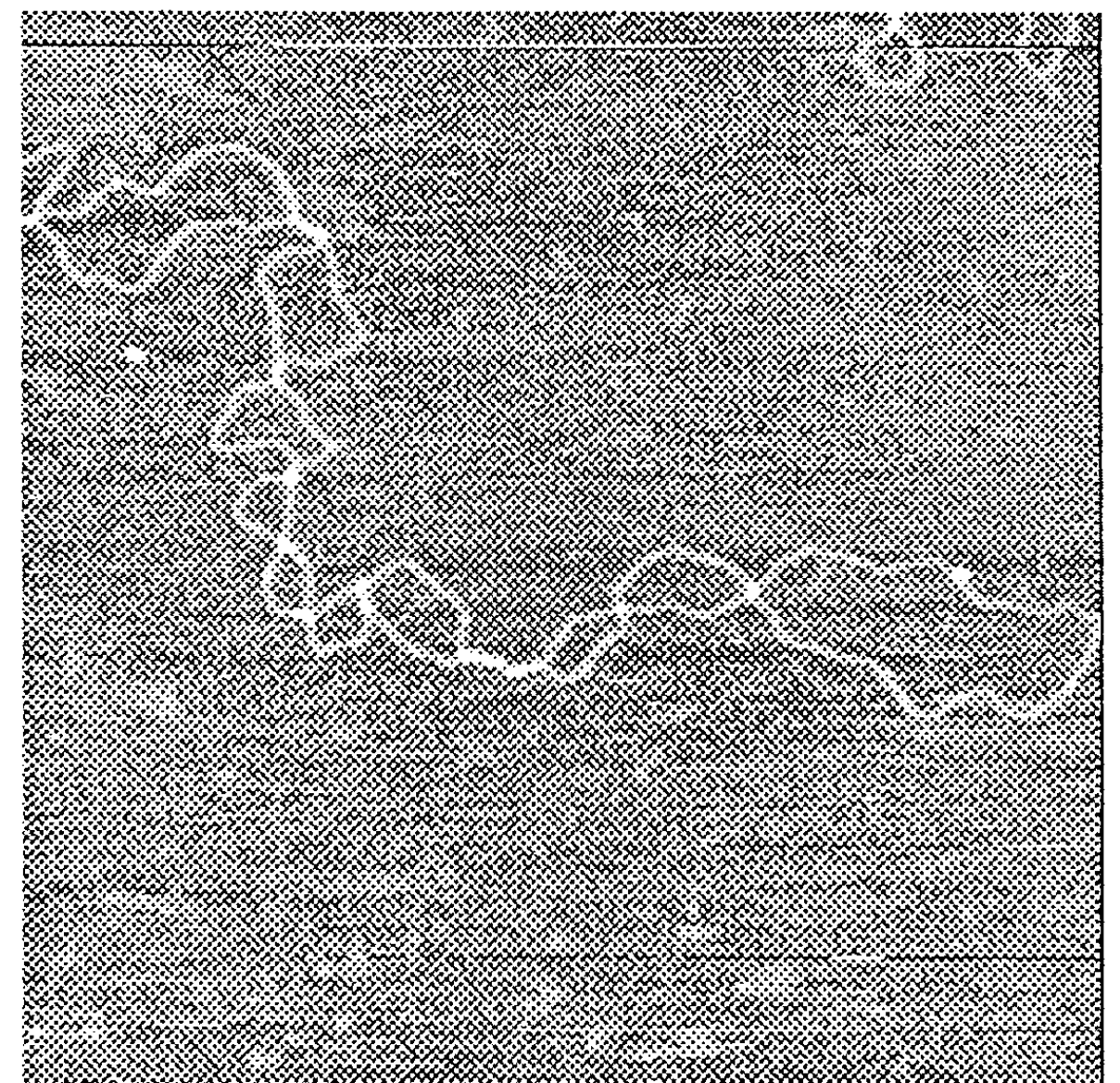
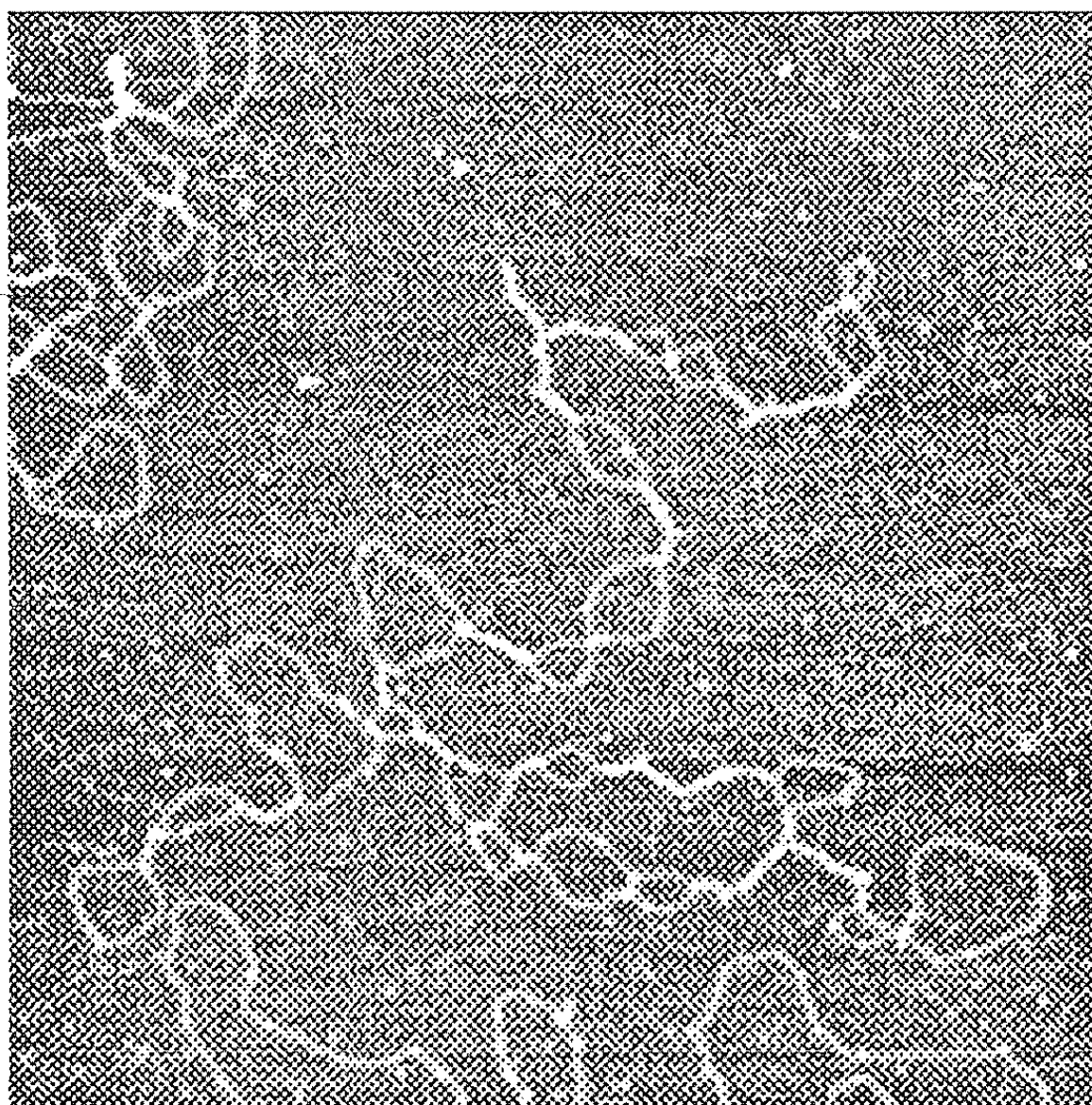
Naj bo  $X$  ozek trak v 3-razsežnem podprostoru prostora  $\mathbb{R}^3$ , katerega središčnica (glej sliko 9a) leži vzdolž premice, oba konca traku ležita v ravnini, oba robova pa sta orientirana od leve proti desni (glej sliko 9b).

Če na enak način kot prej priredimo predznak vsakemu križišču enega roba traku  $X$  z drugim v 2-razsežni projekciji (na ravnino, ki vsebuje konca), potem je *sučno število*  $Su(X)$  enako polovici vsote vseh predznakov (glej sliko 9b). Intuitivno je sučno število polovica razlike med številom zasukov za kot  $\pi$  in številom zasukov za kot  $-\pi$ .

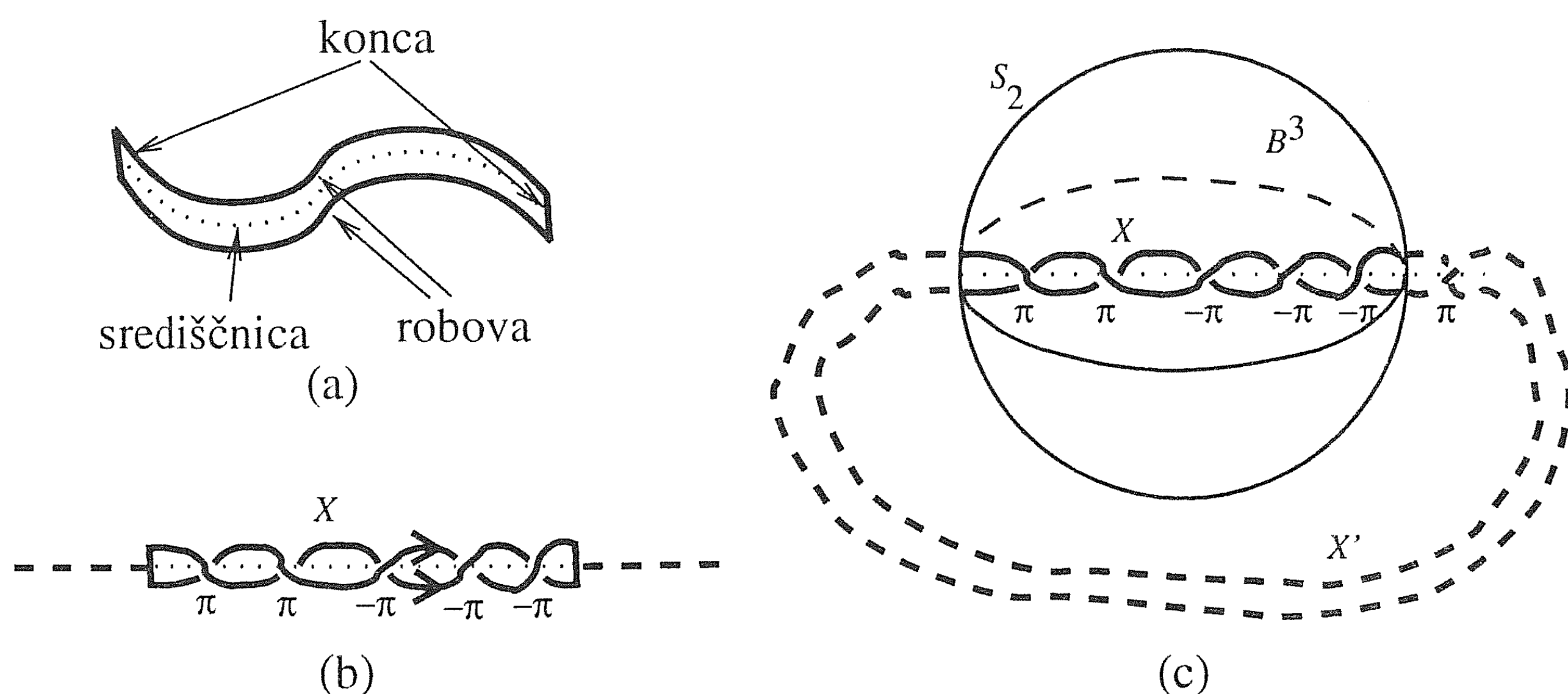
Lahko bi se izognili 2-razsežni projekciji in podali Whitovo splošnejšo definicijo sučnega števila s pomočjo integrala, ki sešteva količino zvijanja



**Slika 7.** Reidemeister je pokazal, da je iz enega diagrama vozla moč narediti kateri koli drug diagram istega vozla že samo s končnim zaporedjem zgornjih pomikov [20]. Zato je število, prirejeno diagramu vozla, invariantno za ambientno izotopijo, kakor hitro se ohranja pri teh pomikih.

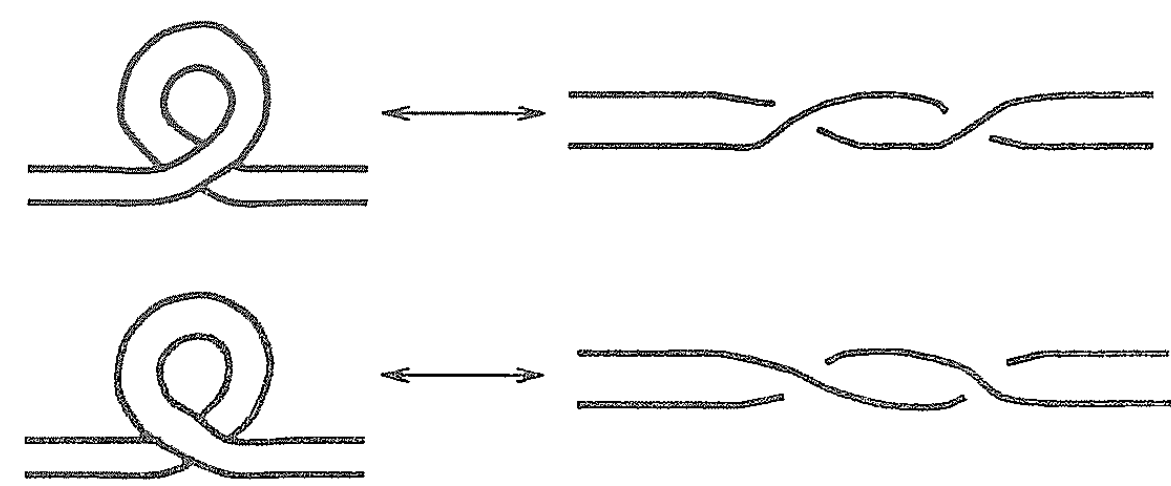


**Slika 8.** Spletno število je odigralo pomembno vlogo tudi pri preučevanju vpliva encimov na krožne DNK (tj. tiste, ki jih lahko predstavimo s sklenjenim trakom v  $\mathbb{R}^3$ , katerega rob ima dve komponenti). Glej Sumners [25] in Wang [27]. Leva slika kaže DNK brez encimskega postopka, desna pa z encimskim postopkom, ki je odpravil nekaj pentelj. Vložitev DNK v celično jedro je zelo kompleksna. De Witt Sumners [25] je zapisal: „Če povečamo celično jedro do velikosti košarkarske žoge, potem se pri tem DNK poveča do tankega ribiškega laksa, dolgega 200 km.”



**Slika 9.**

vzdolž središčnice traku (glej Sumners [26, str. 22], prim. Chinn in Steenrod [10]). To pa še ne pomeni, da gre za invarianto ambientne izotopije. Če so naši trakovi v  $\mathbb{R}^3$  in so sklenjeni, potem lahko definiramo tudi *število pentelj*  $Pe(X)$  (angl. writhing number), tako da orientiramo središčnico in nato enako kot pri spletnem številu pridružimo vsakemu križišču središčnice same s seboj ‚predznak‘, na koncu pa seštejemo vse predznake. Potem je vsota števila pentelj  $Pe(X)$  in sučnega števila  $Su(X)$  enaka spletnemu številu  $Sp(X)$ . To je *J. H. Whittov zakon ohranjanja*:  $Sp(X) = Pe(X) + Su(X)$  (glej sliko 10).

