

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

ODPISANO

2001

Letnik 48

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



 EGON SCHIELE | FOUR TREES

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 2001

letnik 48, številka 5, strani 129–160

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, telefon (01) 476-65-53, telefaks (01) 251-72-81, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d. d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 042961, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Martin Juvan (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Boris Lavrič, Marko Zgonik (urednik za fiziko), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Naročnina za člane društva je všteta v celoletno članarino, ki znaša 3600 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6600 SIT, za študente 1800 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 720 SIT, stare številke 480 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1450 izvodov. Revijo sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2001 DMFA Slovenije – 1468 Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles

Str.–Page

- Schnyderjev izrek — Schnyder's theorem (Kristijan Breznik in Sandi Klavžar) 129–137
- Laboratorijski izvori in detektorji teraherčnih elektromagnetnih sunkov — Laboratory-scale sources and detectors of terahertz electromagnetic pulses (Tomaž Mertelj) 138–147
- Sevalni tlak in P. N. Lebedev — Radiation Pressure and P. N. Lebedev (Janez Strnad) 148–153

Vesti – News

- Osmo mednarodno tekmovanje študentov matematike (Gregor Šega) 153–155
- Novi člani društva v letu 2000 (Vladimir Bensa) IV
- Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2000 (Janez Krušič) 156–IV

Na ovitku: *Štiri drevesa*, Egon Schiele.

SCHNYDERJEV IZREK

KRISTIJAN BREZNIK in SANDI KLAVŽAR

Math. Subj. Class. (2000): 05C10, 06A06.

Schnyder (Planar graphs and poset dimension, Order 5 (1989) 323–343) je dokazal, da je graf ravninski natanko tedaj, ko je dimenzija njegove incidenčne ureditve kvečjemu 3. V prispevku je opisan in dokazan ta pomembni rezultat. Omenjene so tudi nekatere njegove posledice.

SCHNYDER'S THEOREM

Schnyder (Planar graphs and poset dimension, Order 5 (1989) 323–343) proved that a graph is planar if and only if the dimension of its incidence order is at most 3. This important theorem is described and proved. Some consequences are also mentioned.

1. Uvod

Teorija grafov je eno najhitreje razvijajočih se področij sodobne matematike, ravninski grafi pa so eden od temeljev te teorije. Graf G je *ravninski*, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da noben par njegovih povezav nima skupne točke, razen kvečjemu v točki, ki je njuno skupno krajišče. O osnovnih lastnostih ravninskih grafov se lahko poučimo v [12].

Problem štirih barv je bil eden glavnih vzrokov za razvoj teorije ravninskih grafov, barvanja grafov in tudi drugih področij teorije grafov. Vprašanje je, ali je mogoče točke poljubnega ravninskega grafa pobarvati s štirimi barvami tako, da sosednjim točkam priredimo različne barve. Problem je leta 1852 zastavil Francis Guthrie, prva pisna referenca problema pa je iz leta 1878, ko je A. Cayley v reviji *Proceedings of the London Mathematical Society* postavil vprašanje, ali je problem že rešen. O zgodovini problema lahko več zremo na primer v [8]. Leta 1976 sta z zapletenim dokazom in obilno pomočjo računalnika problem rešila K. Appel in W. Haken. Pred kratkim pa so Robertson, Sanders, Seymour in Thomas [7] objavili poenostavljen dokaz tega izreka. O posplošitvi barvanja grafov – seznamskih barvanjih – med drugim tudi o ravninskih grafih, lahko preberemo v [4].

Trideseta leta 20. stoletja so bila zelo pomembna za razvoj teorije ravninskih grafov. Najpomembnejši dosežek je izrek Kuratowskega iz leta 1930, ki karakterizira ravninske grafe kot tiste grafe, ki ne vsebujejo K_5 in $K_{3,3}$ kot homeomorfnega podgrafa. Wagner je leta 1937 dodal varianto tega izreka, v kateri K_5 in $K_{3,3}$ nastopata kot prepovedana minorja. Istega leta je MacLane dodal tudi algebraično karakterizacijo ravninskih grafov, leta 1933 pa je Whitney pokazal, da je graf ravninski natanko tedaj, ko ima abstraktni dual. Več o teh rezultatih lahko najdemo v [3,5]. V slednjem članku je med drugim podan tudi kratek dokaz izreka Kuratowskega.

V tem članku bomo prikazali nov pogled na ravninske grafe, ki ta razred grafov poveže z delnimi urejenostmi. Opisali in dokazali bomo izredno eleganten Schnyderjev izrek iz leta 1989. Po mnenju T. Trotterja [11], enega

vodilnih strokovnjakov za teorijo delno urejenih množic, gre za enega petih najpomembnejših izrekov te teorije. Na koncu bomo omenili tudi nekatere posledice izreka.

2. Dimenzija grafa in Schnyderjev izrek

V tem razdelku bomo vpeljali pojem realizatorja, incidenčne urejenosti in dimenzije grafa. To nam bo omogočilo formulacijo Schnyderjevega izreka. Dokazali bomo tudi lažjo smer njegove ekvivalence.

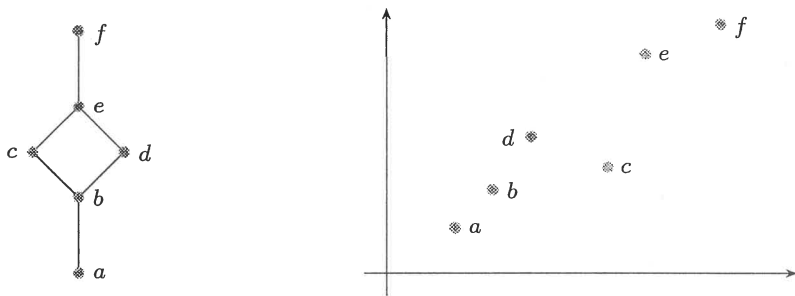
Množica X je z relacijo $\leq$ *delno urejena*, če je X tranzitivna, refleksivna in antisimetrična na X . Zapis $x < y$ bo pomenil $x \leq y$ in $x \neq y$. Delna urejenost je *linearna*, če so elementi v X paroma primerljivi, tj., če za vsak par elementov x, y iz X velja $x \leq y$ ali $y \leq x$.

Realizator delno urejene množice $R = (X, \leq)$ je množica linearnih urejenosti $\mathcal{L}$ množice X , katerih presek je R . Z drugimi besedami, $x \leq y$ v R natanko tedaj, ko je x pod y v vsaki linearni urejenosti iz $\mathcal{L}$. Pravimo tudi, da $\mathcal{L}$ *realizira* R . Naj bo $R = (X, \leq)$ končna delno urejena množica. Najmanjše število linearnih urejenosti nekega realizatorja za R imenujemo *dimenzija* R in jo označimo z $\dim R$.

Poglejmo si preprost primer. Naj bo $R = (X, \leq)$ delno urejena množica, kjer je $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ in je urejenost podana s Hassejevim diagramom na sliki 1. Ker R ni linearna urejenost, je $\dim R > 1$. Po drugi strani pa linearni urejenosti

$$\begin{aligned} a &\leq b \leq c \leq d \leq e \leq f, \\ a &\leq b \leq d \leq c \leq e \leq f \end{aligned}$$

tvorita realizator za R , zato je $\dim R = 2$.



Slika 1. Hassejev diagram relacije R in njena vložitev v $\mathbb{R}^2$

Dimenzijo delno urejene množice pa lahko opišemo tudi na geometrijski način, ki ga bomo kasneje uporabili pri dokazu zadostnosti Schnyderjevega izreka. Naj bo $R = (X, \leq)$ delno urejena množica in $n \in \mathbb{N}$. Tedaj injektivno preslikavo $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$, za katero velja, da je $x \leq y$ (v R) natanko tedaj, ko je $f(x) \leq f(y)$ (v $\mathbb{R}^n$), imenujemo *vložitev* R v $\mathbb{R}^n$. (Pri tem ima relacija $\leq$ v $\mathbb{R}^n$ običajen pomen: $(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n)$ natanko

tedaj, ko je $x_i \leq y_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$.) Dokaz naslednjega rezultata lahko najdemo v [9].

Izrek 1. *Naj bo $R = (X, \leq)$ končna, delno urejena množica. Tedaj je $\dim R$ najmanjše naravno število n , za katero lahko R vložimo v $\mathbb{R}^n$.*

Na primer, za delno urejenost R s slike 1 smo videli, da je $\dim R = 2$. Na isti sliki imamo tudi prikazano vložitev R v $\mathbb{R}^2$.

S pomočjo dimenzije delne urejenosti vpeljemo dimenzijo grafa takole. Naj bo $G = (V, E)$ graf in naj bo $\mathcal{P}(G)$ množica, katere elementi so vse točke in vse povezave grafa G . Množico $\mathcal{P}(G)$ uredimo z *incidenčno ureditvijo* $\leq$ takole: $u \leq e$ natanko tedaj, ko je točka $u \in V$ incidenčna s povezavo $e \in E$. *Dimenzija grafa G , $\dim(G)$, je dimenzija incidenčne ureditve $\leq$ na $\mathcal{P}(G)$.*

Sedaj imamo vse pripravljeno za:

Izrek 2 (Schnyderjev izrek). *Graf G je ravninski natanko tedaj, ko je $\dim(G) \leq 3$.*

V preostanku tega razdelka bomo pokazali zadostnost pogoja: če je dimenzija grafa kvečjemu 3, je graf ravninski.

Naj bo torej $\dim(G) \leq 3$. Izberimo poljubno vložitev incidenčne ureditve $\mathcal{P}(G)$ v $\mathbb{R}^3$ in naj $(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ označuje vložitev točke u . Tedaj nam i -ta ($i = 1, 2, 3$) koordinata te vložitve inducira (strogo) linearno ureditev $<_i$ točk grafa G . Z drugimi besedami, točke uredimo po velikosti njihove i -te koordinate, če pa imata točki u in v isto koordinato, brez izgube za splošnost izberemo na primer $u <_i v$.

Za točko $u \in V(G)$ naj bo $f(u) = (2^{m_1(u)}, 2^{m_2(u)})$, kjer je $m_i(u)$ mesto, na katerem se nahaja točka u glede na urejenost $<_i$, $i = 1, 2$. Preslikava f torej injektivno preslika točke grafa G v ravnino. Za vsako povezavo uv grafa G potegnimo daljico med $f(u)$ in $f(v)$. Trdimo, da smo tako dobili ravninsko vložitev grafa G .

Predpostavimo najprej, da obstajata povezavi xy in ab brez skupnega krajišča, tako da se daljica D_1 med $f(x)$ in $f(y)$ seka z daljico D_2 med $f(a)$ in $f(b)$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da velja $y, a, b <_1 x$.

Najprej opazimo, da za neki $i \in \{1, 2, 3\}$ velja $a, b <_i y$, saj bi sicer v incidenčni ureditvi točka $y \neq a, b$ ležala pod povezavo ab . Analogno ugotovimo, da za neka $j, k \in \{1, 2, 3\}$ velja $x, y <_j a$ in $x, y <_k b$. Če bi imeli $i = 1$, se daljici D_1 in D_2 ne bi sekali, torej je $i \geq 2$. Maksimalnost x po $<_1$ nam očitno implicira tudi $j \geq 2$ in $k \geq 2$. Recimo, da je $j \neq k$. Tedaj je $i = j$ (ali pa $i = k$), zato bi hkrati imeli $a <_i y$ in $y <_i a$. To seveda ni možno, zato je $j = k$. V primeru $j = k = 2$ se daljici D_1 in D_2 zagotovo ne bi sekali, zato sklepamo, da je $j = k = 3$ in $i = 2$. Nadalje, ker se daljici D_1 in D_2 sekata, mora biti tudi $x <_2 y$.

Imamo torej naslednje relacije:

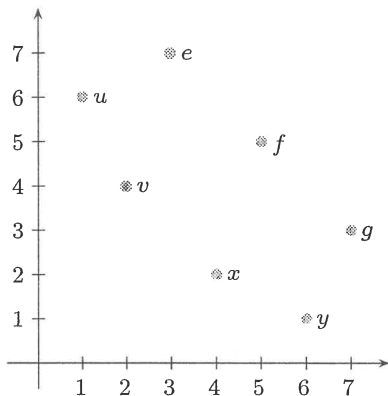
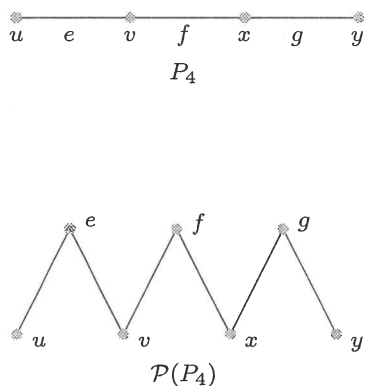
$$y <_1 x, a <_1 x \text{ in } b <_1 x$$

ter

$$x <_2 y, a <_2 y \text{ in } b <_2 y.$$

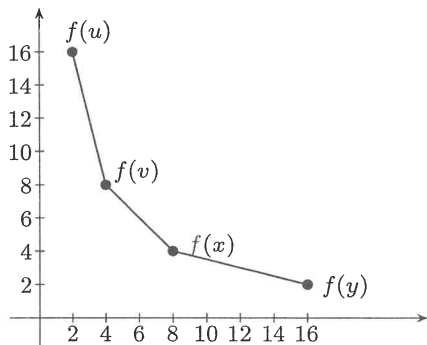
Potemtakem $f(a)$ in $f(b)$ ležita levo od $f(x)$ in pod $f(y)$. Sedaj trdimo, da $f(a)$ in $f(b)$ ne moreta ležati v trikotniku, ki ga določajo oglišča $f(x)$, $f(y)$ in $(2^{m_1(x)}, 2^{m_2(y)})$. Res, vsaka točka $T = (t_1, t_2)$ iz tega trikotnika zadošča vsaj eni izmed enačb $2^{m_1(x)}/2 < t_1 \leq 2^{m_1(x)}$ ali $2^{m_2(y)}/2 < t_2 \leq 2^{m_2(y)}$, po definiciji preslikave f pa to ne more biti izpolnjeno. Zato lahko zaključimo, da ležita točki $f(a)$ in $f(b)$ pod daljico D_1 , to pa je v nasprotju s predpostavko, da se D_1 in D_2 sekata.

Obravnavati moramo še primer dveh povezav, ki imata skupno krajišče, recimo ab in ac . Naj bo D_1 daljica med $f(a)$ in $f(b)$ ter D_2 daljica med $f(a)$ in $f(c)$. Pokazati moramo, da D_1 ni vsebovana v D_2 . Recimo nasprotno. Tedaj lahko brez izgube za splošnost predpostavimo, da je $a <_1 b <_1 c$. Seveda je potem tudi $a <_2 b <_2 c$. Odtod sledi, da mora biti $c <_3 b <_3 a$, saj bi bil v nasprotnem primeru vsaj en par točk v relaciji incidenčne ureditve. Poglejmo sedaj povezavo ac . V incidenčni ureditvi je ac nad a in nad c , ni pa nad b . Odtod takoj vidimo, da v vložitvi $\mathcal{P}(G)$ v $\mathbb{R}^3$ ne moremo najti mesta za povezavo ac . S tem protislovjem je končan dokaz zadostnosti pogoja Schnyderjevega izreka.



Slika 2. Pot P_4 , njena incidenčna ureditev in vložitev v $\mathbb{R}^2$

Poglejmo si preprost primer, ki bo ilustriral gornjo konstrukcijo. Naj bo graf G pot na štirih točkah u, v, x, y in povezavah $e = uv$, $f = vx$, $g = xy$. Graf G je skupaj s pripadajočo incidenčno ureditvo $\mathcal{P}(G)$ in vložitvijo v $\mathbb{R}^2$ prikazan na sliki 2.



Slika 3. Vložitev P_4 v ravnino

Iz projekcij vložitve v $\mathbb{R}^2$ dobimo linearni ureditvi

$<_1$: u, v, x, y ; in $<_2$: y, x, v, u .

Zato je preslikava f določena z $f(u) = (2^1, 2^4)$, $f(v) = (2^2, 2^3)$, $f(x) = (2^3, 2^2)$ in $f(y) = (2^4, 2^1)$. Pripadajoča vložitev grafa P_4 v ravnino je ilustrirana na sliki 3.

3. Dokaz potrebnosti

V tem razdelku bomo dokazali težji del Schnyderjevega izreka. Dokazati moramo, da ima vsak ravninski graf $G = (V, E)$ dimenzijo kvečjemu 3. Najprej opazimo, da zadostuje trditev dokazati za maksimalne ravninske grafe, saj če grafu odvzamemo kakšno povezavo, lahko to le zmanjša njegovo dimenzijo. Nadalje lahko predpostavimo, da ima graf vsaj tri točke in da imamo podano fiksno ravninsko vložitev, v kateri so vsa lica trikotniki.

Definicija 3. Trojica delnih ureditev $\leq_1, \leq_2, \leq_3$ na V ima lastnost Q , če za vsako točko v in povezavo e , ki ni incidenčna z v , obstaja $i \in \{1, 2, 3\}$, tako da se v relaciji $\leq_i$ točka v pojavi nad obema krajiščema povezave e .

Glavna ideja dokaza je poiskati trojico delnih ureditev na V z lastnostjo Q . Če nam to uspe, potem najprej vsako izmed njih poljubno razširimo do linearne ureditve na V , nato pa vstavljamo povezave grafa G v vsako od teh linearnih ureditev ravno nad višjega od njenih krajišč. Tako dobimo linearno ureditev na $V \cup E$. Lastnost Q nam zagotavlja, da za poljubno povezavo e , ki ni incidenčna z v , obstaja taka linearna ureditev med tremi konstruiranimi, v kateri se v pojavi nad e . Torej v preseku teh relacij v ne bo v relaciji z e , kar pa pomeni, da smo konstruirali realizator za $\mathcal{P}(G)$ s tremi elementi.

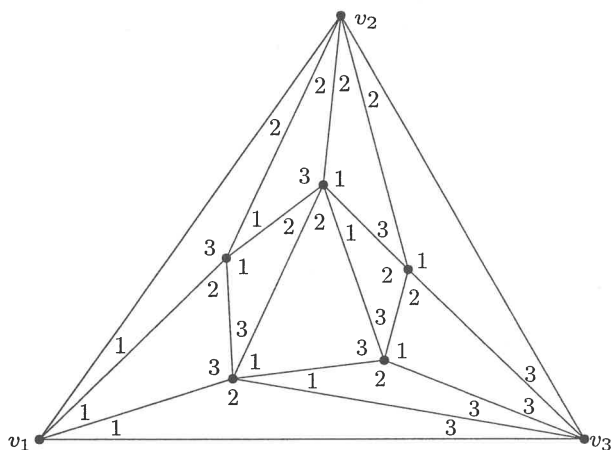
Konstrukcijo treh delnih urejenosti na V z lastnostjo Q nam omogoča Schnyderjeva označitev triangulacije, ki je definirana takole: z v_1, v_2, v_3 označimo točke na zunanem licu vložitve, in sicer v smeri urinega kazalca.

Definicija 4. *Schnyderjeva označitev* ravninske triangulacije je prireditve števil 1, 2 in 3 notranjim kotom trikotnikov, ki zadošča naslednjim pogojem:

- (a) Vsak kot pri v_i je označen z i , $i = 1, 2, 3$.
- (b) Vsi trikotniki imajo kote označene 1, 2, 3, če jih beremo v smeri urinega kazalca.
- (c) Okoli vsake notranje točke lahko beremo označene kote kot neprazno zaporedje enic, neprazno zaporedje dvojek in neprazno zaporedje trojk.

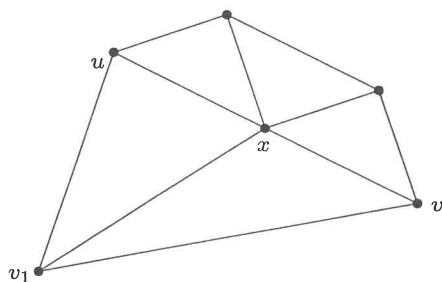
Na sliki 4 vidimo primer Schnyderjeve označitve.

Lema 5. Vsaka ravninska triangulacija premore Schnyderjevo označitev.



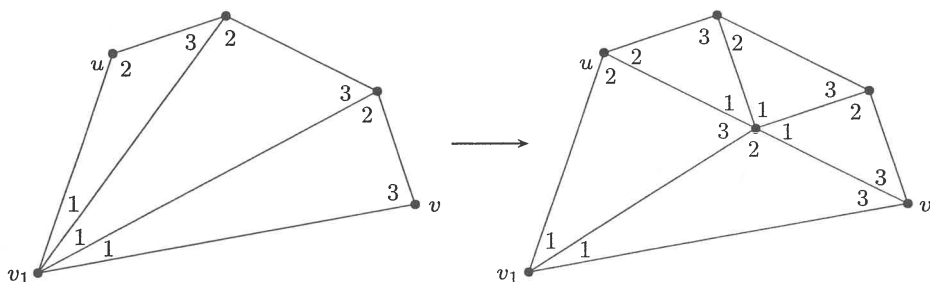
Slika 4. Primer Schnyderjeve označitve

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na število točk n . Za $n = 3$ kot pri v_i označimo z i , $i = 1, 2, 3$. Imejmo sedaj triangulacijo z $n \geq 4$ točkami. Naj bo x sosednja točka točke v_1 , različna od v_2 in v_3 . Točki x in v_1 imata natanko dve skupni sosedi, označimo ju z u in v , glej sliko 5.



Slika 5. Skupni sosedi točk v_1 in x

Naj bo G' graf, ki ga dobimo iz G z odstranitvijo točke x . Lice v G' , na robu katerega so sosede točke x , označimo s F . Opazimo, da so točke u , v_1 in v zaporedne točke lica F . Konstruirajmo triangulacijo grafa G' tako, da povežemo v_1 z vsako nesosednjo točko na robu lica F . Po induksijski predpostavki ta triangulacija premore Schnyderjevo označitev. To označitev lahko razširimo na označitev triangulacije grafa G , kot je prikazano na sliki 6.



Slika 6. Razširitev Schnyderjeve označitve z G' na G

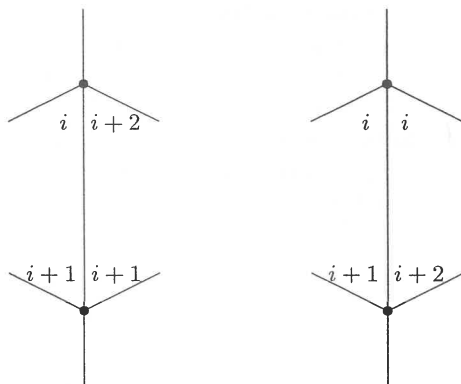
S tem smo pokazali, da vsaka ravninska triangulacija premore Schnyderjevo označitev. ■

Vzemimo sedaj Schnyderjevo označitev ravninske triangulacije grafa G in opazujmo oznake štirih notranjih kotov pri krajiščih neke notranje povezave.

Lema 6. *Pri vsaki notranji povezavi se pri enem krajišču pojavita dve enaki oznaki, pri drugem krajišču pa preostali dve oznaki.*

V nadaljevanju bomo namesto oznak 1, 2 in 3 uporabljali oznake i , $i + 1$ in $i + 2$ ter jih razumeli po modulu 3.

Dokaz leme 6. Vzemimo poljubno notranjo povezavo in si oglejmo notranje štiri kote. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da je eden med njimi, recimo levo zgoraj, označen z i . Pri tem je orientacija „levo zgoraj“ mišljena glede na sliko 7.



Slika 7. Oznake pri krajiščih notranje povezave

Potem imamo v kotu levo spodaj oznako $i + 1$, saj gremo v smeri urinega kazalca in moramo upoštevati pogoj (ii) Schnyderjeve označitve. Zaradi pogoja (iii) je desno spodaj lahko le oznaka $i + 1$ ali $i + 2$. V prvem primeru je zaradi (ii) oznaka desno zgoraj $i + 2$, v drugem pa $i + 3$, kar je enako i po modulu 3. ■

Zaradi leme 6 je smiselna naslednja definicija. Naj bo e notranja povezava ravninske triangulacije in u tisto njeno krajišče, pri katerem imata notranji krajišči enaki oznaki, recimo i . Potem povezavi e priredimo oznako i in jo usmerimo proti u .

Lema 7. *Za vsak i in vsako notranjo točko x triangulacije grafa G obstaja natanko ena incidenčna povezava z x , ki ima oznako i in je usmerjena stran od x .*

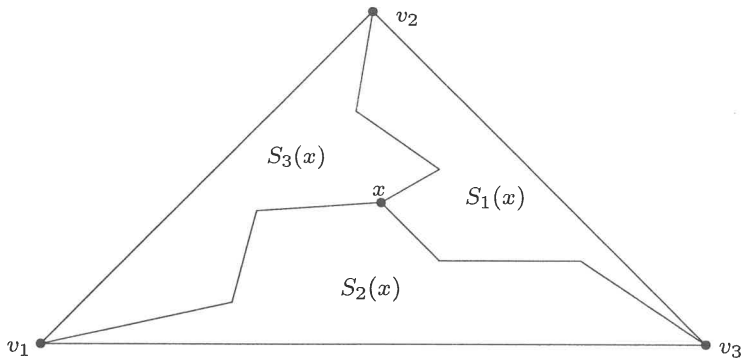
Dokaz. Trditev takoj sledi iz zahteve (iii) Schnyderjeve označitve, saj obstaja natanko ena povezava, incidenčna z x , pri kateri ima en notranji kot oznako $i + 1$, sosednji pa $i + 2$. ■

Zaradi leme 7 lahko iz vsake notranje točke grafa triangulacije opazujemo (usmerjeno) pot, ki sledi oznakam i . Tako pot bomo imenovali i -pot iz x .

Lema 8. *Vsaka i -pot vodi k (zunanji) točki v_i .*

Dokaz. Če i -pot vodi k zunanji točki, je zaradi pogoja (i) Schnyderjeve označitve to točka v_i . Poglejmo sedaj možnost, da se to ne zgodi. Tedaj obstaja cikel, v katerem so vse povezave označene z isto oznako. Med vsemi takimi cikli izberimo cikel, recimo C , ki omejuje najmanjše število lic. Brez izgube za splošnost naj bodo njegove povezave označene z i in usmerjene v smeri urinega kazalca. Tedaj je iz vsake točke cikla C povezava, označena z $(i+1)$, usmerjena v notranjost cikla. Zato nam $(i+1)$ -pot iz katerekoli točke cikla C porodi cikel v notranjosti C , kar je v nasprotju z minimalnostjo C . ■

Naj bo x poljubna notranja točka triangulacije in pogledimo 1-pot iz x , 2-pot iz x in 3-pot iz x . To so poti k trem z zunanjim točkam, ki se med seboj ne sekajo, saj je $(i+1)$ -pot vedno na desni strani i -poti, $(i+2)$ -pot pa na levi strani i -te poti. Tako lahko notranjost triangulacije razbijemo na tri območja. Za $i = 1, 2, 3$ naj bo $S_i(x)$ zaprto območje, razpeto med $(i+1)$ -potjo iz x , $(i+2)$ -potjo iz x in zunanjo povezavo med v_{i+1} in v_{i+2} , glej sliko 8.



Slika 8. Območja $S_i(x)$

Sedaj je vse pripravljeno, da lahko za $i = 1, 2, 3$ definiramo delne urejenosti $(V, \leq_i)$ takole:

$$x \leq_i y \text{ natanko tedaj, ko je } S_i(x) \subseteq S_i(y).$$

Trdimo, da ima trojica $\leq_1, \leq_2, \leq_3$ na množici V lastnost Q . (Spomnimo se, da to pomeni, da za vsako točko x in povezavo $e = uv$, $x \neq u, v$, obstaja $i \in \{1, 2, 3\}$, tako da je $u \leq_i x$ in $v \leq_i x$.) Naj povezava e leži v $S_i(x)$. Trdimo, da se x pojavi nad obema krajiščema povezave e v relaciji $\leq_i$. V ta namen moramo preveriti, ali je območje $S_i(y)$ vsebovano v $S_i(x)$, če je y v $S_i(x)$. Opazimo, da se $(i+1)$ -pot iz y ne more križati z $(i+1)$ -potjo iz x , saj od prve skupne točke dalje sovpadata. Vidimo tudi, da $(i+1)$ -pot iz y ne seka $(i+2)$ -poti iz x , saj je na slednji vsaka povezava z oznako $i+1$ usmerjena v $S_i(x)$. Podobno je $(i+2)$ -pot iz y v celoti vsebovana v $S_i(x)$. Torej je $S_i(y) \subseteq S_i(x)$ in Schnyderjev izrek je dokazan.

4. Sklepne opombe

Če še enkrat pogledamo dokaz zadostnosti izreka, takoj opazimo, da smo graf vložili v ravnino s samimi ravnimi črtami. Skupaj z drugo implikacijo Schnyderjevega izreka je to nov dokaz, da lahko vsak ravninski graf vložimo v ravnino s samimi ravnimi črtami. Ta rezultat je sicer prvi dokazal Fáry leta 1948.

Drevesnost grafa G , $a(G)$, je minimalno število po povezavah disjunktnih vpetih gozdov grafa G , ki pokrijejo vse povezave G . Če še enkrat pogledamo dokaz leme 8, lahko opazimo, da povezave, označene z i , tvorijo (usmerjeno) drevo (s ponorom v v_i). Ker je vsak ravninski graf podgraf neke ravninske triangulacije, to pomeni, da lahko povezave vsakega ravninskega grafa razbijemo na tri drevesa. Z drugimi besedami, za ravninski graf G velja $a(G) \leq 3$, kar je klasični rezultat Nash-Williamsa [6].

Omenimo še, da so po objavi Schnyderjevega izreka mnogi iskali njegove posplošitve.¹ Radovednega bralca napotimo na [1,2].

Za konec bi se rada zahvalila enemu izmed anonimnih recenzentov članka, ki je našel pomanjkljivost v zadnjem sklepu dokaza zadostnosti, napravljenem po [1]. Pričujoči dokaz je zato narejen po originalnem članku [10].

LITERATURA

- [1] G. Brightwell, *Partial orders* (v: Graph Connections, urednika L. W. Beineke in R. J. Wilson, Clarendon Press, Oxford, 1997) 52–67.
- [2] G. Brightwell in W. T. Trotter, *The order dimension of planar maps*, SIAM J. Discrete Math. **10** (1997) 515–528.
- [3] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, New York, 1997.
- [4] M. Juvan, *Osnovno o seznamskih barvanjih*, Obzornik mat. fiz. **44** (3) (1997) 65–73.
- [5] B. Mohar, *Ravninski grafi*, Obzornik mat. fiz. **37** (4) (1990) 119–127.
- [6] C. St. J. A. Nash-Williams, *Decomposition of finite graphs into forests*, J. London Math. Soc. **39** (1964) 12.
- [7] N. Robertson, D. Sanders, P. D. Seymour in R. Thomas, *The four-color theorem*, J. Combin. Theory Ser. **B 70** (1997) 2–44.
- [8] T. L. Saaty in P. C. Kainen, *The Four-Color Problem*, Dover Publications, New York, 1986.
- [9] E. R. Scheinerman, *Mathematics, A Discrete Introduction*, Brooks/Cole, Pacific Grove, 2000.
- [10] W. Schnyder, *Planar graphs and poset dimension*, Order **5** (1989) 323–343.
- [11] W. T. Trotter, *The top ten theorems on partially ordered sets*, plenarno predavanje na konferenci "Horizons in Combinatorics", Nashville, ZDA, maj 2001.
- [12] R. J. Wilson in J. J. Watkins, *Uvod v teorijo grafov*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1997.

¹ Ali veste, s čim edino se lahko primerja strast odvetnika, da toži? S strastjo matematika, da posploši.

LABORATORIJSKI IZVORI IN DETEKTORJI TERAHERČNIH ELEKTROMAGNETNIH SUNKOV

TOMAŽ MERTELJ

PACS: 07.57.Hm, 07.57.Kp, 42.65.-k, 78.47.+p

V zadnjih desetletjih je silovit razvoj ultrahitrih laserskih sistemov omogočil razvoj novih laboratorijskih izvorov elektromagnetnega valovanja. V članku so opisani sunkovni izvori in detektorji teraherčnega elektromagnetnega valovanja na osnovi ultrahitrih sunkovnih laserjev s poudarkom na izvorih in detektorjih na osnovi fotoprevodnosti in optične nelinearnosti drugega reda.

LABORATORY-SCALE SOURCES AND DETECTORS OF TERAHERTZ ELECTROMAGNETIC PULSES

A significant progress in the field of ultrafast-laser systems during recent decades has enabled development of novel laboratory-scale electromagnetic radiation sources. In the article sources and detectors of terahertz electromagnetic pulses based on ultrafast pulse lasers are described with emphasis on the sources and detectors based on photoconductivity and the second order optical nonlinearity.

Uvod

Razvoj učinkovitih titan-safirnih sunkovnih laserjev konec prejšnjega stoletja je prinesel nove možnosti pri razvoju relativno cenenih laboratorijskih sunkovnih izvorov elektromagnetnega valovanja. Za laboratorijsko spektroskopijo je postalo dosegljivo zelo široko spektralno področje od daljnega infrardečega pa vse do rentgenskega dela spektra, ki je bilo prej bolj ali manj v domeni sinhrotronskih izvorov. Sunkovna narava novih izvorov pa poleg prej naštetega omogoča tudi časovno razločljivo spektroskopijo z ločljivostjo na femtosekundni časovni skali.

Osnovne prednosti sunkovnih izvorov na osnovi titan-safirjevih sunkovnih laserjev pred sinhrotronskimi izvori so znatno nižja cena, manjša velikost in kratka dolžina sunkov. S komercialno dosegljivimi titan-safirjevimi izvori namreč zlahka dosegamo dolžine sunkov pod 50 fs. Terawatne vršne moči v sunku pri valovnih dolžinah v okolici 800 nm omogočajo konverzijo valovnih dolžin z uporabo nelinearnih pojavov v snovi. Celoten laserski sistem z izvorom pa lahko postavimo na večjo optično mizo.

V tem sestavku se bom omejil na fiziko izvorov, ki delujejo na frekvenčnem območju od nekaj 100 GHz pa tja do nekaj THz. Valovne dolžine valovanja iz teh izvorov merijo v vakuumu od mm pa do nekaj deset μm , energija fotonov pa je primerljiva z energijo termalnih fluktuacij $k_B T$ pri nekaj 100 K. Klasični kontinuirani izvori, ki temeljijo na sevanju črnega telesa, so v tem območju precej neučinkoviti, podobno pa velja tudi za detektorje, ki jih je obvezno treba hladiti, da zmanjšamo termalni šum. Te težave odpadejo pri sunkovnih izvori, saj nam omogočajo koherentno detekcijo in večje vršne moči, kar zelo izboljša razmerje signal/šum že pri sobni temperaturi. Poleg informacije o intenziteti pa s koherentno detekcijo dobimo

tudi informacijo o fazi teraherčnega električnega polja. [1]

Teraherčno območje valovnih dolžin je za uporabo zanimivo na več področjih [2]. Omenil bi samo dve, ki sta po mojem mnenju med najpomembnejšimi. Teraherčni fotoni iz sunkovnih izvorov so idealno orodje za merjenje dinamike nizkoenergijskih kvantnih stanj in procesov v realnem času. Dinamika le-teh namreč odločilno vpliva na dinamiko transporta nosilcev naboja v snoveh in s tem na hitrost elektronskih komponent. Hitrost elektronskih komponent pa je eden ključnih parametrov današnjega tehnološkega razvoja.

Drugo možno področje uporabe je slikanje, kjer lahko poleg intenzitete izmerimo še fazo teraherčnega polja. Zaradi relativno dolge valovne dolžine je še posebej v bioloških tkivih sipanje valovanja manjše kot v preostalem infrardečem območju, kar pozitivno vpliva na vdorno globino in s tem na globinski doseg v primeru tridimenzionalnega slikanja.

Sunkovni teraherčni izvori

Pri konstrukciji teraherčnih izvorov na osnovi ultrahitrih optičnih laserskih sunkov uporabljamo predvsem dva postopka: fotomodulacijo električnega toka in optično usmerjanje.

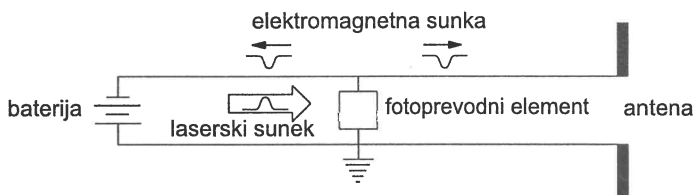
Pri izvori s fotomodulacijo električnega toka s kratkim laserskim sunkom v zelo kratkem času spremenimo električno prevodnost snovi, ki jo v električnem tokokrogu uporabimo kot hitro stikalo [3]. Najpogosteje uporabljamo polprevodnik, v katerem s svetlobo vzbudimo elektrone iz valenčnega v prevodni pas. Nastale elektrone in vrzeli zunanje električno polje pospeši, kar povzroči spremenljiv električni tok, ki seva. Demonstrirali so tudi izvore, ki delujejo na osnovi prekinjanja superprevodnega toka v superprevodnikih.

Pri izvoru na osnovi optičnega usmerjanja ne potrebujemo zunanjega električnega polja ali toka. Optični sunek zaradi nelinearnosti drugega reda v snovi inducira električni dipol, ki se spreminja na časovni skali dolžine sunka. Dipol seva teraherčno polje, če je sunek dovolj kratek [4]. Poglejmo si oba tipa izvorov nekoliko natančneje.

Izvori s fotoprevodnimi elementi

Prve poskuse z izvori mikrovalov na osnovi fotoprevodnih elementov so naredili na začetku osemdesetih let [3]. Shema takšnega izvora je prikazana na sliki 1. V valovod, ki je priključen na enosmerno napetost, namestimo polprevodnik. Ko na polprevodnik posvetimo s kratkim laserskim sunkom, se njegova prevodnost za kratek čas poveča in skozenj steče sunek toka. Pri tem v valovodu nastaneta dva elektromagnetna sunka, ki potujeta v nasprotnih smereh. En konec valovoda je priključen na anteno, ki izseva elektromagnetni sunek v prostor.

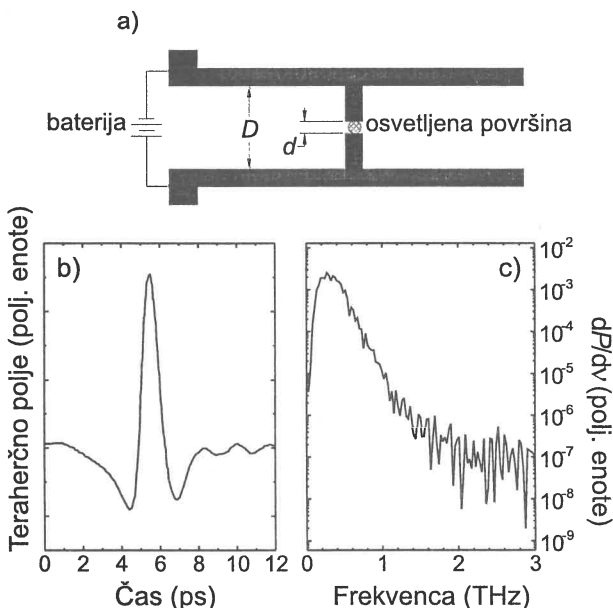
Frekvenčni spekter takšnega sunka je zelo širok, maksimalna frekvenca pa je sorazmerna z obratno vrednostjo dolžine sunka. Na začetku osemdesetih let so bile zlahka dosegljive dolžine laserskih sunkov nekaj ps, kar



Slika 1. Shema sunkovnega mikrovalovnega izvora. Fotoprevodni element ob prihodu laserskega sunka za kratek čas „sklene“ vodnika v valovodu. Rezultat sta dva elektromagnetna sunka, ki potujeta po valovodu v nasprotnih smereh. En konec valovoda je priključen na anteno, ki izseva elektromagnetno motnjo v prostor.

je omogočalo maksimalne frekvence v območju od nekaj deset do nekaj sto GHz. Z razvojem sunkovnih laserjev so se razpoložljive dolžine sunkov skrajšale pod 100 fs, maksimalne frekvence pa s tem narasle do nekaj THz.

Zaradi manjše valovne dolžine in širše pasovne širine uporaba valovoda pri krajših sunkih ni praktična, saj velikost antene postane primerljiva s prečno dimenzijo valovoda. Poleg tega bi se elektromagnetni sunek v valovodu zaradi disperzije preveč razširil. Dipolno anteno s fotoprevodnikom na sredini zato napajamo na zunanji strani, kot kaže slika 2 a). Celotna struktura je izdelana iz kovine neposredno na polprevodniku.



Slika 2. a) Dipolna antena na planarnem valovodu. Velikost antene D je tipično nekaj deset μm , velikost osvetljene reže d pa tipično nekaj μm . b) Električno polje v teraherčnem sunku in c) njegov spekter. Fotoprevodnik so osvetlili s 100-femtosekundimi laserskimi sunki iz titan-safirnega laserja. Na prikazano obliko teraherčnega sunka in njegovo frekvenčno širino na sliki vpliva tudi hitrost fotoprevodnega detektorja teraherčnih sunkov, ki je v tem primeru pomemben omejujoči dejavnik.

Izsevana energija elektromagnetnega sunka izvira pretežno iz elektrostatske energije zunanjega statičnega električnega polja v osvetljenem volumnu polprevodnika. