

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

ODPISANO

2001

Letnik 48

6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 2001

letnik 48, številka 6, strani 161–192

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, telefon (01) 476-65-53, telefaks (01) 251-72-81, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d. d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 042961, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Mirko Dobovišek (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Boris Lavrič, Marko Zgonik (urednik za fiziko), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Naročnina za člane društva je všteta v celoletno članarino, ki znaša 3600 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6600 SIT, za študente 1800 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 720 SIT, stare številke 480 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1450 izvodov. Revijo sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2001 DMFA Slovenije – 1474 Poštšina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles

Str.–Page

Brouwerjev izrek — Brouwer theorem (Aleš Vavpetič)	161–167
Negibne točke in splošno ravnovesje na trgu — Fixed points and general market equilibrium (Neža Mramor Kosta)	170–181
O slonih in matrikah — Of elephants and matrices (Miran Černe in Manuel Flores)	183–185

Vesti – News

Raziskovalni dnevi iz fizike za srednješolce (Zvonko Jagličič)	181–182
Strokovno srečanje in 53. občni zbor DMFA Slovenije (Nada Razpet)	185–188
Nagrade in priznanja DMFA Slovenije za leto 2001 (Darjo Felda, Milan Hladnik, Lucijana Kračun, Janez Krušič, Zvonko Trontelj in Nada Razpet)	188–III
Letno kazalo	III–IV

Nove knjige – New books

Michel Guillemot et al., Zgodovina matematike – zgodbe o problemih (Petar Pavešić)	167–169
Na ovitku: Kraljeva žalost, Henri Matisse, 1952.	

BROUWERJEV IZREK

ALEŠ VAVPETIČ

Math. Subj. Class. (2000): 55M20

V članku dokažemo Brouwerjev izrek, ki pravi, da ima vsaka zvezna preslikava na enotski krogli v $\mathbb{R}^n$ negibno točko.

BROUWER THEOREM

We give a proof of Brouwer's theorem which says that every continuous map on the unit ball in $\mathbb{R}^n$ has a fixed point.

Reševanje enačbe $f(x) = 0$ lahko prevedemo na ekvivalenten problem iskanja negibne točke: poišči negibno točko preslikave $F(x) := f(x) + x$; to je poišči x_0 , da velja $F(x_0) = x_0$. Nalogi sta ekvivalentni, saj je $F(x_0) = x_0$ natanko tedaj, ko je $f(x_0) = 0$. Izreki o obstoju negibnih točk so zelo pomembni v raznih vejah matematike pa tudi v drugih znanostih, kot na primer v ekonomiji [7]. Eden najbolj znanih izrekov o negibnih točkah je Brouwerjev izrek, katerega dokaz bomo predstavili v tem članku.

Izrek 1 (Brouwer). *Vsaka zvezna preslikava $f: B^n \rightarrow B^n$ ima negibno točko.*

Najprej si oglejmo enodimenzionalen primer. Naj bo $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ zvezna preslikava. Grafično se hitro prepričamo, da graf preslikave f seka simetralo lihih kvadrantov, torej obstaja točka $x_0 \in [-1, 1]$, za katero je $f(x_0) = x_0$. Analitično pa problem rešimo takole: Za preslikavo $\bar{f}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definirano s predpisom $\bar{f}(x) = x - f(x)$, velja $\bar{f}(-1) \leq 0$ in $\bar{f}(1) \geq 0$. Če je $\bar{f}(-1) = 0$ ali $\bar{f}(1) = 0$, ima preslikava f negibno točko. Drugače pa ima preslikava f negibno točko po naslednjem znanem izreku:

Izrek 2. *Če za zvezno preslikavo $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ velja $g(-1) < 0$ in $g(1) > 0$, ima preslikava g ničlo na intervalu $(-1, 1)$.*

Prvi je zgornji izrek dokazal Bernard Bolzano leta 1817. Videli smo, da iz Bolzanovega izreka sledi Brouwerjev izrek (za $n = 1$). Pokažimo, da velja tudi obratno. Naj bo $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna preslikava, za katero je $g(-1) < 0$ in $g(1) > 0$. Naj bo zvezna preslikava $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana s predpisom

$$\rho(x) = \begin{cases} -1; & x \leq -1 \\ x; & -1 \leq x \leq 1 \\ 1; & x \geq 1 \end{cases}$$

Definiramo preslikavo $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ s predpisom $f(x) = \rho(x - g(x))$. Po Brouwerjevem izreku obstaja negibna točka x_0 preslikave f . Če je $x_0 = 1$,

je $1 \leq 1 - g(1)$, kar ni možno, saj je $g(1) > 0$. Podobno sklepamo, da $x_0 \neq -1$. Torej je $x_0 \in (-1, 1)$ in zato je $g(x_0) = 0$.

Bolzanov izrek ima posplošitev na višje dimenzije. Naj bo $I = [-1, 1]$. Za $k = 1, \dots, n$ označimo

$$I_k^- = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid x_k = -1\} \quad \text{in}$$

$$I_k^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in I^n \mid x_k = 1\}.$$

Naj bo $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ preslikava. Pišemo $f = (f_1, \dots, f_n)$, kjer je $f_k: I^n \rightarrow \mathbb{R}$ preslikava na k -to komponento prostora $\mathbb{R}^n$.

Izrek 3. Naj bo $f: I^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava in naj za vsak $k = 1, \dots, n$ velja $f_k(x) \leq 0$ za vse $x \in I_k^-$ in $f_k(x) \geq 0$ za vse $x \in I_k^+$. Tedaj obstaja $x_0 \in I^n$, da je $f(x) = 0$.

Izrek je dokazal H. Poincaré [8] leta 1883, vendar le za diferenciable preslikave. Leta 1940 pa je C. Miranda [6] dokazal, da je zgornji izrek ekvivalenten Brouwerjevemu izreku. Brouwer [3] je dokaz svojega izreka objavil leta 1909, vendar le za primer $n = 3$. Splošni primer pa je dokazal tri leta kasneje v članku [4].

Za nas je zanimiv še en izrek, ki je ekvivalenten Brouwerjevemu izreku. Podprostor $A \subset X$ je *retrakt* topološkega prostora X , če obstaja zvezna preslikava $r: X \rightarrow A$, za katero je $r|_A = id_A$. Preslikavi r pravimo *retrakcija*. Na primer kroglja B^n je retrakt prostora $\mathbb{R}^n$. Retrakcija je dana s predpisom $r(x) = \min\{1, \frac{1}{\|x\|}\} \cdot x$.

Izrek 4. Prostor $S^{n-1} = \partial B^n$ ni retrakt prostora B^n .

Ekvivalenco tega izreka z Brouwerjevim izrekom je pokazal K. Borsuk leta 1931 [2]. Pokažimo, da sta negaciji izreka 1 in izreka 4 ekvivalentni. Recimo, da preslikava $f: B^n \rightarrow B^n$ nima negibne točke. Tedaj lahko definiramo retrakcijo $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$ kot kaže slika 1. Eksplisitno se retrakcija r zapiše kot

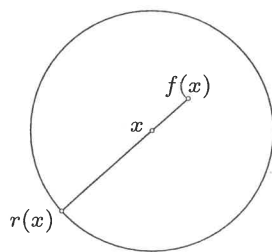
$$r(x) = \lambda(x) \cdot (x - f(x)) + f(x),$$

kjer je

$$\lambda(x) = \frac{\|f(x)\|^2 - \langle f(x), x \rangle + \sqrt{(1 - \langle f(x), x \rangle)^2 + (\|x\|^2 - 1)(1 - \|f(x)\|^2)}}{\|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), x \rangle + \|x\|^2}.$$

Preslikava r je zvezna, saj velja

$$\begin{aligned} & (1 - \langle f(x), x \rangle)^2 + (\|x\|^2 - 1)(1 - \|f(x)\|^2) \geq \\ & \geq (1 - \|f(x)\|\|x\|)^2 + (\|x\|^2 - 1)(1 - \|f(x)\|^2) = \\ & = (\|x\| - \|f(x)\|)^2 \geq 0, \end{aligned}$$



Slika 1

imenovalec ulomka v definiciji preslikave pa je enak

$$\|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), x \rangle + \|x\|^2 = \|f(x) - x\|^2,$$

kar je po predpostavki vedno različno od 0. Hitro se prepričamo, da je v primeru $\|x\| = 1$ (torej $x \in \partial B^n = S^{n-1}$) ulomek v definiciji retrakcije r enak 1 in zato je $r(x) = x$ na robu $\partial B^n = S^{n-1}$.

Obratno je še lažje. Če obstaja retrakcija $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$, jo kompoziramo z antipodno preslikavo $a: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, definirano s predpisom $a(x) = -x$. Jasno je, da preslikava $a \circ r: B^n \rightarrow B^n$ nima negibne točke.

Dokaz izreka 4 bomo povzeli po Spernerjevem članku [11].

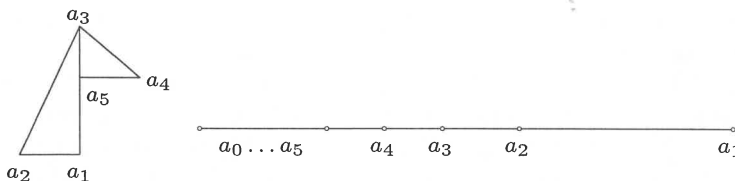
Naj bodo $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$ afino neodvisne točke. Tedaj konveksno ogrinjačo $\mathcal{C}\{a_0, \dots, a_n\} =: a_0 a_1 \dots a_n$ imenujemo n -simpleks. Standardni n -simpleks Δ_n v $\mathbb{R}^n$ je simpleks z oglišči e_i ($i = 0, 1, \dots, n$), kjer je e_0 ničelni vektor, e_i pa vektor, ki ima same ničle, le na i -tem mestu ima enico. Simpleks $\tau = a_{i_0} \dots a_{i_k}$ je *lice* simpleksa $\sigma = a_0 a_1 \dots a_n$, če je $\{i_0, \dots, i_k\} \subset \{0, \dots, n\}$, in je *pravo lice*, če je $\tau \neq \sigma$. *Rob simpleksa* σ je unija vseh njegovih pravih lic in ga označimo z $\partial\sigma$. Notranjost simpleksa σ je $\text{Int } \sigma = \sigma - \partial\sigma$. *Simplicialni kompleks* K je množica simpleksov v $\mathbb{R}^n$, za katere velja:

- (1) Če je τ lice simpleksa $\sigma \in K$, tedaj je $\tau \in K$.
- (2) Če sta σ in σ' različna simpleksa v K , je presek $\text{Int } \sigma \cap \text{Int } \sigma' = \emptyset$.
- (3) Množica K je lokalno končno pokritje za *telo* $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ kompleksa K .

Množico K imenujemo *triangulacija* podprostora $|K| \subset \mathbb{R}^n$.

Oglejmo si dva primera „kompleksov“, ki nista simplicialna kompleksa.

- (1) Naj bo $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (-1, 0)$, $a_3 = (0, 2)$, $a_4 = (0, 1)$ in $a_5 = (1, 1)$. Nadalje naj bo $\sigma_1 = a_1 a_2 a_3$, $\sigma_2 = a_3 a_4 a_5$ in naj bo $K = \{\sigma \mid \sigma \text{ je lice simpleksa } \sigma_1 \text{ ali } \sigma_2\}$ (slika 2 levo). Množica K ne zadošča pogoju 2.



Slika 2

- (2) Naj bo $a_n = \frac{1}{n}$ in $a_0 = 0$. Naj bo $K = \{a_n a_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a_n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ (slika 2 desno). Množica K ne zadošča pogoju 3.

Več o simplicialnih kompleksih lahko bralec prebere v [9].

V nadaljevanju bomo pokazali, da ne obstaja retrakcija $\Delta_n \rightarrow \partial\Delta_n$ in s tem bo dokazan izrek 4.

Naj bo Δ n -simpleks. Označimo oglišča simpleksa Δ s števili $0, 1, \dots, n$ (oglišče e_i označimo z i). Naj bo K poljubna triangulacija simpleksa Δ . 0-simpleks $s \in K$, ki leži v notranjosti lica $\rho = e_{i_0}e_{i_1} \dots e_{i_k}$, označimo z enim izmed števil $i_0, i_1, \dots, i_k$; torej 0-simplekse, ki ležijo na 1-simpleksu e_0e_1 , označimo z 0 ali 1, ... (glej sliko 4). Tak kompleks K imenujmo *pravilno označen kompleks*.

Izrek 5 (Spernerjeva lema). *V pravilno označenem kompleksu K obstaja liho mnogo n -simpleksov, ki imajo oglišča označena z $0, 1, \dots, n$.*

Dokaz. Najprej si oglejmo primer, ko je Δ 1-simpleks. Če sta v K le dve oglišči (ki sta torej oglišči simpleksa Δ), v K obstaja le en 1-simpleks in ta ima oglišči označeni z 0 in 1. Recimo, da trditev velja, če je v K r 0-simpleksov, in pokažimo, da velja tudi za primer, ko je v K $(r+1)$ oglišč. Naj bodo $a_0, a_1, \dots, a_r$ oglišča triangulacije K in naj velja $a_0 = 0 < a_1 < \dots < a_r = 1$. Naj bo K' triangulacija simpleksa Δ , ki ima 0-simplekse $a_0, a_2, a_3, \dots, a_r$ in 1-simplekse $a_0a_2, a_2a_3, \dots, a_{r-1}a_r$. Triangulacija K' ima le r oglišč, zato v K' obstaja liho mnogo 1-simpleksov, ki imajo oglišči označeni z 0 in 1. Z $n(K)$ in $n(K')$ označimo število 1-simpleksov v K in K' , ki imajo oglišči označeni z 0 in 1. Ločimo dve možnosti.



