

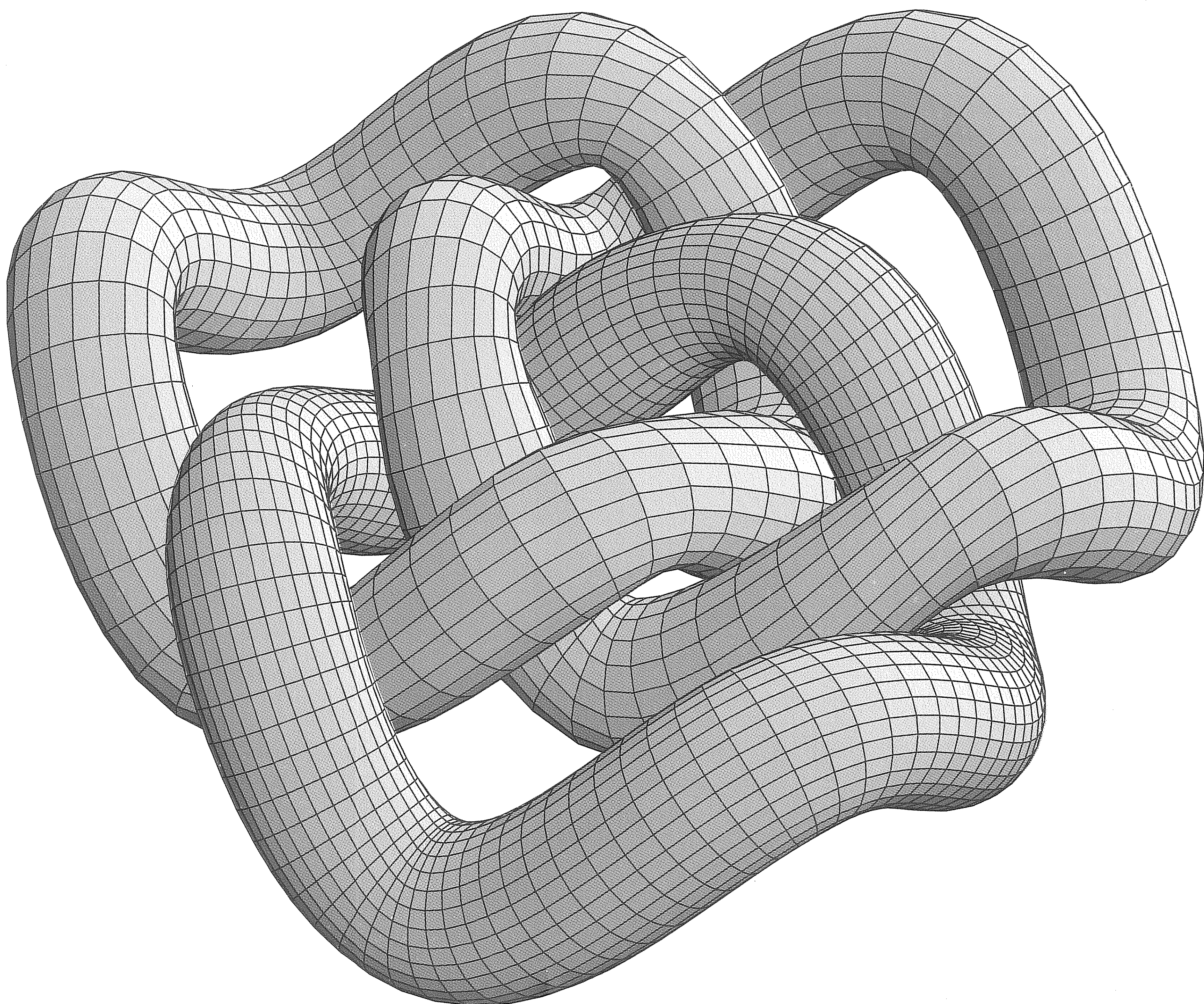
ODPISANO

2002

Letnik 49

1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 2002

letnik 49, številka 1, strani 1–32

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, telefon (01) 476-65-53, telefaks (01) 251-72-81, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d. d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 042961, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Alenka Klokočovnik (društvene novice), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina je 4000 SIT, za študente 2000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove je 8000 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane je 800 SIT, stare številke 520 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1450 izvodov.

Revijo sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2002 DMFA Slovenije – 1476

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles

Str.–Page

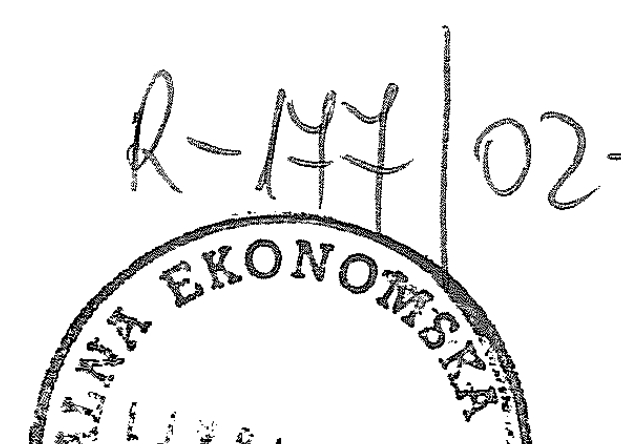
Kvadratični sistemi navadnih diferencialnih enačb in algebra — Quadratic systems of ordinary differential equations and algebra (Matej Mencinger)	1–9
Primer uporabe teorije grafov v mobilni telefoniji — An application of graph theory in mobile telecommunication (Petra Šparl in Janez Žerovnik)	10–20
Prožni trak kot model vesolja — The elastic ribbon as a model universe (Janez Strnad)	21–27
Ob petstoletnici smrti B. Pergerja — The 500 th anniversary of death of B. Perger (Marijan Prosen)	28–30

Vesti — News

Matjaž Omladič – dobitnik Zoisove nagrade za leto 2001 (Milan Hladnik)	31–32
Egonovih šestdeset (Tomaž Pisanski)	32–IV
Borut Zalar – dobitnik Zoisovega priznanja za leto 2001 (Matej Brešar)	IV

Utrinek

Evolucija poučevanja matematike v osnovni šoli (Roman Drnovšek)	30
Na naslovnici, ki jo je oblikoval Bor Plestenjak, so borromejski obroči (Borromean rings). Imenujejo se po italijanski plemiški družini Borromeo, ki jih je imela v svojem grbu. Če odstranimo poljuben obroč, preostala dva razpadeta.	



KVADRATIČNI SISTEMI NAVADNIH DIFERENCIALNIH ENAČB IN ALGEBRA

MATEJ MENCINGER

Math. Subj. Class. (1991) 34A34.

V članku je obravnavana bijektivna zveza med homogenimi kvadratičnimi sistemi navadnih diferencialnih enačb prvega reda in ustreznimi algebrami. Na konkretnem primeru je razložena kvalitativna analiza rešitev sistema v ravnini.

QUADRATIC SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND ALGEBRA

The one to one correspondence between first order quadratic systems of ODE's and algebra is studied. On a concrete example in the plane, the qualitative analysis of solutions is represented.

1. Uvod

Iz dodiplomske matematike je bralcem znano, da je mogoče linearne sisteme diferencialnih enačb reševati z algebrainimi metodami, konkretno z uporabo spektralne analize matrik. Kadar ima matrika A same različne lastne vrednosti, so osnovne rešitve sistema

$$\vec{x}' = A\vec{x}$$

oblike

$$\vec{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} \vec{a}_i,$$

kjer so λ_i lastne vrednosti, $\vec{a}_i$ pa ustrezni lastni vektorji matrike A . Če pa ima matrika tudi korenske vektorje, imajo rešitve malo bolj zapleteno obliko. Svoje znanje o tej temi lahko bralci obnovijo v [3].

Namen tega članka je prikazati, kako lahko v določenih primerih tudi nelinearne sisteme obravnavamo z algebrainimi metodami. Zaradi enostavnosti prikaza se bomo omejili na kvadratične sisteme v ravnini. To so sistemi oblike

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_1^2 + 2b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2 \end{aligned}; \quad a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R} \text{ za } i = 1, 2. \quad (1)$$

Ti sistemi niso vedno rešljivi z elementarnimi funkcijami, zato je glavni smisel njihove teorije kvalitativna analiza in risanje faznih diagramov. Prvi, ki je te sisteme obravnaval na način, ki je opisan v tem članku, je bil Marcus v [1]. Med najpogostejše citiranimi deli na tem področju je danes gotovo Walcherjeva monografija [4].

2. Zveza z algebro

Zaradi enostavnejšega zapisa bomo v nadaljevanju uporabljali naslednji oznaki

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

Desna stran sistema (1) je *kvadratna forma* $\vec{K} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\vec{K}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} a_1 x_1^2 + 2b_1 x_1 x_2 + c_1 x_2^2 \\ a_2 x_1^2 + 2b_2 x_1 x_2 + c_2 x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Če definiramo bilinearno formo $\vec{B} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\vec{B}(\vec{x}, \vec{X}) = \begin{bmatrix} a_1 x_1 X_1 + b_1 x_1 X_2 + b_1 X_1 x_2 + c_1 x_2 X_2 \\ a_2 x_1 X_1 + b_2 x_1 X_2 + b_2 X_1 x_2 + c_2 x_2 X_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

lahko hitro preverimo, da velja $\vec{K}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}, \vec{x})$.

Zaradi simetričnosti forme (2) postane vektorski prostor $(\mathbb{R}^2, +)$, opremljen z množenjem

$$\vec{x} * \vec{X} := \vec{B}(\vec{x}, \vec{X}) \quad \text{za poljubna } \vec{x}, \vec{X} \in \mathbb{R}^2,$$

komutativna algebra.

Množenje v končno dimenzionalni algebri lahko podamo s tabelo množenja. Povedati moramo, kakšni so produkti baznih vektorjev. V našem primeru si izberimo bazo

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Tedaj je $\vec{e}_1 * \vec{e}_1 = \vec{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$, $\vec{e}_1 * \vec{e}_2 = \vec{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ter $\vec{e}_2 * \vec{e}_2 = \vec{B}(\vec{e}_2, \vec{e}_2)$. Iz formule (2) za $\vec{B}(\vec{x}, \vec{X})$ si lahko hitro izračunamo, da algebri $\mathcal{A}_* = (\mathbb{R}^2, +, *)$, ki je prirejena sistemu (1), pripada naslednja tabela množenja

$*$	$\vec{e}_1$	$\vec{e}_2$
$\vec{e}_1$	$a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2$	$b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$
$\vec{e}_2$	$b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2$	$c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2$

Opomba. V tej algebri lahko sistem (1) zapišemo kot

$$\vec{x}' = \vec{x} * \vec{x} = \vec{x}^2. \quad (3)$$

Ker je v enodimenzionalnem primeru to *Riccatijeva enačba*, bomo tudi zgornjo enačbo imenovali *Riccatijeva enačba*.

O nadaljnjih zvezah med kvadratičnimi sistemi in ustreznimi algebrami glej [2] in [4].

3. Pomen nilpotentov in projektorjev

V algebri sta pojma projektor in nilpotent zelo pomembna. *Projektor* je element, ki zadošča pogoju $\vec{p}^2 = \vec{p}$. Med *nilpotenti* pa nas bodo zanimali predvsem tisti reda 2; torej tisti, ki zadoščajo pogoju $\vec{n}^2 = \vec{0}$.

Naj bo torej $\vec{x}' = \vec{x} * \vec{x} = \vec{x}^2$ Riccatijeva enačba v algebri $\mathcal{A}$, ki pripada množenju $*$, in naj bo $\vec{n} \in \mathcal{A}$ nilpotent reda 2. Funkcija $\vec{x}(t) = \vec{n}$ je rešitev enačbe (3) z začetnim pogojem $\vec{n}$, saj je $\vec{x}(0) = \vec{n}$ in $\vec{x}'(t) = \vec{0} = \vec{n}^2 = \vec{x}^2(t)$. Vse točke s krajevnim vektorjem $\vec{n}$, za katere velja $\vec{n}^2 = \vec{0}$, imenujemo *kritične* (stacionarne) *točke*.

Ker je za vsako realno število λ

$$(\lambda \vec{n})^2 = \lambda^2 \vec{n}^2 = \vec{0},$$

so večkratniki nilpotenta tudi sami nilpotenti. Pokazali smo naslednjo trditev:

Trditev 1. *Če ima algebra $\mathcal{A}_*$, ki pripada sistemu (1), neničeln nilpotent reda 2, ima sistem (1) premico kritičnih točk. Vsaka točka te premice generira konstantno rešitev sistema (1).*

Naj bo zdaj $\vec{p}$ projektor algebre $\mathcal{A}_*$, ki ustreza enačbi (3). Posebno rešitev enačbe (3) poiščimo z nastavkom

$$\vec{x}(t) = f(t) \cdot \vec{p},$$

kjer je $f(t)$ realna odvedljiva funkcija. Zaradi

$$\vec{x}'(t) = f'(t) \cdot \vec{p}$$

in

$$[\vec{x}(t)]^2 = f^2(t) \cdot \vec{p}^2 = f^2(t) \cdot \vec{p}$$

dobimo za f navadno diferencialno enačbo z ločljivima spremenljivkama

$$\frac{df}{dt} = f^2,$$

katere rešitev je

$$f(t) = \frac{1}{C - t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Skupna rešitev enačbe (3)

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{C - t} \cdot \vec{p}$$

v celoti leži na premici $\mathbb{R}\vec{p} = \{\lambda \vec{p} : \lambda \in \mathbb{R}\}$. Ker je konstanto C mogoče poljubno izbrati, sledi, da vsaka rešitev sistema (1), katere začetni pogoj

leži na premici $\mathbb{R}\vec{p}$, v celoti leži na tej premici. Takim premicam pravimo *žarki* sistema diferencialnih enačb. Velja torej:

Trditev 2. Če ima algebra $\mathcal{A}_*$ kak netrivialen projektor, ima sistem (1) žarkovne rešitve.

Zgornji izrek velja tudi v obratni smeri (glej [2], stran 91). Velja namreč, da je vsaka žarkovna rešitev sistema (1) porojena z nekim projektorjem algebre $\mathcal{A}$.

4. Kvalitativna analiza rešitev

V tem razdelku si bomo na konkretnem primeru ogledali, kako lahko s pomočjo določitve projektorjev in nilpotentov reda 2 v ustrezni algebri $\mathcal{A}_*$ ter s pomočjo analize predznakov količin $\dot{r}$ in $\dot{\varphi}$, kjer sta r in φ običajni *polarni koordinati*, določimo kvalitativni potek rešitev sistema (1) in tako kvalitativno opišemo fazni diagram obravnavanega sistema.

Graf rešitve, $x = x(t)$, $y = y(t)$, sistema (1) pri danem začetnem pogoju, predstavljen v (x, y) ravnini, na katerem s puščico označimo smer naraščanja parametra t , imenujemo *trajektorija* sistema. *Fazni diagram* sistema (1) je množica trajektorij v ravnini. Iz njih je za poljuben začetni pogoj $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ mogoče razbrati kvalitativni potek rešitve za $t > t_0$.

Zgoraj omenjeni količini $\dot{r}$ in $\dot{\varphi}$ sta radialna in tangencialna hitrost delca ob času t . Za uporabo v praksi je najpomembneje, da lahko obe količini določimo direktno iz sistema (1). Pri tem nam ni treba poznati eksplicitnih rešitev $x = x(t)$, $y = y(t)$. Iz zvez $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ter $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ namreč sledi:

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (4)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2}. \quad (5)$$

Imenovalca v (4) in (5) sta nenegativna, zato so predznaki obeh hitrosti odvisni zgolj od predznakov obeh števec. Pomen predznakov $\dot{r}$ in $\dot{\varphi}$ je naslednji: če je v neki točki $\dot{r}$ pozitiven, se delec oddaljuje od izhodišča, če je $\dot{\varphi}$ pozitiven, se delec giblje v nasprotni smeri urnega kazalca. Če je v neki točki $\dot{r}$ negativen, se delec približuje k izhodišču, če je $\dot{\varphi}$ negativen, se delec giblje v smeri urnega kazalca. V točkah, ki so na neki trajektoriji najbolj ali najmanj oddaljene od izhodišča, velja $\dot{r} = 0$. Če na neki premici velja $\dot{\varphi} = 0$, le-ta vsebuje projektor.

V nadaljevanju bomo kot zgled zgoraj nakazane metode obravnavali sistem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y^2 \\ \dot{y} &= 2xy + y^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Hitro lahko preverimo, da mu v bazi $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ pripada algebra s tabelo množenja

$$\begin{array}{c|c|c}
 * & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \\
 \hline
 \vec{e}_1 & \vec{0} & \vec{e}_2 \\
 \vec{e}_2 & \vec{e}_2 & \vec{e}_1 + \vec{e}_2
 \end{array} . \quad (7)$$

Netrivialne projektorje $\vec{p} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ algebre (7) določimo iz enačbe $\vec{p}^2 = \vec{p}$. Izračunajmo

$$\begin{aligned}
 \vec{p}^2 &= \vec{p} * \vec{p} \\
 &= (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) * (x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2) \\
 &= x^2 \cdot \vec{e}_1 * \vec{e}_1 + 2xy \cdot \vec{e}_1 * \vec{e}_2 + y^2 \cdot \vec{e}_2 * \vec{e}_2 \\
 &= x^2 \cdot \vec{0} + 2xy \cdot \vec{e}_2 + y^2 \cdot (\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \\
 &= y^2 \vec{e}_1 + (2xy + y^2) \vec{e}_2.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Zaradi linearne neodvisnosti vektorjev $\vec{e}_1$ in $\vec{e}_2$ dobimo sistem algebrskih enačb

$$\begin{aligned}
 y^2 &= x \\
 2xy + y^2 &= y
 \end{aligned}$$

z rešitvami $x = y = 0$ in $y = -1, x = 1$ ter $y = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4}$. Netrivialna projektorja sta torej

$$\vec{p}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 \quad \text{in} \quad \vec{p}_2 = \frac{1}{4}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

Netrivialne nilpotente algebre (7) določimo iz enačbe $\vec{n}^2 = \vec{0}$. Pomagamo si z (8):

$$\begin{aligned}
 y^2 &= 0 \\
 2xy + y^2 &= 0
 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad y = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Netrivialni nilpotenti algebre (7) so neničelni večkratniki vektorja $\vec{n} = \vec{e}_1$.

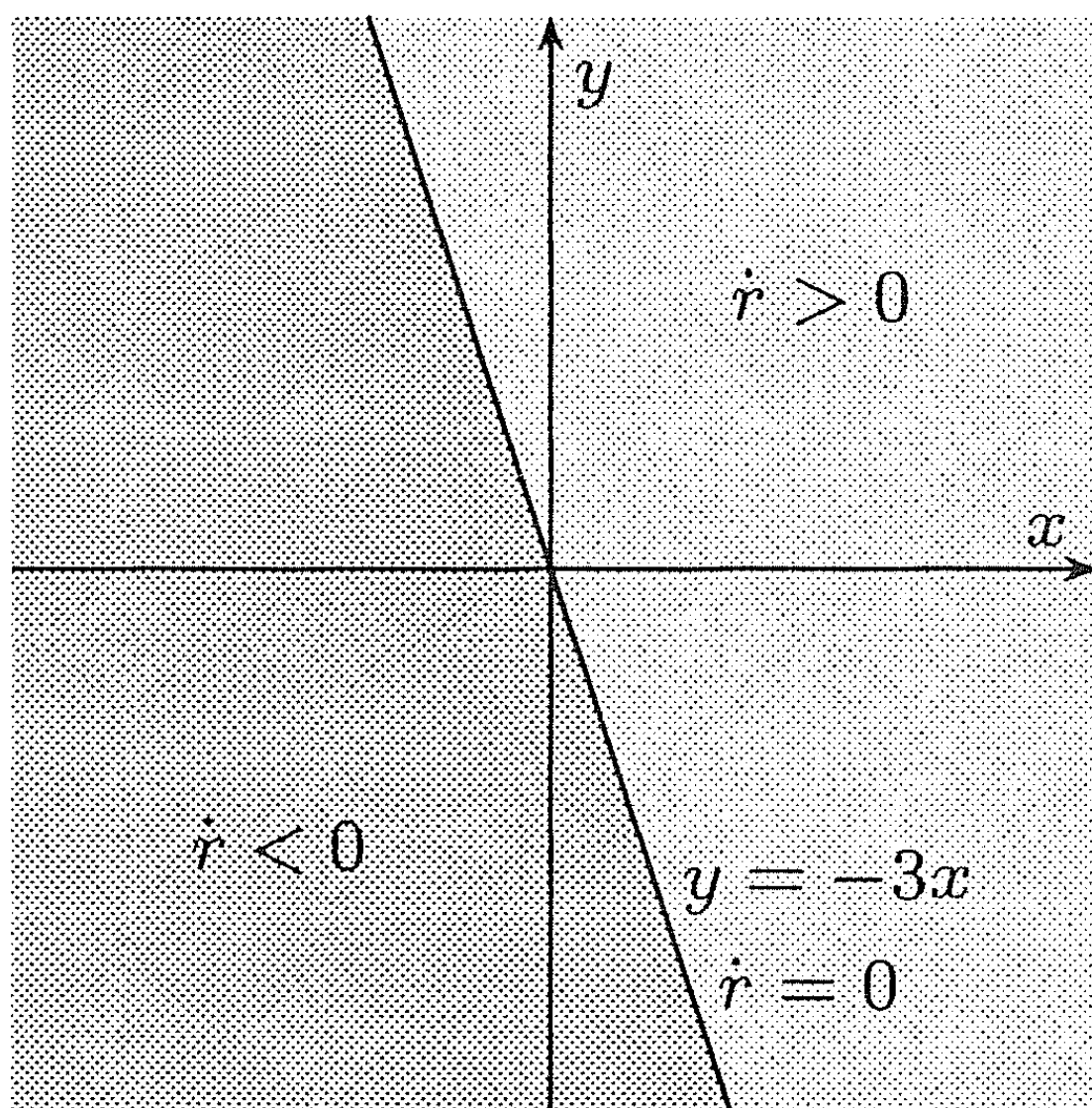
Po trditvah 1 in 2 iz prejšnjega razdelka sta premici $y = -x$ in $y = 2x$ žarkovni rešitvi, os x pa je premica kritičnih točk.

Izračunajmo še

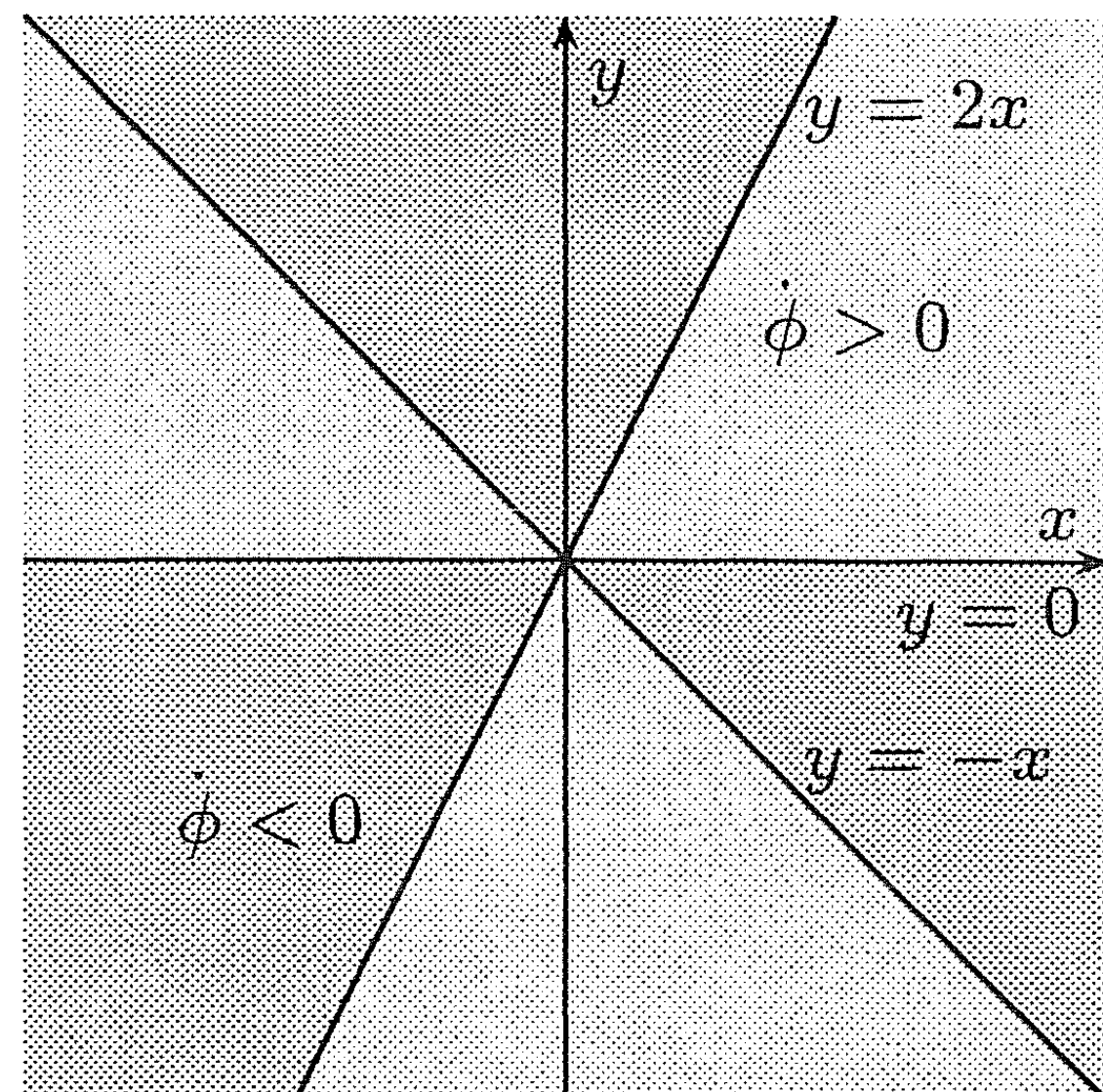
$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 &= \frac{xy^2 + y(2xy + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
 &= \frac{y^2(3x + y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}
 \end{aligned} \quad (9)$$

in

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{x(2xy + y^2) - yy^2}{x^2 + y^2} \\
 &= \frac{y(y+x)(-y+2x)}{x^2 + y^2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$



Slika 1



Slika 2

Na slikah 1 in 2 vidimo območji $\dot{r} > 0$ in $\dot{r} < 0$ ter območji $\dot{\phi} > 0$ in $\dot{\phi} < 0$.

Iz (9) sklepamo, da je $\dot{r} > 0$ na množici $\dot{r}_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > -3x\}$, na množici $\dot{r}_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < -3x\}$ je $\dot{r} < 0$. Na premicah $y = 0$ in $y = -3x$ je količina $\dot{r}$ ničelna. Množici $\dot{r}_+$ in $\dot{r}_-$ sta prikazani na sliki 1.

Iz (10) sklepamo, da je na množici

$$\dot{\phi}_+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < 2x \vee 0 < y < -x \vee (y < 2x \wedge y < -x) \right\}$$

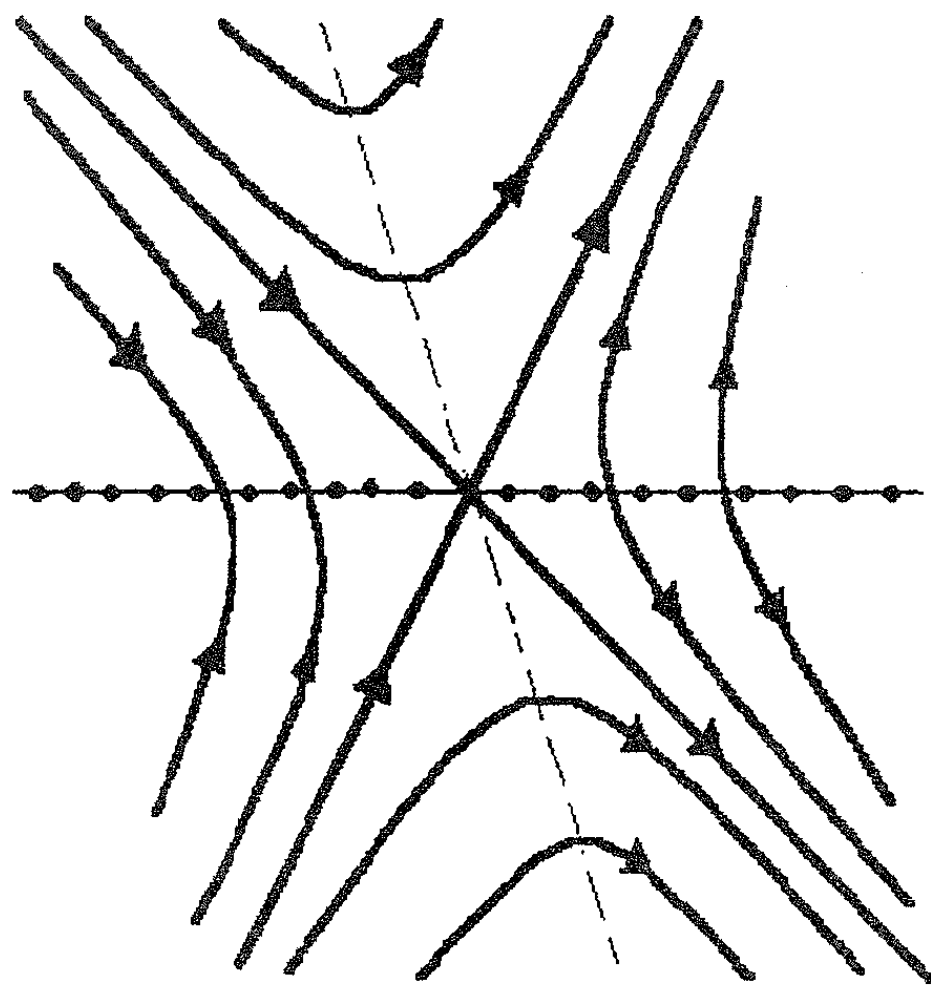
količina $\dot{\phi}$ pozitivna. Količina $\dot{\phi}$ je negativna na množici

$$\dot{\phi}_- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (y > -x \wedge y > 2x) \vee 2x < y < 0 \vee -x < y < 0 \right\}.$$

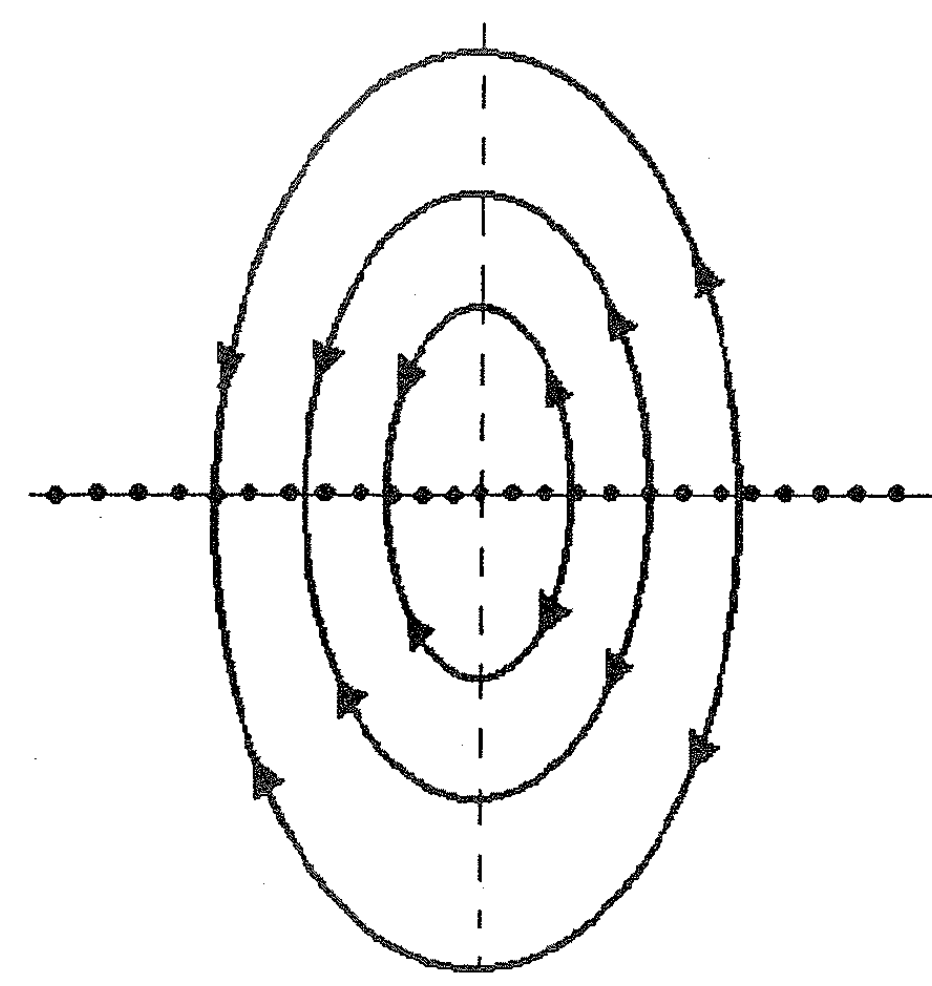
Na premicah $y = 0$, $y = -x$ in $y = 2x$ pa je $\dot{\phi} = 0$. Množici $\dot{\phi}_+$ in $\dot{\phi}_-$ sta prikazani na sliki 2.

Na osnovi zgornjih ugotovitev lahko skiciramo fazni diagram za obravnavani sistem. Le-ta je prikazan na sliki 3, kjer je premica kritičnih točk označena s pikčasto črto, žarkovni rešitvi sta narisani z debelejšo črto s puščico, ki nakazuje smer gibanja delca, ko parameter t narašča, vse druge

trajektorije pa so označene s tanjšimi črtami. S prekinjeno črto je označena premica, na kateri je $\dot{r} = 0$.



Slika 3



Slika 4

Na sliki 3 je prikazan fazni portret sistema (6), na sliki 4 pa vidimo fazni portret sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^2, \\ \dot{y} &= 2xy.\end{aligned}$$

5. Ekvivalenčni razredi sistemov

Za konec bomo pokazali, kako lahko s pomočjo algebre določimo vse možne fazne portrete kvadratičnih sistemov diferencialnih enačb v ravnini. Najprej definirajmo relacijo $\sim$:

Definicija 3. Naj bosta

$$\vec{x}' = \vec{K}_1(\vec{x}) \quad (11)$$

in

$$\vec{y}' = \vec{K}_2(\vec{y}) \quad (12)$$

kvadratična sistema enačb v $\mathbb{R}^n$. Pravimo, da je sistem (11) v relaciji $\sim$ s sistemom (12) natanko tedaj, ko obstaja taka bijektivna linearna preslikava $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ki poljubno rešitev $\vec{x}(t)$ sistema (11) preslika v rešitev sistema (12).

Naj bo $\vec{y} = A\vec{x}$. Če (11) pomnožimo z leve z A in upoštevamo, da je $A\vec{x}$ rešitev sistema (12) in A konstantna matrika, dobimo

$$A\vec{x}' = AK_1(\vec{x}) = K_2(A\vec{x}). \quad (13)$$

Sedaj je očitno, da je zgornja relacija ekvivalenčna. Refleksivnost nam da identična preslikava oziroma matrika I , tranzitivnost produkt matrik in simetričnost matriki A inverzna matrika.

Na tem mestu ni odveč opozorilo, da ta relacija ohranja zgolj kvalitativne lastnosti sistemov, kot so na primer število in narava kritičnih točk, omejenost rešitev itd. Metrične lastnosti se ne ohranjajo, zato se lahko zgodi, na primer, da ima eden od ekvivalentnih sistemov za rešitve krožnice, drugi pa elipse.

Zvezo med ekvivalenčno relacijo $\sim$ in algebro nam zagotavlja naslednji izrek:

Izrek 4. *Naj bosta $\vec{x}' = \vec{K}_1(\vec{x})$ in $\vec{y}' = \vec{K}_2(\vec{y})$ kvadratična sistema enačb v $\mathbb{R}^n$ ter $(\mathbb{R}^n, *)$ in $(\mathbb{R}^n, \circ)$ njima prirejeni komutativni algebri. Naj bo $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linearna bijekcija. Tedaj sta sistema ekvivalentna prek preslikave A natanko tedaj, ko je $A : (\mathbb{R}^n, *) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \circ)$ izomorfizem ustreznih algeber.*

Dokaz. Naj bosta najprej sistema $\vec{x}' = \vec{K}_1(\vec{x})$ in $\vec{y}' = \vec{K}_2(\vec{y})$ ekvivalentna prek preslikave A . Tedaj je izpolnjen pogoj (13). Upoštevajmo, da je $\vec{K}_1(\vec{x}) = \vec{x} * \vec{x}$ ter $\vec{K}_2(\vec{y}) = \vec{y} \circ \vec{y}$, in dobimo:

$$A(\vec{x} * \vec{x}) = A\vec{x} \circ A\vec{x} \quad \text{za vsak } \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (14)$$

Zaradi komutativnosti algebre $(\mathbb{R}^n, *)$ velja:

$$\vec{x}_1 * \vec{x}_2 = \frac{1}{2} \left[(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)^2 - \vec{x}_1^2 - \vec{x}_2^2 \right].$$

Če zgornjo enakost preslikamo z A in upoštevamo, da preslika A kvadrate iz algebre $(\mathbb{R}^n, *)$ v kvadrate iz algebre $(\mathbb{R}^n, \circ)$ ter komutativnost algebre $(\mathbb{R}^n, \circ)$, dobimo:

$$A(\vec{x}_1 * \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 \circ A\vec{x}_2 \quad \text{za vsaka } \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n,$$

kar pomeni, da je A izomorfizem ustreznih algeber.

Naj bo zdaj A izomorfizem algeber $(\mathbb{R}^n, *)$ in $(\mathbb{R}^n, \circ)$:

$$A(\vec{x}_1 * \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 \circ A\vec{x}_2 \quad \text{za vsaka } \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Za $\vec{x}_1 = \vec{x}_2 = \vec{x}$ dobimo

$$A(\vec{x} * \vec{x}) = A\vec{x} \circ A\vec{x}, \quad \text{za vsak } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Upoštevajoč $\vec{K}_1(\vec{x}) = \vec{x} * \vec{x}$ in $\vec{K}_2(\vec{y}) = \vec{y} \circ \vec{y}$ dobimo

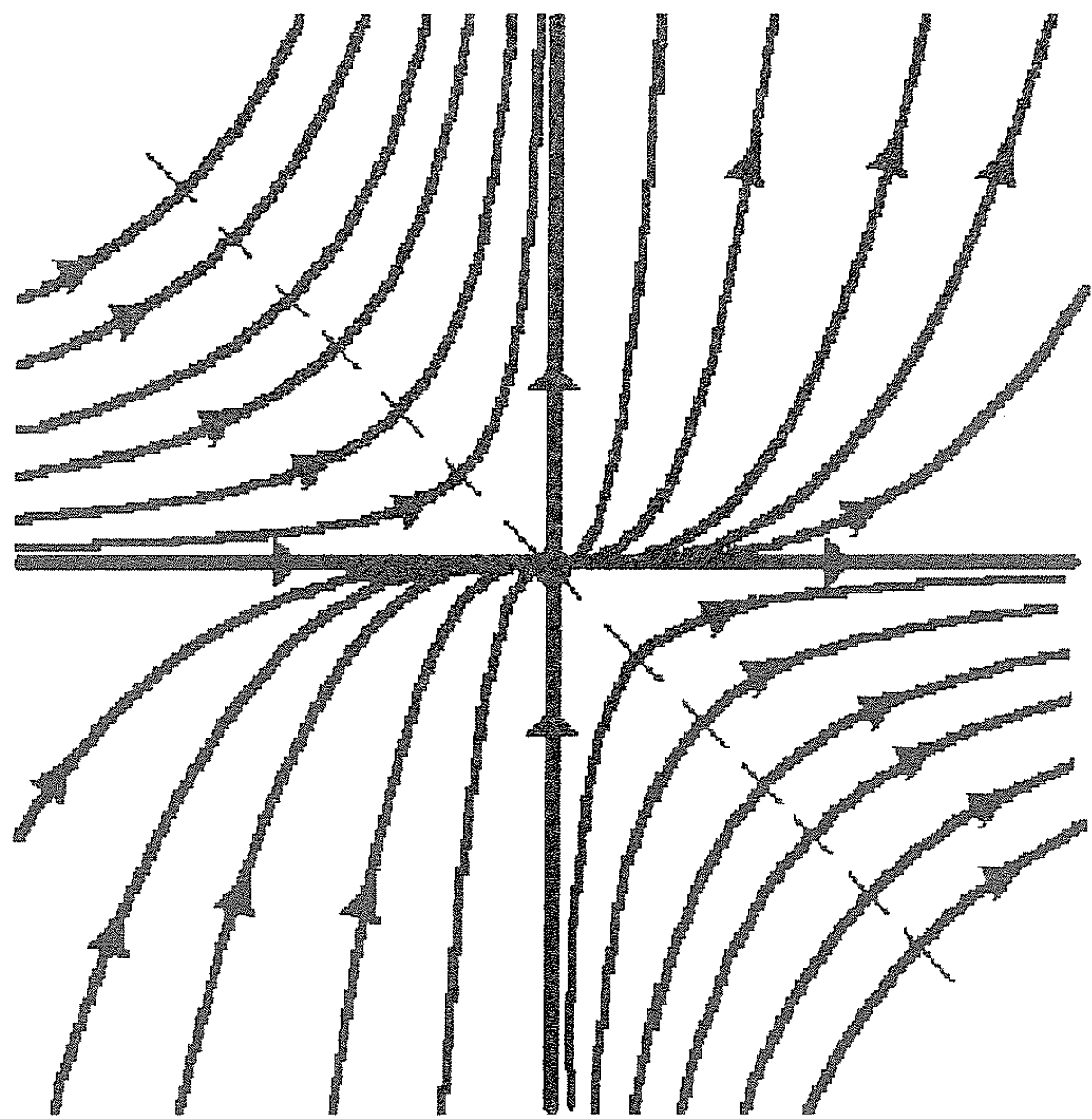
$$AK_1(\vec{x}) = K_2(A\vec{x}), \quad \text{za vsak } \vec{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (15)$$

Naj bo zdaj $\vec{x}$ rešitev enačbe $\vec{x}' = K_1(\vec{x})$ in $\vec{y} = A\vec{x}$. Tedaj iz (15) sledi

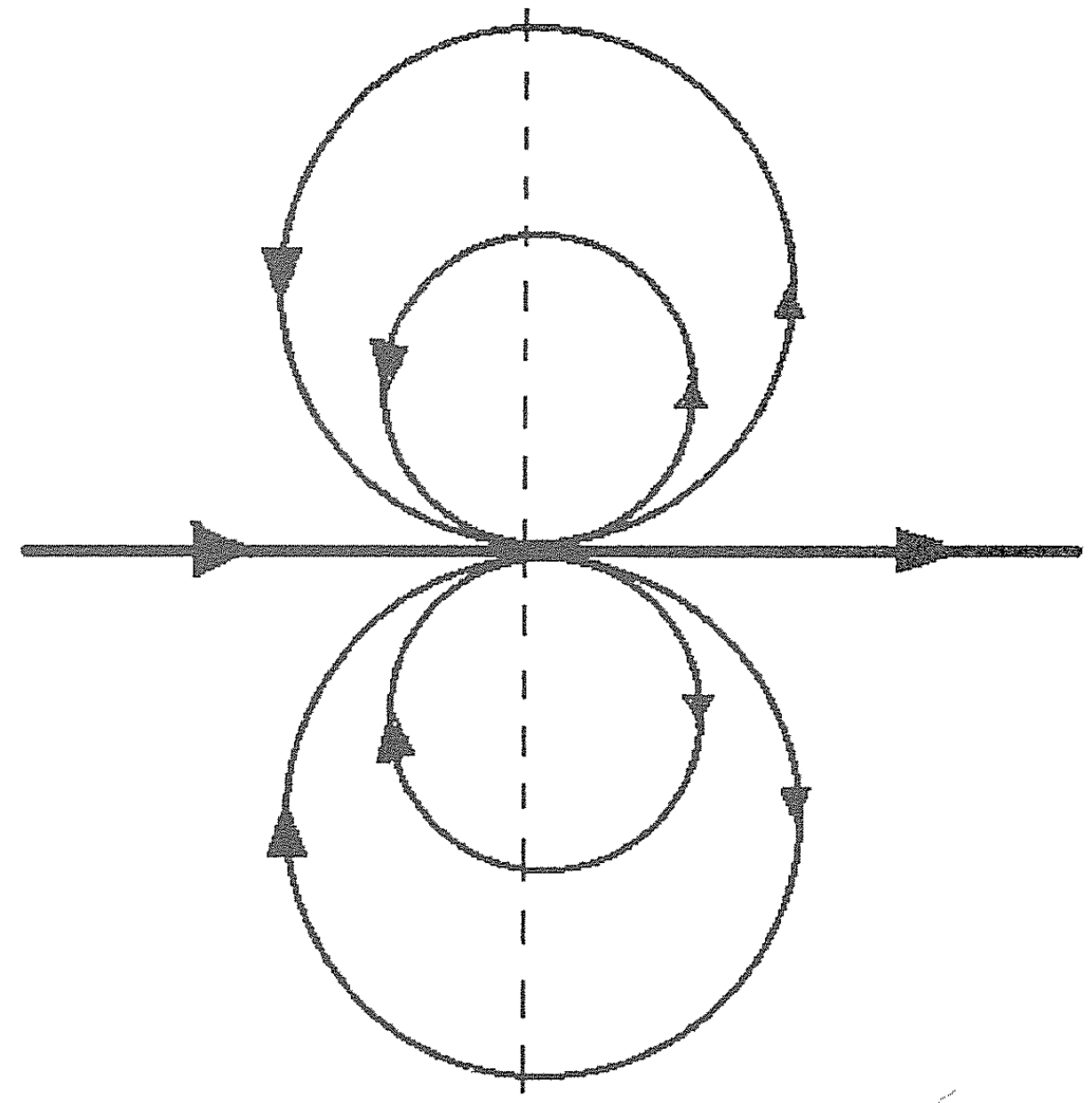
$$\vec{y}' = A\vec{x}' = AK_1(\vec{x}) = K_2(A\vec{x}) = K_2(\vec{y}).$$

To pa pomeni, da sta sistema $\vec{x}' = \vec{K}_1(\vec{x})$ in $\vec{y}' = \vec{K}_2(\vec{y})$ ekvivalentna prek preslikave A . ■

V članku [1] je Marcusu uspelo klasificirati vse dvodimenzionalne realne algebre. Za vsak ekvivalenčni razred sistemov dobimo enega konkretnega predstavnika. Fazne diagrame za vsakega izmed njih lahko narišemo tako, kot je opisano v prejšnjem razdelku. Vse podrobnosti in dobljene rezultate si lahko ogledate v [2].



Slika 5



Slika 6

V prejšnjem razdelku smo videli, da je fazni portret sistema povezan s številom projektorjev in nilpotentov reda 2 v ustrezni algebri. Podrobno smo obravnavali sistem z dvema projektorjema in enim nilpotentom. Na sliki 4 si za konec lahko kot zanimivost ogledate še fazni portret sistema $\dot{x} = y^2$, $\dot{y} = 2xy$, ki ustreza algebri z enim samim nilpotentom in brez netrivialnih projektorjev. Na sliki 5 je fazni portret sistema $\dot{x} = 2x^2 + 2xy$, $\dot{y} = 2xy + \beta y^2$ ($\beta > 2$), ki mu ustreza algebra z dvema netrivialnima projektorjema in brez netrivialnih nilpotentov. Na sliki 6 pa vidimo fazni portret sistema $\dot{x} = x^2 - y^2$, $\dot{y} = 2xy$, ki mu ustreza algebra kompleksnih števil; torej algebra z enim samim netrivialnim projektorjem in brez netrivialnih nilpotentov. V ravnini je poleg zgornjih štirih še 19 drugih neekvivalentnih razredov kvadratičnih sistemov.

LITERATURA

- [1] L. Marcus, *Quadratic Differential Equations and Nonassociative Algebras*, Ann. Math. Studies 45 (1960), Princeton Univ. Press, 185–213.
- [2] M. Mencinger, *Diferencialne enačbe in algebra – magistrsko delo*, Pedagoška fakulteta v Mariboru, Maribor, 1999.
- [3] F. Križanič, *Navadne in parcialne diferencialne enačbe*, DMFA, Ljubljana, 1985.
- [4] S. Walcher, *Algebras and Differential Equations*, Hadronic Press, Inc., Palm Harbor, 1991.

PRIMER UPORABE TEORIJE GRAFOV V MOBILNI TELEFONIJ

PETRA ŠPARL IN JANEZ ŽEROVNIK

Math. Subj. Class. (2000): 05C15, 05C85, 05C90, 68R10

Članek obravnava nalogo večbarvanja uteženih grafov, ki je dober model za problem dodeljevanja kanalov v celičnih mrežah mobilne telefonije.

AN APPLICATION OF GRAPH THEORY IN MOBILE TELECOMMUNICATION

The problem of multicoloring of weighted graphs, which is a good model for the channel assignment problem in cellular networks, is discussed.

1. Uvod

Teorija grafov sodi med najbolj živahna področja sodobne matematike, gotovo tudi zaradi aplikacij na mnogih področjih, na primer v računalništvu, operacijskih raziskavah, družboslovju in kemiji (veliko primerov najdemo v [8]). Tu bomo predstavili primer uporabe teorije grafov v mobilni telefoniji. Na kratko bomo opisali nekoliko poenostavljeno nalogo, s katero se v bolj ali manj zaostreni obliki spoprime vsak ponudnik storitev mobilne telefonije. Več pozornosti bomo namenili nalogi večbarvanja razreda heksagonalnih grafov. Poleg tega, da je motivirana s praktičnim problemom, ima naloga nekaj lepih lastnosti: mogoče jo je elementarno, a strogo formalno definirati in jo elementarno, vendar sorazmerno netrivialno rešiti, hkrati pa si lahko zastavimo še nekaj zanimivih podvprašanj.

Omejenost frekvenčnega spektra je ob siloviti rasti števila uporabnikov v zadnjem času ena od glavnih težav pri načrtovanju omrežij v brezžični telefoniji. V sodobnih mobilnih sistemih se uporablja celični sistem [5], pri katerem so velika področja razdeljena na več manjših, imenovanih *celice*. Visoko zmogljiv oddajnik je nadomeščen z več oddajniki manjše moči, ki pokrivajo le majhen del celotnega območja danega sistema, kar omogoča večkratno uporabo istih frekvenc. Vsaka celica vsebuje eno glavno postajo, ki za komunikacijo z mobilnimi telefoni v svoji celici uporablja del sistema dodeljenih kanalov. Kanali so bili prvotno kar frekvence, zaradi velikih zahtev pa so kasneje začeli uporabljati boljše metode, na primer dodeljevanje iste frekvence več pogovorom z deljenjem časa. Sosednjim postajam so dodeljene množice kanalov, ki so med seboj disjunktne, s čimer se izognemo nedovoljeni interferenci. Če je v celici na voljo prost kanal, je z mobilnim telefonom mogoče telefonirati, sicer mora sistem klic zavrniti. Torej je zaželeno, da je dovolj prostih kanalov v celicah, v katerih pričakujemo več uporabnikov. Naravna je zahteva, da naj ima celica dobro razmerje med površino in premerom. Zato je v praksi pogosto, v teoriji pa priljubljeno pokritje ravnine s celicami, ki so pravilni šestkotniki.

Dobre modele za problem dodeljevanja kanalov v celični telefoniji dobimo s pomočjo teorije grafov [1]. Celične mreže so ponavadi predstavljene kot uteženi grafi, kjer točke predstavljajo območja oziroma *celice*, ki jih pokrivajo posamezne glavne postaje, povezave predstavljajo možnosti frekvenčne interference, vektor uteži pa predstavlja zahteve posamezne celice oziroma število klicev, ki morajo biti oskrbljeni v celici.

Poenostavljeni model lahko z vpeljavo dodatnih zahtev in definicijo primernih namenskih funkcij približamo praksi. Ker je že osnovni problem posplošitev naloge barvanja grafov, so optimizacijske naloge NP-težki problemi. V literaturi tako najdemo mnoge različice in hevristične algoritme za njihovo reševanje [2].

Po drugi strani je poenostavljeni model motiviral zanimive matematične probleme. Zaradi enostavnosti, v nekaterih primerih pa tudi praktične uporabnosti so mnogi matematiki raziskovali lastnosti grafov, ki jih dobimo iz pokritja ravnine s šestkotnimi celicami. Grafom, katerih točke predstavljajo šestkotne celice, povezave pa povezujejo sosednje celice, bomo rekli *heksagonalni grafi*. Na videz preprosta naloga je dodeliti vsaki točki (celici) množico barv (kanalov) zahtevane moči tako, da ne smemo enakih barv dodeliti dvema sosednjima točkama. Za celice, ki niso sosednje, nimamo nobenih omejitev glede barv.

Izkaže se, da je tudi ta poenostavljeni problem večbarvanja uteženih heksagonalnih grafov NP-poln [3]. Uteženo kromatično število znamo natančno določiti le za nekatere posebne grafe, na primer za dvodelne grafe in cikle. Zaradi NP-polnosti naloge je smiselno raziskovati hevristične in aproksimacijske algoritme za večbarvanja. Za oceno kakovosti algoritmov je koristno poznati čim bolj natančne meje za uteženo kromatično število.

Kot bomo videli kasneje, ni težko opaziti, da je spodnja meja za uteženo kromatično število kar uteženo klično število $\omega_w(G)$. Preprost primer (glej sliko 2) pokaže, da zgornja meja na uteženih heksagonalnih grafih v splošnem ne more biti boljša od

$$\left\lfloor \frac{4\omega_w(G) + 1}{3} \right\rfloor. \quad (1)$$

Konstruktiven dokaz, da je (1) res zgornja meja, je bil neodvisno ter skoraj hkrati odkrit kar trikrat [3,4,7]. Vsi trije dokazi so algoritmični in so podrobno analizirani v [6]. V nadaljevanju bomo podrobneje predstavili algoritem, ki je nekoliko poenostavljena verzija algoritma iz [7].

Potem ko so meje za uteženo kromatično število heksagonalnih grafov znane, se zgodba seveda ne konča. Tu omenimo samo nekatera vprašanja, ki utegnejo biti za bralca zanimiva in jih lahko zapišemo na kratko:

- Posplošitve naloge na večbarvanja z dodatnimi omejitvami. Preprost primer je zahtevati, da morajo biti barve sosednjih celic različne, barve v isti celici pa se morajo razlikovati vsaj za neko konstanto.

- Omejimo se za hip na heksagonalne grafe brez trikotnikov. Najmanjši lihi cikel, ki ga dobimo kot podgraf heksagonalnega grafa brez trikotnikov, je cikel dolžine 9. Za C_9 je $\chi_w(C_9) \leq \left\lceil \frac{9\omega_w(C_9)}{8} \right\rceil$. Reed in McDiarmid [3] domnevata, da velja $\chi_w(G) \leq \left\lceil \frac{9\omega_w(G)}{8} \right\rceil$ za poljuben heksagonalen graf brez trikotnikov.
- Šestkotne celice dobimo iz optimalne postavitve krogov na ravnino. Optimalna postavitve krogel v prostor je znana postavitve topovskih krogel [9]. Če za točke grafa vzamemo središča krogel in povežemo točke, katerih krogle se dotikajo, dobimo prostorsko analogijo heksagonalnega grafa. Kakšno je razmerje med uteženim kromatičnim številom in uteženim kličnim številom za te grafe?

V naslednjem razdelku bomo povzeli nekaj osnovnih definicij. Sledila bo predstavitev delovanja algoritma za večbarvanje na primeru in dokaz pravilnosti algoritma.

2. Osnovni pojmi

V tem razdelku bomo podali nekaj definicij iz teorije grafov in vpeljali oznake, ki jih bomo potrebovali v nadaljevanju. Graf G je urejen par $G = (V(G), E(G))$, kjer je $V(G)$ neprazna končna množica *točk* in $E(G)$ končna množica neurejenih parov elementov iz $V(G)$, imenovanih *povezave*. Povezavo med točkama $u, v \in V(G)$ bomo označevali z uv . Točki $u, v \in V(G)$, za kateri velja $uv \in E(G)$, sta *sosednji točki*.

Graf H je *podgraf* grafa G , če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$. Podgraf H je *inducirani podgraf* grafa G , če povezava med točkama u in v obstaja v grafu H , brž ko obstaja v grafu G .

Graf G je *dvodelen*, če lahko množico točk $V(G)$ razdelimo na podmnožici V_1 in V_2 tako, da ima vsaka povezava grafa G eno krajišče v množici V_1 in drugo v množici V_2 . Množici V_1 in V_2 sta *particiji* dvodelnega grafa. Graf G , kjer je vsaka točka $v \in V(G)$ sosednja z vsemi drugimi točkami grafa G , bomo imenovali *poln graf*. Polni podgraf grafa G imenujemo *klika*. Velikost največje klike grafa G je *klično število*, ki ga označimo z $\omega(G)$.

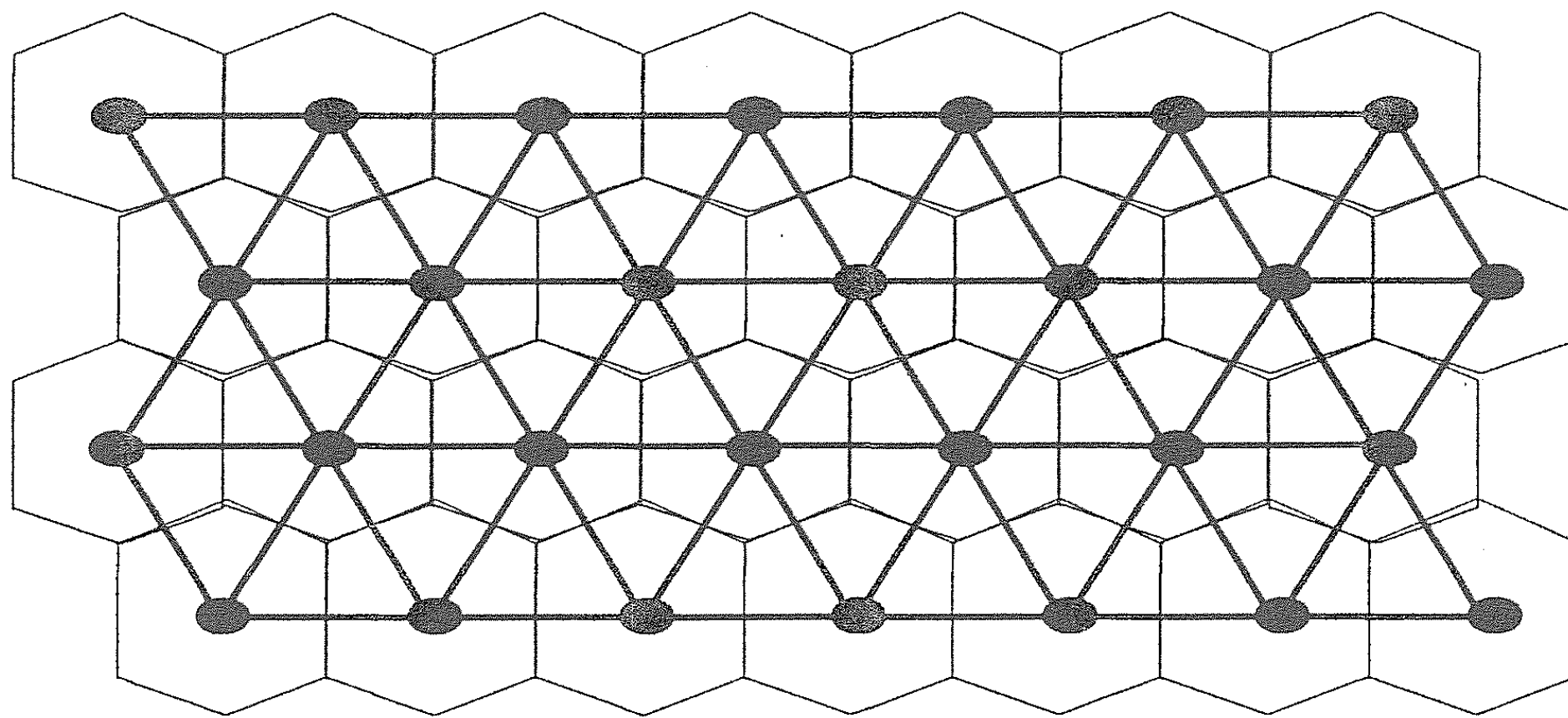
Zaporedje točk $v_0 v_1 \dots v_n$, kjer so pari zaporednih točk sosednji, je *sprehod*. Sprehod, na katerem so vse točke različne, je *pot*. Pot, kjer sta prva in zadnja točka sosednji, imenujemo *cikel*. Če v grafu G med poljubnima točkama $u, v \in V(G)$ obstaja pot, potem pravimo, da je graf G *povezan*. Povezanemu grafu brez ciklov pravimo *drevo*.

Preslikavo $c : V(G) \rightarrow C$, kjer je C poljubna množica *barv*, imenujemo *barvanje* grafa $G = (V(G), E(G))$. Ponavadi vzamemo $C = \mathbb{N}$. Če za barvanje c velja, da iz $uv \in E(G)$ sledi $c(u) \neq c(v)$, potem preslikavo c imenujemo *dobro barvanje* grafa G . Če je v zalogi vrednosti barvanja c n barv, preslikavi c pravimo *n -barvanje* grafa G . Najmanjše število n , za

katero obstaja dobro n -barvanje grafa G , imenujemo *kromatično število* ali *barvnost* grafa G , $\chi(G)$.

Za neskončno trikotniško mrežo obstaja preprosto do permutacij barv enolično 3-barvanje, ki poda delitev množice točk dane mreže v tri neodvisne množice in ga imenujemo rdeče-modro-zeleno barvanje ali krajše r-m-z barvanje (glej tudi sliko 4). Skladno z omenjeno delitvijo imenujemo vsako točko mreže *rdeča*, *modra* oziroma *zelena* točka, s čimer vsaki točki mreže dodelimo njeno *osnovno barvo*.

Barvanje točk trikotniške mreže je ekvivalentno barvanju polj (lic) šestkotniške mreže (slika 1). Zato bomo inducirane podgrafe trikotniške mreže imenovali *heksagonalni grafi*. Vsak heksagonalen graf je torej mogoče dobro pobarvati s tremi barvami.



Slika 1. Povezava med trikotniško in šestkotniško mrežo

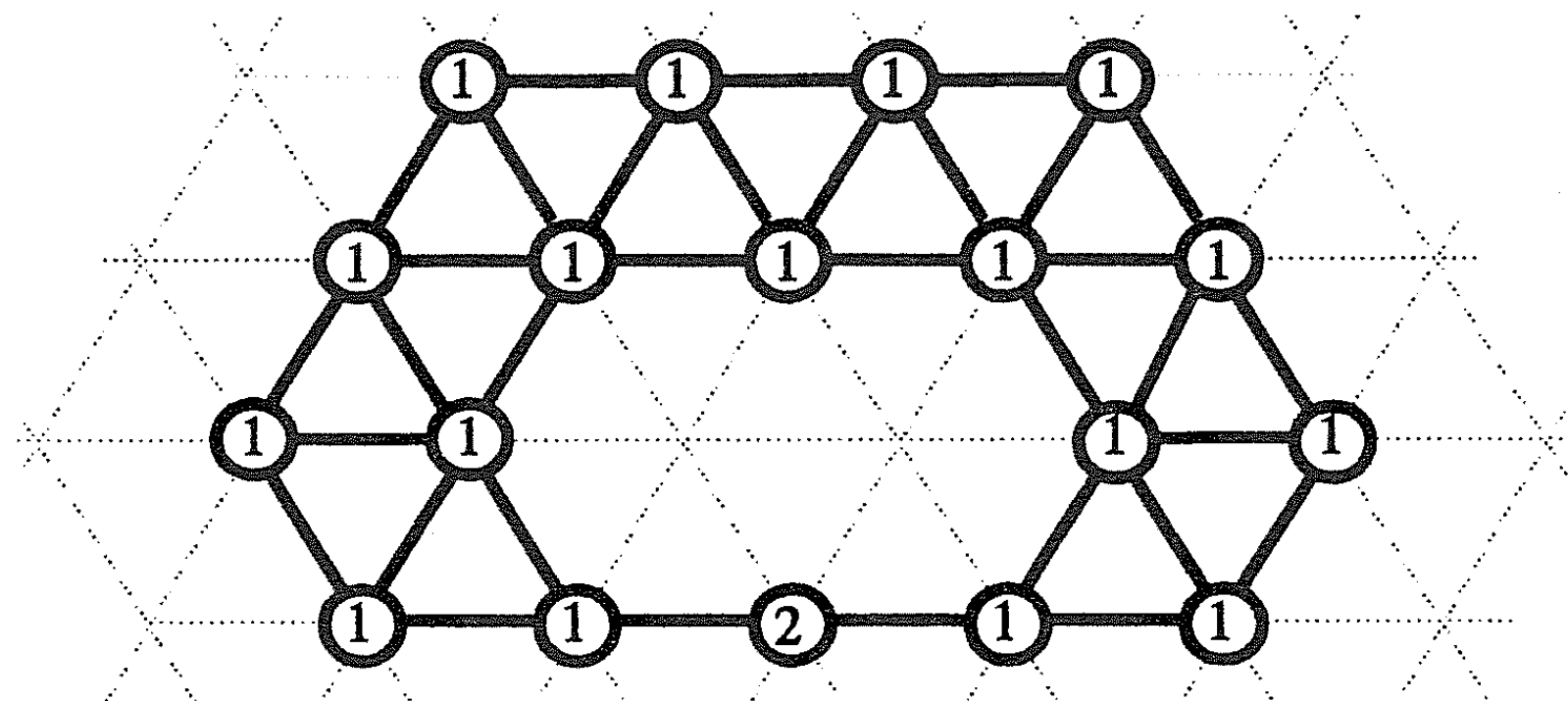
Utežen graf $G = (V(G), E(G), d)$ je graf $(V(G), E(G))$ skupaj z utežno funkcijo $d : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$, ki vsaki točki v grafa G dodeli njeno utež, $d(v)$. Preslikavo $f : V(G) \rightarrow \mathcal{P}(C)$, ki vsaki točki $v \in V(G)$ dodeli podmnožico $f(v)$ množice barv C , imenujemo *večbarvanje* grafa G . Če za večbarvanje f velja: $|f(v)| \geq d(v)$ za vsako točko $v \in V(G)$ in $f(u) \cap f(v) = \emptyset$ za vsako povezavo $uv \in E(G)$, potem preslikavi f pravimo *dobro večbarvanje* grafa G , grafu G pa *dobro pobarvan graf*. Če za graf $G = (V(G), E(G), d)$, množico C in preslikavo f velja le druga zahteva, govorimo o *delnem dobrem večbarvanju* grafa G . V tem primeru pravimo, da je graf G *delno dobro pobarvan*.

Najmanjše število m , za katero obstaja množica barv C moči m , s katero lahko dobro pobarvamo graf G , imenujemo *uteženo kromatično število* grafa G , $\chi_w(G)$.

Utež klike K , $d(K)$, uteženega grafa $G = (V(G), E(G), d)$ definiramo kot vsoto uteži vseh njenih točk. Maksimalno utež klike danega grafa G , $\omega_w(G) = \max\{d(K); K \text{ klika grafa } G\}$, bomo imenovali *uteženo klično število* grafa G . Kadar je utež vsake točke grafa G enaka 1, velja $\omega_w(G) = \omega(G)$.

V vsakem dobrem večbarvanju grafa G je točkam klike K dodeljeno $d(K)$ različnih barv. Zato je vedno $\omega_w(G) \leq \chi_w(G)$. Enakost velja samo

v posebnih primerih, v splošnem seveda ne. Na sliki 2 je primer uteženega heksagonalnega grafa z $\omega_w(G) = 3$ in $\chi_w(G) = 4$. Iz primera je razvidno, da je zgornja meja (1) natančna zgornja meja za uteženo kromatično število poljubnega heksagonalnega grafa G .



Slika 2. Primer heksagonalnega grafa G z $\omega_w(G) = 3$ in $\chi_w(G) = 4$

3. Algoritem za večbarvanje heksagonalnih grafov

V tem razdelku bomo predstavili algoritem za večbarvanje uteženih heksagonalnih grafov, ki je sestavljen iz štirih korakov. Pokazati se da, da je poljuben heksagonalen graf G po vsakem izmed korakov 1, 2 in 3 delno dobro pobarvan, medtem ko je po koraku 4 graf G pobarvan v celoti. V naslednjem razdelku bomo ob vsakem koraku na kratko utemeljili njegovo pravilnost in delovanje ponazorili na primeru. Podrobni dokazi so v [6].

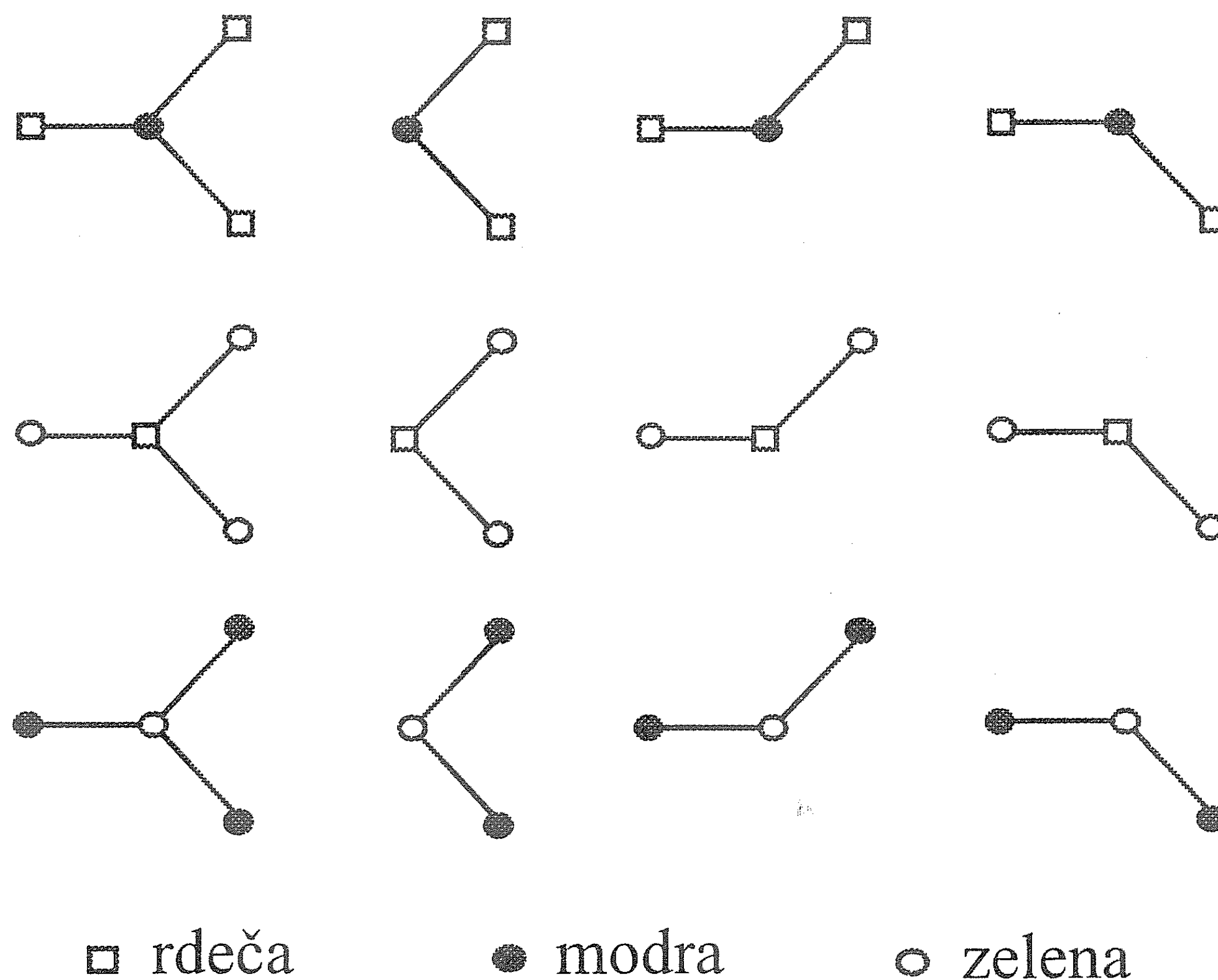
Kot smo že videli, je vsak heksagonalen graf G 3-pobarvljiv. Zaradi lažjega razumevanja bomo vsaki osnovni barvi (rdeči, modri in zeleni) dodelili določeno število zaporednih odtenkov. Včasih bomo, glede na to, s katerega konca smo jih vzeli, določeno podmnožico odtenkov barve c imenovali *začetne* ali *končne* c -barve. Če smo začeli s prvim odtenkom in nadaljevali z nekaj naslednjimi, so to začetne barve, če pa smo začeli z zadnjim odtenkom, govorimo o končnih barvah. Množici barv C , s katero bomo barvali dani graf G , bomo rekli barvna *paleta* grafa G . (Tudi tokrat bi lahko za množico barv vzeli množico naravnih števil, tako da bi za p rdečih odtenkov izbrali množico števil $\{1, \dots, p\}$, za p modrih odtenkov množico $\{p+1, \dots, 2p\}$, za p zelenih odtenkov množico $\{2p+1, \dots, 3p\}$, za dodatnih q belih odtenkov pa bi vzeli množico števil $\{3p+1, \dots, 3p+q\}$.)

Za opis algoritma bomo potrebovali še nekaj definicij in oznak. Vsaka točka neskončne trikotniške mreže ima šest sosed v mreži, in sicer levo zgoraj, levo in levo spodaj ter desno zgoraj, desno in desno spodaj, ali krajše LZ, L, LS, DZ, D, DS.

Definicija 3.1. Naj c pomeni rdeča, modra ali zelena. Točki v pravimo c -prosta točka, če ni c točka in če nima c sosed. c -prosto točko z vsaj dvema sosedama imenujemo *center*.

Definicija 3.2. Center v , ki nima D, LZ in LS sosede, imenujemo *levi center*. Levi center je lahko zeleno-prosti moder center ali modro-prosti rdeč center ali rdeče prosti zelen center. V vseh drugih primerih imenujemo center v *desni center*.

Poimenovanje *leva* oziroma *desna* centralna točka sledi iz izbranega r-m-z barvanja in iz geometrijske postavitve sosed, ki jih lahko ima dana centralna točka. Torej imamo, glede na barvo centralne točke in barvo njenih sosed, za desne in za leve centralne točke po tri različne možnosti. Poleg tega imamo v sklopu vsake od prej omenjenih možnosti 4 različne postavitve (glej sliko 3). Po gornji definiciji izolirana točka ni center.



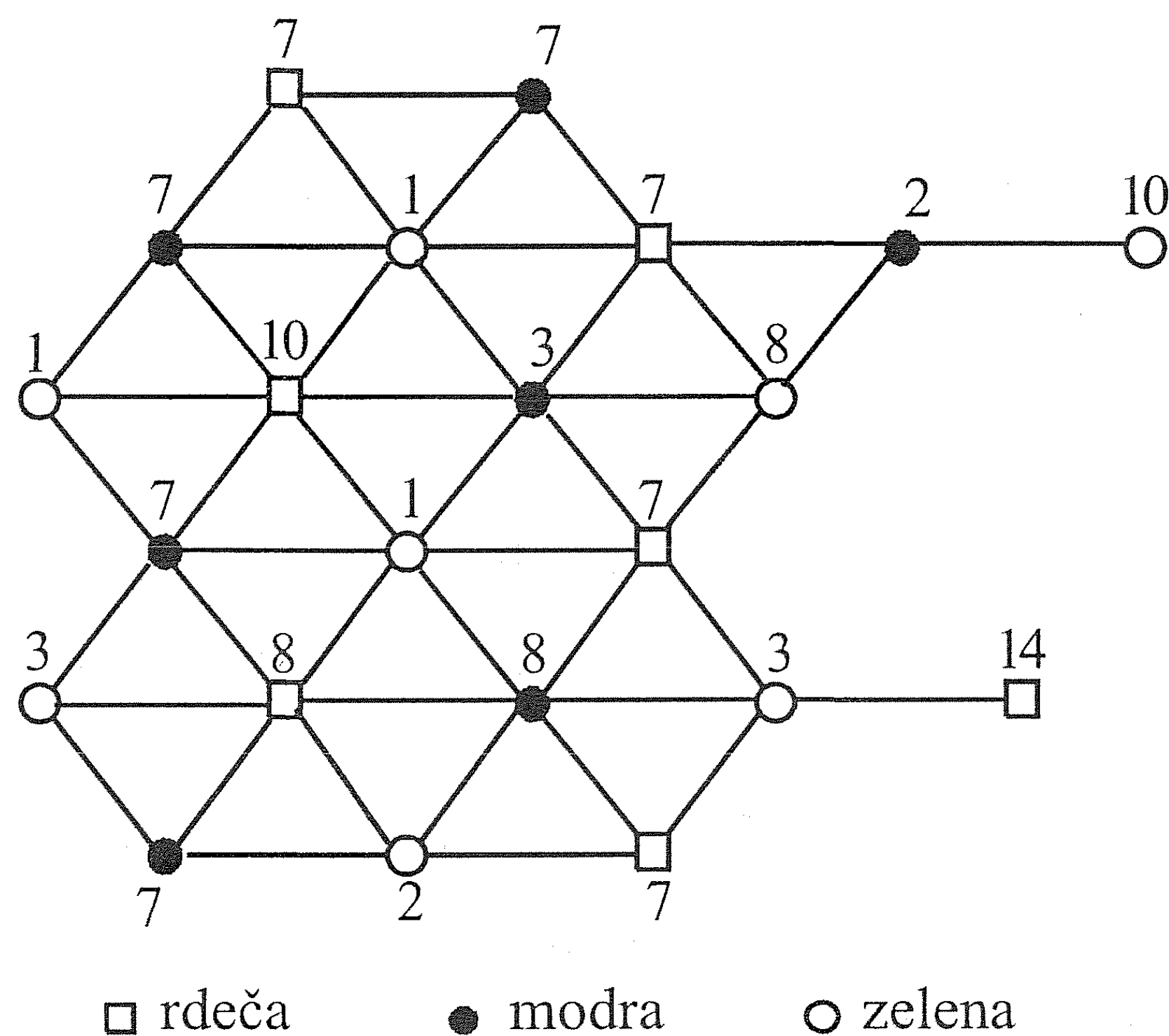
Slika 3. Prikaz vseh možnih levih centrov

Predpostavimo, da za poljuben heksagonalen graf G poznamo njegovo uteženo klično število, $\omega_w(G)$. Naj bo $p(G) = p = \left\lfloor \frac{\omega_w(G)+1}{3} \right\rfloor$ in $q(G) = q = \omega_w(G) - 2p(G)$. Barvna paleta bo sestavljena iz $3p + q$ barv, in sicer iz p rdečih odtenkov, p modrih odtenkov, p zelenih odtenkov ter q dodatnih belih odtenkov. Točki $v \in V(G)$ bomo rekli *lahka* točka, če je $d(v) \leq p$, in *težka* sicer. Ideja barvanja je naslednja: vsaki točki danega grafa dodelimo najprej vse možne barve iz njenega barvnega razreda, šele potem ji dodelimo bele barve ali barve iz drugih dveh barvnih razredov. V nadaljevanju naj $d_i(v)$ pomeni zahtevo točke v po koraku i (tj. razliko med $d(v)$ in številom barv dodeljenih točki v v prejšnjih korakih). Z $G_i = (V_i, E_i, d_i)$ bomo označili preostali graf po koraku i , torej inducirani graf na točkah s pozitivno zahtevo $d_i(\cdot)$. Algoritem sestavljajo naslednji štirje koraki:

- Korak 1.** Vsaki točki $v \in G$ dodeli $\min\{d(v), p\}$ začetnih barv iz njenega barvnega razreda.
- Korak 2.** Pobarvaj vse leve centralne točke tako, da si c -prosta centralna točka v izposodi $d_1(v)$ končnih c barv, ki niso bile uporabljene pri njenih sosedah.
- Korak 3.** Pobarvaj vse izolirane točke z belimi barvami in z izposojanjem končnih barv od sosede z maksimalno zahtevo.
- Korak 4.** Pobarvaj preostali dvodelni graf z belimi barvami tako, da točke ene particije dobijo začetne bele barve, točke druge particije pa končne bele barve.

4. Dokaz pravilnosti algoritma

Tukaj bomo na kratko pojasnili posamezne korake algoritma in pokazali, da je dobljeni graf po posameznem koraku delno dobro pobarvan. Po dokazu posameznega koraka si bomo s pomočjo primera, ki je prikazan na sliki 4 ($\omega_w(G) = 18$, $p = q = 6$), ogledali delovanje algoritma.



Slika 4. Primer uteženega heksagonalnega grafa G

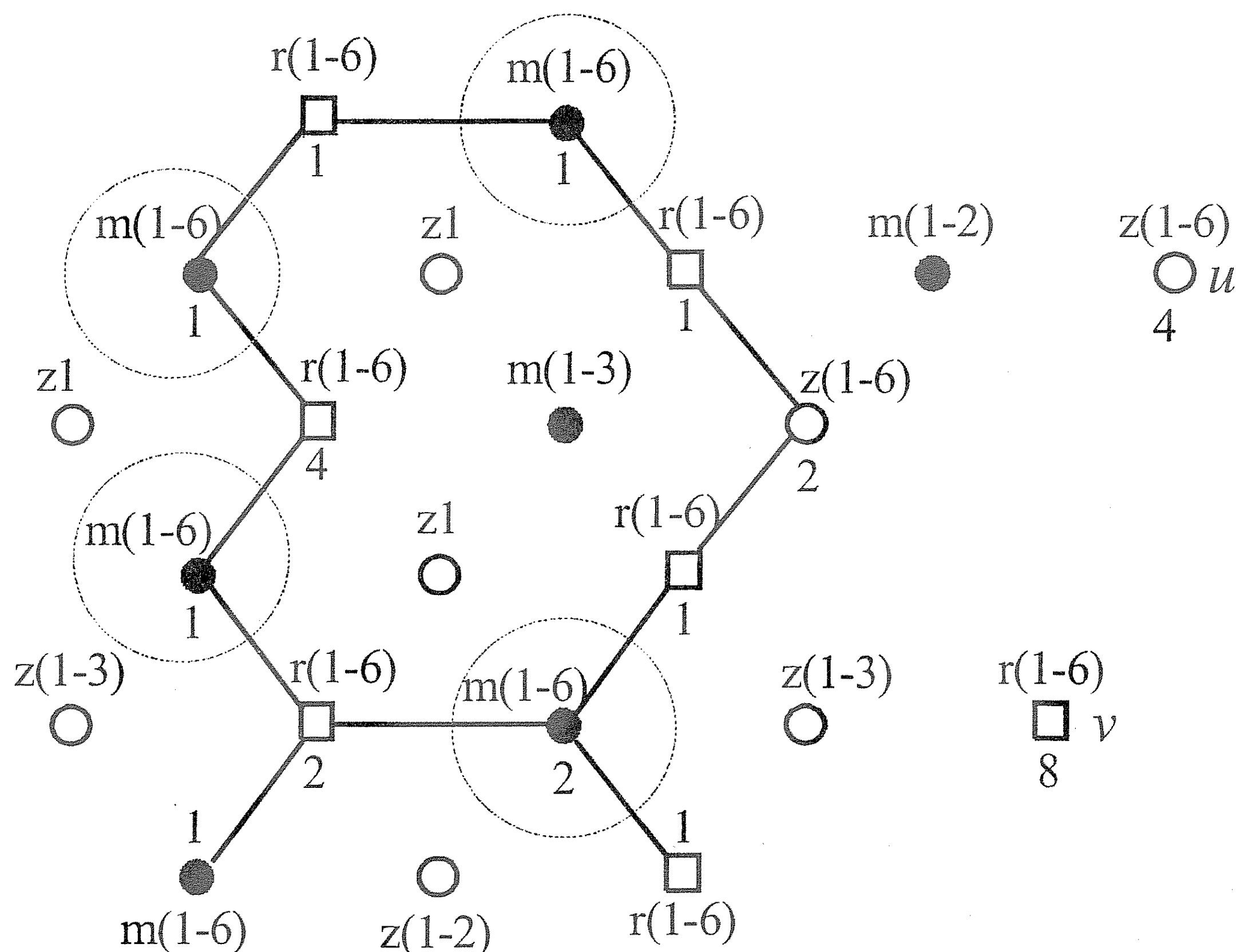
- Korak 1.** Vsaki točki $v \in G$ dodeli $\min\{d(v), p\}$ začetnih barv iz njenega barvnega razreda.

Korak 1 v celoti pobarva vse lahke točke grafa G . Ker smo sosednjim točkam dodelili odtenke različnih barv, je jasno, da je graf G_1 delno dobro pobarvan. Graf G_1 je brez trikotnikov, saj nas nasprotna predpostavka pripelje v protislovje z neenakostjo

$$\omega_w(G) \leq 3p + 1, \quad (2)$$

ki sledi neposredno iz definicije števila p .

Barvanje grafa G (iz slike 4) po koraku 1 je prikazano na sliki 5, kjer je barvanje z , na primer, šestimi začetnimi rdečimi barvami označeno kot $r(1-6)$, medtem ko druga številka ob točki predstavlja njeno preostalo zahtevo.



Slika 5. Dodeljevanje barv po koraku 1

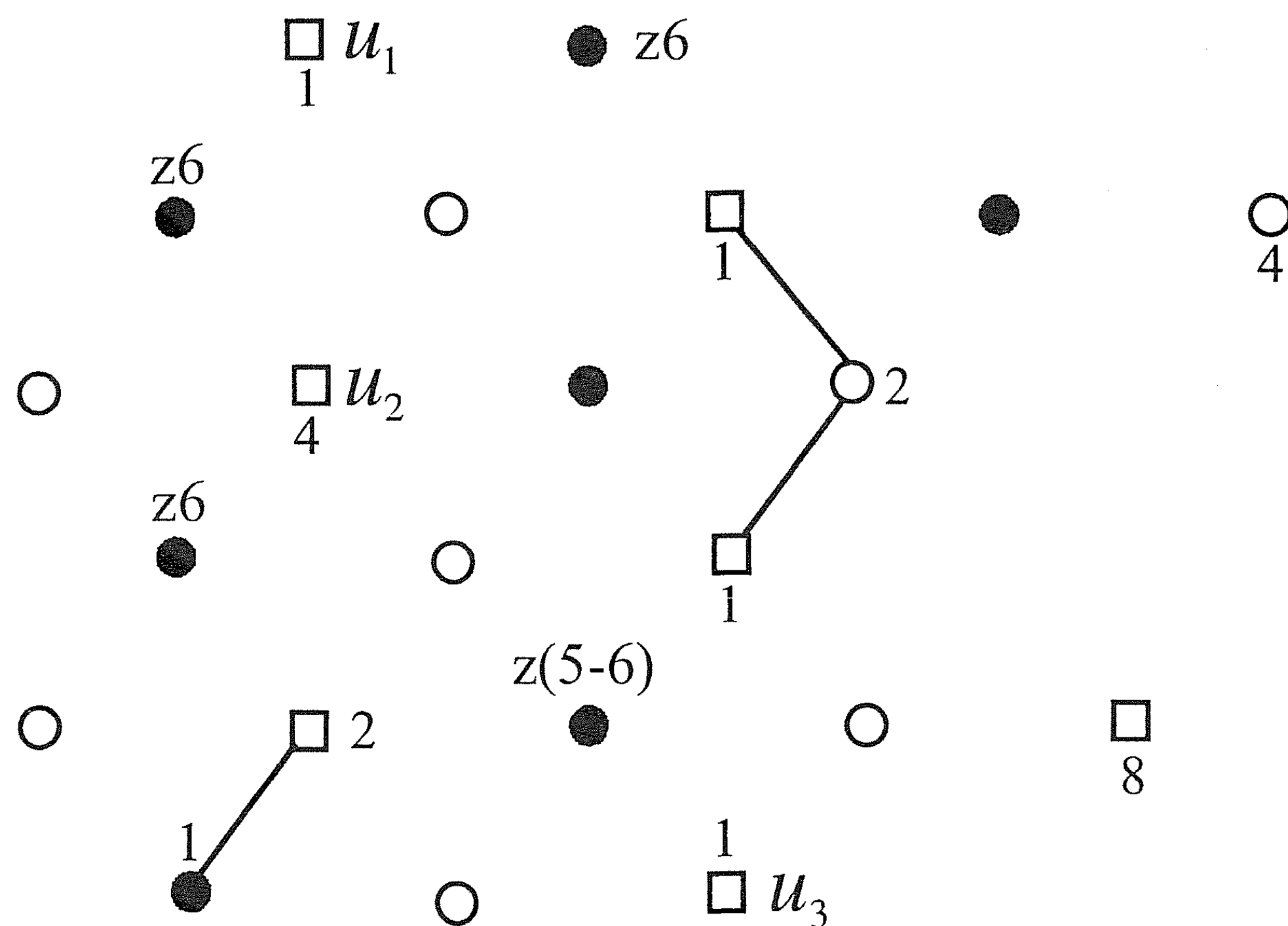
Korak 2. Pobarvaj vse leve centralne točke tako, da si c -prosta centralna točka v izposodi $d_1(v)$ končnih c barv, ki niso bile uporabljene pri njenih sosedah.

Brez izgube za splošnost smemo predpostaviti, da je v modro-prosta rdeča centralna točka in naj bo $\mathbf{m}(v)$ maksimum uteži lahkih modrih sosed točke v (kar pomeni, da si točka v lahko izposodi $p - \mathbf{m}(v)$ končnih modrih barv). Trdimo, da $p - \mathbf{m}(v)$ modrih barv zadošča, da pobarvamo točko v v celoti. Recimo, da velja nasprotno ($d_1(v) > p - \mathbf{m}(v)$) in naj bo točka z skupna težka zelena soseda točke v in modre točke m , za katero velja $d(m) = \mathbf{m}(v)$ (taka zelena soseda točke v obstaja, sicer točka v ne bi bila centralna). Potem velja:

$$\omega_w(G) \geq d(v) + d(z) + d(m) = d_1(v) + p + d_1(z) + p + \mathbf{m}(v) > 3p + d_1(z).$$

Ker je točka z težka ($d_1(z) \geq 1$), dobimo $\omega_w(G) > 3p + 1$, kar je v protislovju z neenakostjo (2).

Če se vrnemo k našemu primeru, opazimo, da graf G_1 vsebuje 4 leve centralne točke, ki so na sliki 5 obkrožene (vse štiri omenjene točke so zeleno-proste modre centralne točke). Kakšne barve jim dodeli algoritem, prikazuje slika 6.



Slika 6. Dodeljevanje barv po koraku 2

Ni težko videti, da so edine povezane komponente dobljenega grafa G_2 izolirane točke, poti in kvazi-zvezde (to so drevesa, ki imajo natanko eno točko stopnje 3). Podrobnosti so v [6].

Korak 3. Pobarvaj vse izolirane točke z belimi barvami in z izposojanjem končnih barv od sosede z maksimalno zahtevo.

Naj bo $u \in G$ izolirana točka grafa G_2 . Imamo dve različni možnosti:

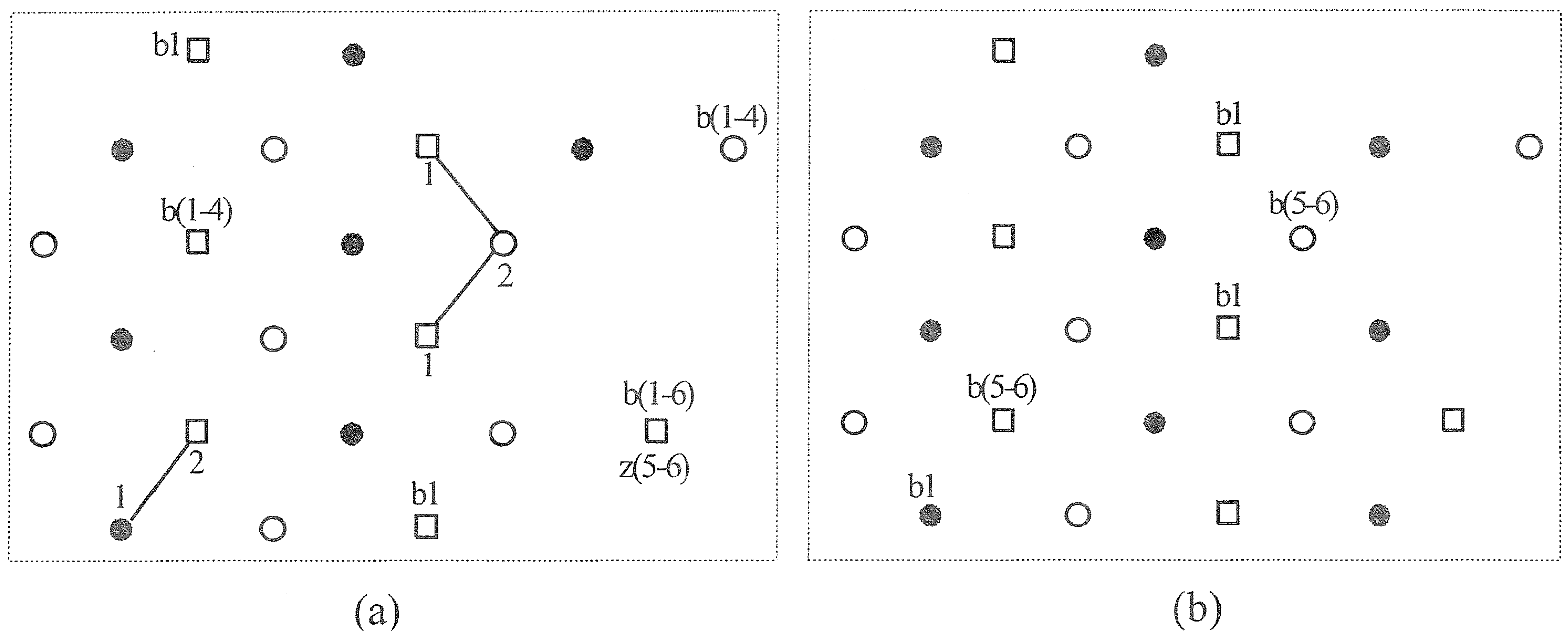
- a) točka u je bila izolirana že v grafu G ali je postala izolirana po koraku 1,
- b) točka u je postala izolirana po koraku 2.

- (a) Brez izgube za splošnost smemo predpostaviti, da je u zelena točka. Naj bo $d(u)$ maksimalna zahteva vseh sosed točke u v grafu G (če točka u v grafu G ni imela nobene sosede, potem je $d(u) = 0$). Ker so vse sosede lahke (sicer po koraku 1 točka u ne bo izolirana), velja $d(u) \leq p$, torej si točka u lahko izposodi $p - d(u)$ modrih (če je $d(u)$ zahteva modre točke) oziroma $p - d(u)$ rdečih točk. Brez težav lahko pokažemo, da velja

$$d_1(u) \leq q + (p - d(u)).$$

Torej lahko točki u , dodelimo q belih barv in (če je $d_1(u) > q$) interval $[p - (d_1(u) - q) + 1, p]$ končnih modrih oziroma rdečih barv. Ker belih barv do sedaj še nismo uporabljali, sledi, da je točka u dobro pobarvana.

Iz slike 4 je razvidno, da v našem primeru graf G ne vsebuje nobene izolirane točke, medtem ko sta po prvem koraku postali izolirani dve točki, in sicer zelena točka u in rdeča točka v (slika 5). Kako smo ju pobarvali, je prikazano na sliki 7 (a).



Slika 7. Dodeljevanje barv po (a) koraku 3 in (b) koraku 4

(b) V tem primeru je bila točka u soseda neke leve centralne točke v grafa G_1 . Trdimo, da lahko točko u pobarvamo le z belimi barvami. Ker je imela točka u težko sosedo v v začetnem grafu G , velja:

$$d(u) + d(v) \leq \omega(G) \text{ oziroma}$$

$$d_1(u) \leq \omega(G) - 2p - d_1(v) < q.$$

Ker v prejšnjih korakih nismo uporabljali belih barv, je graf G_3 delno dobro pobarvan.

Če primerjamo grafa na slikah 8 in 6, opazimo, da so v našem primeru tri točke, ki so postale izolirane po koraku 1 (in sicer rdeče, označene z u_1 , u_2 in u_3 na sliki 6). Kako jih pobarvamo, je prikazano na sliki 7 (a).

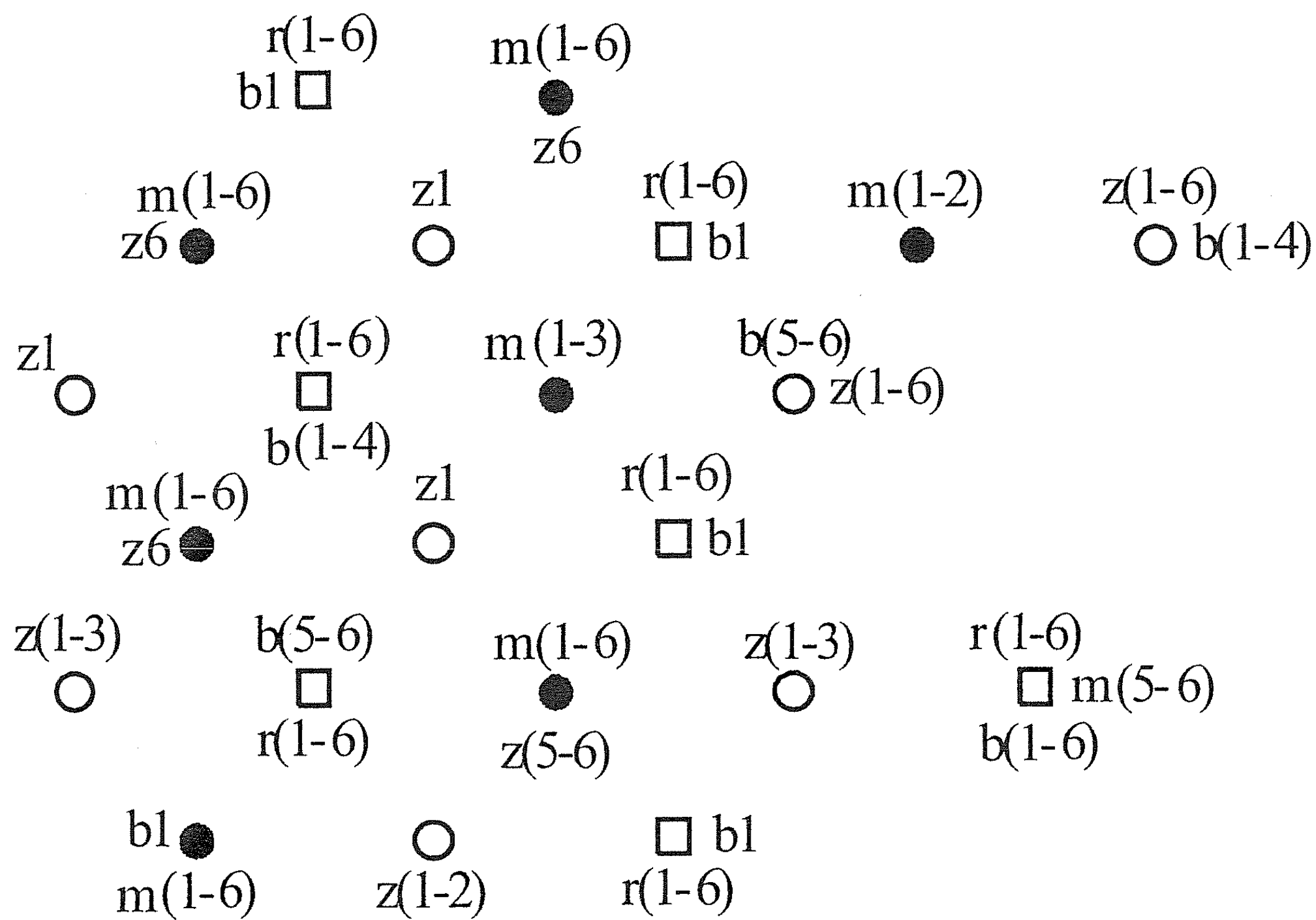
Korak 4. Pobarvaj preostali dvodelni graf z belimi barvami tako, da točke ene particije dobijo začetne bele barve in točke druge particije končne bele barve.

V tem koraku bomo pobarvali preostanek našega grafa, torej poti in kvazi-zvezde, s q belimi barvami. Eno od dveh neodvisnih množic (graf G_3 je, kot vemo, dvodelen) bomo pobarvali z začetnimi belimi barvami, točke druge particije pa s končnimi barvami iz palete belih barv. Ni težko videti, da je $\omega(G_3) < q$, zato dokaz prepustimo bralcu. Ker smo bele barve prirejali le izoliranim točkam, barvanje med korakom 4 ne bo v protislovju z barvanjem sosednjih točk, kar pomeni, da smo graf G_3 pobarvali dobro (slika 7 (b)). Torej smo s pomočjo zgornjega algoritma dobro pobarvali celoten graf G .

Celotno barvanje grafa G iz našega primera je prikazano na sliki 8.

Za barvanje poljubnega heksagonalnega grafa porabimo torej kvečjemu

$$3p + q = 3p + \omega_w(G) - 2p = \left\lfloor \frac{\omega_w(G) + 1}{3} \right\rfloor + \omega_w(G) = \left\lfloor \frac{4\omega_w(G) + 1}{3} \right\rfloor$$



Slika 8. Končno barvanje grafa G .

barv. S tem smo pokazali naslednjo trditev:

Izrek 4.3. Za poljuben heksagonalen graf G z uteženim ključnim številom $\omega_w(G)$ velja $\chi_w(G) \leq \left\lfloor \frac{4\omega_w(G)+1}{3} \right\rfloor$.

LITERATURA

- [1] W. K. Hale, *Frequency Assignment: Theory and Applications*, Proceedings of the IEEE, vol. 68, št. 12 (1980), 1497–1514.
- [2] C. McDiarmid, *Discrete Mathematics and Radio Channel Assignment*, poglavje v knjigi „Recent advances in theoretical and applied discrete mathematics” (B. Reed, C. Linhares-Salas, ur.), pred izidom.
- [3] C. McDiarmid, B. Reed, *Channel Assignment and Weighted Colouring*, Networks Suppl. **36** (2000), 114–117.
- [4] L. Narayanan, S. Shende, *Static Frequency Assignment in Cellular Networks*, Algorithmica **29** (2001), 396–410.
- [5] T. S. Rappaport, *Wireless Communications. Principles and Practice*, Prentice Hall Communications Engineering and Emerging Technologies Series, New Jersey, 1996.
- [6] P. Šparl, *Uporaba teorije grafov za naloge dodeljevanja frekvenc*, Magistrsko delo, Univerza v Mariboru, Pedagoška fakulteta Maribor, 2001.
- [7] S. Ubeda, J. Žerovnik, *Upper bounds for the span of triangular lattice graphs: application to frequency planing for cellular networks*, Research report No. 97-28, ENS Lyon, September 1997.
- [8] R. Wilson, M. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, zbirka Sigma 63, Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1997.
- [9] T. C. Hales, *Cannonballs and Honeycombs*, Notices of the AMS, Vol. 47, št. 4 (2000), 440–449.

PROŽNI TRAK KOT MODEL VESOLJA

JANEZ STRNAD

PACS 98.80.-k

Z zelo preprostim modelom lahko v srednji šoli vpeljemo nekaj pojmov, povezanih z razvojem vesolja, ki jih sicer ni lahko razumeti.

THE ELASTIC RIBBON AS A MODEL UNIVERSE

With a very simple model at the secondary school level some concepts in the development of the universe can be introduced that otherwise are not easy to grasp.

Razvoj vesolja zbuja zanimanje širokega kroga ljudi, a v šoli o njem ni veliko slišati. To ni presenetljivo, ker kozmologija uporablja za srednjo šolo prezahtevne prijeme. Kljub temu najdemo v tujih poučevalskih revijah precej gradiva o vesolju. S tem si revije prizadevajo zbuditi zanimanje mladih in jih usmeriti v fiziko, astronomijo in astrofiziko. V lanski februarški številki American Journal of Physics sta izšla kar dva članka te vrste. Kot izhodišče se zdijo pripravní računi iz enega od njiju [1] in risbe iz drugega [2]. Morda jih bo kdo uporabil v kaki naši srednji šoli.

Na začetku si mislimo raven, ne preširok in zelo prožen trak z nepremičnim levim krajiščem, desno krajišče pa se premo enakomerno oddaljuje proti desni. Na traku so narisane pike, s katerimi ponazorimo galaksije. To je naš *model*. S tem mislimo na poenostavljen opis, v katerega vključimo samo spremenljivke, ki podajajo glavne značilnosti vesolja. Z njim bi radi prišli do enačb, ki jih ne bi bilo pretežavno obvladati in ki bi dale vsaj približen pregled nad pojavi v vesolju kot celoti. Model sodi med nezahtevne in je uporaben le v poučevalske namene.

Trak ima eno razsežnost, kar pa ni izrazita slabost, če ga v mislih postavimo radialno v trirazsežnem vesolju. V sedanjem trenutku t_0 položimo ob trak togo merilo, na katerem kažejo črtice *lastne koordinate* $r(t)$. „Lasten“ ima običajen pomen: lastno krajevno razdaljo med dogodkoma določimo v opazovalnem sistemu, v katerem sta dogodka sočasna. Na traku so narisane črtice, ki kažejo *krajevne koordinate* r_k (v angleščini: comoving coordinates). V trenutku, ko položimo merilo ob trak, določimo krajevne koordinate tako, da se ujemajo z lastnimi $r_k = r(t_0) = r_0$. Pred tem je bil trak bolj skrčen in po tem bo bolj podaljšán, zato velja med krajevnimi in lastnimi koordinatami zveza

$$r(t) = \frac{t}{t_0} r_0 = \frac{t}{t_0} r_k. \quad (1)$$

Krajevne koordinate se s časom ne spreminjajo: pike, to je galaksije, ostanejo ves čas pri enakih krajevnih koordinatah. Lastne koordinate pa se spreminjajo s časom. Tako je mogoče vpeljati lastno hitrost galaksij r/t .

Lastna hitrost valovnega čela elektromagnetne valovne poteze se razlikuje od lastne hitrosti galaksij. Upoštevati moramo lastno hitrost galaksij in hitrost svetlobe glede na trak. Svetloba potuje glede na trak s hitrostjo c in lastna hitrost valovnega čela je vsota ali razlika obeh hitrosti

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r}{t} \pm c. \quad (2)$$

Plus moramo upoštevati, če potuje svetloba proti desni, in minus, če potuje proti levi.

Model izboljšamo s tem, da faktor t/t_0 , ki pove, koliko se je trak razširil od začetka, nadomestimo s faktorjem $(t/t_0)^{2/3}$ in upoštevamo ustrezno hitrost $2r/3t$. Zdaj se desno krajišče traku ne oddaljuje več enakomerno. Na izbiro imamo dve možnosti. Ali izboljšavi samo navedemo in morda pripomnimo, da na podobno časovno odvisnost naletimo, ko obravnavamo izstrelek, ki ga z ubežno hitrostjo izstrelimo z Zemlje navpično navzgor, ali naredimo preprost dodatni račun. V drugem primeru se opremo na model o širjenju vesolja v klasični mehaniki [3]. V njem vesolje opišemo kot krogelno simetrični oblak točkastih teles, ki v trenutku $t = 0$ zapustijo izhodišče in se od njega oddaljujejo z različnimi hitrostmi v radialni smeri, ne da bi se motila. Vsota kinetične in gravitacijske potencialne energije telesa $\frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}mM/r = W$ se ohrani. Pri tem je r razdalja od izhodišča, m masa telesa, v njegova hitrost, M masa vseh teles v notranjosti krogle z radijem r in $\mathcal{G}$ gravitacijska konstanta. Tudi masa M se ohrani. V mejnem primeru, ko je $W = 0$, vstavimo $v = dr/dt$ in iz enačbe $r^{1/2}dr/dt = (2\mathcal{G}M)^{1/2}$ dobimo $r = (\frac{9}{2}\mathcal{G}M)^{1/3}t^{2/3}$.

Z izboljšavama opišemo gibanje galaksij z enačbo

$$r(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3} r_0 \quad (3)$$

in hitrost potovanja valovnega čela z enačbo

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2r}{3t} \pm c. \quad (4)$$

Ni se težko prepričati, da

$$r = A(ct)^{2/3} \pm 3ct \quad (5)$$

reši enačbo (4). Konstanto A določimo z začetnim pogojem.

Ali smemo s časom ravnati, kakor smo vajeni v klasični fiziki? Najprej naj valovno čelo v trenutku t_0 zapusti izhodišče $r = 0$. V tem primeru je $A = -3(ct_0)^{1/3}$ in opiše potovanje čela enačba $r = 3ct[1 - (t_0/t)^{1/3}]$. Galaksija je v trenutku t_0 pri r_0 in jo doseže čelo v poznejšem trenutku t_p

pri koordinati r_p , ko se njena koordinata $r_0(t_p/t_0)^{2/3}$ ujema s koordinato čela $3ct_p[1 - (t_0/t_p)^{1/3}]$. Tako dobimo

$$t_p = t_0 \left(1 + \frac{r_0}{3ct}\right)^3, \quad r_p = r_0 \left(1 + \frac{r_0}{3ct}\right)^2.$$

V drugem primeru naj v trenutku t_0 galaksija pri r_0 izseva valovno čelo proti izhodišču. Tedaj je konstanta $A = (r_0 + 3ct_0)/(ct_0)^{2/3}$ in opiše potovanje čela enačba $r = (r_0 + 3ct_0)(t/t_0)^{2/3} - 3ct$. Tudi v tem primeru doseže čelo izhodišče v trenutku t_p , ko je koordinata galaksije enaka r_p . Čas potovanja čela potemtako ni odvisen od smeri, tako da je t mogoče vpeljati kot univerzalni *lastni čas* in ni težav s sočasnostjo, kakršnih smo vajeni v posebni teoriji relativnosti. „Lasten“ ima tudi v tem primeru običajen pomen: lastni časovni razmik med dogodkoma določimo v opazovalnem sistemu, v katerem se dogodka dogodita v isti točki. Lastni čas t merijo ure, ki so povezane s prožnim trakom, ne ure, povezane s togim merilom.

Kot računsko pomagalo, ne kot čas, ki bi ga merile ure, lahko vpeljemo *krajevni čas*. Enačbo (3), v kateri vzamemo, da je krajevna koordinata odvisna od časa, vstavimo v enačbo (4) in dobimo zvezo $dr_k/dt = \pm c(t_0/t)^{2/3}$. Krajevni čas t_k vpeljemo z namenom, da dobimo z njim enačbo za potovanje valovnega čela s konstantno hitrostjo

$$\frac{dr_k}{dt_k} = \pm c.$$

Predzadnjo enačbo delimo z zadnjo in pridemo do zveze $dt_k/dt = (t_0/t)^{2/3}$, iz katere sledi

$$t_k = 3t_0 \left[\left(\frac{t}{t_0} \right)^{1/3} - 1 \right] + t_0, \quad (6)$$

če po prejšnjem zgledu zahtevamo, da se krajevni čas t_k v trenutku $t = t_0$ ujema z lastnim časom t .

Zanimajmo se za smer potovanja valovnega čela v vesolju. Postavimo Zemljo ali bolje težišče Galaksije v izhodišče, kot bi lahko v izhodišče postavili težišče katere koli galaksije. Ali lahko vidimo v vesolju v preteklost le do $\frac{1}{2}t_0$, če traja širjenje časa t_0 ? Utegnili bi sklepati takole: galaksija se oddaljuje skoraj s hitrostjo svetlobe in potrebuje za gibanje od nas domala enak čas, kot ga za potovanje do nas potrebuje svetloba. Model pa to sklepanje prepričljivo ovrže.

Trenutek t_e , v katerem galaksija pri lastni koordinati r_e izseva valovno čelo, postavimo tako daleč v preteklost, da je lastna hitrost širjenja traku $2r_e/3t_e$ večja od lastne hitrosti potovanja svetlobe c , torej $2r_e/3t_e > c$. V tem primeru gibanje traku nosi svetlobo navzven, čeprav je usmerjena proti izhodišču. Z naraščanjem časa doseže svetloba predele traku ob levem

krajišču, ki se širijo počasneje. V trenutku t_m svetloba glede na trak potuje proti levi z enako veliko hitrostjo, kot se trak širi proti desni, tako da svetloba miruje pri lastni koordinati r_m . Enačbo (5) odvajamo po času in odvod postavimo enak nič: $dr/dt = 0$. Iz $\frac{2}{3}Ac(ct)^{-1/3} - 3c = 0$ sledi $ct_m = (\frac{2}{9}A)^3$ in $r_m = \frac{3}{2}(\frac{2}{9}A)^3$ ter z $A = (r_e + 3ct_e)/(ct_e)^{2/3}$

$$t_m = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{r_e}{3ct_e}\right)^3 t_e, \quad r_m = \frac{4}{9} \left(1 + \frac{r_e}{3ct_e}\right)^3 ct_e.$$

Enačbi veljata za $t_e < 2r_e/3c$ ali $t_e < t_m$. Pozneje svetloba potuje proti levi in nazadnje doseže izhodišče.

Vzemimo, da bi sevala galaksija v trenutku $t_e = t_0/1000$, in bi nas njeno sevanje v izhodišču doseglo v trenutku t_0 . Po enačbi (5) dobimo za lastno koordinato ob sevanju $r_e = 3ct_e[(t_0/t_e)^{1/3} - 1] = 3ct_0[(t_0/t_e)^{1/3} - 1]/(t_0/t_e) = 0,027ct_0$. V tem primeru bi dobili $t_m = \frac{8}{27}t_0 = 0,30t_0$ in $r_m = \frac{4}{9}ct_m = 0,44ct_m$. Svetloba bi potovala navzven do časa $0,30t_0$, čeprav je bila izsevana proti izhodišču, in bi se tedaj ustavila pri lastni koordinati $0,44ct_0$. Dosegla nas bi v trenutku t_0 , ko bi bila galaksija pri koordinati $r_0 = 3ct_0[1 - (t_e/t_0)^{1/3}] = 2,7ct_0$, kar pomeni, da bi potovala v povprečju skoraj s trojno hitrostjo svetlobe.

Zanima nas rdeči premik spektralnih črt. Na poti do njega se pokaže prednost krajevnega časa, pri katerem ostane hitrost svetlobe nespremenjena, in krajeвне koordinate, ki ostane za določeno galaksijo nespremenjena. Zato je $(dt_k)_e = (dt_k)_0$, če indeks e zadeva svetlobo, ko jo galaksija izseva v trenutku t_e , in indeks 0 svetlobo, ko jo sprejmemo v trenutku t_0 . Z odvajanjem enačbe (6) dobimo zvezi $(dt_k)_e = (t_0/t_e)^{2/3}dt_e$ in $(dt_k)_0 = (t_0/t_0)^{2/3}dt_0$, iz katerih sledi $cdt_0 = (t_0/t_e)^{2/3}cdt_e$ in z enačbo (3)

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \left(\frac{t_0}{t_e}\right)^{2/3} = \frac{r_0}{r_e}.$$

Pri tem smo za dt_e in dt_0 vzeli nihajna časa elektromagnetnega valovanja, tako da sta $cdt_e = \lambda_e$ in $cdt_0 = \lambda_0$ valovni dolžini ob izsevanju in ob sprejemu. Navadno uporabimo *relativni rdeči premik spektralnih črt* $(\lambda_0 - \lambda_e)/\lambda_e = z$, s katerim izrazimo razmerje valovnih dolžin kot $\lambda_0/\lambda_e = z + 1$. Relativni rdeči premik poveže z razmerjem časov enačba:

$$\lambda_0/\lambda_e = z + 1 = (t_0/t_e)^{2/3}. \quad (7)$$

Zaradi enačbe (7) rdečega premika v vesolju pogosto ne pojasnijo z Dopplerjevim pojavom zaradi oddaljevanja galaksij, ampak s „širjenjem prostora“ med oddaljenimi galaksijami.

Zdaj se lotimo pomembne zadeve in v ta namen ponovimo račun, ki smo ga že naredili v drugi zvezi. Galaksija naj v trenutku t_e pri lastni koordinati

$r_e = r_0(t_e/t_0)^{2/3}$ izseva valovno čelo. Potovanje čela opiše enačba (5) s konstanto $A = (r_e + 3ct_e)/(ct)^{2/3}$. Čelo zaznamo v trenutku t_0 v izhodišču, tako da velja $A(ct_0)^{2/3} - 3ct_0 = 0$. Iz enačb izluščimo zvezo

$$\left(\frac{t_e}{t_0}\right)^{1/3} = 1 - \frac{r_0}{3ct_0}, \quad (8)$$

ki z enačbo (7) dá lastno koordinato galaksije v trenutku t_0

$$r_0 = 3ct_0[1 - (1 + z)^{-1/2}]. \quad (9)$$

Iz enačbe (9) izhaja, da je mogoče pri zelo velikem relativnem rdečem premiku opazovati v skrajnem primeru območja vesolja, ki so zdaj v oddaljenosti $3ct_0$. To je *obzorje* (horizont).

Hitrost oddaljevanja galaksij je po enačbi (3) sorazmerna z oddaljenostjo: $dr/dt = 2r/3t$, kar navadno izrazimo s *Hubblevim zakonom*:

$$v = H(t)r, \quad H(t) = \frac{2}{3t}.$$

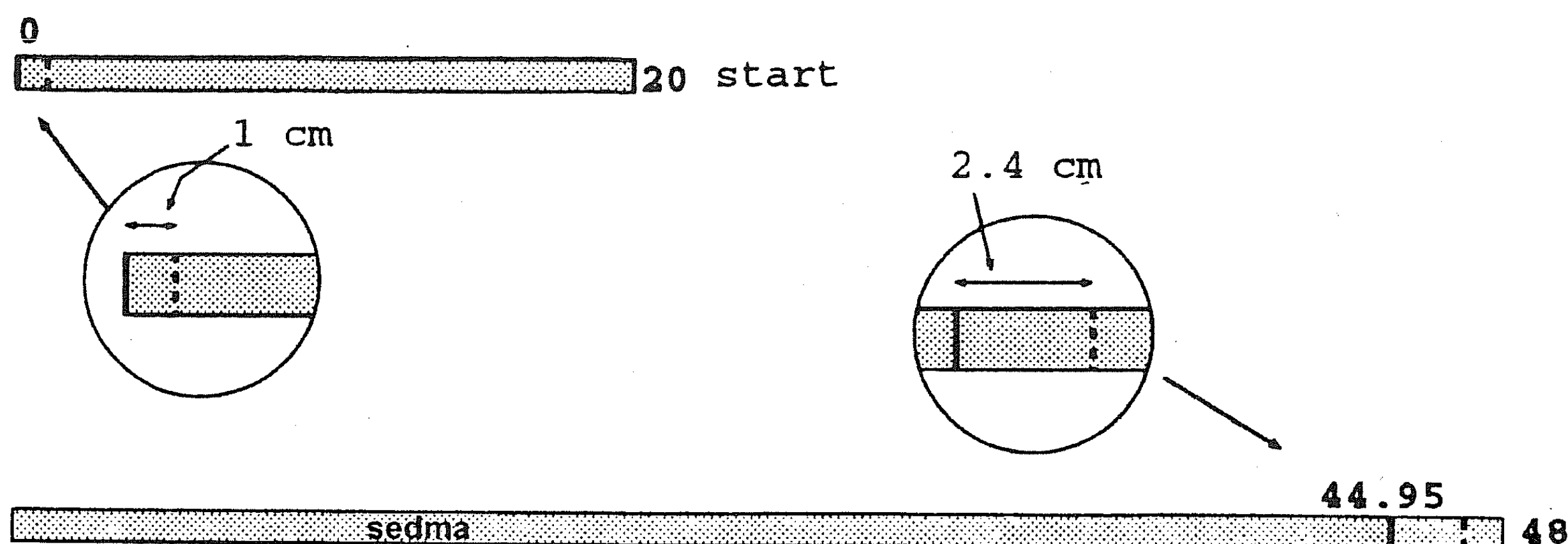
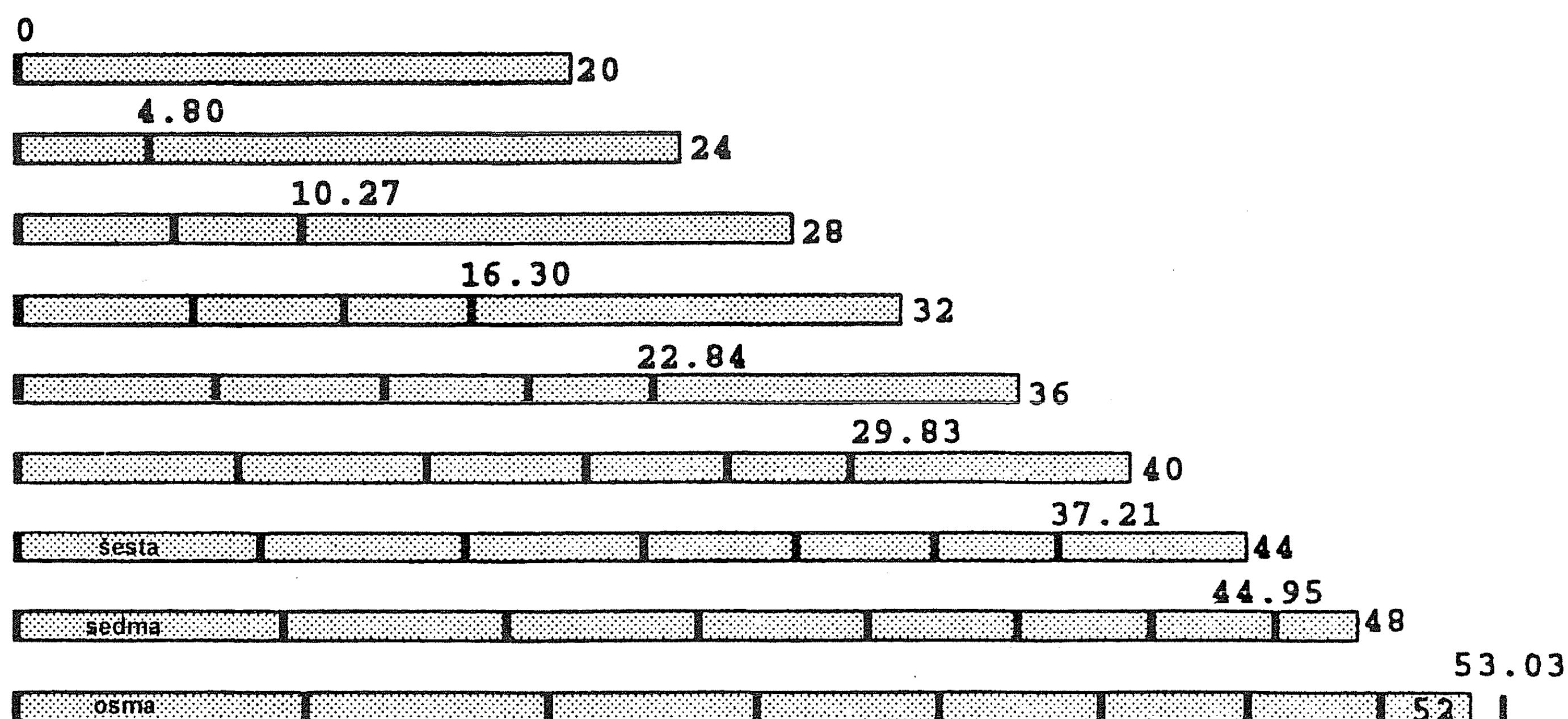
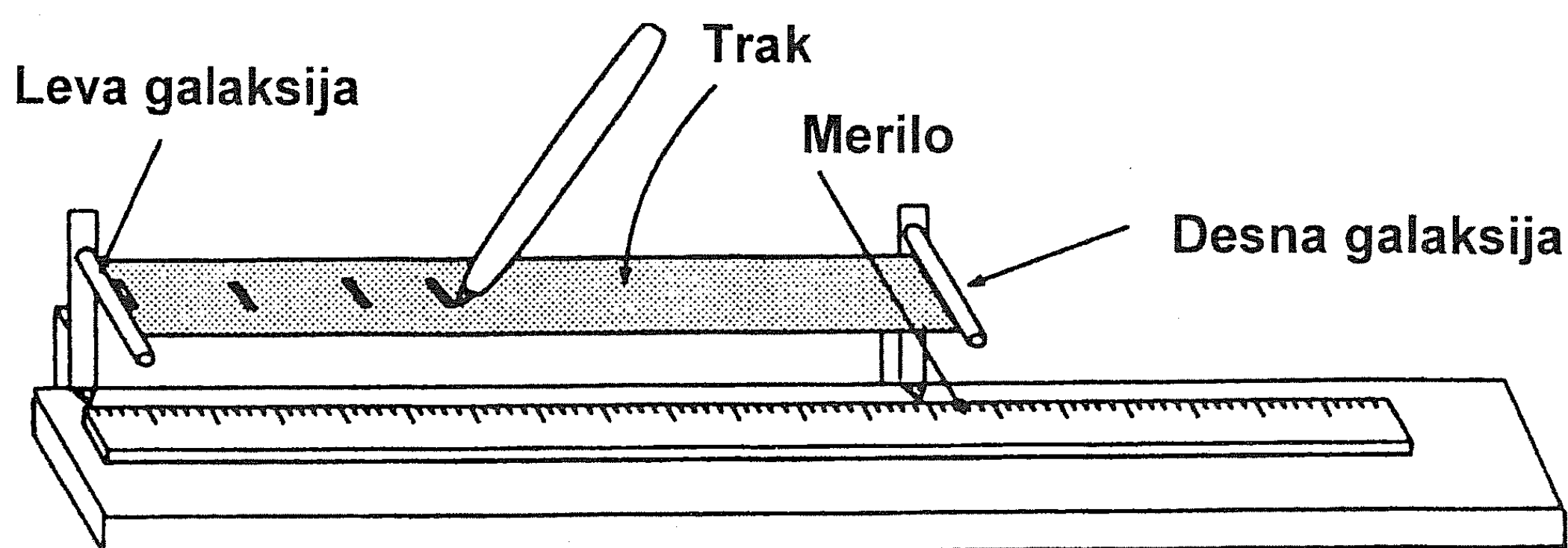
$H(t)$ je Hubblev koeficient in njegova sedanja vrednost $H_0 = H(t_0) = 2/3t_0$ je *Hubbleva konstanta*. V modelu klasične mehanike smo energijo W telesa sestavili iz kinetične in gravitacijske potencialne energije in nato postavili $W = 0$. V znani enačbi $\frac{1}{2}mv^2 = \mathcal{G}mM/r_0$, ki v tem primeru nastane, sedanjo hitrost oddaljevanja izrazimo s Hubblevo konstanto $v = H_0r_0$ in maso teles v krogli z radijem r , z gostoto snovi ρ : $M = \frac{4}{3}\pi r_0^3\rho$. V tem primeru smo iz ene razsežnosti prešli v tri. Iz zveze $\frac{1}{2}H^2(t_0)r_0^2 = \mathcal{G} \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3\rho/r_0$ izračunamo mejno gostoto snovi

$$\rho_k = \frac{3H^2(t_0)}{8\pi\mathcal{G}}. \quad (10)$$

Model velja samo, če je povprečna gostota snovi in mase, ki ustreza energiji, v vesolju enaka mejni gostoti (10).

Posebni teoriji relativnosti nasprotuje, da hitrost valovnega čela (2) lahko preseže „hitrost svetlobe v vakuumu“ in obzorje v času t_0 doseže večjo oddaljenost od ct_0 . Odlika našega preprostega modela je prav v tem, da smo do obojega prišli neprisiljeno s privzetkom, da valovno čelo ob izsevanju potuje glede na trak s hitrostjo svetlobe v vakuumu. Do enakega sklepa pride splošna teorija relativnosti. Teorijo pogosto osnujejo na *načelu ekvivalenčnosti*, ki v eni od oblik zatrdi, da v vsakem prosto padajočem opazovalnem sistemu, ki se ne vrti, na dovolj majhnih razdaljah, *lokalno*, veljajo zakoni fizike, znani iz posebne teorije relativnosti. V vesolju pa zajamemo velike razdalje, na katerih je treba upoštevati, da se „širi prostor“. A. Einstein se

je že v letih 1907 in 1911 pri obravnavanju gravitacije odpovedal konstantni hitrosti svetlobe, ko mu je enačba $c(1+\phi/c^2)$ pokazala, da je hitrost svetlobe v homogenem gravitacijskem polju odvisna od gravitacijskega potenciala ϕ . „Načelo o konstantnosti svetlobne hitrosti [...] ne velja v inačici, v kateri ga navadno vzamemo za osnovo običajne teorije relativnosti.” Leta 1912 se je zavedel, da velja načelo ekvivalentnosti lokalno, preden je leta 1916 objavil splošno teorijo relativnosti [4].



Slika 1. Na začetku poskusa s prožnim trakom leva sponka miruje v izhodišču in desna sponka v oddaljenosti 20 cm. Leva sponka ustreza levi galaksiji, desna pa desni v oddaljenosti 1 c · Mleta (1 Mleto je milijon let). 4 cm od leve galaksije naredimo črtnico,

ki kaže, do kod pride svetloba z leve galaksije v prvih 0,2 Mleta (a). Nato oddaljenost med sponkama povečamo za 4 cm, kolikor se oddaljita galaksiji v prvih 0,2 Mleta, če se oddaljujeta s hitrostjo svetlobe. Na traku 4 cm od prve črtice narišemo drugo črtico, ki kaže, do kod pride svetloba v času od 0,2 do 0,4 Mleta. Nato zopet povečamo oddaljenost sponk za 4 cm in zopet narišemo novo črtico 4 cm od prve. Korake ponavljamo, dokler tik pred koncem osmega koraka, torej približno po 1,6 Mleta, svetloba ne dospe do desne galaksije (b). V resnici je oddaljevanje zvezno in velja enačba $dx/dt = c dt/(1 + t/t_0)$ z rešitvijo $x = t_0 \ln(1 + t/t_0)$. Prva enačba se nekoliko razlikuje od enačbe (2), ker [2] uporablja nekoliko drugačen model kot [1]. S to enačbo dobimo za končni čas $t_0(e - 1) = 1,718t_0 = 1,718$ Mleta. Za hitrost oddaljevanja smo namenoma vzeli hitrost svetlobe, ker celo v tem primeru svetloba z leve galaksije ujame desno galaksijo. Če bi se galaksiji oddaljevali s hitrostjo v , bi dobili $t = (l/v)(e^{v/c} - 1)$ z začetno oddaljenostjo l . Sunek svetlobe, ki ga seva leva galaksija na začetku 0,05 Mleta, na koncu desna galaksija sprejema približno 2,4-krat tolikšen čas (c). To ustreza rdečemu premiku. V našem primeru se poveča valovna dolžina 2,718-krat, v splošnem pa $e^{v/c}$ -krat. American Association of Physics Teachers, ki izdaja American Journal of Physics, in profesor R. Price z univerze zvezne države Utah v Salt Lake Cityju sta ljubeznivo dovolila objavo risb.

V preprostem modelu vesolja smo brez večjih težav vpeljali nekaj pomembnih pojmov in raziskali nekaj koristnih zvez, do katerih bi po običjani poti prišli s precej večjim naporom. Tako smo dobili dokaj uporaben pregled nad količinami, s katerimi opišemo vesolje, in zvezami med njimi. Vse korake je mogoče spremljati v okviru splošne teorije relativnosti in jih s tem podpreti [1]. Posebni primer z gostoto (10) imenujejo tudi *Einstein-de Sitterov model* ali *Robertson-Walkerjev model z ravnim krajevnim prostorom*.

Nekatere bralce bodo zadovoljile zapisane enačbe. Drugi si bodo morda želeli model še bolje ponazoriti. Zares je mogoče v srednji šoli narediti poskus s prožnim trakom (slika 1) [2]. Seveda je v skrajnem primeru mogoče dobiti le trak, ki se podaljša približno na trojno začetno dolžino, medtem ko namišljeni trak v modelu lahko neomejeno daljšamo od začetne dolžine 0. Čeprav gre torej le za prisposodobu, utegne biti za nekatere poskus dovolj poučen. Drugi si morda o vesolju ne bodo želeli ustvariti preveč otipljivih predstav.

LITERATURA

- [1] R. Akridge, *A simple cosmology: General relativity not required*, Am. J. Phys. **69** (2001) 195.
- [2] J. Strnad, *Vesolje*, Obzornik mat. fiz. **24** (1977) 123.
- [3] R. H. Price, E. Grover, *Cosmological expansion in the classroom*, Am. J. Phys. **69** (2001) 125.
- [4] A. Einstein, *Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen*, Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik **4** (1907) 411; *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*, Annalen der Physik **35** (1911) 898.
- [5] J. Strnad, *Razvoj fizike*, DZS, Ljubljana 1996, str. 319.

OB PETSTOLETNICI SMRTI B. PERGERJA

MARIJAN PROSEN

Math. Subj. Class. (2000): 01A70

Slovenec Bernard Perger iz Zgornje Ščavnice v Slovenskih goricah je bil v 15. stoletju eden najpomembnejših humanistov na Dunaju. Predaval je različne predmete, tudi matematiko z astronomijo, bil dekan artistične fakultete in rektor dunajske univerze.

THE 500TH ANNIVERSARY OF DEATH OF B. PERGER

The Slovene Bernard Perger from Zgornja Ščavnica in Slovenske gorice was in the 15th century one of the most important humanistic intellectual of Vienna. He was a professor of different subjects, among them mathematics with astronomy, a dean of Artistic Faculty and a rector of Vienna University.

Ob koncu srednjega in na začetku novega veka so bili med profesorji na različnih univerzah, predvsem na dunajski, številni Slovenci, ki so objavili ali pa v rokopisu zapustili znanstvena dela, sprva pisana še v latinščini, pozneje pa v nemškem in tudi italijanskem jeziku. Nekateri med njimi so si že pridobili zasluge za zmago humanistične misli v avstrijskih deželah. Na Slovenskem rojeni univerzitetni učitelji so bili v marsičem med prvimi glasniki nove smeri v znanosti in slovstvu. Zdi se, da jim je njihovo vlogo pri širjenju humanizma olajšala bližina italijanskih univerz, na katerih so se lažje spoznavali s klasično kulturo in tako pridobljeno znanje smotrno prenašali v okolje dunajske univerze. Takšen je bil tudi Bernard Perger (ok. 1440 do ok. 1502)¹ [1], [2], [3], [4].

Leta 1459 se je B. Perger vpisal na dunajsko univerzo in 1464 doktoriral na artistični fakulteti, kjer je nato do 1481 predaval geometrijo (Evklida), optiko in matematiko z astronomijo, klasično književnost (Vergila) in pravo. Stalno se je izobraževal. Leta 1465 se je vpisal na medicinsko fakulteto, leta 1476 pa na pravno fakulteto, katere licenciat je dosegel 1481.

Leta 1471 je bil rektor dunajske univerze, istega leta pa tudi dekan artistične fakultete. Po letu 1475 je predaval na Visoki šoli sv. Štefana in bil nekaj časa tudi njen rektor. Od 1477 je predaval latinsko slovnico.

¹ Pred Pergerjem so bili profesorji na dunajski univerzi: Lenart s Kranjskega (1388, 1397 in 1398), Nikolaj s Štajerskega (1407), Lenart s Štajerskega (1407 do 1410), Jurij iz Kamnika (1407), Lavrencij iz Gornjega Grada (1426), Bolfenk iz Kamnika (1430), Andrej iz Ljubljane (1431), Krištof s Kranjskega (1431 in 1458), Nowak Peter (1432), Bernhard iz Kranja (1437), Blaž iz Sorice (1437), Jakob iz Smlednika (1441), Gregor iz Kranja (1442 in 1446), Konrad iz Kranja (1445), Mihael iz Kranja (1448), Tomaž iz Cirkovcev (1456), Brikcij (Preprosti) iz Celja (1469) že za časa Pergerja itn. Podatki izvirajo iz letopisov dunajske univerze, v oklepaju je naveden čas poučevanja, upoštevali smo vse fakultete.

Brikcij iz Celja in Nikolaj iz Novega mesta sta pomagala Pergerju pri sestavljanju uspešne slovnice latinskega jezika. Kaže, da so bili tisti, ki so prišli s Slovenskega, med seboj povezani ali so si vsaj pomagali [3], [5].

Pouk latinščine je bil zastarel. Ni prinašal praktične uporabe. Pri svojih reformnih pedagoških prizadevanjih je Perger pogrešal ustrezen učbenik latinske slovnice. Ker takega ni bilo, ga je napisal sam. Po neki italijansko komentirani slovnici je priredil svoj nemško komentirani učbenik *Grammatica nova* (Venetiis, 1479). Pri delu sta mu pomagala rojaka Preprost iz Celja in Nikolaj iz Novega mesta. Učbenik je bil metodično odlično zasnovan, moderen, jasen, pregleden in racionalen glede podajanja snovi. V nemško govorečih evropskih deželah je postal zelo priljubljen in je še za Pergerjevega življenja doživel okoli 25 izdaj.²

Od 1492 do 1501 je bil B. Perger cesarski superintendent na univerzi, torej namestnik Friderika III in po njegovi smrti (1493) tudi Maksimilijana I Habsburškega na Dunaju (Maksimilijan I se je učil slovenščine!). Ta njegova vladna služba je torej trajala skoraj deset let, kmalu potem pa se je umaknil iz javnega življenja in umrl (po Aschbachu – *Zgodovina dunajske univerze*) okoli 1502 na Dunaju.

Cesar Maksimilijan I je Pergerju izkazoval posebno zaupanje. Perger je skrbel za stike med vlado in univerzo, nadzoroval je uporabo vladarjeve dotacije univerzi in plače univerzitetnih učiteljev ter skrbel za ohranitev univerzitetnih privilegijev. Zaupano mu je bilo izdajanje ukrepov za izboljšanje pouka in reformo študijskega načrta, kar je dobro izrabil tudi pri propagiranju svoje latinske slovnice. Njegove reformne metode za izboljšanje pouka latinščine torej dokazujejo veliko število izdaj njegovega učbenika.

Tako imamo iz konca srednjega veka med pedagoškimi spisi tudi take, ki jih je napisal Slovenec, ki je bil hkrati tudi eden prvih univerzitetnih učiteljev in glasnikov širjenja humanizma v Evropi. V rokopisu pa so ostale njegove efemeride z astronomskimi podatki za leta od 1482 do 1500.

Poleg slavne 200. obletnice Vegove smrti praznujemo letos še drugi pomembni okrogli jubilej, namreč 500. letnico smrti prav tako zelo uglednega, a na žalost kar preveč pozabljenega Slovenca – Štajerca Pergerja.

Bil je reformator latinskega pouka na dunajski univerzi v humanističnem duhu, predavatelj klasikov, matematike, astronomije in prava ter dolga leta univerzitetni superintendent – predstavnik deželnoknežje vlade, torej poleg rektorja zelo pomemben funkcionar. Ker se je ukvarjal z različnimi vedami, med njimi z astronomijo, ga zato prištevamo tudi med astronome, čeprav ni zapustil tiskanih astronomskih del.

LITERATURA

- [1] P. Simoniti, *Sloveniae scriptores Latini recentioris aetatis. Opera scriptorum Latinorum Sloveniae...*, Zagreb – Ljubljana 1972, str. 96.

² To je bil prvi humanistični učbenik latinske slovnice. Oprt na (italijanski) humanizem se je v celoti odmaknil od srednjeveških sholastičnih slovnice. Menda je bil prava vojna napoved okostenelemu pouku latinščine. Glede splošne ocene te slovnice in zakaj se je tako hitro uveljavljala, tu ne mislimo razpravljati; to bi morala narediti druga stroka.

- [2] V. Murko, *Starejši slovenski znanstveniki in njihova vloga v evropski kulturni zgodovini – Astronomi*, Zbornik za zgodovino naravoslovja in tehnike, zvezek 2, Slovenska matica 1974, 11–41.
- [3] V. Murko, *Delovanje Slovencev na tujih univerzah (do konca 18. stol.)*, Naši razgledi, Ljubljana, 5. 11. 1971.
- [4] M. Prosen, geslo: *Astronomija*, Enciklopedija Slovenije št. 1 (1987) in geslo *Perger B.*, Enciklopedija Slovenije št. 8 (1994), MK, Ljubljana.
- [5] Lastni zapiski o zgodnjih slovenskih znanstvenikih, povezanih z astronomijo (različni viri).

UTRINEK

Evolucija poučevanja matematike v osnovni šoli

Poučevanje matematike v drugi polovici prejšnjega stoletja je doživelo precej sprememb. Na primeru iste naloge ponazorimo, kako so na razvoj vplivali novi pogledi na matematiko in splošna raba računalnikov. V šestdesetih letih prejšnjega stoletja se je naloga, prevedena v sedanjo denarno enoto, glasila takole:

Kmet prodaja vrečo krompirja po 500 tolarjev. Stroški proizvodnje krompirja znašajo tri petine prodajne cene. Kolikšen je njegov dobiček?

Po uvedbi „nove“ matematike v sedemdesetih letih se je besedilo naloge moralo preoblikovati.

Kmet želi zamenjati množico K krompirja za množico D denarja. Moč množice D je 10 in vsak njen element je vreden toliko kot bankovec s sliko Jurija Vege, torej 50 tolarjev. Nariši 10 krogcev, ki predstavljajo elemente množice D . Množica S proizvodnih stroškov je predstavljena s štirimi krogci manj kot množica D . Predstavi množico S kot podmnožico množice D . Kolikšna je moč množice, ki predstavlja kmetov dobiček?

V osemdesetih letih so zaradi skrbi, da so otroci preobremenjeni, nalogo nekoliko poenostavili.

Kmet prodaja vrečo krompirja po 500 tolarjev. Stroški proizvodnje krompirja znašajo 300 tolarjev, kmetov dobiček pa 200 tolarjev. Kolikokrat se v prejšnjih dveh stavkih omenja krompir? O nalogi diskutiraj s sošolci.

V devetdesetih letih pa je bilo treba nalogo prilagoditi računalniški dobi.

Kmet prodaja vrečo krompirja po 500 tolarjev. Stroški proizvodnje krompirja znašajo 60 odstotkov prodajne cene. Na računalniku poženi program KROMPIR, ki bo izračunal kmetov dobiček. O dobljenem rezultatu razpravljaj s kolegi v svoji skupini. Na kratko analiziraj pomen tega primera v resničnem gospodarstvu.

po ljudskem izročilu priredil
Roman Drnovšek

Matjaž Omladič – dobitnik Zoisove nagrade za leto 2001

Prof. dr. Matjaž Omladič je eden najbolj znanih slovenskih matematikov srednje generacije. Odkar je leta 1980 doktoriral pri profesorju Vidavu, je med vodilnimi v slovenski matematiki tako na pedagoškem kot na raziskovalnem področju. Kdor pozna njegovo veliko aktivnost, zlasti v zadnjih desetih letih, ga ni presenetilo, da je lansko leto prejel Zoisovo nagrado, najvišje državno priznanje za vrhunske znanstvene dosežke.



Področja njegovega znanstvenega zanimanja so različna, v glavnem pa so povezana s teorijo operatorjev, s katero je pričel svojo raziskovalno pot: spektralna teorija, splošna funkcionalna analiza, Banachove mreže in Rieszovi prostori, linearna algebra in teorija matrik, asociativne in neasociativne algebrske strukture. V zadnjih sedmih, osmih letih se je največ ukvarjal z nekaterimi ožjimi tematskimi sklopi in iz njih v tem obdobju objavil v uglednih mednarodnih matematičnih revijah več kot 30 člankov. Tako je npr. obravnaval problem karakterizacije različnih ohranjevalcev, tj. preslikav na operatorjih ali matrikah, ki ohranjajo dano lastnost (rang, komutativnost, diagonalizabilnost, submultiplikativnost spektra itd.). Nadalje je študiral strukturne in spektralne lastnosti linearnih polgrup, zlasti njihovo nerazcepnost in trikotljivost. Pomembno je prispeval tudi k problemu stabilnosti za izometrije itd. Na teh ožjih področjih je sam ali s sodelavci dosegel izvrstne rezultate. Nekateri med njimi pomenijo trajen prispevek k matematični teoriji. Pogosto so citirani, celo v nekaterih novejših monografijah, npr. v knjigi Y. Benjaminija in J. Lindenstraussa *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, 1999 (rešitev problema najmanjše konstante pri aproksimaciji približne izometrije s pravo izometrijo) ali v knjigi R. Bhatia *Matrix Analysis*, 1997 (ocena za razdaljo med dvema normalnima matrikama z njuno spektralno razdaljo). Omenjena konkretna dosežka sta plod sodelovanja, prvi s Petrom Šemrlom, drugi pa z njim in z Johnom Holbrookom.

V svojem raziskovanju je nagrajenec posegel tudi na druga bolj uporabna matematična področja (v numerično analizo, statistiko in celo v matematično sociologijo). Na sploh je za njegovo raziskovalno delo značilna raznovrstna tematika in pestrost prijemov pri reševanju problemov ter odprtost za sodelovanje z drugimi raziskovalci. Znan je tudi po svoji sposobnosti za motiviranje mlajših sodelavcev za raziskovalno delo tako doma kot v tujini. Samo po letu 1993 je bil mentor pri 28 diplomah, 14 magisterijih in

treh doktoratih (vseh diplom skupaj je bilo več kot 60, magisterijev več kot 20, doktoratov pa 10). S svojimi pogostimi obiski na kanadskih in drugih ameriških univerzah, s predavanji na mednarodnih konferencah ter z organiziranjem mednarodnih delavnic iz linearne algebre na Bledu (1996 in 1999) se je uveljavil tudi v tujini. S tem je (tako kot s svojim celotnim delom) pomembno prispeval k mednarodnemu ugledu slovenskega matematičnega raziskovanja v linearni algebri in operatorski teoriji.

Nagrajencu prof. dr. Matjažu Omladiču zato k Zoisovi nagradi čestitamo in mu v prihodnje želimo nadaljnjih raziskovalnih uspehov.

Milan Hladnik

Egonovih šestdeset

Lani, natančneje 11.7.2001, je slovenski matematik Egon Zakrajšek praznoval šestdesetletnico. To je priložnost, da se vsaj na hitro, včasih bi temu rekli „po diagonali”, sprehodimo po njegovi strokovni poti.

Egon Zakrajšek je namreč eden pionirjev slovenskega računalništva. Od vseh, ki so se v tistih „prazgodovinskih” časih okužili z virusom računalniškega programiranja, je bil prav Zakrajšek najbolj proderen, vztrajen in uspešen. V začetni fazi računalništva pri nas so namreč matematiki igrali vodilno in prevladujočo vlogo. Vendar je že kmalu, še pred prihodom osebnih računalnikov, prišlo do razcepa. Marsikoga je računalnik tako začaral, da je popustil matematiko in se popolnoma predal računalništvu. Dandanes bi takemu rekli „heker”. Treznejši, ali pa tisti, ki so bili genetsko odporni ali cepljeni proti računalniškemu virusu, so se po prvi neprespani noči ob računalniku zavedeli grozljivega prepada računalniške odvisnosti in so se raje vrnili v zavetje varne čiste matematike, ki jih je ob čajčku in copatah čakala ob svinčniku in papirju na domači pisalni mizi. Zakrajšek je bil vodilna izjema, prepričan zagovornik tretje poti: matematika da, ampak ne larpurlartistična, sterilna, brez uporabe in brez računalniške podpore. Večkrat je omenil: „Nov izrek v matematiki ima smisel le, če ima vsaj dve različni netrivialni uporabi.” Seveda je v računalništvu iskal vse tiste aspekte, ki so omogočali uporabo matematike. Umetnost programiranja v številnih jezikih je obvladal do popolnosti. Vsak jezik je razčlenil do konca. Poznal je vse pasti prvih nepopolnih prevajalnikov. Krčil je ledino in pomagal vsem tistim, ki so prihajali za njim. Vsako reč, ki ga je zanimala, je do konca premislil in v obliki zapiskov, priročnikov, knjižic, zapustil naslednikom. Do obisti je poznal delovanje operacijskih sistemov. Kot za šalo je v dokaz, da dobro razume delovanje ukaznega jezika prvega slovenskega



CDC, napisal v njem rekurzivni program, ki je reševal problem osmih dam na šahovski deski. Napisal je veliko odličnega in uporabnega softvera: od numerične analize, statistike do diskretne optimizacije.

Zakrajškova bibliografija vsebuje med drugim 23 znanstvenih člankov, 2 predhodni objavi, 6 strokovnih člankov, 25 prispevkov na konferencah, 23 univerzitetnih učbenikov, številne ponatise srednješolskih učbenikov (skupaj s Petrom Legišo). Bil je mentor pri več kot 20 diplomah, komentor pri magisteriju in doktoratu. Že bežen pogled na njegove članke pokaže, da ga zanima predvsem uporabna matematika v vseh pogledih: od numerične matematike, prek računalništva do diskretne matematike. Matematiko uporablja na številnih področjih človekovega ustvarjanja od fizike, kemije do sociologije, ekonomije, itd. Spomnim se, kako se je nekoč lotil računanja tira planetoidov. Po njegovih navodilih sem napisal prvi program za turbolenco ob lopaticah turbine.

Kljub temu je Egon Zakrajšek eden redkih pravih, čistih matematikov, ki so sposobni, če le imajo dovolj časa in papirja, poustvariti vso matematiko, ki jo poznajo. Pri njem ni nobene površnosti ali približnosti. Nobenega „blefa“. Če ga problem zanima, se ga loti in ga obdeluje, dokler ga popolnoma ne obvlada. Potem o problemu piše. Zapiski so popolni. Spomnim se, kako se je nekoč lotil in mi na tabli izpeljal počasi in sistematično velik del teorije prostorov Soboljeva, ne da bi enkrat zaškripalo ali bi se moral zateči k zapiskom ali knjigi. Seveda pa smo z Egonom preživeli veliko ne povsem matematičnih uric: od številnih večerov ob kartah, igrali smo seveda samo bridge, pa do neprespanih noči, ki so sledile sredinim seminarjem ob raznih igrah tipa „monopoly“. Ker je Zakrajšek sodeloval s številnimi nematematikami, nas je nepopisno razveseljeval z resničnimi zgodbicami, ki so tako ali drugače govorile o težavah družboslovcev z matematiki. Nikoli tudi ne bom pozabil govora v na hitro priučeni francoščini, ki ga je kot del stave imel prof. Sergej Pahor na večerji, ki je sledila dolgo pričakovanemu doktoratu Egona Zakrajška.

Razlog, da srednje generacije matematikov manj poznajo Egonovo delo in da ga mlajše generacije dojemajo drugače kot njegovi kolegi iz 70. let, je v tem, da je leta 1982 pustil akademsko delo in se spoprijel z industrijskim delom v Silicijevi dolini, kjer je deloval polnih dvanajst let. Tam smo ga slovenski matematiki večkrat obiskovali. Ponudil nam je odlično odskočno desko za raziskovanje Kalifornije.

Ko se je leta 1994 vrnil v domovino, je za popotnico pripeljal s seboj zmogljiv računalnik in kup še nedotaknjenih zavitkov s programi in dokumentacijo. Med drugim je prinesel tudi najnovejšo različico programa Word, ki je bil mnogo boljši od programa Wordstar, katerega smo bili uporabljali v času njegovega odhoda. Zanimalo ga je, ali je dovolj zmogljiv za pisanje matematičnih besedil. Ko sem mu v zadregi zajecljajal, da pri nas zdaj kraljuje LaTeX, je le zavzdihnil: „Pa naj bo LaTeX!“. Če se ne motim, je vrgel v koš kar neodprte pakete z odpisanim Wordom. Prve mesece se je še sem ter tja oglasil pri meni in povprašal za to in ono v zvezi z računalniki pri

nas. Ko pa mi je prinesel v gotici izpisano besed
douvel, da me je, tako kot pri drugih matematičn
tudi pri razumevanju in uporabi Latexa že zdavn
Še na mnoga leta, Egon!

K 11/02



Borut Zalar – dobitnik Zoisovega priznanja za leto 2001

Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport vsako leto podeljuje Zoisove nagrade in priznanja za znanstveno-raziskovalno delo, ki imajo, kot bralci najbrž vedo, za znanost podoben pomen, kot ga imajo za kulturo v širši javnosti bolj znane Prešernove nagrade. V letu 2001 je bil med prejemniki Zoisovega priznanja za pomembne znanstvene dosežke tudi član DMFA matematik prof. dr. Borut Zalar.

Borut Zalar se je rodil leta 1964 v Ljubljani, sicer pa je doma iz Trebnjega. Matematiko je študiral v Ljubljani. Diplomiral je leta 1989, magistriral že dobro leto zatem in naposled doktoriral leta 1993 pod mentorstvom profesorja Vukmana. Zaposlen je kot profesor matematike na Fakulteti za gradbeništvo Univerze v Mariboru.

Zoisova priznanja se podeljujejo za raziskovalno delo v zadnjih sedmih letih. V tem obdobju je profesor Zalar v uglednih mednarodnih matematičnih revijah objavil 21 znanstvenih člankov, med katerimi je tudi nekaj daljših razprav. Njegovo raziskovalno področje bi težko opisali z le nekaj besedami, saj gre za zanimiv splet različnih področij. Po eni strani je profesor Zalar značilen predstavnik slovenske šole funkcionalne analize, katere utemeljitelj je profesor Vidav. Po drugi strani pa njegova dela sodijo v neasociativno algebro, ki v slovenski matematiki nima daljše tradicije. Skupaj s profesorjem Cedilnikom, sicer Zalarjevim mentorjem pri magisteriju, sta tako na tem področju pri nas orala ledino. Neasociativno algebro je slovenskim matematikom profesor Zalar približal tudi z vrsto poljudnoznanstvenih člankov v Obzorniku za matematiko in fiziko.

Iz znanstvenih del Boruta Zalarja poleg matematične spretnosti in procljivosti veje tudi razgledanost. Njegovi kolegi dobro vemo, kako zanimiv sogovornik o najrazličnejših vejah matematike je Borut. Dejstvo, da njegovo raziskovalno delo temelji na povezavi različnih področij, tako nikakor ni naključno. Veseli nas, da njegovi dosežki niso bili spregledani, in mu tudi vnaprej želimo veliko uspehov pri raziskovalnem delu.

Matej Brešar