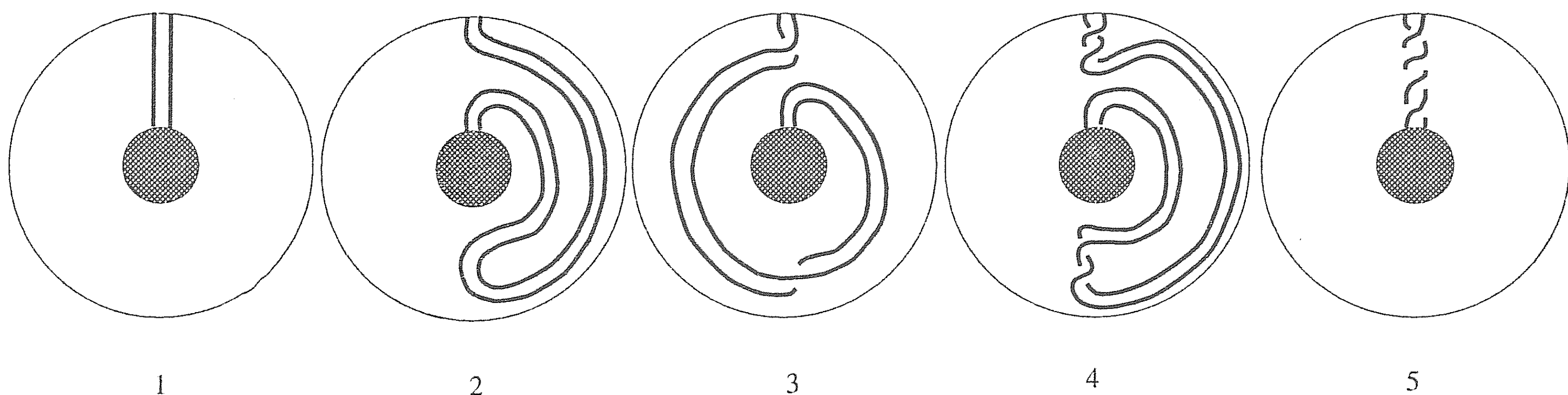


Slika 10. Ena pentlja je enaka enemu polnemu zasuku.

**Lema 1.** Naj bo  $B^3$  krogla v  $\mathbb{R}^3$ , katere rob je sfera  $S_2$ . Če je  $X$  ozek trak, položen s središčnico vzdolž osi  $x$  in z obema koncema na ekvatorju krogle  $B^3$ , potem se sučnega števila traku  $X$  ne da spremeniti z ambientno izotopijo krogle  $B^3$ , ki fiksira sfero  $S_2$ .

*Dokaz.* Konca traku  $X$  povežemo po zunanosti krogle  $B^3$  s trakom  $X'$  tako, da ima rob dobljenega sklenjenega traku  $X \cup X'$  dve komponenti (glej sliko 9c). Vsako ambientno izotopijo krogle  $B^3$ , ki fiksira sfero  $S_2$ , lahko razširimo z identiteto na komplement krogle  $B^3$  v prostoru  $\mathbb{R}^3$ . Če bi ambientna izotopija krogle  $B^3$  spremenila sučno število traku  $X$ , potem bi tako razširjena ambientna izotopija prostora  $\mathbb{R}^3$  spremenila spletno število roba unije  $X \cup X'$ , vendar pa to ni možno, ker je spletno število invarianta ambientne izotopije. ■

Zgoraj smo lahko videli, da je bilo za spremljanje sučnega števila traku v trirazsežni krogli dovolj slediti obema robovoma traku. Pri votli krogli pa ni tako. Naj bo  $A$  ozek trak, ki povezuje sferi  $S_1$  in  $S_2$  v votli krogli  $H$  in je položen vzdolž osi  $z$ , njegova konca pa ležita v ravnini  $xz$ . Potem obstaja ambientna izotopija votle krogle  $H$ , ki spremeni sučno število traku  $A$  za dve. To bi moralo biti očitno že iz otrokove igre z letalom, še bolj jasno pa se vidi na sliki 11. Zadnji položaj lahko narišemo tudi tako, kot prikazuje slika 12.

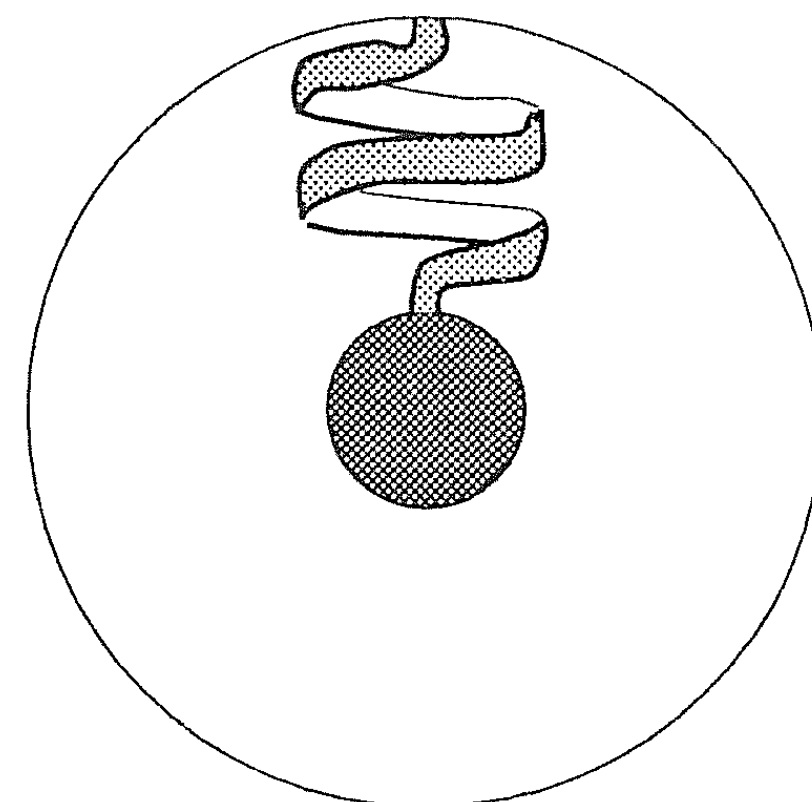


Slika 11. Iz drugega v tretji položaj pridemo tako, da zasukamo del traku, ki je bližje sferi  $S_2$ , na drugo stran po zgornji hemisferi. V naslednjem koraku pa zasukamo isti del traku še po spodnji hemisferi.

Prišli smo do jedra problema. Pomagati si moramo s kančkom topologije, da bi lahko neoporečno dokazali neobstoj. Vendar pa lahko zaradi naslednjih dveh trditev ostanemo zvesti tudi kombinatornemu prijemu.

(1) Ker je začetni položaj mogoče narisati z lomljenkami, je možno narisati poljuben položaj, do katerega pridemo z ambientno izotopijo, z lomljenkami že po majhni deformaciji.

(2) Če obstaja ambientna izotopija med dvema položajema, ki ju lahko narišemo z lomljenkami, potem obstaja tudi kosoma-linearna ambientna izotopija med tema položajema (glej Burde in Zieschang [8, str. 4 in Corollary 3.16]).

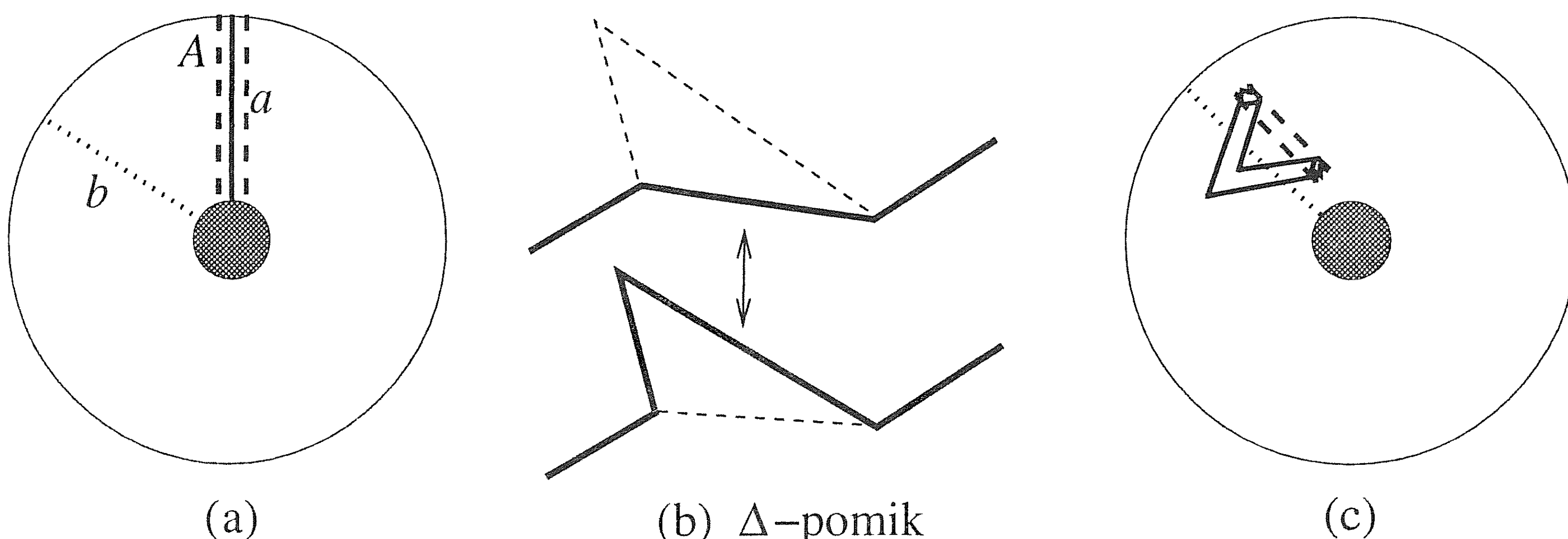


Slika 12.

**Lema 2.** Ambientna izotopija votle sfere  $H$ , ki fiksira sferi  $S_1$  in  $S_2$ , lahko spremeni sučno število traku  $A$  le za sodo število.

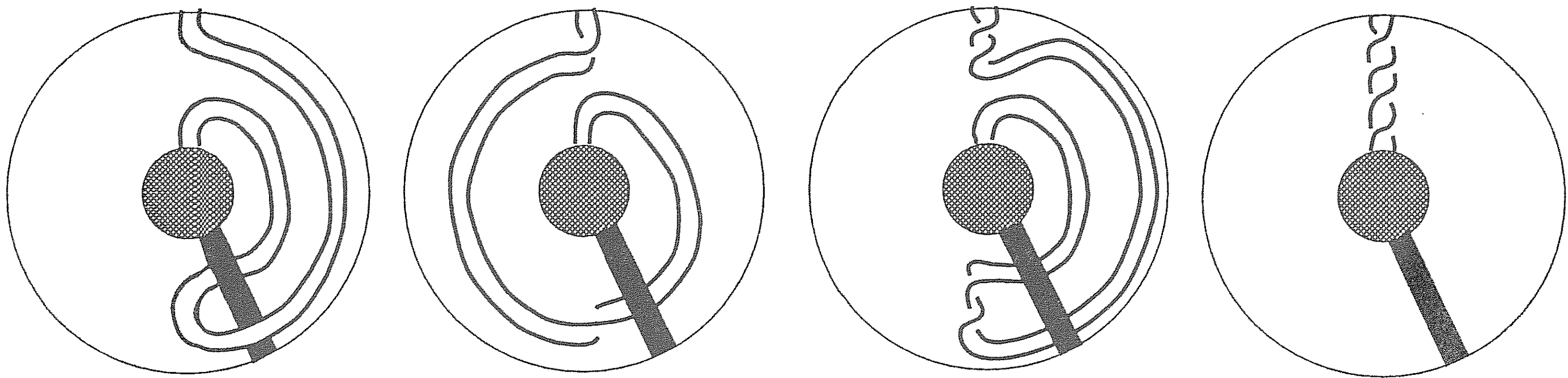
Očitno ne obstaja ambientna izotopija votle krogle  $H$ , ki fiksira sferi  $S_1$  in  $S_2$  in spremeni sučno število traku  $A$  za eno polovico, saj sta tudi konca traku  $A$  fiksna. Preostane nam samo še dokaz, da sučnega števila ne moremo spremeniti za ena. Ta rezultat je implicitno in brez dokaza navedel že Kauffman [15, VI.1, VI.18] (glej konec tega razdelka). Oglejmo si le skico dokaza.

*Dokaz.* Z  $a$  in  $b$  zaporedoma označimo intervala od  $(0, 0, 2)$  do  $(0, 0, 1)$  in od  $(2, 0, 0)$  do  $(1, 0, 0)$  (glej sliko 13a). Torej je  $a$  središčnica traku  $A$ , za katero bomo privzeli, da se premika z ambientno izotopijo votle krogle  $H$ . Po drugi strani pa bomo na interval  $b$  gledali kot na žarek, ki se ne premika. Kot smo omenili že zgoraj, lahko privzamemo, da je ambientna izotopija kosoma-linearna (glej Burde in Zieschang [8, Prop. 1.10]). Od tod sledi, da lahko inducirano gibanje intervala  $a$  izpeljemo s končnim številom  $\Delta$ -pomikov (glej sliko 13b), hkrati pa dosežemo, da sta po vsakem pomiku trak  $A$  in žarek  $b$  disjunktna.



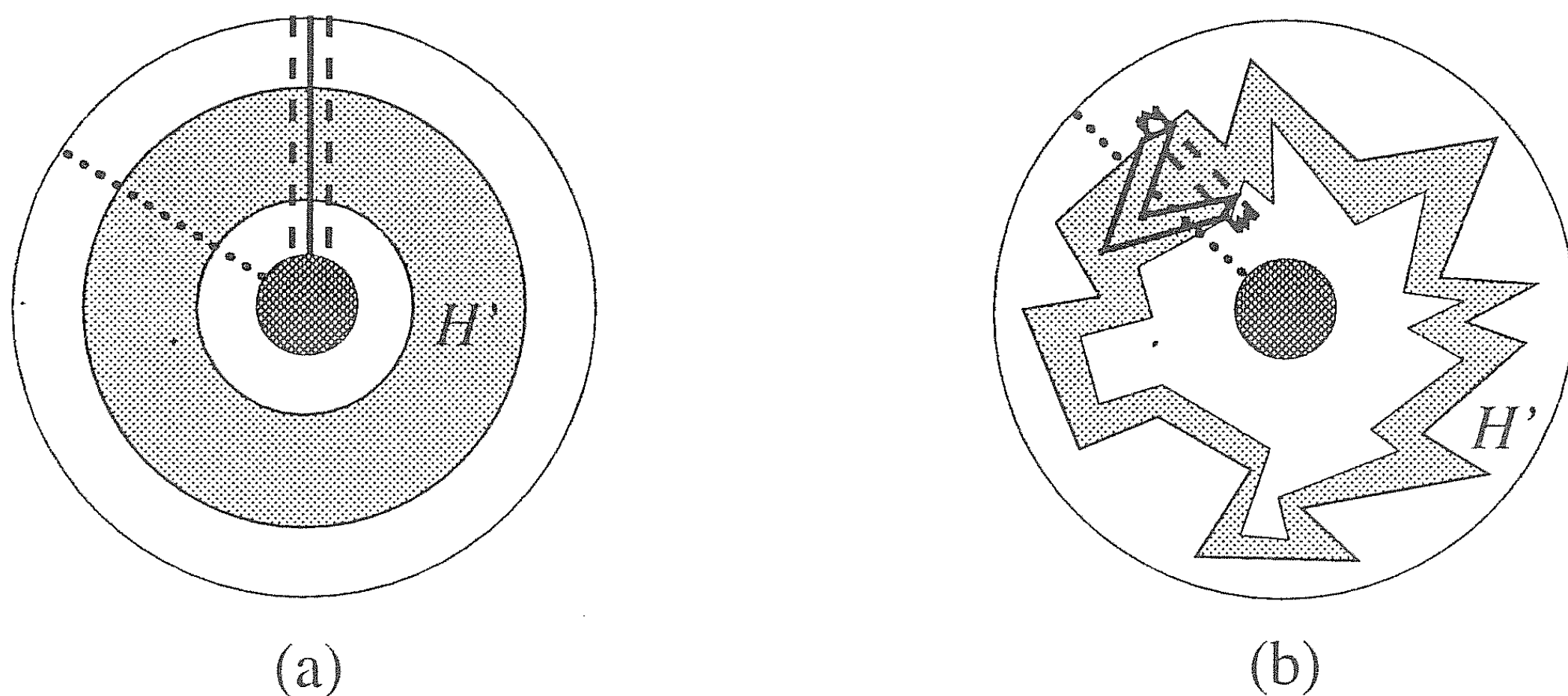
Slika 13.

Treba je poudariti, da kadar trak  $A$  ne prečka žarka  $b$ , ostane sučno število nespremenjeno zaradi leme 1. Poglejmo, kaj se zgodi, kadar gre pri  $\Delta$ -pomiku trak  $A$  skozi žarek  $b$ . Pokazali bomo, da lahko premaknemo lomljenko  $a$  na isto mesto, kjer je bila pred  $\Delta$ -pomikom, ne da bi pri tem prečkali žarek  $b$ , toda cena za to je, da se sučno število traku  $A$  spremeni za dve (glej sliko 14, ki smo jo dobili iz slike 11).



Slika 14.

Sprva nismo prepričani, ali lahko izpeljemo ‚potezo‘ s slike 14 v votli krogli  $H$ , saj bi se lahko zgodilo, da nam del nakopičenega traku  $A$  stoji na poti in se mu ne moremo izogniti (spomnimo se žoge, v kateri je 200 km laksa). Pa vendar se lahko izvlečemo iz teh težav, saj za to potezo ne potrebujemo celotne votle krogle  $H$ . Del traku, ki se je premaknil pri  $\Delta$ -pomiku, ko je šel trak  $A$  skozi žarek  $b$ , je na začetku ležal v notranjosti neke votle krogle  $H' \subset H$  (glej sliko 15a). Predpostavimo, da se je tudi ta votla krogla  $H'$  deformirala z našo ambientno izotopijo (glej sliko 15b).

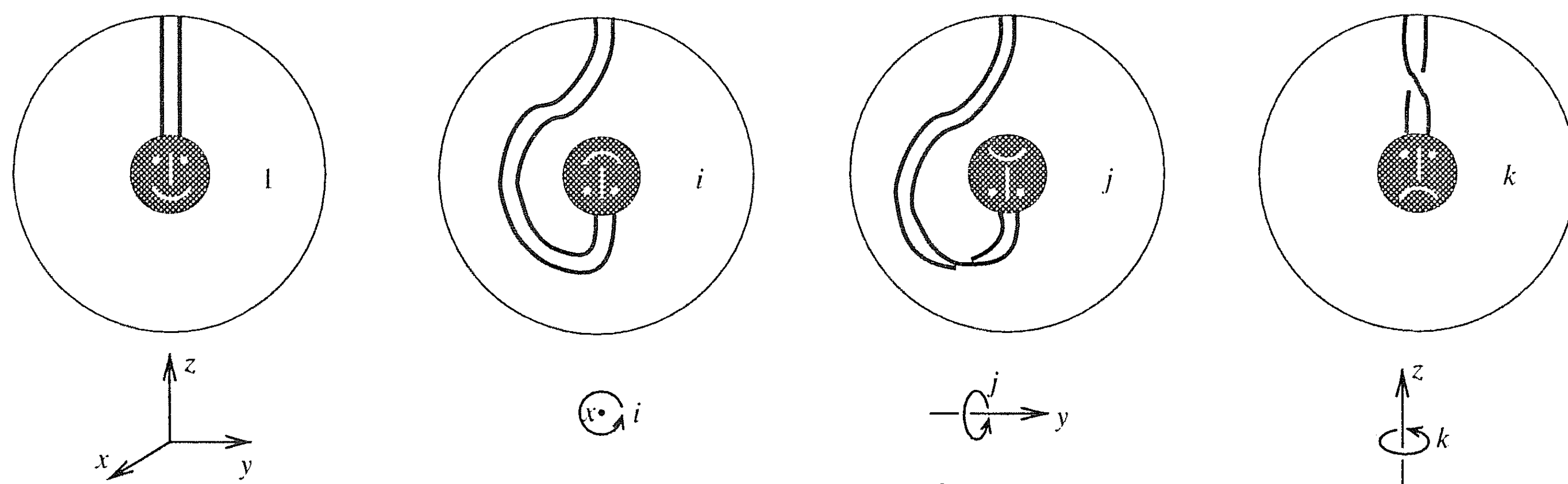


Slika 15. Dva ravninska preseka votle krogle.

Toda ne glede na to, kako se je premikala z ambientno izotopijo, ne vsebuje nobenega drugega dela traku  $A$  in jo vidimo kot votlo kroglo (tj. je homeomorfna votli krogli). Torej lahko sedaj uporabimo zvezdi podobno votlo kroglo  $H'$ , da opravimo pomik s slike 14 v obratni smeri. Končno ugotovimo, da se lahko sučno število traku  $A$  spremeni le za večkratnik števila 2. ■

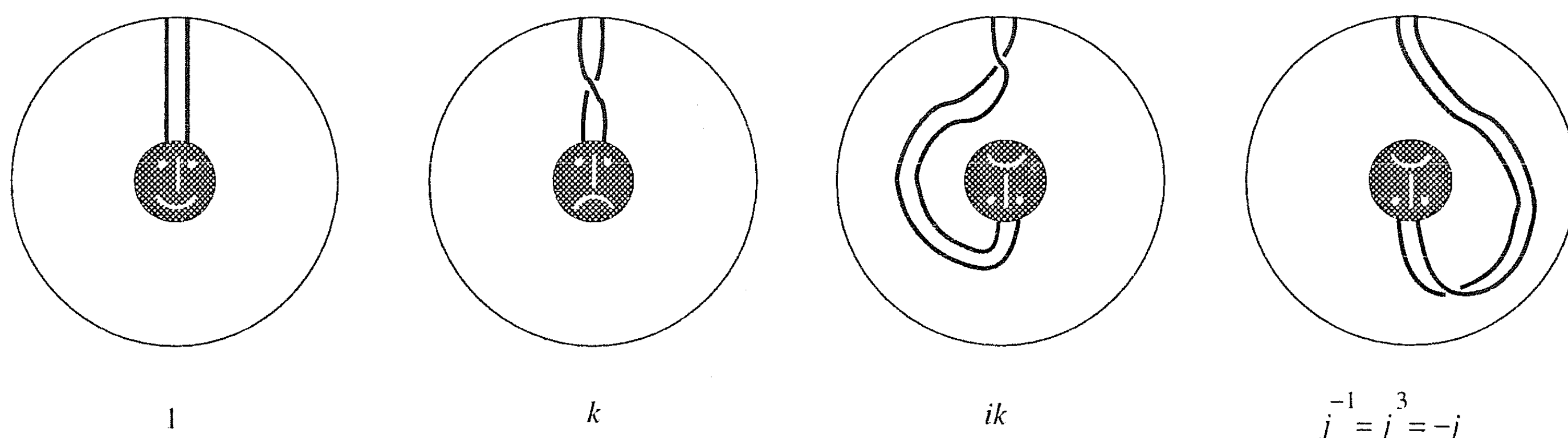
Bralec, ki se mu mudi prebrati rešitev na 2. vprašanje, lahko preide na naslednji razdelek, mi pa si oglejmo še eno zanimivo povezavo z grupo kvaternionov (glej Kauffman [15] in [17]). Naj bodo  $i$ ,  $j$  in  $k$  zaporedoma rotacije sfere  $S_1$  okoli koordinatnih osi  $x$ ,  $y$  in  $z$  za  $\pi$  radianov. Definirajmo

grupo, ki je generirana z rotacijami  $i, j, k$  po modulu ekvivalenčne relacije  $\sim$ , ki jo inducira ambientna izotopija votle krogle  $H$  s trakom  $A$ , ki fiksira sferi  $S_1$  in  $S_2$  (glej sliko 16).



**Slika 16.** Za lažjo predstavo si na sprednjo stran narišemo vesel obraz, na hrbtno pa žalosten. Iz začetnega položaja „1” dobimo z rotacijo za  $\pi$  radianov zaporedoma položaje „i”, „j” in „k”.

Potem je s slike 11 očitno, da velja  $i^4 = j^4 = k^4 = 1$ . Podobne slike zagotovijo tudi  $i^2 = j^2 = k^2$ ,  $ij = k$ ,  $jk = i$ ,  $ki = j$ , in če označimo  $i^2$  z minus ena, tj.  $(-1)$ , potem tudi  $ji = -k$ ,  $kj = -i$ ,  $ik = -j$ . Slika 17 nas prepriča o veljavnosti zadnje enakosti. Torej smo dobili ravno grupo kvaternionov.



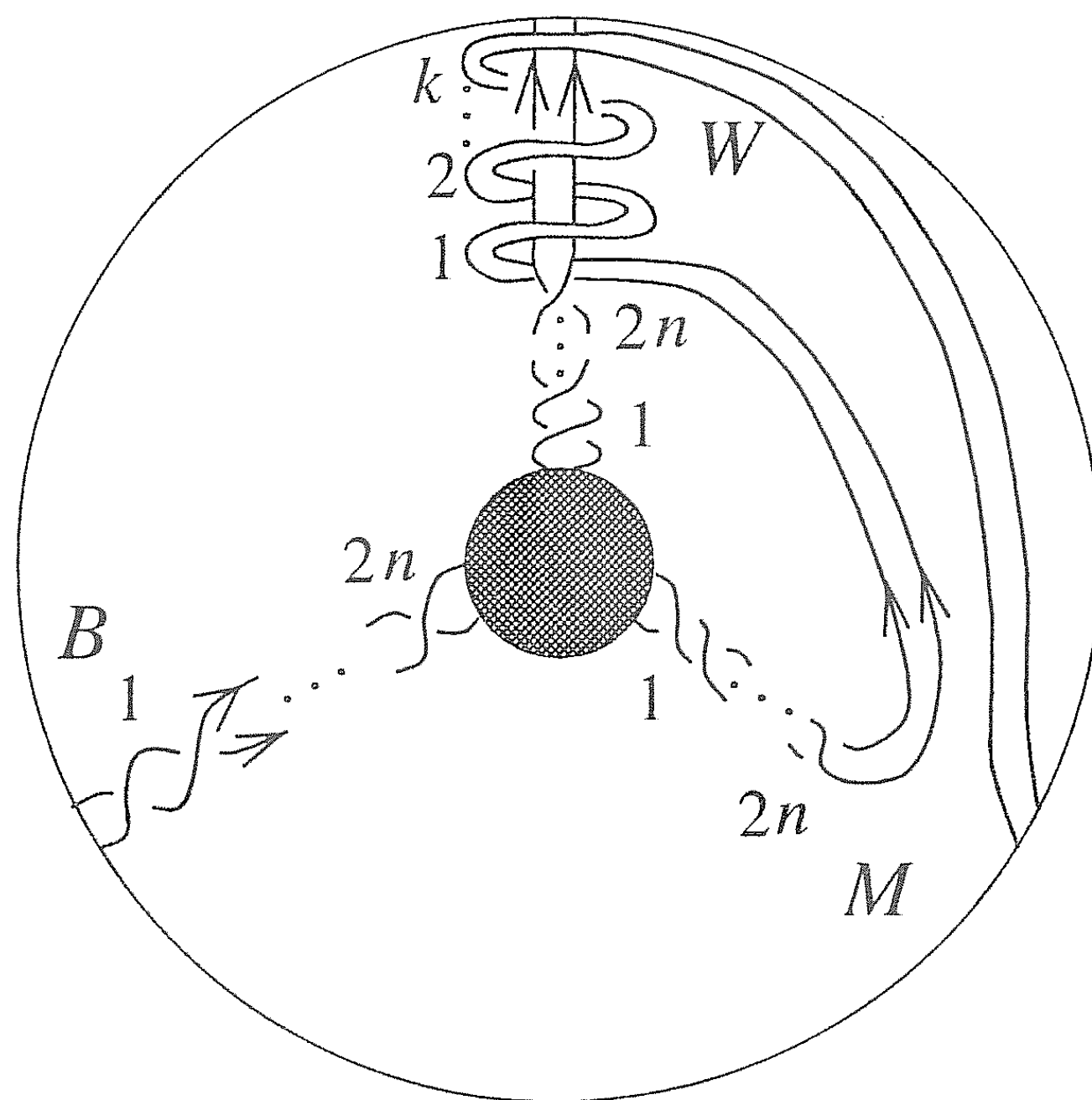
**Slika 17.** Na zadnjem koraku prestavimo samo trak.

(Neobstoj iz leme 2 je izražen v Kauffmanovi knjigi [15] kot  $i^2 \neq 1$ .)

## 5. Rešitev

Sedaj smo pripravljeni, da z lemama 1 in 2 odgovorimo na drugo vprašanje. Naj bodo  $B, M$  in  $W$  nezviti trakovi v votli krogli  $H$ , ki smo jih postavili zaporedoma vzdolž intervalov  $b, m$  in  $w$ . Predpostavimo, da obstaja ambientna izotopija votle krogle  $H$ , ki fiksira sferi  $S_1$  ter  $S_2$ , pri tem pa navije trak  $M$   $k$ -krat okoli traku  $W$ , za neki  $k \in \mathbb{Z}$ . Če je širina trakov dovolj majhna, potem ta izotopija navije tudi trak  $M$   $k$ -krat okoli traku  $W$ , tako da dobimo položaj, ki je prikazan na sliki 18.

Če orientiramo robove trakov tako, kot kaže slika 18, potem je zaradi leme 2 sučno število traku  $B$  enako  $2n$ , za neki  $n \in \mathbb{Z}$ . Sedaj pa pogledjmo trak, ki ga sestavlja unija  $B \cup W$ . Trakova  $B$  in  $W$  lahko povežemo z

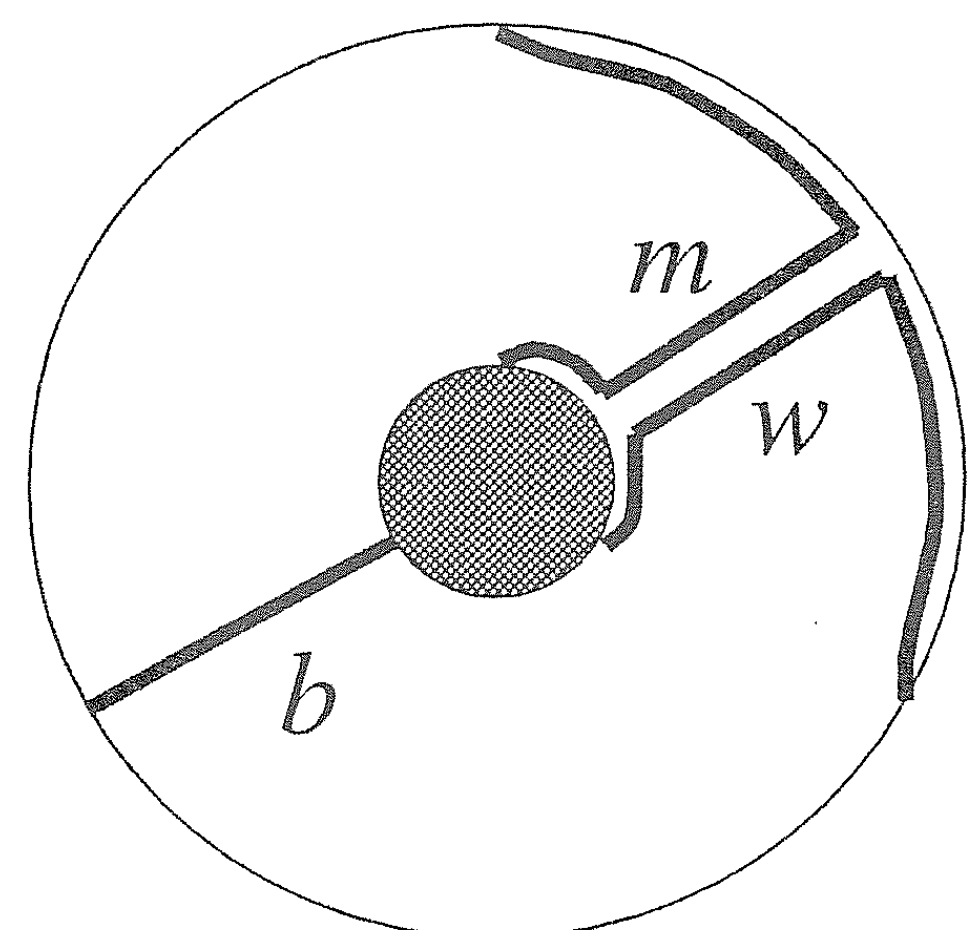


Slika 18.

nezvitim trakom znotraj manjše krogle in tako dobimo en sam trak, ki ima oba konca na robu velike krogle. Potem nam lema 1 zagotavlja, da je sučno število traku  $W$  enako  $-2n$ . Podoben razmislek uporabimo še na uniji  $B \cup M$ : ker lahko zravnamo trak  $M$  (seveda tako, da ga pomaknemo skozi trak  $W$ ), ne da bi pri tem naredili kakšen nov zasuk, vidimo, da ima ravni del traku  $M$   $-2n$  zasukov. Po drugi strani pa pri obravnavi unije  $M \cup W$  trak  $M$  ni dovoljeno premikati skozi  $W$  (ali skozi samega sebe ali skozi notranjost manjše krogle). Da bi zravnali trak  $M$ , moramo najprej sneti 'navoje' traku  $M$  s pomočjo  $k$ -kratne ponovitve pomika, ki ga opisuje slika 14 (seveda se premika trak  $M$  skozi trak  $B$ ). Pomik središčnice traku  $M$  vzdolž ravne črte nam prinese  $2k$  zasukov na traku  $M$ . Od tod spoznamo, da je sučno število traku  $M$  enako  $-2n + 2k$ . Toda po drugi strani nam lema 1 za unijo  $M \cup W$  zagotavlja, da je to število enako  $2n$ . Torej je  $k = 2n$ . Zato ne obstaja ambientna izotopija votle krogle  $H$ , ki fiksira sferi  $S_1$  in  $S_2$  ter hkrati navije trak  $M$  lihokrat okoli traku  $W$ .

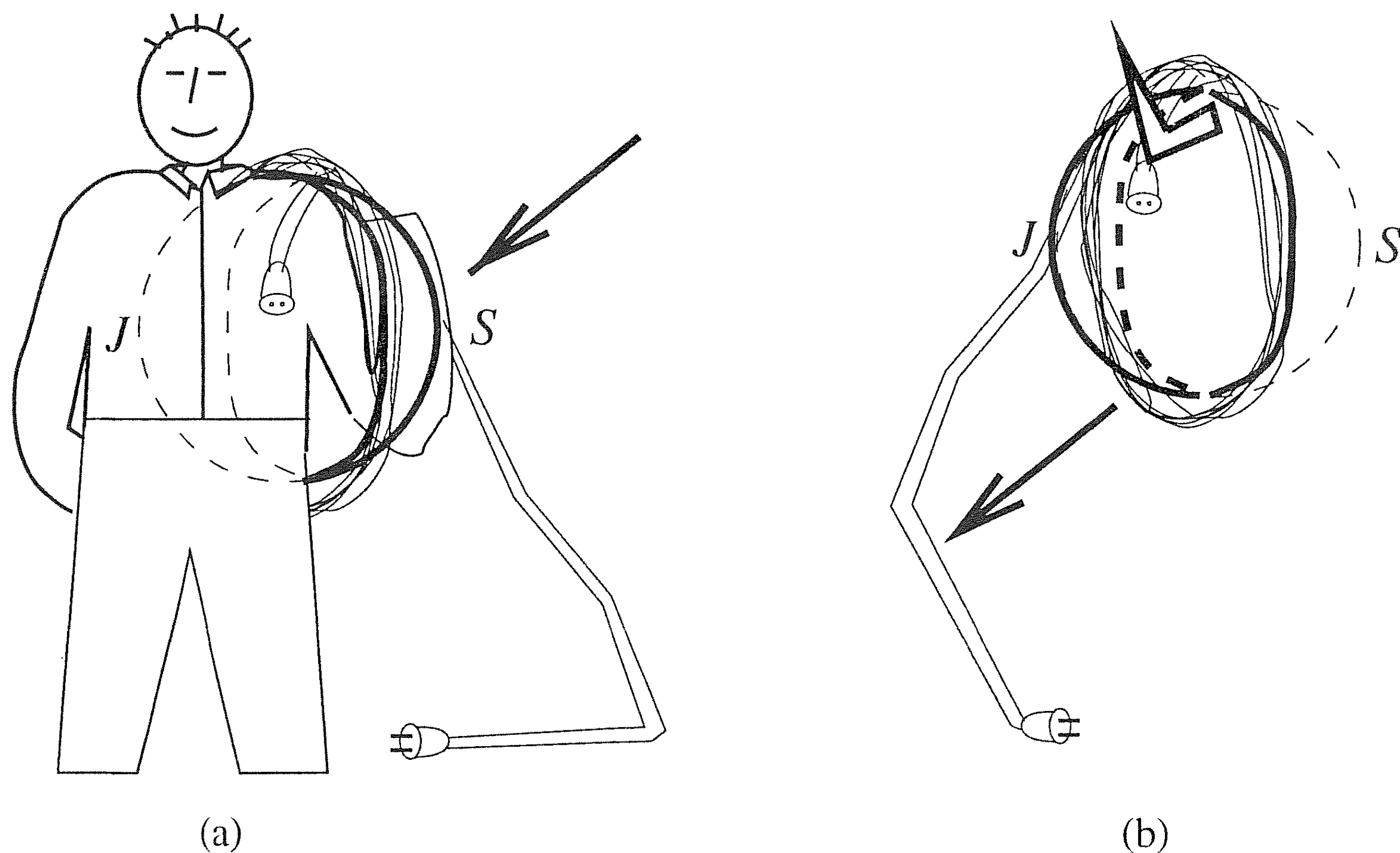
## 6. Zaključek

Če uporabimo rešitev za drugo vprašanje na središčnici in stranicah traku  $A$  v votli krogli  $H$ , dobimo neobstoj iz leme 2. Torej lahko sklepamo, da je trditev, ki nam da odgovor na drugo vprašanje, ekvivalentna neobstoju iz leme 2. Sedaj pa bomo podali bolj naravno rešitev prvega vprašanja. Najprej lahko premaknemo elastike iz začetnega položaja na naslovnici v položaj na sliki 19. Nato ponovimo pomik s slike 11 na vzporednih delih trakov  $m$  in  $w$  in tako navijemo trak  $m$  dvakrat okoli traku  $w$ . Preostane nam le še, da 'razpletemo' trak  $b$  od 'vzporednih' delov trakov  $m$  in  $w$  (spomnimo se, da lahko vedno razpletemo dve elastiki, ki povezujeta sferi  $S_1$  in  $S_2$ ).



Slika 19.

Končno pojasnimo še pojav, s katerim smo pričeli članek. Predpostavimo, da smo navili podaljšek na levo ramo.



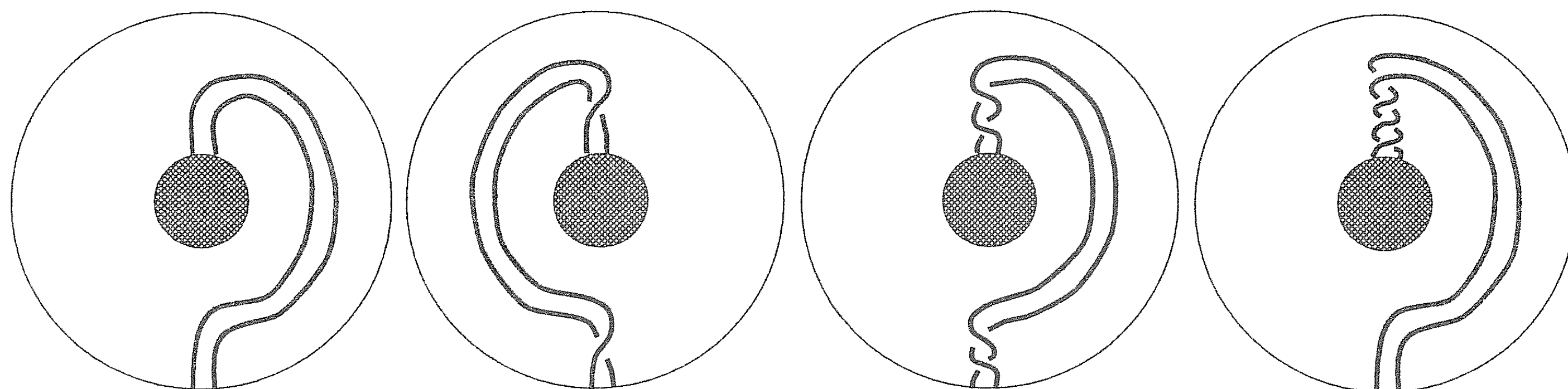
Slika 20.

Zamislimo si trirazsežno kroglo na mestu naše rame, pri čemer severni tečaj kaže v smeri naše leve roke. To pomeni, da navijamo podaljšek okoli ekvatorja iz smeri severnega tečaja (glej sliko 20a). Potem ko smo podaljšek spravili, se običajno ne spomnimo več, kje je severni tečaj in kje južni oziroma ali smo navijali iz smeri severnega oziroma južnega tečaja. V prvem primeru podaljšek ne bo zvit, medtem ko nam v drugem primeru (ko začnemo razvijati podaljšek direktno s klina, glej sliko 20b) slika 11 zagotavlja, da bo podaljšek večkrat zvit. Seveda mora biti pri tem eksperimentu podaljšek bodisi dovolj dolg bodisi moramo en konec pritrditi, medtem ko drugega držimo čvrsto v roki. ‚Kosci‘, ki se zavedajo težav pri zvijanju, spravljajo podaljške tako, da jih navijejo v obliki osmice, primerjajte sliki 4 in 10, po drugi strani pa so v industriji dolgi podaljški običajno naviti na valj.

Omenimo še eno uporabo (glej Stong [22]). Pomik na sliki 11 je moč razumeti tudi drugače. Slika 21 nam kaže, da kadar gre trak (ki ga postavimo v obliki vprašaja) enkrat okoli manjše sfere, pride spet v svoj prvotni položaj, če se ob tem (ali pa na koncu, kot kaže slika) manjša sfera zavrti za  $4\pi$  radianov (v isto smer, kot se je v bistvu vrtel trak v obliki vprašaja).

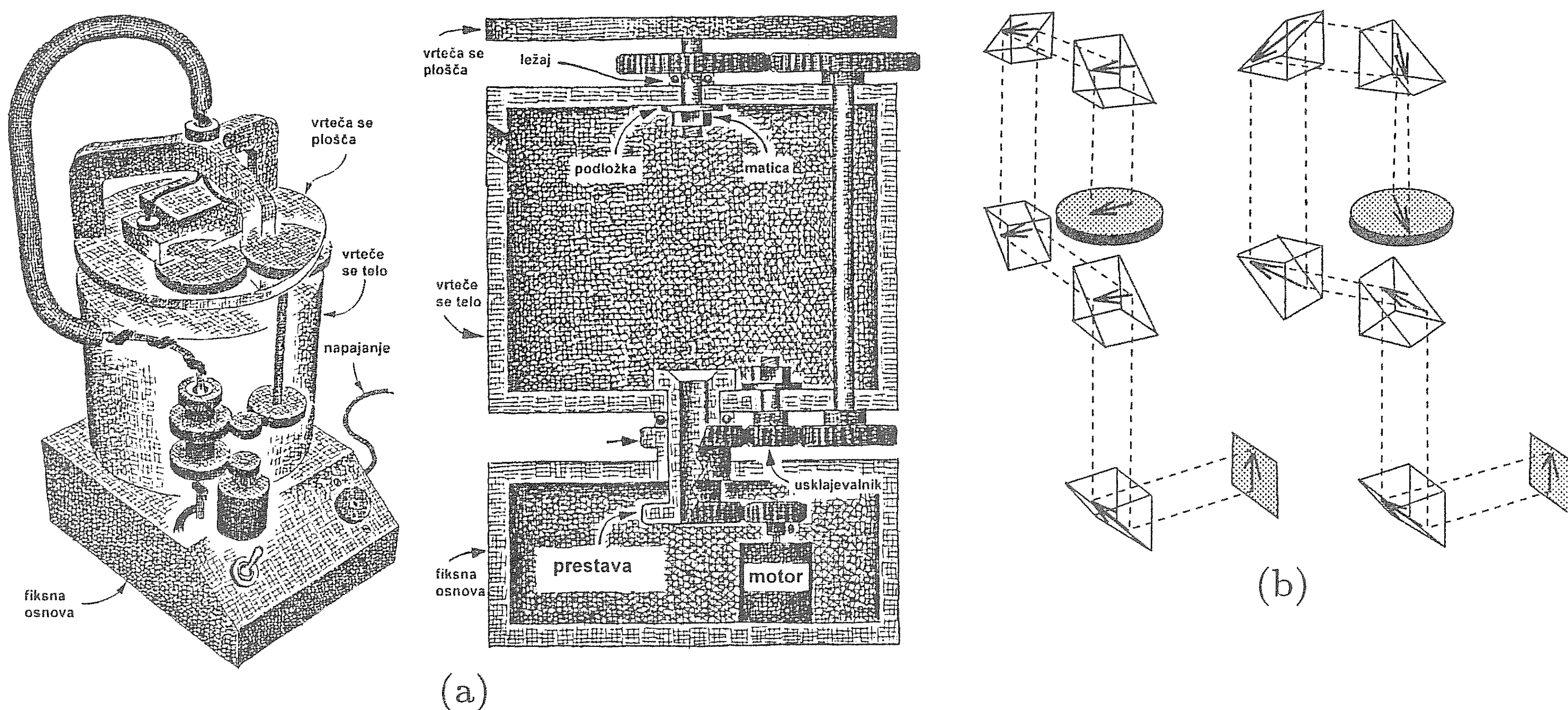
D. A. Adams [1] je uporabil to dejstvo zato, da je zgradil napravo, ki dovaja izmenično elektriko vrteči se plošči po prožnih žicah (tj. taki napravi, ki preprečuje, da bi se žici zapletli in pretrgali). Obraten način je pogosto uporabljen v industriji, na primer za enakomerno zvijanje žice. Mnoge podobne, a verjetno enostavnejše naprave so kasneje odkrili fiziki (glej npr. Rieflin [21]).

Diskretni pristop lahko še razširimo. Predpostavimo, da želimo posneti ansambel na vrteči se platformi, hkrati pa ne želimo, da bi gledalec opazil vrtenje. Ali lahko najdete rešitev, pri kateri ne bo treba premikati kamere? (Namig: trak na sliki 21 nadomestite z nekaj prizmami.) Rešitev najdete na sliki 22b. Podoben princip je uporabljen tudi pri *periskopu*, tj. napravi, s katero lahko opazovalec opazuje predmete, ki jih ne vidi direktno, pri tem pa lahko gleda naokoli, ne da bi premikal glavo (glej Born in Wolf [6, str. 243–244]).



Slika 21.

Za konec je tu še nekaj iztočnic za nadaljnje branje o teoriji vozlov [20], [15], [16], [17], [7], [8], [23], o uporabi pri študiji DNK, [25], [26], [2] in o spletnem in sučnem številu [28], [10] ter želja, da bi učitelji med branjem odkrili kaj koristnega, s čimer bodo lahko pritegnili študente, medtem ko bodo vpeljevali recimo kvaternione.



Slika 22. (a) Adamsov prototip naprave za dovajanje izmenične elektrike vrteči se plošči. (b) Vlak prizm 'odvije' optični žarek.

**Zahvala.** Nekaterе ideje za ta članek sem dobil med pogovori ali pa dopisovanjem z W. J. Gilbertom, F. Jaegerjem, U. Milutinovićem, R. C. Readom in J. Vrabcem. Zahvaljujem se tudi kolegom in kolegicam, ki so prebrali rokopis in mi svetovali številne izboljšave.

## LITERATURA

- [1] D. A. Adams, *Apparatus for Providing Energy Communication Between a moving and a Stationary Terminal*, U.S. Patent 3,586,413, 22. junij 1971.
- [2] W. R. Bauer, F. H. C. Crick and J. H. White, *Supercoiled DNA*, Scientific American (julij) 1980, 100–113.
- [3] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Academic Press, London – Toronto, 1982.
- [4] L. C. Biedenharn, J. D. Louck, *Angular Momentum in Quantum Physics, Theory and Application*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley Publishing Company, 1981.
- [5] E. D. Bolker, *The spinor spanner*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 997.
- [6] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, Oxford, 4th ed., 1970.
- [7] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*. Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 1993.
- [8] G. Burde, H. Zieschang, *Knots*. De Gruyter studies in mathematics 5, Berlin – New York, 1985.
- [9] E. Fadell, *Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac*, Duke Math. J. **29** (1962), 231–242.
- [10] W. G. Chinn, N. Steenrod, *First concepts of topology*, MAA, 1966.
- [11] E. Fadell, J. van Buskirk, *The braid groups of  $E^2$  and  $S^2$* , Duke Math. J. **29** (1962), 243–257.
- [12] M. Gardner, *New Mathematical Diversions from Scientific American*, Simon and Schuster, New York, 1966.
- [13] M. Gardner, *Aha! Pa te imam*, DZS, Ljubljana, 1992.
- [14] A. Jurišić, *The Mercedes Knot Problem*, Amer. Math. Monthly **103** (1996), 756–770.
- [15] L. H. Kauffman, *On Knots*, Annals of mathematics studies, Princeton University Press, 1987.
- [16] L. H. Kauffman, *New Invariants in the Theory of Knots*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), 195–242.
- [17] L. H. Kauffman, *Knots and Physics*, World Scientific Pub., Singapore – New Jersey – London – Hong Kong, 1991.
- [18] M. H. A. Newman, *On string problem of Dirac*, J. London Math. Soc. **17** (1942), 173–177.
- [19] L. Neuwirth, *The Theory of Knots*, Scientific American (junij) 1979, 110–124.
- [20] K. Reidemeister, *Knotentheorie*, Chelsea Publ. Co., New York, 1948, Copyright 1932, Julius Springer, Berlin.
- [21] E. Rieflin, *Some mechanisms related to Dirac's strings*, Amer. J. Physics **47** (1979), 379–381.
- [22] C. L. Stong, *The Amateur Scientist: Diverse topics, starting with how to supply electric power to something that is turning*, Scientific American (december) 1975, 120–125,
- [23] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 1993.
- [24] J. Strnad, *Še o sukanju teles*, Presek **19** (1991/92), 320–321.
- [25] D. W. Sumners, *Untangling DNA*, Math. Intelligencer **12** (1990), 71–80.
- [26] D. W. Sumners (Ed.), *New Scientific Applications of Geometry and Topology*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **45**, AMS short course notes, 1992.
- [27] J. C. Wang, *DNA Topoisomerases*, Scientific American **247** (July) 1982, 94–97, 100–109,
- [28] J. White, *Self-linking and Gauss integral in higher dimensions*, Amer. J. Math. **41** (1969), 693–728.

# RAVNOTEŽJE

MIRAN ČERNE

Math. Subj. Class. (2000) 91-01

S primerom je predstavljena definicija Nashevega ravnotežja igre.

## EQUILIBRIUM

Definition of the Nash equilibrium is presented through an example.

Igralca  $A_1$  in  $A_2$  velikokrat igrata naslednjo igro prstov [9]: Vsak od njiju hkrati pokaže ali en ali dva prsta. Skupaj torej pokažeta ali 2 ali 3 ali 4 prste. Če je število prstov sodo (2 ali 4), igralec  $A_1$  plača igralcu  $A_2$  toliko tolarjev, kolikor je bilo pokazanih prstov (2 ali 4). Če pa sta igralca skupaj pokazala tri prste, plača igralec  $A_2$  igralcu  $A_1$  tri tolarje. Kako naj igrata igralca  $A_1$  in  $A_2$ , da bosta imela kar največji dobiček oziroma zmanjšala svojo izgubo?

Igralca lahko igro igrata najprej po „občutku”. Igralec  $A_1$  se denimo odloči, da bo v vsakem krogu igre pokazal le en prst. Tako bo ali dobil 3 tolarje ali pa izgubil 2 tolarja. Zdi se, da bo v „povprečju” na boljšem. Vendar bo igralec  $A_2$  kmalu prepoznal njegovo strategijo in se odločil, da v vsakem krogu igre pokaže le en prst. Pri tako izbrani strategiji igralca  $A_1$  bo potemtakem  $A_2$  vedno na dobičku. Seveda bo tudi igralec  $A_1$  kmalu prepoznal strategijo igralca  $A_2$  in bo popravil svojo strategijo.

Zdi se, da igra po „občutku” na dolgi rok ne daje nobenemu od igralcev prednosti. Zato se odločita za naključno izbiro števila pokazanih prstov v vsakem krogu igre. Denimo, da v vsakem krogu igre igralec  $A_1$  pokaže en prst z verjetnostjo  $s_1$  in dva prsta z verjetnostjo  $q_1 = 1 - s_1$ . Prav tako denimo, da igralec  $A_2$  v vsakem krogu igre pokaže en prst z verjetnostjo  $s_2$  in dva prsta z verjetnostjo  $q_2 = 1 - s_2$ . Tedaj je verjetnost dogodka, da igralca skupaj pokažeta dva prsta, enaka  $s_1 \cdot s_2$ , verjetnost dogodka, da igralca pokažeta skupaj tri prste, je enaka  $s_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot s_2$  in verjetnost dogodka, da igralca skupaj pokažeta štiri prste, je enaka  $q_1 \cdot q_2$ . Zatorej je pričakovani dobiček (oziroma izguba) igralca  $A_1$  enak

$$D_1 = 3(s_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot s_2) - 2s_1 \cdot s_2 - 4q_1 \cdot q_2,$$

pričakovani dobiček igralca  $A_2$  pa je enak  $D_2 = -D_1$ . Pišimo  $s_1 = x$  in  $s_2 = y$ . Tako dobimo funkcijo dveh spremenljivk

$$D_1(x, y) = -4 + 7(x + y) - 12xy$$

na kvadratu  $[0, 1] \times [0, 1]$ .

Igralec  $A_1$  hoče imeti čim večji dobiček. Zato poiskuje maksimum vrednosti funkcije  $D_1(x, y)$ . Naj bo vrednost spremenljivke  $y$  fiksna. Če je  $y < 7/12$ , ima funkcija  $D_1(\cdot, y)$  maksimum  $3 - 5y$  v točki  $x = 1$ . Če je  $y > 7/12$ , ima funkcija  $D_1(\cdot, y)$  maksimum  $-4 + 7y$  v točki  $x = 0$ . Kadar pa je  $y = 7/12$ , je vrednost funkcije  $D_1$  identično enaka  $1/12$ . Dobitek igralca  $A_1$  je pri predpostavki, da igra optimalno, v povprečju vedno vsaj  $1/12$  tolarja na igro!

Vendar igralec  $A_1$  ne pozna strategije igralca  $A_2$  in ne ve, kako naj igra optimalno! Če torej hoče igralec  $A_1$  v vsakem primeru, ne glede na strategijo igralca  $A_2$ , imeti dobiček, mora igrati tako, da kaže en prst z verjetnostjo  $s_1 = 7/12$ . Prav tako mora igralec  $A_2$ , če hoče minimizirati izgubo, pa ne pozna strategije igralca  $A_1$ , igrati tako, da kaže en prst z verjetnostjo  $s_2 = 7/12$ . Točka  $(7/12, 7/12)$  je *Nashevo ravnotežje* igre, ki jo igrata igralca  $A_1$  in  $A_2$ . To je tisti par strategij obeh igralcev, ki vsakemu zagotavlja neki fiksni dobiček oziroma izgubo, in to neodvisno (!) od strategije drugega igralca.

Definirajmo in opišimo nekaj pojmov iz teorije iger. Igro naj igra  $n$  igralcev. Igralce označimo z naravnimi števili od 1 do  $n$ . Za vsak  $i \in \{1, \dots, n\}$  pripada  $i$ -temu igralcu množica  $S_i$  možnih strategij. Igra se odigra tako, da igralci hkrati izberejo vsak svojo strategijo  $s_i \in S_i$ , izid igre pa je neka funkcija izbora strategij  $(s_1, \dots, s_n)$ . Vsak igralec ima tudi svojo „oceno vrednosti“ vsakega izbora strategij. Le-to opiše s *funkcijo dobička*

$$D_i : S_1 \times \dots \times S_n \longrightarrow \mathbb{R},$$

ki bi jo rad optimiziral, tj. vsak igralec bi rad izbral tako strategijo  $s_i \in S_i$ , da bi maksimiziral vrednost funkcije  $D_i(s_1, \dots, s_n)$  [1].

Pri igrah kot je npr. šah, kjer igralca poteze vlečeta izmenično, izbor strategije ne pomeni izbora posamezne poteze, temveč popolno navodilo, kako ukrepati v vsaki situaciji, ki se lahko zgodi med igro. Lahko bi se, denimo, odločili za naslednjo (najbrž ne preveč uspešno) strategijo: v vsaki potezi naključno z enakomerno porazdelitvijo izberemo eno od naših figur, ki je še ostala v igri, ter jo iz polja  $(x, y)$  premaknemo v tisto polje  $(X, Y)$ , da bo razlika  $Y - y$  največja. Če poteze z izbrano figuro ne moremo narediti, se predamo.

V našem primeru sta prostora strategij  $S_1 = S_2 = [0, 1]$ , kjer izbor posamezne točke  $s_j \in S_j$  pomeni izbor verjetnosti, da  $i$ -ti igralec pokaže en prst z verjetnostjo  $s_j$ . Funkciji dobička za igralca pa sta

$$D_1(s_1, s_2) = -4 + 7(s_1 + s_2) - 12s_1s_2$$

ter

$$D_2(s_1, s_2) = -D_1(s_1, s_2).$$

Opazimo lahko, da sta funkciji dobička  $D_1$  in  $D_2$  linearni-afini funkciji kot funkciji vsake od spremenljivk  $s_1$  oziroma  $s_2$ . Ker je  $D_1 + D_2 = 0$ , ta igra spada v razred tako imenovanih iger za dva igralca z *ničelno vsoto*, ki sta jih obravnavala že Morgenstern in von Neumann [2].

**Definicija.** *Nashevo ravnotežje oziroma točka ravnotežja igre je vsaka  $n$ -terica strategij  $(s_1, \dots, s_n)$ , za katero velja, da noben igralec ne more povečati vrednosti svoje funkcije dobička  $D_i(s_1, \dots, s_n)$  s spremembo strategije  $s_i$ , medtem ko druge strategije ostanejo nespremenjene.*

Leta 1950 je tedaj 21-letni John Nash objavil članek [5], dolg 2 strani, v katerem je dokazal naslednji izrek o obstoju ravnotežja in zanj leta 1994 dobil Nobelovo nagrado za ekonomijo.

**Izrek,** *Če je prostor strategij  $S_i$  vsakega igralca končnorazsežen simpleks in če je vsaka funkcija dobička  $D_i(s_1, \dots, s_n)$  zvezna ter tudi linearna-afina kot funkcija vsake posamezne spremenljivke  $s_i$ , obstaja vsaj ena točka ravnotežja igre.*

V našem primeru smo obstoj Nashevega ravnotežja dokazali z neposrednim računom, v dokazu Nashevega izreka pa se uporabi Brouwerjev izrek o negibni točki [10]. Več o ravnotežjih v ekonomiji lahko preberemo v [3].

John Nash je v svojem zaradi bolezni kratkem raziskovalnem obdobju napisal 14 znanstevnih člankov, od katerih jih je bilo 5 objavljenih v *Annals of Mathematics*. Med njegove najbolj znane matematične rezultate nedvomno spada vložitveni izrek za Riemannove mnogoterosti [6,7], v katerem je z metodo, katere moč in splošna uporabnost se danes strne v obliki *Nash-Moserjevega izreka o inverzni preslikavi*, dokazal, da se da vsaka Riemannova mnogoterost izometrično vložiti v  $\mathbb{R}^n$  za primerno velik  $n$ .

Za konec omenimo, da je Nash tudi eden od dveh neodvisnih ustvarjalcev igre, ki se danes imenuje „Hex”, v času njegovega študija na Princetonu pa so jo njegovi kolegi imenovali kar „Nash” [1,4]. To je igra za dva igralca, ki se igra na romboidni plošči, tlakovani s pravilnimi šestkotniki ( $14 \times 14$ ). Plošča ima dve nasprotni stranici bele barve ter drugi dve nasprotni stranici črne barve. Igralca razpolagata s šestkotnimi ploščicami, eden z belimi, drugi s črnimi, ki jih izmenično po eno polagata na katerokoli pristoječo polje. Zmaga tisti igralec, ki prvi sestavi „verigo” ploščic, in sicer ali belih ploščic med belima stranicama ali pa črnih ploščic med črnima stranicama. Čeprav optimalna strategija igralcev eksplicitno ni znana, je Nash našel nekonstruktiven dokaz, da obstaja zmagovita strategija za prvega igralca [1] ali [8, str. 18–20].

## LITERATURA

- [1] J. Milnor, *A Nobel prize for John Nash*, Math. Intelligencer **17** (1995), 3, 11–17.
- [2] O. Morgenstern, J. von Neumann, *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press, Princeton, 1944.
- [3] N. Mramor-Kosta, *Negibne točke in splošno ravnovesje na trgu*, Obzornik mat. fiz. **48** (2001), 170–181.
- [4] S. Naser, *Beautiful mind*, Simon & Schuster, New York, 1998.
- [5] J. F. Nash, *Equilibrium points in  $n$ -person games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **36** (1950), 48–49.
- [6] J. F. Nash,  *$C^1$  isometric imbeddings*, Ann. of Math. **60** (1954), 383–396.
- [7] J. F. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **63** (1956), 20–63.
- [8] L. E. Sadovski, A. L. Sadovski, *Matematika in šport*, Knjižnica Sigma, DMFA Slovenije, 1990.
- [9] G. J. Székely, *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*, Akadémiai Kiadó, Budimpešta, 1986.
- [10] A. Vavpetič, *Brouwerjev izrek*, Obzornik mat. fiz. **48** (2001), 161–167.

## NOVE KNJIGE

---

**Sylvia Nasar: A Beautiful Mind, Simon and Schuster, New York, 1998**

Čudoviti um iz naslova je John Nash, edini matematik, ki je sploh kdaj dobil Nobelovo nagrado (za ekonomijo, leta 1994). Sylvia Nasar, dopisnica *New York Timesa* za področje ekonomije, je napisala zelo berljivo in dobro raziskano Nashevo biografijo, ki ponuja očarljiv vpogled v življenja matematikov in matematične skupnosti na Princetonu in MIT od petdesetih let naprej. Globok vtis pusti že omemba le nekaterih znanstvenikov, ki nastopajo v biografiji: Artin, Arrow, Borel, Browder, Calabi, Carleson, Cohen, Einstein, Gale, Grothendick, Hörmander, Kuhn, Lefschetz, Levinson, Milnor, Morgenstern, Moser, Newman, Nirenberg, Palais, Rota, Samuelson, Selberg, Shapley, Singer, Spencer, Steenrod, von Neumann in Wiener. Pri pripravi knjige je imela avtorica z večino še živečih daljše pogovore.

Pred nadaljevanjem je treba opozoriti bralca, ki ga zanimajo samo Nashevi matematični dosežki, naj se ne loti te knjige in si rajši prebere članek „A Nobel Prize for John Nash”, ki ga je napisal John Milnor v reviji *Mathematical Intelligencer* 17:3 (1995), str. 11–17. Milnor, dobitnik Fieldsove medalje ter bivši kolega in Nashev sostanovalec, v članku poda širok pregled nekaterih Nashevih najpomembnejših del iz teorije iger (za kar je Nash dobil Nobelovo nagrado), iz geometrije (Nashevi vložitveni izreki) in analize. Poglavje, ki se ukvarja s teorijo iger, vsebuje eleganten dokaz obstoja Nashevega ravnovesja, pri čemer je uporabljen Brouwerjev izrek o fiksni točki. Milnor razpravlja tudi o vplivu Nasheve teorije ravnovesnih točk na razumevanje tekmovalnih razmer v stvarnem svetu. Predzadnje poglavje knjige

Sylvie Nasar opisuje zanimivo uporabo Nashevega ravnovesja (in podobnih idej, na primer obratne indukcije) pri dražbah frekvenčnega prostora brezžičnega omrežja, ki ga uporabljajo na primer mobiteli, pagerji in telefaksi.

Vendar pa so me v knjigi bolj kot Nashevi matematični dosežki ali celo Nobelova nagrada fascinirale njegove težave, ki so se pojavile konec petdesetih let. Takrat so se začela desetletja paranoidne shizofrenije, ki jim je sledila zelo neobičajna spontana ozdravitev konec osemdesetih let. Tako kot pri alkoholizmu, tu morda „ozdravitev” ni prava beseda; Nasarjeva pravi, da nihče ne ve, ali je Nashevo izboljšanje stanja trajno. V resnici je zaskrbljenost Švedov, kako se bo Nash obnašal na podelitvi Nobelovih nagrad, pomembno vplivala na tesen izid glasovanja odbora za Nobelove nagrade in celotne Švedske kraljeve akademije znanosti. Bralca zelo pritegne poglavje, ki opisuje Nobelovo nagrado in politične spletke okrog glasovanja. Opisana je sovražnost ekonomistov do matematikov, prav tako sovražnost naravoslovcev do ekonomistov, med njimi še posebej matematikov in fizikov. Lars Gårding, matematik iz Akademije, ki je imel Nasha za genija, je celo rekel, da je Nash dobil Nobelovo nagrado za „zelo majhno reč”. Statut Nobelovih nagrad zahteva, da podrobnosti o izbirnem postopku ostanejo tajne petdeset let po izročitvi nagrade, zato se Nasarjeva pri tem opira predvsem na zaupne vire. Preostali del knjige večinoma temelji na pogovorih in elektronski korespondenci s fakultetama Princeton in MIT ter Nashevo družino in prijatelji. John Milnor je v svoji recenziji knjige („John Nash and 'a Beautiful Mind'”, *Notices of the American Mathematical Society* 45:10, 1998, str. 1329–1332) poudaril, da je knjiga napisana brez Nasheve privolitve ali sodelovanja. Kljub vsemu Milnor pravi, da je knjiga skrbno dokumentirana.

V preostanku te recenzije bom opisal tri dele Nasheve zgodbe, ki jih avtorica imenuje genij, norost in obuditev. Kasneje bom navedel še nekaj trših orehov in napak v knjigi in končal s sklepom, ali je knjiga vredna branja.

Nasheva vzgoja je bila tradicionalna. Na dodiplomskem študiju na Carnegie Institute of Technology je bil Nash socialno nezadosti razvit, ekscentričen samotar, ki je presenečal profesorje matematike. Na Carnegie Tech je Nash obiskoval samo en ekonomski tečaj o mednarodni trgovini (kar ni slabo za Nobelovega nagrajenca iz ekonomije).

Leta 1948 je Lefschetz pripeljal Nasha na podiplomski študij na Princeton, ki je po besedah Haralda Böhra postal „matematično središče vesolja”. Poleg izjemne matematične fakultete so bili le miljo stran od univerze na inštitutu Institute for Advanced Study tudi Einstein, von Neumann (ki so se ga bali vsi podiplomski študentje), Gödel in drugi. Zaradi briljantnih študentov, kot so bili John Milnor, John Tate, Serge Lang, Harold Kuhn,

David Gale in drugi, je na univerzi, ki je predstavljala „majhno eksotično matematično toplo gredo“, vladalo zelo tekmovalno ozračje. Celo matematične skupine na fakulteti so bile rangirane: na vrhu je bila topologija (Lefschetz, Fox, Steenrod), takoj pod njo analiza (Bochner), potem algebra (Artin), logike (Church) in teorije iger (Tucker) pa niso prav visoko cenili.

Intelektualno je Nash zablestel na Princetonu, ko je v dveh letih napisal 27-stranski doktorat iz teorije iger. Izogibal se je tečajem iz matematike, pa tudi zelo malo je bral matematične tekste: večino stvari se je naučil v pogovoru z drugimi ali pa je vse ustvaril čisto od začetka. Tisti čas je Norman Steenrod dejal: „Nash bolj kot katerikoli drug študent verjame, da se je vsako stvar treba naučiti prek raziskovanja.“ Nash je bil nastopaški in aroganten, vendar je navdušil fakulteto s svojo matematično predrznostjo, na primer s svojim izrekom, da se da vsaka gladka kompaktna  $n$ -mnogoterost vložiti kot komponenta realne algebraične varietete v  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Nash je bil tako samozavesten, da si je že med prvim semestrom zagotovil pogovor z Einsteinom, na katerem sta se pogovarjala o gravitaciji, trenju in sevanju. Einstein je končal njun pogovor z opazko: „Mladi mož, malo več fizike se boste morali naučiti.“

Nash je upal, da bo lahko ostal na Princetonu kot profesor, vendar so ga zaradi njegove težke osebnosti zavračali Artin in drugi. Leta 1952 je sprejel položaj predavatelja na MIT, kjer je ostal do svoje prve neprostovoljne hospitalizacije leta 1959. Njegovo obnašanje v prvih letih je bilo še kar normalno (glede na standarde MIT), enkrat pa je bil le grajan, ker je na zaključnem izpitu dal nalogo, ekvivalentno Fermatovemu zadnjemu izreku! Leta 1954 je Nash izgubil honorarno poletno službo na RAND (ameriška neprofitna inštitucija, ki z raziskavami in analizo pomaga izboljšati politiko in odločanje), ker je bil aretiran zaradi nedostojnega obnašanja v moškem stranišču. Zaradi večvrednostnega kompleksa in arogance so mu na MIT dali vzdevek Gnash (slov. škripati, škrtati). Nash je poimenovanje komentiral takole: „Črka G zagotovo pomeni genij. Pravzaprav je dandanes zelo malo genijev na MIT. Jaz, seveda, in Norbert Wiener. Pa še Norbert morda ne več, čeprav so dokazi, da je včasih bil.“

Nash je imel v času službovanja na MIT tudi skrivno življenje z ljubico in nezakonskim sinom. Na koncu se je poročil z diplomantko fizike Alicio Larde, za katero je dejal, da bo dobra žena, ker zelo veliko gleda televizijo in se mu zato ne bo treba z njo dosti ukvarjati. Ironično se je izkazalo, da je Alicia odigrala herojsko vlogo v tej zgodbi, ko je v kasnejših letih skrbela zanj med epizodami bolezni, tudi po njuni ločitvi.

Na začetku leta 1959 je Nash postal tako nerazumen in paranoičen, da je bil oproščen poučevanja v letnem semestru, čeprav ga je oddelek predlagal za stalno službo. Eno od njegovih bolj bizarnih dejanj je bila zavrnitev prestižnega imenovanja na Univerzi v Chichagu, ker – kót je pisal

predstojniku A. A. Albertu – čaka, da postane cesar Antarktike! Fakulteta MIT in študentje se niso mogli odločiti, ali je Nash zares nor ali samo zelo ekscentričen, sklicujoč se na medlo mejo med genialnostjo in norostjo. Ko je tisto pomlad Alicii uspelo spraviti Nasha v bolnišnico za duševne bolezni, ga je tam obiskal George Mackey, profesor s Harvarda. Mackey je Nasha vprašal, kako lahko kot matematik, predan razumu in logiki, verjame, da ga izvenzemeljska bitja novačijo, naj reši svet. Nash je odgovoril, da njegove ideje o nadnaravnih bitjih prihajajo do njega na enak način kot matematične ideje, zato jih jemlje resno.

Nashev živčni zlom leta 1959 je bil začetek nekaj desetletne bolezni, ki se je menjala z obdobji normalnosti. V avtobiografskem spisu, ki ga je napisal po prejetju Nobelove nagrade, jih je Nash imenoval „medigre vsiljene racionalnosti” in dejal, da „razumne misli postavljajo meje človeškemu pojmovanju zveze z vesoljem”. Ko so konec leta 1959 Nash odpustili iz bolnišnice, je odšel na potovanje v Evropo. Tam je kot posledico „nelokalnega razmišljanja” in želje, postati meščan sveta, odvrigel potni list. Nasilno je bil deportiran iz Švice in Francije ter vrnjen v Princeton. Tam sta ga na koncu mati in sestra poslali v državno bolnišnico Trenton, kjer so ga zdravili z inzulinskimi šoki. V naslednjih letih so antipsihotska zdravila pomagala umiriti (in ne povečati, tako kot verjamejo nekateri) Nashevo zombijevsko obnašanje in mu celo omogočila, da je v bolnišnici napisal članek o Cauchyjevi nalogi za splošno Navier-Stokesovo enačbo. Kadar Nash ni bil zaprt, je nehal jemati zdravila, ker, kot je dejal, „če jemljem zdravila, ne slišim več glasov”. Zadnja leta je Nash skrbnik svojega in Alicijinega sina Johnnyja, ki je prav tako matematik in ima paranoidno shizofrenijo. Nash je o Johnnyju izrekel zgovorne besede, ki bi jih lahko uporabil tudi zase: „Na svojega sina ne gledam le kot na popolnega trpina. Deloma je enostavno izbral pobeg iz sveta.”

Kateri dejavniki so vplivali na Nashevo bolezen? Dve od avtoričinih domnev sta:

- (1) Njegovo štiriletno delo na RAND s čaščenjem racionalnega življenja in množine, njegova geopolitična obsedenost in čudna prisiljena mešanica olimpijske predanosti, paranoje in megalomanije.
- (2) Nashev poskus, medtem ko je bil na MIT, dokazati Riemannovo hipotezo, za katero je Enrico Bombieri dejal, da „ni le problem. Ampak je *resničen* problem.” O Riemannovi hipotezi Nasarjeva trdi: „Nasheva silna želja po rešitvi tega najtežjega in najbolj nevarnega vrha se je izkazala za bistveno pri njegovi bolezni.” Nash sam pa je na plenarnem predavanju svetovnega kongresa psihiatrov v Madridu leta 1996 podal druga dva vpliva: stres zaradi poučevanja ter organizacije poučevanja in njegovi poskusi, začeti leta 1957, da bi razrešil protislovja v kvantni teoriji, ki so „verjetno presegali njegove zmožnosti in ga psihološko destabilizirali”.

Nasheva obsedenost z razumskim ga je vodila v numerologijo in poskuse uporabe matematike (kot na primer diferencialne topologije in algebraične geometrije) v politiki, človeških odnosih, na borzi in podobno. Ko je na primer Hironaka dobil Fieldsovo medaljo za delo o odpravi singularnosti, mu je Nash poslal sporočilo z vprašanjem, ali zna odpraviti singularnosti v enačbi

$$N^5 + I^5 + X^5 + O^5 + N^5 = 0.$$

Včasih delujejo Nasheve blodnje celo smešno: njegovi strahovi o uničenju sveta na primer niso bili le Armagedon, apokalipsa in sodni dan, ampak tudi dan razrešitve singularnosti. Spet drugič pa so njegove blodnje boleče absurde in patetične, tako kot na primer tale stavek, ki ga je Nash pustil na tabli, ko je bil znan kot fantom iz dvorane Fine Hall (na Princetonu): „Mao-Ce-Tung je imel Bar-Mitzvah 13 let, 13 mesecev in 13 dni potem, ko je bil Brežnjev obrezan.”

Nashevo okrevanje od paranoidne shizofrenije je bilo postopno: takšno okrevanje je tako redko, da so leta 1996 na svetovnem kongresu psihiatrov Nashevo predavanje predstavili kot „simbol upanja”. Kaj je pomagalo pri tej čudežni remisiji po skoraj treh desetletjih duševne bolezni? Nihče ne ve – ve se le, da pri tem ni pomagal noben nov način zdravljenja. Nash verjame, da je pri tem pomagala volja do ozdravitve, „podobno kot je volja pomembna pri uspešnem hujšanju; če se nekdo trudi ‘racionalizirati’ svoje mišljenje, lahko pri tem spozna in ovrže iracionalna blodenja.” Nash se je tudi v naprej izogibal vsega, kar je povezano s politiko, vero in poučevanjem, ter se namesto tega posvetil matematiki in računalnikom. Alicia, Nasheva žena, meni, da je na njegovo postopno ozdravitev vplivalo tudi to, „da je nekdo skrbel zanj in da ni bil pod prevelikim pritiskom” ter „mirno življenje” (kot ga imajo skupaj s sinom Johnnym v Princeton Junctionu). Nash je zdaj bolj ponižen, skromen, bolj samozavesten in, kot pravi Alicia „zelo v redu oseba”. Kot kaže nekaj ostrih opazk, ki jih je izrekel na manjši zabavi v dvorani Fine Hall v popoldnevu, ko je bila razglašena Nobelova nagrada, je še vedno ohranil smisel za humor: „Najprej je upal, da mu bo Nobelova nagrada pomagala pri bančni boniteti, ker si zares želi kreditno kartico. Potem je rekel, da se je od njega pričakovalo, da bo vesel, ker si deli Nobelovo nagrado (skupaj s Harsanyjem in Seltenom), ampak on si je želel celo nagrado, ker je zelo potreboval denar.” Celó na vrhuncu norosti kaže, da je Nash ohranil smisel za humor; leta 1959 so njegovega sina kar nekaj časa, preden je dobil ime Johnny, klicali Baby Epsilon.

Obljubil sem še nekaj napak in orehov iz knjige. Glede na to, da je avtorica novinarka in ne matematičarka, sem bil presenečen nad eno samo matematično napako, pa še ta je lahko posledica tiskarskega škrata. Na strani 230 narobe citira Bellovo knjigo *Men in Mathematics*, ko reče,

da je vrednost funkcije zeta pri argumentu  $s$  enaka  $1 + 1/2^s + 1/3^s + \dots$  (divergenca te harmonične vrste bi nekako trivializirala Riemannovo hipotezo!). Drugje zelo dobro razloži matematične pojme ali pa se sklicuje na razlage strokovnjakov, npr. Johna Milnorja. 26 slik, na katerih so večinoma Nash in njegovi sorodniki, je zanimivih, razočaran pa sem bil nad tem, da se Nash v družbi z drugimi matematiki pojavi le na dveh slikah. (Kje je Paul Halmos, ko ga potrebujemo?) Stvarno kazalo ima 19, reference pa 45 strani, kar je dobro in mora za biografijo, kot je tale, tako tudi biti.

In če pod vsem potegnemo črto – ali je Nasheva biografija vredna branja? Moj odgovor je da, če ste očarani nad Nashevo zgodbo, matematično kulturo, ki ga obdaja, in se ne boste dolgočasili pri avtoričinih dolgih razpravah o Nashevi shizofreniji in shizofreniji nasploh. Imam le en zadržek. Nekje na sredi knjige sem postal kar malo depresiven zaradi Nasheve osebnosti. Če torej že začnete brati knjigo, jo zagotovo preberite do konca, ko pridejo na vrsto bolj navdušujoča poglavja.

V prihodnosti boste morda o Nashu slišali kaj več v medijih. Morda bo postal prvi matematik, ki bo osrednji lik hollywoodskega celovečerca<sup>1</sup>. V svojem zadnjem članku Sylvia Nasar piše, da je „hollywoodski producent kupil pravice do Nasheve življenjske zgodbe za ceno, ki se v dolarjih izraža s šestimi števki“ (str. 17 v „Nobel Economics: Spending the Check“, *New York Times*, finančni in poslovni razdelek, 12. 5. 1999). Nasarjeva poudarja, da je sedaj Nash nekako finančno preskrbljen z 200.000 dolarji, ki jih je prejel z Nobelovo nagrado in letno plačo 25.000 dolarjev, ki jo prejema za delno raziskovalno pozicijo na Princetonu. Po dolгих letih spopadanja z revščino je takšna ekonomska sprememba zagotovo primerna za Nobelovega nagrajenca iz ekonomije.

Recenzijo, ki jo je iz angleščine prevedel *Marjan Jerman*, je napisal *Peter Ross*, profesor matematike, ki je študiral na MIT v času, ko je tam učil John Nash. Objavljena je bila v reviji *The College Mathematics Journal*, 31:3, maj 2000, str. 240–244.

---

<sup>1</sup> Po knjigi je bil lani posnet film Čudoviti um. Glavno vlogo igra Russel Crowe, ki je igral naslovno vlogo v filmu Gladiator. Režiser filma je Ron Howard, znan po režiji filma Apollo 13. Film je bil nominiran za osem oskarjev, dobil je štiri: za najboljši film, najboljšega režiserja, stransko igralko (Jennifer Connelly) in scenarij po predlogi (Akiva Goldsman).

# STEFANOVA SILA

JANEZ STRNAD

PACS 01.65.+g, 47.15.-x

Leta 1874 je slovenski fizik Jožef Stefan poročal o sili, s katero se plast tekočine med vzporednima ploščama upira razmikanju plošč. S sistematičnimi merjenji je ugotovil nekaj značilnih zvez. Zveze je podprl z računi v hidrodinamiki, v kateri je upošteval nestisljivost tekočine in delo notranjega trenja. Da bi izboljšal ujemanje z merjenji, je nazadnje je privzel, da tekočina ob ploščah drsi.

## STEFAN'S FORCE

In 1874 the Slovenian physicist Jožef Stefan reported on the force with which a fluid layer between two parallel plates is resisting the pulling apart of plates. With systematic measurements he obtained some characteristic correlations. He verified them by calculations within hydrodynamics taking into account the incompressibility of the fluid and the work done by internal friction. Finally, he postulated that the fluid is slipping at the plates to improve the agreement with measurements.

Med pojme, ki nosijo Stefanovo ime [1], sodi tudi *Stefanova sila*. J. Stefan je dokaj podrobno raziskal silo, s katero se tanka plast tekočine med vzporednima ploščama upira razmikanju plošč [2]. O njegovih poskusih in računanju je vredno na kratko poročati. Današnji študenti fizike silo spoznajo pri fiziki kontinuov [3].

Fiziki pred Stefanom so precej razmišljali o *adheziji*, to je delovanju atomov v trdnem telesu na atome v drugem takem telesu ob dotiku. Vendar so Stefana že začetni poskusi, pri katerih je opazoval interferenco natrijeve svetlobe na zračni plasti med steklenima ploščama, prepričali, da je razmik med ploščama precej večji od dosega molekulskih sil. Interferenco je opazil samo, če je uporabil posebej zglajeni stekleni plošči in ju stisnil drugo na drugo. Tako je vedel, da sta bili pri njegovih poskusih plošči v tolikšnjem razmiku, da sile ni bilo mogoče pripisati adheziji. Zato je govoril o *navidezni adheziji*.

Uporabil je enako veliki plošči z obliko kroga. Eno je obesil na eno stran tehtnice tako, da je bila njena spodnja ploskev vodoravna. Pod njo je namestil drugo ploščo in nanjo položil tri žičke. Na žičke je prislonil vrhnjo ploščo in tehtnico uravnovesil. Žičke so s svojim premerom določale začetno debelino plasti  $h_0$ . Potem je na drugo stran tehtnice položil utež s težo  $F = mg$ . Spočetka je poskušal ugotoviti težo uteži, pri kateri se je zgornja plošča odtrgala od spodnje. Kmalu pa je spoznal, da ravnovesja ni mogoče doseči. Pri obremenitvi pri majhni začetni debelini plasti je opazoval interferenčne proge, a prečka se je opazno zasukala šele čez čas. Tako je razumljivo, da so eksperimentatorji pred Stefanom mislili na ravnovesje. Poljubno majhna dodatna utež je zgornjo ploščo odmaknila od spodnje, le da je pri majhni uteži odmikanje trajalo dalj časa. Tako je uvidel, da ne gre za hidrostatično,

ampak za hidrodinamično nalogo. Odtlej je poskuse izvajal tako, da je plošči potopil v tekočino.

Pri vseh enajstih vrstah poskusov, ki jih je J. Stefan izvedel, je meril čas, v katerem je debelina plasti od začetne vrednosti  $h_0$  narasla do končne vrednosti  $h = 2,6$  mm. Ugotovil je, da je v sicer nespremenjenih okoliščinah ta čas obratno sorazmeren s težo dodane uteži:  $t \propto 1/F$ . Čas je bil tudi tem daljši, čim manjša je bila začetna debelina plasti, tako da je približno veljalo  $t \propto 1/Fh_0^2$ . Uporabil je plošči z različnima radijema  $R$  in ugotovil, da je  $t \propto R^4$ . Vpliv tekočine je raziskal tako, da je meril s štirimi različnimi tekočinami: vodo, vodno raztopino kamene soli, alkoholom in zrakom. Ugotovil je, da so bili časi pri teh tekočinah v razmerju časov, v katerih je skozi enako kapilaro enaka tlačna razlika pognala enako prostornino, torej obratno sorazmerni z viskoznostjo<sup>1</sup>:  $t \propto 1/\eta$ . Med merjenji je ugotovil, kako pomembno je, da sta plošči ves čas poskusa vzporedni. Pri poskusih z zrakom je moral posebej odstraniti električne naboje.

Po poskusih se je Stefan lotil računanja. Zaradi sile, ki poskuša plošči razmakniti, se zmanjša tlak v plasti med ploščama in zato tekočina iz okolice teče med plošči. Upošteval je, da je tekočina nestisljiva. Prostornina tekočine, ki v določenem času dodatno priteče med plošči, je enaka povečanju prostornine, ker se je odmaknila zgornja plošča. Odvisnost radialne komponente hitrosti tekočine od razdalje od osi  $r$  in od razdalje od spodnje meje plasti  $z$  je nastavil kot  $v_r = Cr^n(hz - z^2)$ . Nastavek je ustrezal robnemu pogoju, da na spodnji meji plasti pri  $z = 0$  in na zgornji pri  $z = h$  tekočina ne drsi po mejnih ploskvah. V času  $dt$  v valj z radijem  $r$  dodatno priteče tekočina s prostornino  $\int_0^h 2\pi r dz v_z dt$ . Debelina plasti se v času  $dt$  poveča za  $dh$  in prostornina tega dela se zato poveča za  $\pi r^2 dh$ . Obe količini izenačimo in dobimo zvezo  $2\pi r^{n+1} h^3 C dt/6 = \pi r^2 dh$ . Iz nje izhaja, da je  $n = 1$  in  $C = 3\dot{h}/h^3$ , če s piko zaznamujemo odvajanje po času. S tem dobimo za radialno hitrost

$$v_r = \frac{3r(hz - z^2)}{h^3} \dot{h}. \quad (1)$$

Nato je Stefan upošteval, da se delo teže dodatne uteži porabi za premagovanje upora zaradi viskoznosti pri pretakanju tekočine. Pri tem je zanemaril prirastek kinetične energije plošče in prečke tehtnice. Gostota strižne sile je  $\eta d(dv_r/dz)/dz = \eta dv_r^2/dz^2$ . Delo teže dodatne uteži izenačimo z delom strižne sile na poti  $dr$  v času  $dt$ :

$$F dh = \int_0^R \int_0^h 2\pi r v_r \cdot \eta \frac{d^2 v_r}{dr^2} dr dz dt = 2\pi \eta dt \int_0^R r^3 dr \int_0^h \frac{18 \dot{h}^2 (hz - z^2)}{h^6} dz.$$

<sup>1</sup> Poiseuilleov zakon podaja prostornino pretečene tekočine  $V = (\pi R^4/8\eta)t\Delta p/l$  s časom  $t$ , radijem cevke  $R$  in gradientom tlaka  $\Delta p/l$  z dolžino cevke  $l$ . Pri pretakanju zaradi teže je  $\Delta p/l = \rho g$ . Tako je Stefan izmeril čas pretakanja za vodo 375 s in za alkohol 895 s. Podatek za alkohol je pomnožil z razmerjem gostot uporabljenega alkohola in vode 0,851 in dobil 762 s. Po tem je sklepal, da ima alkohol  $762/375 = 2,03$ -krat večjo viskoznost od vode. Tedaj ni bilo zbirk, ki bi vsebovale preglednice z zanesljivimi podatki o lastnostih snovi, kot jih imamo danes.

Iz enačbe  $Fdh = 3\pi\eta R^4 \dot{h}^2 dt / 2h^3$  sledi za težo dodatne uteži<sup>2</sup>:

$$F = \frac{3\pi\eta R^4 \dot{h}}{2h^3}. \quad (2)$$

Sila tekočine na zgornjo ploščo deluje v nasprotni smeri od sile teže dodatne uteži.

Enačbo (2) integriramo po času, izračunamo čas  $t$ , v katerem se debelina plasti poveča od  $h_0$  na  $h$ , in preuredimo:

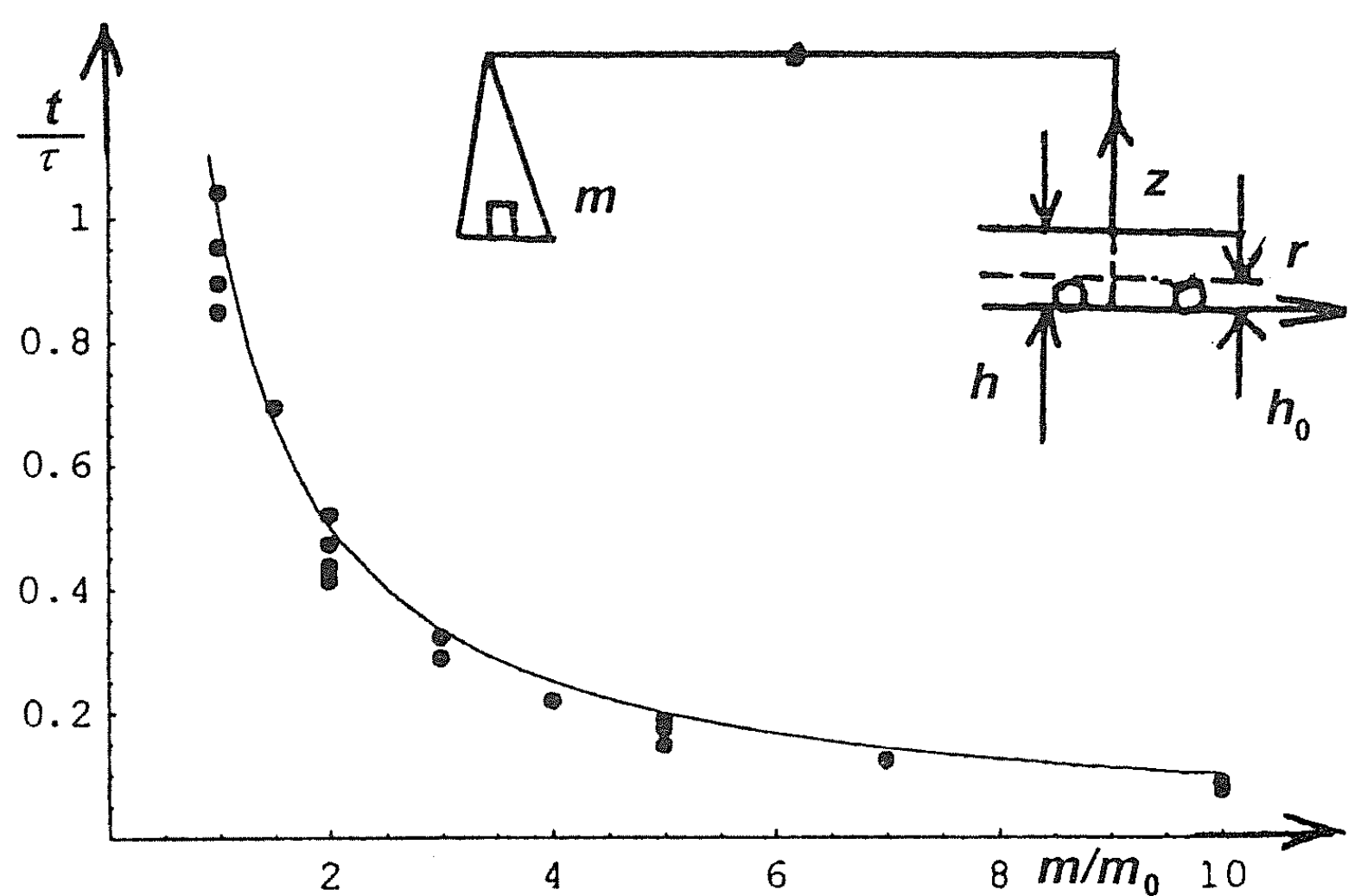
$$\frac{2Ft}{3\pi\eta R^4} = \int_{h_0}^h \frac{dh}{h^3} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{h_0^2} - \frac{1}{h^2} \right). \quad (3)$$

Za težo dodane uteži postavimo  $F = (m/m_0)m_0g$  in dobljeno zvezo zapišemo kot

$$\frac{m}{m_0} \cdot \frac{t}{\tau} = 1, \quad \tau = \frac{3\pi\eta R^4}{4h_0^2 m_0 g} \left( 1 - \frac{h_0^2}{h^2} \right). \quad (4)$$

Stefanovi podatki za pet vrst poskusov z vodo se zadovoljivo ujemajo s krivuljo po enačbi (4) (slika 1). Tudi vrsta poskusov z raztopino kamene soli, dve vrsti poskusov z alkoholom in tri vrste poskusov z zrakom ne dajo slabšega ujemanja.

**Slika 1.** 16 izmerkov J. Stefana pri petih vrstah poskusov z vodo [2] in krivulja po enačbi (4). Na vodoravno os smo nanesli  $m/m_0$  z  $m_0 = 1$  g in na navpično os  $t/\tau$ . Uporabili smo Stefanove podatke, na primer pri prvi vrsti poskusov:  $R = 7,55$  cm,  $h_0 = 0,213$  mm,  $h = 2,6$  mm,  $\eta = 1,035 \cdot 10^{-3}$  kg/ms, kar je dalo  $\tau = 19$  s. Ujemanje se zdi zadovoljivo v okviru natančnosti pri merjenju, ki jo kažejo odmiki izmerkov pri enaki masi dodane uteži, a različnih okoliščinah. Desno zgoraj je nakazana merilna naprava.



Stefan ni narisal diagrama. Ujemanju napovedanih količin z izmerjenimi v podrobnostih ni posvetil veliko pozornosti. Predvsem mu je šlo za to, da je z računom pojasnil štiri sorazmernosti, ki jih je ugotovil neposredno z merjenjem in ki smo jih omenili. Vznemirilo pa ga je spoznanje, da produkt  $Fth_0^2$  ni bil konstanten, kakor bi pričakovali, če bi smeli zanemariti  $(h_0/h)^2$  v primeri z 1. Pri prvih štirih vrstah poskusov z vodo se je ta produkt povečal

<sup>2</sup> S Stokesovim približkom  $\nabla p = \eta \partial^2 \mathbf{v} / \partial z^2$  za nestisljivo tekočino, za katero velja  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , pridemo do enačbe (2) naravnost [3].

za 25 %, ko se je začetna debelina plasti petkrat povečala. Po tem je Stefan sklepal, da ostane konstanten izraz  $Fth_0(h_0 + A)$  z majhnim parametrom  $A$ . V računih je to precej na dolgo poskusil pojasniti s privzetkom, da tekočina na meji s spodnjo in zgornjo ploščo drsi. Za radialno hitrost je namesto enačbe (1) privzel

$$v_r = \frac{3r(hz - z^2 + h_0\eta/k)}{h^3} \dot{h}. \quad (5)$$

V njej naj bi bil  $k$  „koeficient trenja tekočine na meji plošč“. Danes, ko se splošno zanesemo na robni pogoj, da viskozna tekočina ob steni ne drsi, se ta privzetek ne zdi upravičen. Tedaj pa so večkrat pomislili na možnost, da tekočina po steni drsi.<sup>3</sup> V najnižjem redu je Stefan enačbo (4) popravil tako, da je v izrazu za  $\tau$  imenovalec  $4h_0^2m_0g$  dopolnil v  $4m_0gh_0^2 + 16m_0g\eta h_0/k$  in koeficient  $\eta/k$  določil z merjenjem.

Z upoštevanjem sile, ki pospešuje zgornjo ploščo, približka ne bi izboljšali. Čas bi se še podaljšal in bi izmerki ležali nad krivuljo (slika 1), medtem ko jih večina leži pod njo. Približek je bilo mogoče izboljšati le s privzetkom o drsenju tekočine na ploščah, ki smo ga omenili in ki se danes ne zdi upravičen. Odstopanje bi bilo mogoče pojasniti s tem, da plošči med poskusom kljub skrbi nista ostali vzporedni. Na to možnost namiguje Stefanova pripomba o interferenci. Vendar bi Stefan sam verjetno naredil ta sklep, če bi se interferenčna slika spremenila zaradi spremenjenega nagiba plošč.

## LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Sto let Stefanovega zakona*, Obzornik mat. fiz. **26** (1979) 65; *Stefanov tok*, prav tam **32** (1985) 12; *Stefanova naloga*, prav tam **34** (1987) 207; *J. Stefana „Longitudinalno nihanje palic“*, prav tam **40** (1993) 17.
- [2] J. Stefan, *Versuche über die scheinbare Adhäsion*, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien II **69** (1874) 713.
- [3] A. Borštnik, R. Podgornik, M. Vencelj, *Rešene naloge iz mehanike kontinuov*, DMFA, Ljubljana 2001, str. 131.

---

<sup>3</sup> Ugotovili so na primer, da pri pretakanju krvi po kapilarah ne velja Poiseuilleov zakon, in to pojasnili z drsenjem krvi po steni kapilar. Pozneje so spoznali, da celo koloid ne drsi ob steni, če so koloidni delci kroglasti. Stefan je delal poskuse s preprostimi tekočinami, pri katerih ni dvoma, da tekočina ob steni ne drsi.

V skladu z 39. členom Pravil Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije je upravni odbor DMFA na svoji 9. seji 8. oktobra 2001 sprejel

## **PRAVILNIK O PODELJEVANJU DRUŠTVENIH PRIZNANJ**

Ta pravilnik je bil potrjen na 53. občnem zboru DMFA Slovenije dne 20. oktobra 2001 v Kranjski Gori.

### **1. člen**

Priznanje lahko prejme član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (v nadaljevanju Društva ali DMFA) za neposredno delo z mladimi, ki:

- s svojim delom izboljša pouk matematike, fizike ali astronomije v osnovni, srednji ali visoki šoli;
- razširja zanimanje za svoj predmet med učenci, jih uspešno uči, vodi in usmerja njihovo delo v krožkih, tako da dosegajo vidne uspehe v šoli in na tekmovanjih;
- sodeluje s članki, učbeniki in drugimi učnimi in strokovnimi knjigami predvsem pri društvenih publikacijah in s tem izdatno prispeva k popularizaciji svojega predmeta ali k izboljšanju poučevanja.

### **2. člen**

Priznanje lahko prejme tudi član Društva, ki neposredno sicer ne dela z mladimi, je pa njegova društvena, pedagoška, publicistična ali znanstvenoraziskovalna dejavnost tako izrazita, da pozitivno vpliva na razvoj, popularizacijo in ugled matematike, fizike in astronomije.

### **3. člen**

Društvo lahko podeli priznanje tudi organizacijam ali posameznikom, ki niso člani DMFA, če so bistveno prispevali k uspešnemu delu Društva.

### **4. člen**

Pisno priznanje za posameznike je vezano z nagrado, katere obliko vsakokrat določi upravni odbor DMFA.

### **5. člen**

Razpis za podelitev društvenih priznanj mora biti objavljen vsako leto v Obzorniku za matematiko in fiziko vsaj tri mesece pred občnim zborom DMFA.

## 6. člen

Pisni predlog za podelitev priznanja lahko da katerikoli član ali skupina članov DMFA. Obsegati mora dovolj podatkov, da je ob nadaljnjem odločanju mogoča vsestranska presoja.

## 7. člen

Predloge obravnava komisija, ki jo na predlog upravnega odbora imenuje občni zbor za mandatno obdobje dveh let. Predsednik komisije je predsednik DMFA.

## 8. člen

Za svoje delo sprejme komisija poslovnik, ki ga potrdi upravni odbor DMFA.

## 9. člen

Priznanja podeli predsednik Društva na občnem zboru.

V Kranjski Gori, 20. 10. 2001

Predsednik DMFA Slovenije:  
*prof. dr. Zvonko Trontelj*

## VABILO

---

Vabimo vas, da pisne predloge za društvena priznanja pošljete do **10. septembra 2002** na naslov:

**DMFA Slovenije**  
**Komisija za društvena priznanja**  
**Jadranska 19**  
**1000 Ljubljana**

Predlogi morajo vsebovati dovolj podatkov, da bodo zadoščali komisiji za vsestransko presojo in tehtno odločitev.

Predsednik DMFA Slovenije:  
*prof. dr. Zvonko Trontelj*

## NOVE KNJIGE

---

**Matija Cencelj, Dušan Repovš: Topologija, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta, Ljubljana; 2001, 169 str.**

Učbenik *Topologija* je nastal kot razširjena in prečiščena verzija priprav za predavanja istoimenskega predmeta na Pedagoški fakulteti Univerze v

Ljubljani. Kljub pomenu topologije v sodobni matematiki in kljub znatnemu deležu, ki ga ima topologija v naših študijskih programih matematike in pedagoške matematike, je to šele drugi učbenik topologije v slovenščini. Prvi, Strukture III prof. N. Prijatelja, letos obhaja častitljivih trideset let. V vmesnem času smo dobili le še knjigo Metrični prostori prof. J. Vrabca, ki jo lahko vsaj delno štejemo za topološki učbenik (čeprav se avtor sam tega brani).

Knjiga Cencija in Repovša ima šest poglavij. V prvem so vpeljeni osnovni pojmi, kot so topološki prostor, zvezna preslikava, povezanost, kompaktnost, aksiomi separacije ter konstrukcija produktne in kvocientne topologije. V drugem poglavju se avtorja podrobneje ukvarjata z lastnostmi kompaktnih prostorov (polnost, Lebesgueova lema), v tretjem pa z vektorskimi polji na sferah (izrek o „kosmati krogli”) in Brouwerjevim izrekom o negibni točki. Snov omenjenih poglavij je osnova za uporabo topologije na drugih področjih matematike, predvsem v analizi. Četrto poglavje je po naravi bolj geometrično, saj obravnava ploskve in njihovo klasifikacijo, spotoma pa vpelje še pojem triangulacije. Daljnosežnejša glede uporabe v analizi pa je snov petega in šestega poglavja, o prostorih funkcij, vključno z Arzelà-Ascolijevim izrekom, ter o linearnih topoloških prostorih, ki so osnova za funkcionalno analizo.

Knjiga obravnava zahtevno snov, pa kljub temu ni napisana preveč abstraktno. Tudi izbira snovi je primerna, standardna v prvem in premišljena v drugem delu. Nekatera poglavja so primerna za samostojni študij, druga pa so težja in mišljena predvsem kot podpora predavanjem. V primerjavi s prej omenjeno knjigo prof. Prijatelja je razlaga manj podrobna, vendar pa pokriva precej širše področje. Oboje bo, po mojem mnenju, v prid bralcem.

Kdor se bo poglobil v vsebino, še posebej v dokaze, bo opazil, da natančnost in zahtevnost podajanja snovi nihata. Vzroki za to so nekako „sistemski”. V splošni topologiji lahko mnoge izreke dokažemo strogo aksiomatsko, izhajajoč le iz osnovnih definicij. Za nekatere pomembne trditve pa je tak pristop neustrezen, saj so dokazi predolgi in povsem nepregledni, težave pa lahko vendarle obidemo s sklicevanjem na nazornost. Avtor, ki želi predstaviti določeno snov in napisati matematično korekten, vendar berljiv in primerno obsežen učbenik, bo le s težavo vseskozi obdržal enako strogost pri premislekih. Neusklajenost glede tega, kaj je še sprejemljiv argument in kaj ne, pa lahko pri bralcu povzroči določeno zmedo in nelagodje. Ravno ta razkorak med strogostjo dokazovanja, ki se v splošni topologiji približuje tisti v logiki in teoriji množic, ter geometrično predstavo, ki je sicer ohlapna, vendar je pomembno in pogosto nujno vodilo za premisleke, je bržkone glavna ovira pri začetnem študiju topologije. Učbenik *Topologija* je to di-

lemo razrešil le deloma, za preostalo bo moral poskrbeti bodisi učitelj, ki bo knjigo uporabljal pri pripravi predavanj, bodisi bralec sam.

Poleg te pomanjkljivosti, ki jo najdemo v mnogih učbenikih topologije, pa je še ena, ki bi jo avtorja lahko ob eventualnem ponatisu odpravila. V knjigi namreč pogrešam nekoliko več geometrične motivacije in „naravnih“ zgledov, ki bi lahko k samostojnem branju pritegnili tudi bralca, ki ga ne zanima le izpitna snov.

Omenjeni pomanjkljivosti pa še zdaleč nista usodni, zato verjamem, da bodo študenti knjigo dobro sprejeli in da bo uspešno rabila svojemu namenu.

*Petar Pavešić*

## VABILO

---

Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi vse matematike, fizike in astronome na

### **3. KONFERENCO FIZIKOV V OSNOVNIH RAZISKAVAH, STROKOVNO SREČANJE DMFA,**

in

### **54. OBČNI ZBOR DRUŠTVA,**

ki bodo 11. in 12. oktobra 2002 v poslovnokonferenčnem centru Zdravilišča Laško.

Program:

**Petek, 11. 10. 2002**

**3. konferenca fizikov v osnovnih raziskavah in strokovno srečanje DMFA**

8.00 Registracija

9.00 Predavanja, predstavitev plakatov

18.00 Pogovor o aktualni temi

20.00 Večerja, družabni večer

**Sobota, 12. 10. 2002**

9.00–18.00 Strokovno srečanje in 54. občni zbor DMFA

Način prijave prispevkov in udeležbe na 3. konferenci fizikov v osnovnih raziskavah, pregled predavanj na strokovnem srečanju ter dnevni red občnega zbora bodo objavljeni kasneje.

Prijavo za udeležbo na strokovnem srečanju in 5  
pošljite **najkasneje do sobote, 28. septembra**  
podnjih naslovov ali pa jo sporočite po telefonu na

K 11/02



Še posebej vas vabimo, da se strokovnega srečanja  
prispevkom.

Predstavite lahko raziskovalno delo, s katerim se ukvarjate, zanimivosti s  
tega področja oziroma nove metode dela in novosti pri pouku matematike,  
fizike in astronomije (pripomočke, nove vsebine, zanimive eksperimente in  
posebne prilagoditve).

Predstavitev je možna v treh oblikah:

1. s 25- do 30-minutnim prispevkom,
2. s posterjem,
3. s predstavitvijo učila, pripomočka, gradiva.

Na voljo bodo grafoskop, projekcijsko platno, videoprojektor za prenos slike  
z računalnika in panoji za posterje. Računalnik s potrebno programsko  
opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesiti s seboj.

Prijave morajo vsebovati:

1. naslov prispevka,
2. ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor  
zaposlen, oziroma domači naslov,
3. kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12 pt naj ne presega ene  
strani A4).

Prijave prispevkov sprejemamo do **10. septembra 2002** na naslov:

**DMFA**

**Janez Krušič**

**Jadranska 19**

**1000 Ljubljana**

ali na elektronski naslov: [Janez.Krusic@fmf.uni-lj.si](mailto:Janez.Krusic@fmf.uni-lj.si). Povzetkom, ki jih  
boste poslali po pošti, dodajte zapis v elektronski obliki (disketo).

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki  
jo bo imenoval upravni odbor DMFA. Povzetki bodo objavljeni v biltenu  
občnega zbora.

Predsednik DMFA Slovenije:  
*prof. dr. Zvonko Trontelj*