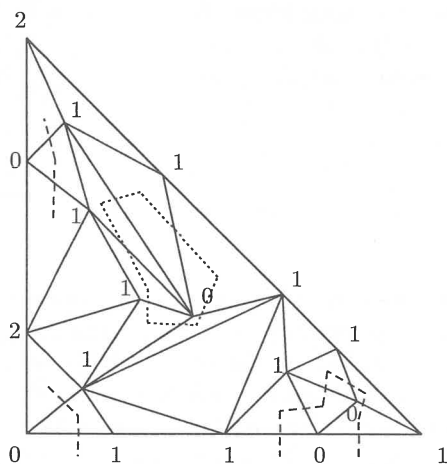
Slika 3

V prvem primeru (slika 3 levo), so 1-simpleksi v K , ki imajo oglišči označeni z 0 in 1 isti kot v K' , če je $s = 0$. Če je $s = 1$, sta v K še dva dodatna 1-simpleksa a_0a_1 ter a_1a_2 označena 0 in 1. Torej je $n(K) = n(K')$ (ko je $s = 0$) ali $n(K) = n(K') + 2$ (ko je $s = 1$). V obeh primerih je $n(K)$ liho število. V drugem primeru (slika 3 desno) je, ne glede na s , $n(K) = n(K')$.

Recimo, da trditev velja za n -simplekse in naj bo Δ $(n+1)$ -simpleks. Recimo n -simpleksom v K , ki imajo oglišča označena z $0, 1, \dots, n$, vrata in $(n+1)$ -simpleksom v K recimo sobe. Naj bo $\mathcal{M}_s$ množica $(n+1)$ -simpleksov v K , ki imajo oglišča označena z $0, 1, \dots, n+1$, in naj bo $\mathcal{M}_v$ množica vrat, ki ležijo na robu simpleksa Δ . Elementom iz $\mathcal{M}_v$ pravimo zunanja vrata. Vsa zunanja vrata ležijo na licu $e_0e_1 \dots e_n$. Naj bo K' množica simpleksov iz K , ki ležijo na licu $e_0e_1 \dots e_n$. Tedaj je K' triangulacija simpleksa $e_0e_1 \dots e_n$ in je pravilno označena. Po indukcijski predpostavki je v $\mathcal{M}_v$ liho mnogo elementov.

Soba ima največ dvoje vrat. Po ena vrata imajo natanko sobe iz množice $\mathcal{M}_s$. Postavimo se v sobo iz $\mathcal{M}_s$ in izstopimo skozi njena edina vrata. Imamo tri možnosti: izstopili smo skozi zunanja vrata ali prišli v sobo iz $\mathcal{M}_s$ ali v sobo, ki ni v $\mathcal{M}_s$. Če smo prišli v sobo iz $\mathcal{M}_s$, poti ne moremo

nadaljevati, saj smo vstopili skozi njena edina vrata. Če smo izstopili skozi zunanja vrata, se je sprehod prav tako končal. Če pa smo prišli v sobo, ki ni v $\mathcal{M}_2$, ima soba dvoje vrat, tako sprehod nadaljujemo skozi vrata, ki jih še nismo uporabili, dokler se ne ustavimo v sobi iz $\mathcal{M}_s$ ali pa izstopimo skozi zunanja vrata (glej črtkane poti na sliki 4). Tako smo elemente iz $\mathcal{M}_v \cup \mathcal{M}_s$ združili v dvojice. To pa pomeni, da je število elementov v $\mathcal{M}_v \cup \mathcal{M}_s$ sodo. Ker je v $\mathcal{M}_v$ liho mnogo elementov, jih je tudi v $\mathcal{M}_s$ liho mnogo. ■



Slika 4

Opomba 6. V našem „labirintu“ imamo tudi krožne sprehode. (Na sliki 4 je taka pot označena s pikicami.) Ti sprehodi nimajo nobene povezave z elementi iz $\mathcal{M}_v \cup \mathcal{M}_s$, zato jih v dokazu nismo omenjali.

Dokaz izreka 4. Najprej opišimo strategijo dokaza. Če obstaja retrakcija simpleksa Δ na njegov rob, simpleks Δ razrežemo na dovolj majhne simplekse. Ogljišče nove triangulacije označimo z i , če se z retrakcijo preslika na i -to stranico simpleksa Δ . Tedaj obstaja simpleks, ki ima oglišča različno označena, kar pomeni, da se oglišča tega simpleksa preslikajo na različne stranice simpleksa Δ , kar pa zaradi zveznosti retrakcije ni možno.

Naj bo Δ standardni n -simpleks. Recimo, da obstaja retrakcija $r: \Delta \rightarrow \partial\Delta$. Preslikava r je zvezna na kompaktni množici, zato je enakomerno zvezna. Torej obstaja $\delta > 0$, da je $\|r(x) - r(y)\| < \frac{1}{n}$, ko je $\|x - y\| < \delta$. Izberimo naravno število d , večje od števila $\frac{\sqrt{2}}{\delta}$. Razrežimo simpleks Δ z naslednjimi hiperravninami:

$$x_i = \frac{j}{d}; \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, d-1 \quad (1)$$

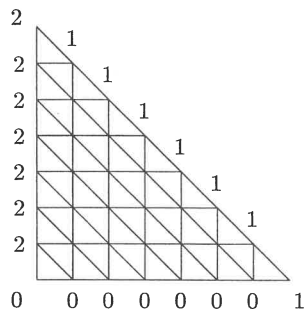
$$\sum_{i=1}^n x_i = \frac{j}{d}; \quad j = 1, \dots, d-1 \quad (2)$$

in tako dobimo triangulacijo K simpleksa Δ na simplekse, katerih diameter je manjši od

$$\sqrt{\left(\frac{1}{d}\right)^2 + \left(\frac{1}{d}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{d} < \delta.$$

Na sliki 5 je primer take triangulacije 2-simpleksa, kjer je $d = 7$.

Označimo z Δ_i lice simpleksa Δ z oglišči $0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, n$ (oznaka $\hat{i}$ pomeni, da je oglišče i izpuščeno) in $\Delta_{i,j}$ lice z oglišči $0, 1, \dots, \hat{i}, \dots, \hat{j}, \dots, n$. Naj bo $\Delta'_0 := \Delta_n \setminus \Delta_{0,n}$ in za $i = 1, \dots, n$ naj bo $\Delta'_i := \Delta_{i-1} \setminus \{\Delta_{i-1,i} \cup \bigcup_{j=0}^{i-1} \Delta'_{j,i}\}$. Množice Δ'_i so paroma disjunktne in velja $\bigcup_{i=0}^n \Delta'_i = \partial\Delta$.



Slika 5

Naj bo s 0-simpleks v K . Če je $r(s) \in \Delta'_i$, potem označimo simpleks s s številom i . (Na sliki 5 je primer, kako označimo robne točke 2-simpleksa.) Iz definicije množic Δ'_i in ker preslikava r miruje na robu $\partial\Delta$, sledi, da je kompleks K pravilno označen, zato zadošča predpostavkam izreka 5. Torej v K obstaja vsaj en n -simpleks σ , ki ima oglišča označena s $0, 1, \dots, n$. Naj bo s_i oglišče simpleksa σ , ki je označeno s številom i . Za $i = 1, \dots, n$ je $r(s_{i+1}) \in \Delta'_{i+1} \subset \Delta_i \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0\}$. Diameter simpleksa σ je manjši od δ , zato je $\|s_{i+1} - s_1\| < \delta$. Od tod sledi, da je $\|r(s_1) - r(s_{i+1})\| < \frac{1}{n}$, kar pomeni, da je i -ta koordinata števila $r(s_1)$ manjša od $\frac{1}{n}$. To pa pomeni, da je vsota koordinat števila $r(s_1)$ strogo manjša od $n \cdot \frac{1}{n} = 1$, kar je v protislovju z dejstvom, da $r(s_1)$ leži na licu $\Delta_0 \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. ■

Za konec članka s pomočjo Brouwerjevega izreka dokažimo osnovni izrek algebre. Pričujoči dokaz je delo B. H. Arnolda [1].

Izrek 7. *Naj bo $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ polinom s kompleksnimi koeficienti. Tedaj obstaja tako kompleksno število z_0 , da je $f(z_0) = 0$.*

Dokaz. Naj bo $R = 2 + |a_1| + \dots + |a_n|$ in pišimo $z = r e^{i\varphi}$. Definirajmo preslikavo

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{f(z)}{R e^{i(n-1)\varphi r}}; & |z| \leq 1 \\ z - \frac{f(z)}{R z^{n-1}}; & |z| \geq 1 \end{cases}.$$

Preslikava g je zvezna, saj se pri $|z| = 1$ predpisa ujemata, zveznost v točki 0 pa zagotavlja r v eksponentu imenovalca. Preslikava g preslika zaprto

kroglo $\overline{K}(0, R)$ s središčem v točki 0 in radijem R v $\overline{K}(0, R)$. Za $|z| \leq 1$ namreč velja ocena

$$|g(z)| \leq |z| + \frac{|f(z)|}{R} \leq 1 + \frac{1 + |a_1| + \dots + |a_n|}{R} \leq 1 + 1 \leq R,$$

za $R \geq |z| \geq 1$ pa

$$|g(z)| = \left| z - \frac{z}{R} - \frac{a_1 + \dots + a_n z^{1-n}}{R} \right| \leq \frac{R-1}{R} |z| + \frac{|a_1 + \dots + a_n z^{1-n}|}{R} \leq R.$$

Po Brouwerjevem izreku ima preslikava g negibno točko z_0 . Iz $g(z_0) = z_0$ sledi $f(z_0) = 0$. ■

LITERATURA

- [1] B. H. Arnold, *A topological proof of the fundamental theorem of algebra*, Amer. Math. Monthly **56** (1949), 465–466.
- [2] K. Borsuk, *Sur les rétractes*, Fund. Math. **17** (1931), 152–170.
- [3] L. Brouwer, *On continuous one-to-one transformations of surfaces into themselves*, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A **11** (1909), 788–798.
- [4] L. Brouwer, *Über Abbildung der Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71** (1912), 97–115.
- [5] J. A. Čibej, *Izreki o negibni točki in matematična ekonomija*, Obzornik mat. fiz. **26** (1979), 97–101.
- [6] C. Miranda, *Un'osservazione su una teorema di Brouwer*, Boll. Un. Mat. Ital. (1940), 527.
- [7] N. Mramor-Kosta, *Negibne točke in splošno ravnovesje na trgu*, Obzornik mat. fiz. **48** (2001), 170–181.
- [8] H. Poincaré, *Sur les courbes définies par une équation différentielle IV*, J. Math. Pures Appl. **85** (1886), 151–217.
- [9] C. P. Rourke, B. J. Sanderson, *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1982.
- [10] Y. A. Shashkin, *Fixed point*, Amer. Math. Soc. (1991).
- [11] E. Sperner, *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebiets*, Abh. Math. Sem. Ham. Univ. **6** (1928), 265–272.

NOVE KNJIGE

Michel Guillemot et al., **ZGODOVINA MATEMATIKE – ZGODBE O PROBLEMIH**, 1. del, Knjižnica Sigma 67, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1999, 232 str., in 2. del, Knjižnica Sigma 69, DMFA Slovenije, Ljubljana, 2001, 310 str.

V zadnjih desetletjih se pri pouku matematike vedno bolj poudarja zgodovinsko ozadje obravnavane snovi. Tak pouk je bolj zanimiv in spodbuden za poslušalce, saj razkriva vpetost matematike v vsakdanje življenje in

njeno človeško razsežnost, posredno pa preprečuje očitke o njeni abstraktnosti ali celo neuporabnosti. Knjiga, ki jo bomo predstavili, je zamišljena kot nekakšna logistična podpora za tako ravnanje. Gre za prevod knjige *History of Mathematics – Histories of Problems*, ki jo je leta 1997 izdala francoska založba *Ellipses*, zaradi obsežnosti originala pa je v knjižnici Sigma izšla v dveh delih. Tvori jo petnajst daljših člankov, katerih avtorji so raziskovalci v francoskih inštitutih za raziskave v matematičnem izobraževanju (IREM in INNSET). Osnovna zamisel avtorjev je bila, da predstavijo zgodovino matematike skozi zgodovino „velikih problemov“, katerih reševanje je sprožilo nastanek in razvoj kakega pomembnega dela sodobne matematike. Takšna predstavitev je naravnejša od predalčkanja po zgodovinskih obdobjih ali omejevanja na zgodovino posameznih ozkih matematičnih področij. Osnovni naslovniki knjige so torej učitelji matematike, ki naj bi jim pomagala poglobiti in popestriti pouk, ter njihovi učenci. A na dlani je, da jo lahko s pridom berejo tudi drugi.

Kot smo že povedali, je vsako poglavje posvečeno nastanku in razvoju enega velikega matematičnega problema. Zgodba se praviloma začne že v antiki, pogosto pa se nadaljuje kar do naših časov. Razlaga je dovolj poljudna in razumljiva, s poudarkom na načinih, kako so si v posameznih zgodovinskih obdobjih probleme zastavljali (oz. kako so jih razumeli) in kako so jih poskušali rešiti. Posebna zanimivost je vrsta nalog in vprašanj s povabilom bralcu, naj se jih loti z uporabo starih matematičnih metod: vse so opremljene tudi z rešitvami ali vsaj z namigi za reševanje. Poleg seznama uporabljenih literature je na koncu vsakega poglavja dodan tudi krajši seznam knjig in člankov v slovenščini, primernih za nadaljnje branje. Le-ta nadomešča podoben seznam v originalu, ki vsebuje večinoma francoske ali za našega bralca težje dosegljive vire.

Preglejmo še na kratko, o čem govorijo posamezna poglavja. Prvi del prevoda jih ima šest in v prvem od njih teče pripoved o praštevilih, od grškega odkritja, da je praštevil neskončno in raznih metod za iskanje praštevil, do danes povsod prisotne uporabe praštevil v kriptografiji. Drugo poglavje govori o popolnih številih, to je takih, ki so enaka vsoti svojih pravih deliteljev. Pri tem je posebno zanimiv nekakšen osebni odnos do števil, ko na njihove lastnosti gledamo kot na odsev njihovega „značaja“. Tretje in četrto poglavje sta bolj geometrični. Prvo od teh razlaga, kako so stari Grki znali izračunati velikost Zemlje, razdaljo od Zemlje do Lune in do Sonca, kako so Kopernik, Galilei, Kepler in Newton odkrivali zakonitosti, ki določajo gibanje zvezd, in kako iz Einsteinove relativnostne teorije mogoče sledi, da je vesolje ukrivljeno. Drugo izmed geometrijskih poglavij nam pripoveduje o „slikarski“ geometriji, to je o problemu, kako na sliki ponazorimo globino, in nas navsezadnje pripelje do osnovnih pojmov projekтивne geometrije. V petem poglavju se ukvarjamo z zgodovino enega najznačilnejših matematičnih problemov – reševanja enačb, predvsem polinomskih. Ta problem srečamo že v egiptčanskih papirusih in mu sledimo

od antičnih časov, prek Arabcev do Gaussa in drugih velikih matematikov 18. in 19. stoletja. Rešitev problema je obenem prva uporaba teorije grup, enega najbolj plodnih pojmov sodobne matematike. Zadnje, šesto poglavje, *Problem brahistohrone*, je nekoliko zahtevnejše, saj zahteva nekaj znanja integriranja. V njem začnemo z ugotovitvijo, da spust po ravnem toboganu ni najhitrejši, in se vprašamo, kakšna naj bo njegova oblika, da bo čas spusta najkrajši. Bernoullijeva rešitev problema je eno prvih zmagoslavij takrat še nastajajočega variacijskega računa.

Drugi del je obsežnejši, saj ima devet poglavij. Prvo poglavje se začne pri štetju, pa vendar že v nekaj straneh prehodi dolgo pot do teorije množic. Drugo poglavje govori o bolj subtilnem vprašanju: zakaj nam za računanje ne zadoščajo le ulomki in nas popelje od najpreprostejših računskih metod do Dedekindove konstrukcije realnih števil s prerezi. V tretjem poglavju spoznamo presenetljivo dejstvo, da v primeri s ploščino likov prostornine nekega telesa ne moremo vedno določiti tako, da ga razdelimo na manjša pravilna telesa. Izkáže se, da je zadrega huda, eden izmed izhodov je v integralnem računu. V četrtem poglavju nam avtor pomaga, da se vživimo v način premišljevanja starogrških matematikov in dojamemo, zakaj so menili, da le uporaba ravnila in šestila zagotavlja čistost geometrijskih konstrukcij. V petem poglavju najdemo nadvse zabavno poročilo o dveh rahlo okajenih prijateljih, ki se opotekata po cesti in se izmenično zmerjata, zakaj drugi ne hodi naravnost. Ker se ne moreta zmeniti, naslednji dan začneta razpravo, kaj je ravno in kaj ukrivljeno in kako to dvojje ločimo. Čeprav dandanes geometrijo pogosto obravnavamo zelo statično, kot sklop osnovnih pojmov ter trditev, ki sledijo ene iz drugih, bomo v šestem poglavju spoznali, da je geometrija v resnici tesno povezana z gibanjem in da nam kinematični pogled omogoča, da jo bolje razumemo. Ljubitelji odvetniških nadaljevanj bodo prišli na svoje v sedmem poglavju, ki se ukvarja z matematično-pravnim zapletom: ali je dopustno pripisati nekaterim dolžinam negativen predznak? Tožilec in obramba se izmenjujeta v razpravi in tudi prič ne manjka. Razsodba in obrazložitev sta podani na koncu poglavja. Osmo poglavje je posvečeno enemu najznamenitejših matematičnih problemov vseh časov: utemeljevanju navidez očitnega dejstva, da skozi vsako točko poteka natanko ena vzporednica k neki dani premici. Zadnje poglavje pa je posvečeno kompleksnim številom in njihovim mnogoterim uporabam v matematiki.

Naj na koncu povem, da je knjiga v celoti zanimivo in ne preveč zahtevno branje. Včasih sem pogrešal le nekoliko več matematične natančnosti ter dodatnih pojasnil zgodovinskih citatov, posebej tistih iz antičnih časov, ki so večkrat zares težko razumljivi.

Petar Pavešić

NEGIBNE TOČKE IN SPLOŠNO RAVNOVESJE NA TRGU

NEŽA MRAMOR KOSTA

Math. Subj. Class. (2000): 91B50, 54H25

V prispevku opišemo matematični model abstraktne ekonomije in pokažemo, kako obstoj splošnega ravnovesja v taki ekonomiji predstavimo kot negibno točko večlične preslikave. Obstoj ravnovesja dokažemo z uporabo Kakutanijevega izreka o negibni točki.

FIXED POINTS AND GENERAL MARKET EQUILIBRUM

We describe a mathematical model of an abstract economy, and demonstrate how the existence of a general equilibrium in such an economy can be proved using fixed point theorems.

Uvod

Namen tega prispevka je opisati zelo poenostavljen matematični model abstraktne ekonomije in pokazati, kako z uporabo izrekov o negibni točki dokažemo obstoj splošnega ravnovesja na trgu v takšni abstraktni ekonomiji. Gre za osnovni model trga v klasični mikroekonomiji, ki ga je razvil francoski matematik in dobitnik Nobelove nagrade za ekonomijo Gerard Debreu, opisan pa je v knjižici *Theory of value* [3] iz leta 1959. V njem je Debreu v matematično ekonomijo namesto diferencialnega računa, ki je bil do takrat skoraj edino matematično orodje, vpeljal elemente topologije in diferencialne geometrije. Matematično ozadje mikroekonomskih modelov je povezano po eni strani s konveksno analizo, po drugi strani pa s teorijo negibnih točk, predvsem negibnih točk večličnih preslikav. Če želimo v modelu upoštevati ekonomsko čim bolj realistične predpostavke, se namreč vanj na mesto navadnih zveznih funkcij hitro prikradejo večlične funkcije, splošno ravnovesje na trgu pa ustreza negibni točki take funkcije.

Model zaprtega tržnega gospodarstva

Osnovni pojem v matematičnih modelih trga je pojem *dobrine*. Dobrina je kakršnokoli blago ali storitev, ki se ga na trgu kupuje in prodaja. V našem modelu bomo predpostavili, da je vseh dobrin končno mnogo, na primer L . Količine vseh posameznih dobrin opišemo hkrati z *vektorjem dobrin* $x = (x_1, \dots, x_L) \in \mathbb{R}^L$. Vsakemu udeležencu kupovanja in prodajanja na trgu pripada v vsakem trenutku vektor dobrin, ki popisuje količine posameznih dobrin v njegovi lasti.

Naš model bo zelo preprost model abstraktne *ekonomije s privatno lastnino*. V taki ekonomiji nastopa končno mnogo potrošnikov in podjetij. Naj bo I število potrošnikov in J število podjetij. Vsakemu podjetju pripada proizvodna množica $Y_j \subset \mathbb{R}^L$, $j = 1, \dots, J$, v kateri so vsi vektorji dobrin, ki so lahko rezultat proizvodnje v tem podjetju. Zaradi preglednosti

bomo privzeli, da je $J = 1$, torej da imamo eno samo podjetje s proizvodno množico Y . Posplošitev modela na več podjetij ni težka, samo malo več indeksov je treba pisati. Vektorji $y = (y_1, \dots, y_L) \in Y$ imajo tako pozitivne kot negativne komponente. Če je komponenta y_l za neki l negativna, komponenta $y_{l'}$ pa pozitivna, to pomeni, da bo podjetje več l -te dobrine porabilo kot proizvedlo in več l' -te dobrine proizvedlo kot porabilo v primeru, če se odloči za proizvodni vektor y .

Primer 1. V modelu ekonomije, kjer so dobrine (po vrsti) mleko, sladkor, jagode, jajca, vanilija, sladoled in električna energija, je $L = 7$. Proizvodni vektor izdelovalca sladoleda $(0, -3, -10, 0, 0, 10, -5)$ bi opisal proizvodnjo 10 litrov jagodnega sladoleda, vektor $(-10, -2, 0, -20, -1, 12, -10)$ pa proizvodnjo 12 litrov vanilijevega sladoleda. ■

Množica Y proizvodnih možnosti podjetja je zaprta in neprazna in glede na vsako komponento navzgor omejena, saj za vsako dobrino obstaja neka največja možna količina $\mu_l = \max\{y_l, y \in Y\}$, ki jo podjetje še lahko proizvede. Običajna predpostavka v ekonomiji je, da je proizvodnja možna tudi, če je na voljo več surovin, kot je potrebno, od koder sledi, da je množica Y glede na vse komponente navzdol neomejena.

Vsakemu potrošniku na trgu pripada množica njegovih *potrošnih možnosti* $X_i \subset \mathbb{R}^L$, ki je za vsak $i = 1, \dots, I$ zaprta konveksna množica in vsebuje vse vektorje dobrin, dostopne temu potrošniku. Na primer, potrošnik v abstraktni ekonomiji iz zgornjega primera, ki nima električne napeljave, ima v svoji množici X_i vektorje oblike $x = (x_1, \dots, x_6, 0)$, $x_i \geq 0, i = 1, \dots, 6$. V našem modelu bomo privzeli, da so vse dobrine v poljubno velikih količinah dostopne vsem potrošnikom, torej je

$$X_i = \mathbb{R}_+^L = \{x = (x_1, \dots, x_L) \mid x_l \geq 0 \text{ za vsak } l = 1, \dots, L\}.$$

Poleg tega ima vsak potrošnik neki vektor začetnega premoženja $\omega_i \in \mathbb{R}^L$ in lastniški delež $\theta_i \geq 0$ v podjetju, kjer je $\sum_i \theta_i = 1$. Vsak potrošnik ima tudi svojo zvezno *funkcijo koristnosti* $u_i : X_i \rightarrow \mathbb{R}$, ki določa *preferenčno relacijo* na množici X_i – vektor $x \in X_i$ je i -temu potrošniku ljubši od vektorja $y \in X_i$ natanko takrat, kadar je $u_i(x) \geq u_i(y)$. Običajno se predpostavi, da so preferenčne relacije *lokalno nenasičene*, kar pomeni, da lahko potrošnik pri vsaki izbiri vektorja dobrin z majhno spremembo svojo koristnost še izboljša, torej da v poljubno majhni okolici vsakega vektorja $x \in X_i$ obstaja vektor $x' \in X_i$, kjer je $u_i(x') > u_i(x)$.

Če vsaki dobrini na trgu določimo ceno, dobimo *vektor cen* $p \in \mathbb{R}^L$. Očitno je smiselno privzeti, da so vse cene nenegativne, torej je $p \in \mathbb{R}_+^L$. Dobiček podjetja je enak skalarnemu produktu vektorja cen $p \in \mathbb{R}_+^L$ in vektorja proizvodnje $y \in Y$,

$$P(y, p) = p \cdot y.$$

Za vsakega potrošnika pa je z vektorjem cen p in vektorjem proizvodnje $y \in Y$ določena podmnožica

$$B_i(p, y) = \{x \in X_i \mid p \cdot x \leq p \cdot \omega_i + (p \cdot y)\theta_i\} \subset X_i, \quad i = 1, \dots, I,$$

vektorjev dobrin, ki si jih lahko privoščijo. Množica $B_i(p, y)$ je očitno vedno zaprta in konveksna. Če ima vektor p same pozitivne komponente, je tudi omejena, če je $p_l = 0$ za kakšen $l = 1, \dots, L$, pa vsebuje množica $B_i(p, y)$ vektorje x s poljubno veliko komponento x_l , torej ni omejena.

Osnovna resnica, v katero verjamejo (klasični in neoklasični) ekonomisti od konca prejšnjega stoletja, ko je Walras postavil prve matematične osnove ekonomije, je, da se ob racionalnem obnašanju udeležencev na trgu cene oblikujejo tako, da se vzpostavi ravnovesje. *Walrasovo* ali *splošno ravnovesje* v abstraktni ekonomiji je določeno z vektorjem dobrin $x_i^* \in X_i$ za vsakega potrošnika, vektorjem proizvodov $y_j^* \in Y_j$ za vsako podjetje in vektorjem cen $p^* \in \mathbb{R}_+^L$, pri katerih imajo hkrati vsi potrošniki največjo možno koristnost, vsa podjetja največji možni dobiček in se vse, kar je na trgu, tudi proda. V našem primeru, kjer je podjetje eno samo, torej velja

- (1) $u_i(x_i^*) = \max\{u_i(x) \mid x \in B_i(p^*, y^*)\}$, $i = 1, \dots, I$,
- (2) $P(y^*, p^*) = \max\{P(y, p) \mid y \in Y, p \in \mathbb{R}_+^L\}$,
- (3) $\sum_{i=1}^I x_i^* = \sum_{i=1}^I \omega_i + y^*$.

Osnovno vprašanje, ki se od tod porodi, pa je, ali lahko pri čim bolj realističnih ekonomskih predpostavkah dokažemo, da tako ravnovesje obstaja.

V preostanku tega razdelka bomo opisali ravnovesje pri dveh dodatnih predpostavkah. Prva je, da obstaja pri vsaki smiselni izbiri vektorjev p in y natanko ena točka $x_i^* \in B_i(p, y)$, zvezno odvisna od p in y , pri kateri ima u_i maksimum. Zaradi lokalne nenasičenosti preferenčnih relacij je točka x_i^* vedno na robu množice $B_i(p, y)$ (sicer bi v njeni okolici obstajala točka $x' \in B_i(p, y)$, kjer bi bila koristnost večja, $u_i(x') > u_i(x_i^*)$). Funkcijo, ki (pri danem vektorju ω_i) vektorjem $p \in \mathbb{R}_+^L$ in $y \in Y$ priredi to natanko določeno točko x_i^* , bomo označili s $\varphi_i(p, y)$, torej je

$$\varphi_i(p, y) = x_i^*, \quad \text{kjer je} \quad u_i(x_i^*) = \max\{u_i(x) \mid x \in B_i(p, y)\}.$$

V ekonomskih modelih so funkcije koristnosti u_i pogosto strogo konkavne. Ker so množice $B_i(p, y)$ zaprte in konveksne, pri vektorjih p s samimi pozitivnimi komponentami pa tudi omejene, so v tem primeru funkcije φ_i zagotovo dobro definirane vsaj za vsak p , kjer je $p_l > 0$ za vsak $l = 1, \dots, L$ (v tem primeru je množica $B_i(p, y)$ tudi omejena, torej zvezna funkcija na njej zagotovo nekje zavzame svoj maksimum). Razširitev definicijskega območja funkcij φ_i na vse vektorje $p \in \mathbb{R}_+^L$ pa je, kot se bo pokazalo, bolj težavna.

Druga predpostavka je, da je ekonomija, ki jo opisujemo, *menjalna ekonomija*, kjer ni proizvodnje, pač pa je edina aktivnost menjava, torej je $\mu_l = 0$ za vsak l in je

$$Y = \mathbb{R}_-^L := \{y = (y_1, \dots, y_L) \mid y_l \leq 0 \text{ za vsak } l = 1, \dots, L\}.$$

Podjetje ima v taki ekonomiji vlogo „odpada“, ki se znebi vseh odvečnih dobrin (predpostavka, da se lahko ekonomija brez stroškov znebi vseh odvečnih surovin je danes že iz ekoloških in iz ekonomskih razlogov zelo težko sprejemljiva). To pomeni, da je $p \cdot y \leq 0$ za vsak y in p in je maksimalni dobiček podjetja enak $p \cdot y = 0$. V ravnovesju tako za vsak $i = 1, \dots, I$ velja

$$\varphi_i(p, y) = \varphi_i(p, 0).$$

Vrednost $\varphi_i(p, y) =: \varphi_i(p)$ je torej točka, v kateri je dosežen maksimum funkcije koristnosti na množici

$$B_i(p) := B_i(p, 0) = \{x \in X_i \mid p \cdot x \leq p \cdot \omega_i\}.$$

Pri vseh teh predpostavkah lahko Walrasovo ravnovesje na trgu opišemo na naslednji način:

Trditev 1. Vektor $p^* \in \mathbb{R}_+^L$ je ravnovesni vektor natanko takrat, kadar je

$$\sum_{i=1}^I (\varphi_i(p^*) - \omega_i) \in \mathbb{R}_-^L. \quad (1)$$

Dokaz. Naj bo p^* ravnovesni vektor. Če so x_i^* , $i = 1, \dots, I$, in y^* pripadajoči ravnovesni vektorji dobrin in proizvodnje, je

$$\sum_{i=1}^I \varphi_i(p^*) - \sum_{i=1}^I \omega_i = \sum_{i=1}^I x_i^* - \sum_{i=1}^I \omega_i = y^* \in Y = \mathbb{R}_-^L.$$

Po drugi strani, če p^* zadošča pogoju (1) in če za vsak $i = 1, \dots, I$ izberemo

$$x_i^* = \varphi(p^*) \quad \text{in} \quad y^* = \sum_{i=1}^I (\varphi_i(p^*) - \omega_i),$$

potem je $y^* \in Y$ in sta zagotovo izpolnjena pogoja (1) in (3) iz definicije Walrasovega ravnovesja. Ker je točka x_i^* na robu množice $B_i(p^*)$, kjer velja $p^* \cdot \omega_i = p^* \cdot \varphi(p^*)$, je

$$p^* \cdot y^* = p^* \cdot \sum_i (\varphi_i(p^*)) = \sum_i (p^* \cdot \varphi(p^*) - p^* \cdot \omega_i) = 0,$$

tako da je izpolnjen tudi pogoj (2). ■

Vektor $(\varphi_i(p) - \omega_i)$ opisuje, koliko posameznih dobrin bi i -ti potrošnik še potreboval, da bi maksimiziral svojo koristnost, čemur pravimo *presežno povpraševanje* i -tega potrošnika, vsota

$$z(p) = \sum_{i=1}^I (\varphi_i(p) - \omega_i)$$

pa opisuje celotno presežno povpraševanje. Trditev, ki smo jo dokazali, pove preprosto to, da je na trgu splošno ravnovesje takrat, kadar povpraševanje po nobeni dobrini na trgu ni večje od ponudbe.

Ker je za vsak p točka $\varphi_i(p)$ na robu množice $B_i(p)$, je

$$z(p) \cdot p = 0 \quad \text{torej} \quad \sum_i \varphi_i(p) \cdot p = \sum_i \omega_i \cdot p. \quad (2)$$

Enakost, ki smo jo dobili, imenujemo *Walrasov zakon* in pove, da je skupna vrednost vseh dobrin, po katerih povprašujejo potrošniki, enaka skupni vrednosti vseh začetnih premoženj potrošnikov. Ker je v ravnovesju $z(p)_l \leq 0$ za vsak $l = 1, \dots, L$, iz Walrasovega zakona sledi, da so vsi členi vsote

$$z(p) \cdot p = \sum_{l=1}^L z(p)_l p_l$$

enaki 0. Torej je $p_l = 0$, če je $z(p)_l \neq 0$, to pa pove, da so cene vseh dobrin, ki jih je na voljo več, kot je skupnega povpraševanja po njih, enake 0.

Ravnovesje na trgu in negibne točke

V tem razdelku bomo dokazali naslednji izrek o obstoju ravnovesja na trgu.

Izrek 1. *Pri predpostavkah, ki smo jih našteali v prejšnjem razdelku, velja: če je funkcija presežnega povpraševanja z zvezna na množici $\mathbb{R}_+^L - \{0\}$, potem obstaja splošno ravnovesje.*

Izrek bomo dokazali s pomočjo Brouwerjevega izreka o negibni točki. Negibna točka preslikave $f : X \rightarrow X$ je taka točka $a \in X$, za katero je $f(a) = a$. V matematiki je kar nekaj znanih in zelo uporabnih izrekov o obstoju negibnih točk za prostore z določenimi lastnostmi in za preslikave z določenimi lastnostmi. Med topološkimi izreki o negibnih točkah, to so izreki o negibnih točkah zveznih preslikav med topološkimi prostori, ima Brouwerjev izrek posebno mesto.

Izrek 2 (Brouwerjev izrek o negibni točki). *Vsaka zvezna preslikava $f : D^n \rightarrow D^n$, kjer je*

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^n$$

zaprt enotski disk prostora $\mathbb{R}^n$, ima vsaj eno negibno točko.

Izrek je prvi dokazal Brouwer leta 1912. V literaturi najdemo veliko različnih dokazov tega izreka (na primer v [5] so trije povsem različni dokaji preprosti dokazi). Preprost in nazoren dokaz je opisan tudi v članku A. Vavpetiča v tej številki Obzornika.

Očitno lahko zaprt enotski disk D^n nadomestimo s katerimkoli homeomorfim prostorom, na primer z zaprtim standardnim n -simpleksom

$$\Delta^n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i e_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

kjer so e_i standardni bazni vektorji v $\mathbb{R}^{n+1}$. Brouwerjev izrek je torej ekvivalenten naslednjemu izreku:

Izrek 3. *Vsaka zvezna preslikava $f : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$, kjer je Δ^n standardni n -simpleks, ima vsaj eno negibno točko.*

Dokaz izreka 1. Pokazati moramo, da obstaja tak vektor cen p^* , kjer je $z(p^*) \in \mathbb{R}_+^L$. Najprej se prepričajmo, da velja $z(tp) = z(p)$ za vsak $t > 0$. To je res zato, ker za vsak i in za vsak $t > 0$ velja

$$B_i(tp) = \{x \mid x \cdot (tp) \leq \omega_i \cdot (tp)\} = B_i(p),$$

torej je

$$\varphi_i(tp) = \varphi_i(p),$$

saj sta obe vrednosti ista točka, v kateri zavzame funkcija u_i maksimum na isti množici $B_i(tp) = B_i(p)$. Od tod sledi, da se lahko omejimo na vektorje

$$p \in \Delta := \Delta^{L-1} = \{p \in \mathbb{R}_+^L \mid \sum_{l=1}^L p_l = 1\}.$$

Definiramo funkcijo $z^+ = (z_1^+, \dots, z_L^+) : \Delta \rightarrow \Delta$ s predpisom

$$z_l^+(p) = \max\{z_l(p), 0\}, \quad l = 1, \dots, L.$$

Definirajmo še

$$\alpha(p) = \sum_{l=1}^L (p_l + z_l^+(p)) \quad \text{in} \quad f(p) = \frac{p + z^+(p)}{\alpha(p)}.$$

Funkcija $f : \Delta \rightarrow \Delta$ je zvezna in ima po izreku 1 negibno točko $p^* \in \Delta$. Iz Walrasovega zakona sledi

$$0 = p^* \cdot z(p^*) = f(p^*) \cdot z(p^*) = \frac{z^+(p^*) \cdot z(p^*)}{\alpha(p^*)},$$

torej $z^+(p^*) \cdot z(p^*) = 0$, od tod pa sledi, da je $z(p^*) \in \mathbb{R}_-^L$. Trditev 1 pove, da je p^* ravnovesni vektor cen. ■

Iz ekonomskih predpostavk modela, ki smo ga opisali v prvem poglavju, sledi, da je funkcija presežnega povpraševanja zvezna na odprti množici $\{p \in \mathbb{R}_+^L \mid p_l > 0 \text{ za vsak } l\}$. Izrek 1 pa zagotavlja obstoj ravnovesja pri dodatni (matematični) predpostavki, da je funkcija presežnega povpraševanja zvezna na celi množici $\mathbb{R}_+^L \setminus \{0\}$, kar iz ekonomskega ozadja ne sledi. Ta dodatna zahteva je pogosto prehuda. Poglejmo primer.

Primer 2. Poiščimo ravnovesni vektor cen v preprosti menjalni ekonomiji z dvema potrošnikoma in dvema dobrinama. Dva kmeta na trgu menjata žito in ovce. Prvi ima začetno premoženje $\omega_1 = (10, 10)$ (torej 10 kg žita in 10 ovc), drugi pa ima začetno premoženje $\omega_2 = (10, 5)$. Prvi (ki ima raje kruh kot meso, zato njegova koristnost s količino žita x_1 narašča hitreje kot s količino mesa x_2) ima funkcijo koristnosti $u_1(x) = x_1^{2/3} x_2^{1/3}$, drugi pa ima funkcijo koristnosti $u_2(x) = x_1^{1/2} x_2^{1/2}$. Pri vektorju cen $p = (p_1, p_2)$ so prvemu dostopni vsi vektorji dobrin iz množice

$$B_1 := B_1(p) = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq 10p_1 + 10p_2\},$$

drugemu pa vsi vektorji dobrin iz množice

$$B_2 := B_2(p) = \{x \in \mathbb{R}_+^2 \mid p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq 10p_1 + 5p_2\}.$$

Če poiščemo vezane ekstreme funkcij u_1 in u_2 , ugotovimo, da je maksimum funkcije u_1 na množici B_1 v točki

$$x_1^* = \varphi_1(p) = \left(\frac{20p_1 + 20p_2}{3p_1}, \frac{10p_1 + 10p_2}{3p_2} \right)$$

in maksimum funkcije u_2 na množici B_2 v točki

$$x_2^* = \varphi_2(p) = \left(\frac{10p_1 + 5p_2}{2p_1}, \frac{10p_1 + 5p_2}{2p_2} \right).$$

Ravnovesni vektor cen dobimo iz pogoja

$$\varphi_1(x) - \omega_1 + \varphi_2(x) - \omega_2 \leq 0,$$

torej

$$\frac{20p_1 + 20p_2}{3p_1} + \frac{10p_1 + 5p_2}{2p_1} \leq 20$$

$$\frac{10p_1 + 10p_2}{3p_2} + \frac{10p_1 + 5p_2}{2p_2} \leq 15,$$

od koder sledi

$$11p_2 \leq 10p_1 \quad \text{in} \quad 10p_1 \leq 11p_2,$$

torej je ravnovesni vektor cen vsak vektor oblike

$$p^* = (11t, 10t), \quad t > 0,$$

ravnovesna vektorja dobrin pa sta

$$x_1^* = \varphi_1(p^*) = \left(\frac{140}{11}, 7\right), \quad x_2^* = \varphi_2(p^*) = \left(\frac{80}{11}, 8\right). \quad \blacksquare$$

Funkciji koristnosti iz zgornjega primera sta iz družine Cobb-Douglas-ovih funkcij $u(x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$ za vsak $i = 1, \dots, n$, ki se pogosto uporabljajo za aproksimacijo funkcij koristnosti, produkcijskih funkcij in drugih funkcij v ekonometričnih modelih. Razlog je v vrsti lepih lastnosti: so strogo konkavne, torej imajo na konveksni množici natanko en maksimum, homogene, logaritem Cobb-Douglasove funkcije pa je linearno odvisen od parametrov α_i , zato za aproksimacijo s Cobb-Douglasovo funkcijo zadošča rešiti linearen sistem enačb za parametre. Opisani primer je torej zelo značilen (pravzaprav so podobni primeri v vsakem učbeniku matematike za ekonomiste), vendar pa dobljene funkcije presežnega povpraševanja

$$z(p) = \frac{20p_1 + 20p_2}{3p_1} - \omega_1 + \frac{10p_1 + 5p_2}{2p_1} - \omega_2$$

ne morem zvezno razširiti na rob območja $\mathbb{R}_+^L - \{0\}$, torej ne zadošča pogojem izreka 1. Kljub temu smo ravnovesni vektor cen uspešno izračunali. V naslednjem razdelku bomo ekonomskim predpostavkam iz prvega razdelka dodali še eno in v dobljenem modelu s pomočjo splošnejšega izreka o negibnih točkah dokazali obstoj ravnovesja.

Negibne točke večličnih preslikav in splošno ravnovesje

V ekonomski teoriji so možne razne predpostavke o preferenčnih relacijah potrošnikov. Na primer, pogosto se predpostavi, da so preferenčne relacije vseh potrošnikov *strogo monotone*, kar pomeni, da bo med vektorjema dobrin x in x' , kjer za neki l_0 velja $x_{l_0} > x'_{l_0}$, za vsak $l \neq l_0$ pa je $x_l = x'_l$, vektor x potrošniku ljubši od vektorja x' (če malo pomislimo, je to zelo smiselna predpostavka). Recimo, da so preferenčne relacije strogo monotone in

naj bo $p_l = 0$. Potem vsebujejo množice $B_i(p)$ vektorje x s poljubno veliko komponento x_l . Naj bo i tak, da je l -ta komponenta $(\omega_i)_l$ pozitivna (če takega i ni, lahko l -to dobrino v našem modelu izpustimo, saj je na trgu v resnici ni na voljo). Iz stroge monotonosti i -te preferenčne relacije sledi, da bo koristnost $u_i(x)$ z naraščajočo vrednostjo x_l naraščala, torej je l -ta komponenta $(\varphi_i(p))_l$ pa tudi l -ta komponenta $(z(p))_l$ pri takem p neomejena.

To pove, da pri zelo smiselni predpostavki o strogo monotonihih preferenčnih relacijah funkcija presežnega povpraševanja ne more biti zvezna na množici $\mathbb{R}_+^L - \{0\}$, torej predpostavke izreka 1 niso izpolnjene. Če se, tako kot v dokazu izreka 1, omejimo na vektorje $p \in \Delta = \Delta^{L-1}$, pa velja naslednji robni pogoj za funkcijo z : za vsako konvergentno zaporedje $\{p^{(n)}\}$ z limito $p \in \partial\Delta$ velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{z_1(p^{(n)}), \dots, z_L(p^{(n)})\} = \infty. \quad (3)$$

S to dodatno predpostavko lahko dokažemo obstoj splošnega ravnovesja na trgu.

Izrek 4. *Če je funkcija presežnega povpraševanja z zvezna na $\text{Int } \Delta$ in na robu zadošča pogoju (3), vsaka njena komponenta pa je navzdol omejena, potem obstaja Walrasovo ravnovesje.*

Walrasovo ravnovesje lahko v tem primeru opišemo kot negibno točko večlične preslikave F iz Δ v Δ . Večlična preslikava ali korespondenca F iz X v X je predpis, ki vsaki točki $x \in X$ priredi neko podmnožico $F(x) \subset X$. Točka a je *negibna točka*, če je $a \in F(a)$. V dokazu bomo uporabili posplošitev Brouwerjevega izreka o negibni točki na večlične preslikave, ki jo je leta 1941 dokazal Kakutani (pri malo bolj splošnih predpostavkah, kot jih navajamo tu).

Izrek 5 (Kakutanijev izrek o negibni točki). *Večlična preslikava F iz Δ v Δ , ki ima za vsak $x \in \Delta$ neprazno konveksno sliko $F(x)$, njen graf*

$$\Gamma(F) = \{(x, y) \mid y \in F(x)\} \subset \Delta \times \Delta$$

pa je zaprta množica, ima negibno točko.

Vsako navadno preslikavo $f : X \rightarrow X$ lahko obravnavamo kot večlično preslikavo, ki ima za vrednosti podmnožice $\{f(x)\} \subset X$ z eno točko. Ker je graf zvezne preslikave $f : X \rightarrow X$ zaprta podmnožica produkta $X \times X$, množice $\{f(x)\}$ pa so vse neprazne in konveksne, ima vsaka zvezna preslikava $f : \Delta \rightarrow \Delta$ po Kakutanijevem izreku kot večlična preslikava negibno točko $a \in \{f(a)\}$. To pa pove, da je $a = f(a)$. Kakutanijev izrek je torej res posplošitev Brouwerjevega izreka.

Pogoj o zaprtem grafu v Kakutanijevem izreku lahko opišemo tudi drugače. Na kompaktnih množicah X ima večlična preslikava F zaprt graf

natanko takrat, kadar so vse njene vrednosti $F(x)$ zaprte množice in je navzgor polzvezna, kar pomeni, da je za vsako odprto množico $W \subset X$ praslika $\{x \in X \mid F(x) \subset W\}$ odprta v X (več o zveznosti večličnih preslikav je v članku [7] v eni prejšnjih števil Obzornika). Dokaz te ekvivalence in še mnogo več o večličnih preslikavah in njihovi uporabi pri ekonomskih modelih najdemo v [1].

Dokaz Kakutanijevega izreka. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bodo $x_i^{(n)}$, $i = 0, \dots, m_n$, oglišča triangulacije simpleksa Δ na majhne simplekse s premerom manjšim od $1/n$ in $Sf_n : \Delta \rightarrow \Delta$ zvezna preslikava, ki oglišče $x_i^{(n)}$ preslika v neko točko $f_n(x_i^{(n)}) \in F(x_i)$ in je linearna na vsakem simpleksu. Po Brouwerjevem izreku ima vsaka preslikava f_n negibno točko $z^{(n)}$. Zaradi kompaktnosti simpleksa Δ ima zaporedje $\{z^{(n)}\} \subset \Delta$ konvergentno podzaporedje (ki ga spet označimo z $z^{(n)}$) z limito z . Za vsak n lahko oglišča subdivizije uredimo tako, da je $z^{(n)}$ element tistega $(L-1)$ -simpleksa, ki je napet na prvih L oglišč, torej

$$z^{(n)} = \sum_{i=0}^{L-1} \lambda_i^{(n)} x_i^{(n)}, \quad \lambda_i^{(n)} \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{L-1} \lambda_i^{(n)} = 1.$$

Ko gre $n \rightarrow \infty$, gredo premeri posameznih simpleksov proti 0, tako da je $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^{(n)} = z$ za vsak $i = 0, \dots, L-1$. Potem je

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{L-1} \lambda_i^{(n)} x_i^{(n)}.$$

Ker je vsaka preslikava f_n linearna na posameznih simpleksih, je

$$z^{(n)} = f_n(z^{(n)}) = \sum_{i=0}^{L-1} \lambda_i^{(n)} f_n(x_i^{(n)}),$$

torej je

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{L-1} \lambda_i^{(n)} f_n(x_i^{(n)}).$$

Privzeti smemo, da so zaporedja $\{f_n(x_i^{(n)})\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $\{\lambda_i^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $i = 1, \dots, L-1$ konvergentna (če ne, jih nadomestimo s konvergentnimi podzaporedji, ki jih označimo enako). Naj bo $y_i := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_i^{(n)})$ in $\lambda_i := \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, L-1$. Ker je $\sum_i \lambda_i^{(n)} = 1$ za vsak n , je tudi $\sum_i \lambda_i = 1$, torej je

$$z = \sum_{i=1}^{L-1} \lambda_i y_i, \quad \sum_{i=1}^{L-1} \lambda_i = 1.$$

Za vsak $i = 1, \dots, L - 1$, je $(x_i^{(n)}, f_n(x_i^{(n)}))$ konvergentno zaporedje v grafu $\Gamma(F)$, ki je zaprta množica, tako da je tudi $(z, y_i) \in \Gamma(F)$, torej $y_i \in F(z)$. Ker je slika $F(z)$ konveksna množica, je tudi

$$z = \sum_{i=1}^r \lambda_i y_i \in F(z),$$

torej je z iskana negibna točka. ■

Preostane nam še, da dokažemo izrek 2.

Dokaz. Naj bo F večlična preslikava, ki točki $p \in \text{Int } \Delta$ priredi množico

$$F(p) := \{q \in \Delta \mid z(p) \cdot q \geq z(p) \cdot q' \text{ za vse } q' \in \Delta\} \quad (4)$$

$$= \{q \in \Delta \mid q_l = 0 \text{ za vse } l, \text{ kjer je } z_l(p) < \max_{i=1, \dots, L} \{z_i(p)\}\} \quad (5)$$

in točki $p \in \partial\Delta$ priredi množico

$$F(p) := \{q \in \Delta \mid p \cdot q = 0\} \quad (6)$$

$$= \{q \in \Delta \mid q_l = 0 \text{ za vse } l, \text{ kjer je } p_l > 0\} \quad (7)$$

Pokažimo, da vsaka negibna točka preslikave F določa splošno ravnovesje. Naj bo $p^* \in F(p^*)$. Potem je $p^* \in \text{Int } \Delta$, kajti, če je $p^* \in \partial\Delta$, potem iz (6) sledi, da je $p^* \cdot p^* = 0$, kar ni res. Recimo, da je $z(p^*) \neq 0$. Po Walrasovem zakonu (2) je $z(p^*) \cdot p^* = 0$, torej ima $z(p^*)$ kakšno pozitivno in kakšno negativno komponento in ne morejo biti vse komponente maksimalne. Iz (5) potem sledi, da ima vsak $q \in F(p^*)$ kakšno ničelno komponento, zato je $F(p^*) \subset \partial\Delta$, kar ni res. Torej mora biti $z(p^*) = 0$ in trditev 1 pove, da je p^* ravnovesni vektor.

Pokažimo, da preslikava F zadošča pogojem Kakutanijevega izreka. Dokaj očitno je, da so vse vrednosti $F(p)$ konveksne in zaprte podmnožice v Δ . Pokazati moramo še to, da je graf $\Gamma(F)$ zaprta množica. Naj bo $(p^{(n)}, q^{(n)})$, $q^{(n)} \in F(p^{(n)})$, konvergentno zaporedje točk v $\Gamma(F)$ z limito (p, q) . Ker je Δ zaprta množica, je $p \in \Delta$, torej moramo pokazati še, da je $q \in F(p)$.

Če je $p \in \text{Int } \Delta$, potem je za dovolj velik n tudi $p^{(n)} \in \text{Int } \Delta$, torej iz (4) sledi, da je $z(p^{(n)}) \cdot q^{(n)} \geq z(p^{(n)}) \cdot q'$ za vsak $q' \in \Delta$. Ker je z zvezna, je tudi $z(p) \cdot q \geq z(p) \cdot q'$ za vsak $q' \in \Delta$, torej $q \in F(p)$.

Če pa je $p \in \partial\Delta$, je sklep malo bolj zapleten. Naj bo l poljuben indeks, kjer je $p_l > 0$, in $\varepsilon > 0$. Potem je $p_l^{(n)} > \varepsilon$ za dovolj velik n . Če je tudi $p^{(n)} \in \partial\Delta$, iz (7) sledi, da je $q_l^{(n)} = 0$. Če pa je $p^{(n)} \in \text{Int } \Delta$ je zaradi Walrasovega zakona (2)

$$z_l(p^{(n)}) < \frac{p_l^{(n)}}{\varepsilon} z_l(p^{(n)}) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{l' \neq l} p_{l'}^{(n)} z_{l'}(p^{(n)}) < \frac{M}{\varepsilon},$$

kjer je $-M$ spodnja meja za vse komponente z_l funkcije z . Iz robnega pogoja (3) sledi, da je

$$z_l(p^{(n)}) < \max\{z_1(p^{(n)}), \dots, z_L(p^{(n)})\}$$

za dovolj velike n , torej (5) pove, da je tudi v tem primeru $q_l^{(n)} = 0$. Pokazali smo: če je $p_l > 0$, je $q_l^{(n)} = 0$ za dovolj velike n . Od tod pa sledi,

$$p \cdot q = p \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} q^{(n)} = 0$$

in je po definiciji (6) $q \in F(p)$. ■

Zahvala. Pri opisu ekonomske vsebine modelov sta mi pomagala Matjaž Koman in Gregor Dolinar. Obema se zahvaljujem.

LITERATURA

- [1] K. Border, *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [2] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71** (1912), 97–115.
- [3] G. Debreu, *Theory of Value*, Wiley, New York, 1959.
- [4] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed Point Theory*, Monografie Matematyczne, PWN, Warszawa 1982.
- [5] J. Franklin, *Methods of mathematical economics*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [6] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. **8** (1941), 457–459.
- [7] J. Malešič, *Zvezne selekcije večličnih preslikav*, Obzornik mat. fiz. **47** (2000), 109–119.
- [8] A. Mas-Colell, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, New York, 1995.
- [9] A. Vavpetič, *Brouwerjev izrek*, Obzornik mat. fiz. **48** (2001), 161–167.

VESTI

Raziskovalni dnevi iz fizike za srednješolce

Društvo matematikov, fizikov in astronomov (DMFA) Slovenije vsako leto organizira raziskovalne dneve iz fizike za srednješolce. Na raziskovalne dneve vabimo najuspešnejše dijake z državnega tekmovanja v znanju fizike in s srečanja mladih raziskovalcev Slovenije. Sodelovanje na raziskovalnih dnevih je nagrada za trud, ki ga dijaki vložijo za dosego vrhunskih rezulta-

tov na področju fizike, in spodbuda, da vztrajajo pri raziskovalnem, inovativnem delu tudi po srednji šoli in si izberejo smer študija, pri kateri bodo kar najboljše izkoristili svoje sposobnosti. Nekateri udeleženci prejšnjih raziskovalnih dni so se letos odlično odrezali na fizikalni olimpijadi v Turčiji: Andrej Košmrlj je osvojil srebrno priznanje, Gregor Tavčar bronasto, Mojca Miklavc in Dragan Simeonov pa sta dobila pohvali.

Letošnji raziskovalni dnevi so potekali od 2. do 5. oktobra v Plemljevi hiši na Bledu. Sodelavci Fakultete za matematiko in fiziko v Ljubljani in Pedagoške fakultete v Mariboru so za 15 udeležencev pripravili pregledna predavanja iz najbolj aktualnih področij fizike osnovnih delcev in astronomije.

Udeleženci raziskovalnih dni so raziskovali tudi sami. Z uporabo programa za zajemanje signala na računalnik prek zvočne kartice, ki ga je pripravil eden od udeležencev, so snemali hrup in zvok sirene mimovozečih avtomobilov. Izračunali so frekvenčne spektre signalov pri približevanju in oddaljevanju avtomobila od mikrofona. Iz Dopplerjevega premika karakterističnih črt v spektru so določili hitrost vozila.

Druga skupina je merila težni pospešek pri prostem padu, kotaljenju in nihanju različno težkih kroglic. Vpliv upora zraka je bil največji pri prostem padu, kjer so kroglice dosegale največjo hitrost. Ugotovili so, da bi samo z opazovanjem prostega pada v zraku težko prišli do spoznanja, da na vsa telesa, ne glede na maso, deluje enak težni pospešek.

Nekatere pa je zanimalo, ali obstaja fizikalna razlaga dejstva, ki smo mu velikokrat priča ob gledanju košarkarskih tekem, da višji košarkarji slabše zadevajo proste mete kot njihovi nižji soigralci. Idealna tirnica žoge je tista, pri kateri med metom opravimo najmanj dela, torej tista, pri kateri ima žoga najmanjšo začetno hitrost. Izračunali so, da smejo višji košarkarji narediti večjo napako pri kotu izmeta in začetni hitrosti žoge glede na ustrezne vrednosti pri idealni tirnici kot nižji kolegi. Sklep je bil potem čisto nefizikalen: med visokimi košarkarji je manjša konkurenca in si tako tudi takšni z dokaj nenatančnim metom lahko izborijo mesto v košarkarskih ekipah.

Raziskovalne dneve smo končali z obiskom Hiše eksperimentov v Ljubljani. Hiša eksperimentov nam je omogočila prost vstop in pripravila predavanje z naslovom *Plinologija*.

Udeležba na raziskovalnih dnevih je za dijake brezplačna. Srečanje sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport v okviru gibanja Znanost mladini. Nekateri stroške krije DMFA iz sponzorskih sredstev Telekoma Slovenije, računalniško in raziskovalno opremo pa prispeva Fakulteta za matematiko in fiziko.

Zvonko Jagličić

O SLONIH IN MATRIKAH

MIRAN ČERNE in MANUEL FLORES

Math. Subj. Class. (2000) 11C20, 15A36

Z uporabo osnovne linearne algebre je podana rešitev elementarnega problema.

OF ELEPHANTS AND MATRICES

A solution of an elementary problem is given using some basic linear algebra.

Predstavili bomo enega od tistih elementarnih matematičnih problemov, ki v ustnem izročilu krožijo med matematiki po svetu.

Problem. V cirkusu imajo 15 slonov. V pogovoru med dreserjem in cirkuškim direktorjem je dreser zaupal direktorju: „Če odstranim kateregakoli slona iz skupine, lahko preostalih 14 slonov razvrstim v dve skupini po 7 slonov, ki sta enako težki.” Cirkuški direktor, ki ni bil od muh, je po neprespani noči zmagoslavno ugotovil: „Vsi naši sloni so enako težki!”

Naša naloga pa bo dokazati, da so vsi sloni iz skupine res enako težki. Pravzaprav bomo nalogo posplošili in pokazali naslednjo trditev.

Trditev. Naj bo n naravno število, za skupino $2n + 1$ slonov pa naj velja: če odstranimo kateregakoli slona iz skupine, preostalih $2n$ slonov lahko razvrstimo v dve skupini po n slonov, ki sta enako težki. Tedaj so vsi sloni enako težki.

Dokaz. Označimo teže slonov z $m_1, m_2, \dots, m_{2n+1}$ in naj bo

$$\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{2n+1})^T.$$

Denimo, da smo iz skupine odstranili j -tega slona ($j = 1, \dots, 2n+1$). Potem lahko preostalih $2n$ slonov razvrstimo v dve skupini po n slonov s težami:

$$1. \text{ skupina: } m_{i_1}, \dots, m_{i_n} \quad 2. \text{ skupina: } m_{j_1}, \dots, m_{j_n},$$

za katere velja

$$m_{i_1} + \dots + m_{i_n} = m_{j_1} + \dots + m_{j_n}$$

oziroma

$$m_{i_1} + \dots + m_{i_n} - m_{j_1} - \dots - m_{j_n} = 0.$$

Indeksi $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n$ in j tvorijo permutacijo števil $1, \dots, 2n + 1$. Potemtakem obstaja tak vektor-vrstica $\mathbf{v}_j$ dolžine $2n + 1$, katerega j -ti koeficient je 0, od preostalih $2n$ koeficientov pa jih je n enakih 1 in n enakih

-1 , da velja $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{m} = 0$. Vektorje-vrstice $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{2n+1}$ razvrstimo v $(2n+1) \times (2n+1)$ matriko

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Matrika V ima po diagonali ničle, zunaj diagonale pa ima v vsaki vrstici po n koeficientov enakih 1 in n koeficientov enakih -1 . Kot primer take 5×5 matrike si oglejmo

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Po konstrukciji matrike V je vektor $\mathbf{m}$ v njenem jedru. Poleg tega je očitno, da je tudi vektor $(1, 1, \dots, 1)^T$ v njenem jedru. Naša trditev je torej ekvivalentna naslednji trditvi:

Trditev. Jedro matrike V je enorazsežno.

Ta trditev pa je ekvivalentna pogoju, da ima V rang enak $2n$, oziroma da obstaja taka $2n \times 2n$ podmatrika V' matrike V , da je $\det V' \neq 0$. Pokazali bomo, da za V' lahko izberemo kar glavni $(1, 1)$ minor matrike V , to je, $2n \times 2n$ matriko, ki jo dobimo tako, da iz matrike V odstranimo prvi stolpec in prvo vrstico.

Trditev. Naj bo V' glavni $(1, 1)$ minor matrike V . Tedaj je $\det V' \neq 0$.

V ta namen bomo pokazali, da je $\det V' \equiv 1 \pmod{2}$. Torej je dovolj opazovati matriko dimenzije $2n \times 2n$, ki ima po diagonali ničle, zunaj diagonale pa so vsi koeficienti enaki 1 , saj je $-1 \equiv 1 \pmod{2}$! Torej

$$\det V' \equiv \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

Če odštejemo zgornjo vrstico od vseh preostalih, dobimo

$$\det V' \equiv \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

Nato pa še prištejemo vsako vrstico razen prve k zgornji vrstici

$$\det V' \equiv \det \begin{pmatrix} 2n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \\ = (-1)^{2n-1} (2n-1) \equiv 1 \pmod{2}.$$

■

Natančen pregled zgornjega dokaza nam razkrije, da smo pravzaprav dokazali naslednjo trditev o kvadratnih matrikah sodih dimenzij.

Trditev. Naj bo n naravno število in naj bo W kvadratna $2n \times 2n$ matrika, ki ima po diagonali soda cela števila, zunaj diagonale pa liha cela števila. Tedaj je $\det W \neq 0$.

Posledica. Naj bo n naravno število in naj bo W kvadratna $(2n+1) \times (2n+1)$ matrika, ki ima po diagonali soda cela števila, zunaj diagonale pa liha cela števila. Tedaj je $\dim(\text{Ker } W) \leq 1$.

Za konec lahko še ugotovimo, da naloga ni enolično rešljiva, če izpustimo pogoj, da slone vedno razvrstimo v dve enako veliki skupini. Za skupino $2n+1$ slonov s težami $1, \dots, 1, 2n-1$ velja, da če odstranimo kateregakoli slona iz skupine, lahko ostalih $2n$ slonov razvrstimo v dve skupini, ki sta enako težki.

VESTI

STROKOVNO SREČANJE IN 53. OBČNI ZBOR DMFA SLOVENIJE

Strokovno srečanje Društva matematikov, fizikov in astronomov, 53. občni zbor ter 9. slovensko srečanje o uporabi fizike so potekali od 18. do 20. oktobra 2001 v Kranjski Gori v hotelu Kompas. Kljub lepemu vremenu je bil letošnji obisk skromnejši. Razlogov za to je najbrž več, glavni pa gotovo ta, da profesorji le težko dobijo dva prosta dneva za sodelovanje na srečanjih.

V četrtek so se fiziki, tako kot je to v navadi že dve leti, udeležili predavanj in predstavitev na 9. slovenskem srečanju o uporabi fizike. Škoda, da je bilo tako malo profesorjev s srednjih šol, saj so bile nekatere teme (na primer merjenje kostne mase) predstavljene tako, da bi bile zanimive tudi za srednješolce. V nadaljevanju strokovnega srečanja je Nada Razpet preverila trditve o „pojočih kozarcih“, ki jih je zasledila v različnih knjigah, Boris Kham je govoril o izkušnjah in predlogih za izvedbo nekaterih astronomskih meritev, Marijan Prosen pa je pripovedoval o treh vrstah nadobzornic. Zvečer sta omenjena organizirala tudi ogled večernega zvezdnega neba.

Matematiki so poslušali Ivana Drnovška, ki je govoril o baricentričnih koordinatah, Mateja Mencingerja, ki je predstavil zveze med kvadratičnimi sistemi navadnih diferencialnih enačb in ustreznimi algebrami. Po odmoru je Marko Razpet predstavil logistično verjetnostno porazdelitev, Petra Šparl je govorila o uporabi teorije grafov pri problemih dodeljevanja frekvenc. Delovno popoldne je končal Andrej Taranenko s predstavitevijo diplomskega dela o genetskih algoritmih.

Zvečer smo si ogledali še posterja: o učbeniškem kompletu za fiziko za devetletno šolo in 450. obletnici Perlahovih efemerid ter se igrali z igralnimi kartami za pouk matematike, ki jih je prinesel Jože Kotnik. Nato so nekateri udeleženci odšli na ogled večernega zvezdnega neba, drugi na kopanje, preostali pa na klepet ali počitek.

Petkovo dopoldne smo pričeli z zanimivim predavanjem Antona Suha-dolca o profesorju matematike dr. Rihardu Zupančiču, drugem rektorju ljubljanske univerze, ki je bil dolga leta „neoseba” in o katerem se nekaj časa ni moglo pisati. Tomaž Pisanski nas je popeljal med slovenske gotske cerkve in govoril o povezavi med njihovimi oboki in grafi. Kranjska Gora je znano smučarsko središče, zato smo zadnjo dopoldansko temo posvetili smučanju. Jurij Franko je govoril o fizikalnih osnovah smučanja in lastnostih smučke.

Popoldan so nam dijaki Srednje gostinske in turistične šole iz Radovljice zanimivo in živahno predstavili Radovljico ter njeno širšo okolico. Potem smo se razdelili v dve skupini.

Matematiki so prisluhnili Luciji Željko in njeni analizi tekmovanja Evropski matematični kenguru 2001, nato je Nada Razpet pokazala nekaj matematičnih igrac. Po odmoru so matematiki nadaljevali v dveh skupinah. V prvi je Jana Poličar govorila o razčlenitvah oziroma particijah naravnih števil, Sergej Kapus pa o periodičnosti v ravninski geometriji. V drugi skupini je Mara Cotič predstavila strukturo nacionalnega preizkusa iz matematike za prvo in tretje triletnje.

Fizikalno popoldne je pričel z vedno zanimivimi prispevki Janez Strnad, ki je tokrat govoril o hitrosti svetlobe. Dean Cvetko je predstavil nekatere ključne elemente eksperimentalne tehnike in prikazal nekaj tipičnih interferenčnih slik, iz katerih razberemo atomsko zgradbo opazovanih površin. Ana Gostinčar Blagotinšek je pokazala različne modele električnih krogov, primernih za različne stopnje poučevanja. Irena Drevenšek je govorila o površinskem podvajanju optične frekvence, ki omogoča proučevanje strukture tankih slojev organskih molekul, nanesenih na različne površine.

Večer smo končali z živahnimi pogovori o tekmovanjih. Marija Vencelj je posebej opozorila na nedoslednosti in napake, do katerih je prišlo pri sestavljanju nalog za tekmovanja, ki so bila letos izvedena prvič. Ker so tekmovanja pod okriljem društva, bo treba v prihodnjih letih naloge skrbno pregledati. Vse predloge udeležencev, ki so sodelovali na okrogli mizi, bomo na prihodnjih sejah upravnega odbora skrbno preučili. Večer so nekateri preživeli ob glasbi in plesu, drugi pa na sprehodih, saj je bilo lepo vreme.

V soboto smo imeli 53. občni zbor. Udeležence so pozdravili župan

Kranjske Gore Jožef Kotnik, Martin Čopič kot dekan Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani ter Tatjana Markun, predstavnica gorenjskih članov DMFA.

Najprej smo se spomnili umrlih članov društva. O pokojnem profesorju Janezu Ferbarju je nekaj besed spregovoril Aleksander Kregar. V delovno predsedstvo so bili izvoljeni: Mitja Rosina (predsednik), Tatjana Markun, Milan Hladnik in Janez Krušič (zapisnikar).

Za častna člana DMFA Slovenije sta bila imenovana prof. dr. Janez Strnad in prof. dr. Anton Suhadolc. Priznanje za delo z mladimi pa so prejeli: Irena Verdnik, profesorica matematike na Gimnaziji Jurija Vege v Idriji, Vitomir Babič, profesor fizike na Splošni in strokovni gimnaziji Lava v Celju, ter dr. Matjaž Željko, asistent za matematiko na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani.

Poročila o delu društva so bila objavljena v biltenu 53. občnega zbora. Ker so bila dobro pripravljena, so bila sprejeta brez razprave. Letos se je v škatli za predloge in pobude, ki je bila kar nekaj let prazna, vendarle znašlo nekaj listkov. Tega smo bili zelo veseli.

Tomaž Cokan je predlagal, da se tudi priznanja, dosežena na državnem tekmovanju iz razvedrilne matematike, imenujejo *zlata priznanja*.

Dušan Modic je priporočil, da v Obzorniku za matematiko in fiziko (OMF) bolj dosledno objavljamo načrtovane dejavnosti društva, še posebej izobraževalne seminarje, ker vsi člani pač nimajo dostopa do interneta.

Sandi Klavžar je predlagal, da DMFA pripravi predstavitevno gradivo, ki bi ga dobili diplomanti FMF, PeF v Ljubljani in PeF v Mariboru.

Vse predloge je občni zbor podprl.

Na željo nekaterih članov DMFA je Mitja Rosina predlagal, da društvo podpre prizadevanja za rehabilitacijo prof. Riharda Zupančiča, drugega rektorja ljubljanske univerze, kot člana Slovenske akademije znanosti in umetnosti, iz katere je bil izključen leta 1945. Upravni odbor DMFA naj odloči o načinu podpore.

Predlog je bil soglasno sprejet.

O spremembah in dopolnitvah pravilnikov o tekmovanjih, ki jih je upravni odbor DMFA že sprejel, je poročal Darjo Felda. Gre za nujne popravke zaradi spremenjenih imen (npr. MŠZŠ) in datumov tekmovanj. Nova je uvedba prijavnine; ta v tekočem šolskem letu ne bo višja od 150 SIT za tekmovalca. Zbrani denar bo kril stroške za računalniško obdelavo tekmovanj, natis ter razpošiljanje priznanj tekmovalcem in potrdil mentorjem, udeležbo predstavnika Slovenije na vsakoletnem mednarodnem sestanku komisije Evropskega matematičnega kengurja ter udeležbo najboljših slovenskih tekmovalcev tekmovanja Evropski matematični kenguru na mednarodni poletni šoli.

Občni zbor je sprejem pravilnikov potrdil. Pravilniki bodo objavljeni na spletni strani DMFA Slovenije.

Predlog statutarnih sprememb je pripravila statutarina komisija: (D. Felda, J. Krušič, M. Željko):

- v četrtemu členu pravil DMFA, ki govori o namenu in nalogah Društva, se doda šesta vrstica:
 - *skrbno gospodariti z nepremičninami v lasti Društva;*
- triintridesetemu členu, dohodkom Društva, se dodata tretja in šesta vrstica:
 - *najemnine, pridobljene z oddajanjem nepremičnin v lasti Društva;*
 - *sponzorska sredstva;*
- v devetintridesetemu členu se združita prva in druga alineja v:
 - *pravilnik o podeljevanju društvenih priznanj.*

Občni zbor je dopolnitve statuta soglasno sprejel.

Poročilo nadzornega odbora je prebral njegov član Mitja Rosina. Nadzorni odbor je ugotovil pravilnost poslovanja DMFA.

Predsednik DMFA, prof. dr. Martin Čopič, je z oktobrom prevzel dolžnosti dekana Fakultete za matematiko in fiziko. Ugotovil je, da zaradi prezaposlenosti ne bo mogel opravljati funkcije predsednika DMFA in je zato prosil občni zbor za razrešitev. V imenu upravnega odbora je predlagal za predsednika društva do konca mandatnega obdobja (do 54. občnega zbora) rednega profesorja Fakultete za matematiko in fiziko dr. Zvonka Trontlja.

Občni zbor se je Martinu Čopiču zahvalil za njegovo uspešno delo in ga z javnim glasovanjem razrešil dolžnosti predsednika DMFA, potem pa za novega predsednika do naslednjega občnega zbora soglasno izvolil Zvonka Trontlja.

Nada Razpet je menila, da je zaradi slabše udeležbe v letošnjem letu treba razmisliti o spremenjeni organizaciji strokovnih srečanj in občnih zborov.

Občni zbor se je končal ob 11. uri.

Popoldan smo si pod vodstvom dijakinje Srednje gostinske in turistične šole iz Radovljice ogledali Radovljico, potem pa smo si pod vodstvom Saše Kocijančič ogledali še omenjeno šolo. Zaradi povečane oblačnosti in slabega vremena je izlet v Tamar žal odpadel.

Vsem, ki so pomagali pri organizaciji strokovnega srečanja, posebej pa še dijakinjam in dijakom, ki so v šolskih uniformah zares prisrčno sprejeli udeležence, ter Saši Kocijančič in dijakom, ki so s harmoniko in plesom popestrili popoldan, se najlepše zahvaljujemo. Upam, da se boste prihodnje leto v večjem številu udeležili strokovnega srečanja in občnega zbora.

Nada Razpet

NAGRADE IN PRIZNANJA DMFA SLOVENIJE ZA LETO 2001

Častna člana DMFA Slovenije sta postala prof. dr. Janez Strnad in prof. dr. Anton Suhadolc.

Prof. dr. Janez Strnad je gotovo tisti slovenski fizik, ki je največ pripomogel, da so spoznanja o fiziki in fizikih v najboljšem pomenu besede našla vsakega slovenskega bralca, ki je to le želel. Njegove misli, prelite

na papir, najdemo v vseh slovenskih fizikalnih in naravoslovnih revijah od Preseka, Proteusa, Obzornika za matematiko in fiziko pa do strani o znanosti v slovenskem dnevnem tisku. Skoraj ga ni potrebno predstavljati v slovenskem krogu astronomov, fizikov in matematikov. Vsi ga poznamo. Mnogi od nas smo ga prvič srečali pri uvodnih predavanjih iz fizike v prvih dveh letih študija, nekateri tudi v poznejših letnikih. Skoraj vsi pa smo študirali osnove fizike tudi po njegovih učnih knjigah.

Profesor Strnad je bil rojen leta 1934 v Ljubljani. Po maturi je študiral fiziko v Ljubljani in diplomiral kot prvi v letniku leta 1957. Doktoriral je leta 1963. Enoletno podoktorsko izpopolnjevanje je opravil na Inštitutu za teoretsko fiziko Univerze v Heidelbergu. Raziskovalno je bil vključen v delo na Inštitutu J. Stefan ter na Oddelku za fiziko FNT in kasneje FMF. V zadnjih letih je bil predvsem aktiven na področju fizikalne didaktike. O teh raziskavah je veliko poročal na srečanjih Nemškega fizikalnega društva (DPG). Njegove bibliografske podatke najdemo v COBISS.

Asistent na Oddelku za fiziko Univerze v Ljubljani je postal leta 1959, docent leta 1963 in redni profesor leta 1974. Ko je začel učiti fiziko, so bili le 3 učitelji, ki so predavali osnovni kurz fizike za vse naravoslovce, matematike in tehnike na ljubljanski univerzi. Vsak učitelj je imel takrat veliko več študentov, kot jih ima danes, in temu primerno je bilo obsežno delo pri pouku in pri izpitih. Prof. Strnad se je posvetil od vsega začetka pouku osnovnega kurza fizike za fizike, ki teče prve 4 semestre. Tako je praktično izbral celo generacijo slovenskih fizikov. Po prvih nekaj letih pouka je izdal skripto s predavanj in le-ta so prerasla v naslednjih letih v štiri učne knjige z naslovi Fizika I, II, III in IV. V poznejših letih je prof. Strnad dodal še predavanja o Zgodovini fizike za študente pedagoške smeri. Tudi pri podiplomskem pouku je predaval. Ves čas je tudi pogosto predaval na mednarodnih konferencah, na seminarjih in kolokvijih na Inštitutu J. Stefan in na Oddelku za fiziko. Pa seveda na mnogih zimskih izpopolnjevanjih iz fizike, ki jih je organiziralo DMFA za srednješolske profesorje fizike. Opravljal je tudi vodstvena dela na Oddelku za fiziko Univerze v Ljubljani; bil je predstojnik in predsednik več komisij.

Pri DMFA Slovenije je imel profesor Strnad vrsto funkcij. Predsednik je bil v letih 1985 in 1986. Več let je bil predsednik Komisije za tisk. Bil je odgovorni urednik Obzornika za matematiko ter fiziko in urednik za fiziko. Obilo dela je opravil tudi pri Proteusu.

Ko pregledujemo opus profesorja Strnada, ne smemo mimo njegovih strokovnih in poljudnih knjig. Napisal jih je prek 30 in posebej bi omenili tiste knjige in knjižice, ki pomagajo pri razumevanju teorije relativnosti in kvantne mehanike v širšem slovenskem krogu naravoslovcev. Njegove knjige so prevedene tudi v tuje jezike. V slovenski jezik je prevedel vrsto zanimivih del iz svetovne fizikalne zakladnice.

Prof. Strnad je pripravil vrsto prispevkov o fiziki za slovenski radio in televizijo. Ne nazadnje se moramo spomniti tudi na skrb profesorja Strnada za fizikalno razlago in razumevanje mnogih pojavov v naravi. Še več! Tudi za obrambo takega pristopa v zadnjih letih, ko najdemo tudi v naravoslovju mnoge alternativne poglede, ki skušajo najti pot in razlago

za nekatere pojave po bližnjicah, brez potrebnega napora in upoštevanja fizikalnih zakonitosti in izsledkov poskusov.

Za svoje dosedanje delo je prejel prof. Strnad številne nagrade in priznanja.

Profesor Strnad je opravil izjemno delo pri navduševanju mladih za fiziko, pri pouku fizike na Univerzi v Ljubljani in pri hitrem prenosu informacij o najnovejših izsledkih fizike v slovenski naravoslovni prostor in naravoslovno kulturo. Ta skromni zapis je le delno osvetlil opus profesorja Strnada, a gotovo dovolj, da iz njega spoznamo veličino njegovega prispevka, ki kliče po primernem priznanju tudi v našem društvu.

Zahvala profesorja dr. Janeza Strnada je bila kratka, a hkrati tako zanimiva, da jo je vredno objaviti. Zahvaljujemo se prof. Strnadu, ki nam je poslal kratek zapis svoje zahvale.

Zahvala

Vsem se za priznanje lepo zahvaljujem. Sprejel sem ga z mešanimi občutki, saj je povezano s tem, da na Oddelku za fiziko nisem več zaposlen za nedoločen čas.

Prejšnja leta sem brez pomislekov odpovedal predavanje v petek in prišel na društveno strokovno srečanje. Letos sem najprej odpravil predavanje in se šele potem odpeljal v Kranjsko Goro. Tisto, česar imamo malo, pač bolj cenimo.

V tej zvezi mi je prišlo na misel, da ima poklic učitelja – poleg senčnih strani – vsaj eno sončno, ki se je morda premalo zavedamo. Več poslušalcev nas v splošnem daljši čas dokaj pazljivo posluša. To je velika prednost, če upoštevate, kako težko je sicer najti dobrega poslušalca ali sogovornika. Zato kaže prednost čim boljje izkoristiti.

Janez Strnad

Gotovo vsa današnja generacija slovenskih matematikov, članov DMFA Slovenije, pozna **prof. dr. Antona Suhadolca**, zato ga ni treba obširneje predstavljati in utemeljevati pobude za častno članstvo. O njem in njegovem delu navedimo le nekaj osnovnih podatkov.

Profesor Suhadolc, rojen 19. aprila 1935, se je po maturi leta 1953 vpisal na oddelk za matematiko takratne prirodoslovno-matematične fakultete in v novembru 1957 diplomiral. Istega leta je prejel Prešernovo nagrado za študente. Čakajoč na odsluženje vojaškega roka je bil nekaj časa zaposlen na Inštitutu Jožef Stefan. Jeseni leta 1961 je kot Humboldtov štipendist odšel na strokovno izpopolnjevanje v Heidelberg, tam na inštitutu za uporabno matematiko pričel z doktorskim delom, ga po vrnitvi v Ljubljano dokončal in bil februarja leta 1965 promoviran kot osmi doktor matematičnih znanosti ljubljanske univerze.

Pripadal je prvi povojni generaciji slovenskih matematikov, ki je v takratnem razvoju študija visokošolske matematike nosila glavno breme tako strokovnih kot (velikokrat po nepotrebnem) tudi administrativnih zahtev. V marcu 1965 je postal docent na takratni Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo. Odslej je bil vse do upokojitve leta 1998 univerzitetni učitelj in nosilec vrste matematičnih predmetov: linearne algebre, funkcionalne analize, analize III in IV, različnih specialnih tečajev in seminarjev itd. Kot predavatelj se je odlikoval s svojim mirnim, nazornim in strokovno natančnim, a

kljub temu živim in navdušujočim pristopom k matematiki. Poučeval in v matematičnem smislu vzgajal je večino današnjih slovenskih aktivnih matematikov, učiteljev in uporabnikov matematike. Bil je večkratni predavatelj posebnih matematičnih predmetov na podiplomskem študiju različnih naravoslovnih in tehniških fakultet. Mladim je pomagal do izobrazbe tudi kot mentor šestim magistrantom in 66 diplomantom.

Znanstveno in strokovno delo profesorja Suhadolca je razvidno iz obširne uradne bibliografije, ki zajema 360 enot. V njej so vsebovani tako izvirni znanstveni članki in poročila o raziskovalnem delu kot strokovni članki. Veliko število slednjih je objavljenih v društvenih revijah *Obzornik za matematiko* in *fiziko* in *Presek*; z njimi je opravil veliko izobraževalno delo in populariziral matematiko na Slovenskem. Ob desetletnici izhajanja *Preseka* je za to prejel posebno priznanje DMFAS. Vse prej kot zanemarljiv je njegov delež pri slovenskih matematičnih univerzitetnih učbenikih in drugih strokovnih knjigah. Objavil je okrog dvajset učbenikov, strokovnih monografij, samostojnih poglavij v knjigah in drugih učbeniških gradiv. Uveljavil se je tudi kot prevajalec strokovne matematične literature iz angleščine v slovenščino, a tudi iz ruščine v angleščino. Za *Mathematical Reviews* je recenziral veliko člankov zlasti z ruskega govornega področja. S kritikami in ocenami matematične literature v *Obzorniku* je sledil razvoju svetovne matematike in med slovenskimi bralci širil zavest o novih področjih matematike. Več let je tudi urejal matematični del *Obzornika*. Pisal je o pomembnih ljudeh s področja matematike iz naše preteklosti, zlasti tistih, nekoliko pozabljenih; o njih je imel večkrat priložnostne govore. Rad je predaval na strokovnih srečanjih doma, ob občnih zborih društva, na seminarjih za učitelje in dijakom po srednjih šolah. Matematična predavanja je imel tudi ob obiskih drugih univerz (zagrebške, mariborske in kar pogosto tržaške). Dvakrat je za celo leto gostoval na ameriških univerzah (v Wisconsinu in na Floridi), enkrat za krajši čas v Nemčiji. Udeležil se je skoraj vseh jugoslovanskih matematičnih kongresov, pa tudi več mednarodnih znanstvenih srečanj in specialnih konferenc.

Za svoje znanstveno in strokovno delo je bil deležen priznanja: poleg Prešernove nagrade za študente je prejel leta 1974 (skupaj s Sergejem Pahorjem) Kidričevo nagrado za znanstveno raziskovalno delo.

Profesor Suhadolc je imel tudi številne funkcije, tako v društvu kot na fakulteti. Pri prevzemanju dolžnosti se ni vprašal, kaj bo imel od tega, ampak kaj lahko sam prispeva. Vedno je bil aktiven član društva, njegov predsednik v letih 1978–1980 in dolgoletni urednik za matematiko pri *Obzorniku*. Predvsem pa je bil eden najbolj znanih in priljubljenih univerzitetnih učiteljev, predstojnik oddelka za matematiko v letih 1981–1983 in 1987–1989 ter končno prvi dekan novoustanovljene Fakultete za matematiko in fiziko v letih 1995–1997. Prav je, da ga DMFA Slovenije za njegove pretekle zasluge za slovensko matematiko počasti z imenovanjem za častnega člana.

Nagrade za delo z mladimi so prejeli Irena Verdnik, Vitomir Babič in dr. Matjaž Željko.

Profesorica matematike **Irena Verdnik**, svetovalka, poučuje matematiko na Gimnaziji Jurija Vege v Idriji, kjer je septembra 1980 začela svojo poklicno pedagoško pot takoj po opravljeni diplomi. Od tedaj se posveča delu z mladimi ter s skrbnim in prizadevnim delom skupaj s kolegi dviguje raven znanja dijakov, ki dosegajo vidne uspehe na matematičnih tekmovanjih in na maturi. Več let je vodila aktiv matematikov na šoli in ob tem skrbela za nadgrajevanje kvalitete pedagoškega dela. Na šoli, ki je bila že pred njeno vključitvijo v učiteljske vrste znana po naravoslovno-matematični usmeritvi, je dodatno prispevala, da se je ta sloves ohranil vse do danes.

Velik je njen prispevek pri spodbujanju in motiviranju tistih dijakov, ki jim matematika ni ravno najljubši predmet. Z vedrim in umirjenim nastopom zna matematiko približati mladostnikom ter s pravšno mero strogosti v njih razvijati čut zdrave kritičnosti in samokritičnosti. Svojo pozitivno energijo ves čas vlaga tudi v dodatno izobraževanje nadarjenih dijakov, saj jih pripravlja na matematična tekmovanja in vodi matematične krožke. Vsako leto se dijaki, ki jim širi matematično obzorje in vzgaja v zdravem tekmovalnem duhu, uvrščajo na državno matematično tekmovanje srednješolcev, kjer najboljši posegajo po priznanjih.

Profesorica Irena Verdnik se je izkazala tudi kot odlična organizatorica. Skupaj s kolegi je leta 1990 organizirala 34. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije kot uvod v prireditev ob 90-letnici šole, leta 2001 pa še 45. matematično tekmovanje srednješolcev Slovenije kot eno osrednjih prireditev ob častitljivi stoletnici šole. Obe tekmovanji sta izjemno dobro uspeli, tako po organizacijski kot po tekmovalni plati. Udeleženci obeh državnih tekmovanj v Idriji smo občutili toplo dobrodošlico in se prijetno počutili ob organizaciji, polni harmonije in brez singularnosti.

Vitomir Babič, profesor, svetovalec, je izjemen učitelj fizike na Splošni in strokovni gimnaziji Lava v Celju. Poučuje s srcem, je strokovno neoporečen, zna pritegniti pozornost dijakov ter jih navdušiti za ukvarjanje s fiziko. Leto za letom mu uspe zbrati in pripraviti za regijsko in državno tekmovanje iz fizike številne dijake, ki dosegajo zavidljive uspehe. Bil je mentor dijakom pri številnih raziskovalnih nalogah (28), ki so se visoko uvrščale in dosegale visoke ocene (1. nagrada na ravni celjske regije). S strokovnih ekskurzij, ki jih organizira za dijake, prihajajo ti navdušeni, saj pridobijo bogate informacije in mnogo novih izkušenj.

Je pa prof. Babič tudi vodja strokovnega aktiva na matični šoli, vodja študijske skupine za fiziko, zunanji ocenjevalec maturitetnih nalog iz fizike že 5 let, član republiške maturitetne komisije, avtor oz. soavtor in recenzent strokovne literature (Zbirka nalog, brošura Holografija, Slikovna enciklopedija fizike), vodja organizacije lanskega državnega tekmovanja iz fizike.

Je pod polnim naponom intelektualne moči in vsestransko aktiven.

Dr. Matjaž Željko je asistent za matematiko na Fakulteti za matematiko in fiziko. Član Komisije za popularizacijo matematike v srednji šoli je postal že kot študent matematike takoj po končani srednji šoli. Od leta 1987 je bil vsako leto član republiške oziroma državne tekmovalne komisije

matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije in eden najbolj plodnih predlagateljev nalog izbirne in državne ravni tega tekmovanja.

Od leta 1993, ko je bila Slovenija sprejeta med države, ki se vključujejo v mednarodno matematično olimpijado, je bil vodja olimpijske ekipe. Da bi srednješolcem olajšal nastop na tej zahtevni mednarodni preizkušnji in slovensko ekipo dvignil na lestvici uspešnosti, je skupaj s sodelavci Komisije za popularizacijo uvedel posebne priprave na matematično olimpijado, prevzel krmilo le-teh in pripravil zajetno zbirko *Altius, citius, fortius*, knjigo s temeljnimi vsebinami priprav na olimpijado. Vsako šolsko leto vodi raziskovalne dneve iz matematike, ki so uvod v priprave na olimpijado, nato pa še okrog 15 dni priprav, pri čemer poskrbi za predavatelje in strokovno vsebino priprav ter izvedbo testov, s katerimi udeleženci priprav izkažejo pridobljena znanja.

Že nekaj let skrbi za spletno stran DMFA Slovenije, obenem pa si je prizadeval za posodobitev dela in uporabo tehnologije pri organizaciji matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije. V zadnjem letu je dobršen del svojega prostega časa posvetil pripravi društvenega informacijskega strežnika, s katerim je posodobljeno delo pri vseh tekmovanjih, ki jih vodimo pri DMFA Slovenije. Novost, ki jo kolega Željko še izpopolnjuje, pomeni res veliko pridobitev, tako za člane tekmovalnih komisij kot tudi za mentorje, saj računalnik opravi veliko večino duhamornega administrativnega dela.

*Darjo Felda, Milan Hladnik, Lucijana Kračun,
Janez Krušič, Zvonko Trontelj in Nada Razpet*

Letno kazalo

Obzornik za matematiko in fiziko 48 (2001) številke 1–6, str. 1–192

Članki – Articles

Linearna urejenost in intervalska topologija — Linear order and interval topology (Boris Lavrič)	1–12
Številske vrste in integrali — Series and integrals (Roman Drnovšek)	13–18
O gravitacijski konstanti — On the Newtonian gravitational constant (Janez Strnad)	19–25
O prostorskih kotih — On solid angles (Anton Cedilnik)	33–42
Nelinearna optika ob površinah — Nonlinear optics on surfaces (Irena Drevnšek Olenik)	43–50
Kako približati učencu pojma funkcije in njenega grafa — Introducing the notions of a function and its graph to students (Peter Šemrl)	51–55
Preštevande – osnovno in malo manj osnovno — Counting – basic and less basic (Primož Potočnik)	65–80
Simetrije periodičnih vzorcev v ravnini — Symmetries of periodic patterns in the plane (Marko Kranjc)	82–91
Med dvema ognjema? — Between two fires? (Janez Strnad)	92–94
Heronovi trikotniki z racionalnimi težiščnicami — Heron triangles with rational medians (Ivan Vidav)	97–108
Peltierovo hlajenje: klasična in moderna oblika — Peltier refrigeration: A classical and a modern way (Boštjan Jug, Zvonko Trontelj)	109–120

R 177/01



100000142,6

COBI

Andrej Perlah – 450. obletnica njegove smrti — Andrej P anniversary of his death (Marijan Prosen)	
Schnyderjev izrek — Schnyder's theorem (Kristijan Breznik Sandi Klavžar)	
Laboratorijski izvori in detektorji teraherčnih elektromag Laboratory-scale sources and detectors of terahertz electromagn (Tomaž Mertelj)	138–147
Sevalni tlak in P. N. Lebedev — Radiation Pressure and P. N. Lebedev (Janez Strnad)	148–153
Brouwerjev izrek — Brouwer theorem (Aleš Vavpetič)	161–167
Negibne točke in splošno ravnovesje na trgu — Fixed points and general market equilibrium (Neža Mramor Kosta)	170–181
O slonih in matrikah — Of elephants and matrices (Miran Černe in Manuel Flores)	183–185

Vesti – News

Strokovno srečanje in 52. občni zbor DMFA Slovenije (Nada Razpet)	26–28
Nagrade in priznanja DMFA Slovenije za leto 2000 (Maja Manohin, Mitja Rosina, Darjo Felda in Nada Razpet)	28–IV
Ob šestdesetletnici prof. dr. Jožeta Vrabca (Neža Mramor)	58–59
Prof. dr. Peter Legiša, dobitnik nagrade Republike Slovenije na področju šolstva za leto 2000 (Milan Hladnik, Boris Lavrič)	59–62
Prof. dr. Sandi Klavžar je prejel Zoisovo priznanje za leto 2000 (Bojan Mohar)	62–63
Strokovno srečanje in 53. občni zbor društva (Martin Čopič)	XV
Glede koledarja le toliko (Marijan Prosen)	80–81
Ali je pot skozi življenje naključno gibanje? (Ivan Kuščer)	95–XI
Dr. Igor Kukavica je prejel nagrado Sloanovega sklada (Miran Černe in Aleksandar Jurišič)	XII
Razpis DMFA Slovenije za posebne pohvale šolam in Pravila o podeljevanju priznanj (Martin Čopič)	108
Mag. Marija Vencelj – ob šestdesetletnici (Anton Suhadolc)	121–122
Matematični kviz na internetu (Gašper Fijavž, Aleš Vavpetič, Martin Vuk in Emil Žagar)	126–XV
Strokovno srečanje in 53. občni zbor društva (Martin Čopič)	XV
Osmo mednarodno tekmovanje študentov matematike (Gregor Šega)	153–155
Novi člani društva v letu 2000 (Vladimir Bensa)	XX
Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2000 (Janez Krušič)	156–XX
Raziskovalni dnevi iz fizike za srednješolce (Zvonko Jagličić)	181–182
Strokovno srečanje in 53. občni zbor DMFA Slovenije (Nada Razpet)	185–188
Nagrade in priznanja DMFA Slovenije za leto 2001 (Darjo Felda, Milan Hladnik, Lucijana Kračun, Janez Krušič, Zvonko Trontelj in Nada Raz- pet)	188–XXIII

Nove knjige – New books

Heydar Radjavi, Peter Rosenthal: Simultaneous triangularization (Roman Drnovšek)	55–57
David Acheson: From calculus to chaos (Vlado Malačič)	63–VII
Apostolos Doxiadis: Uncle Petros and Goldbach's Conjecture (Anton Suhadolc)	120–121
Michel Guillemot et al., Zgodovina matematike – zgodbe o problemih (Petar Pavešić)	167–169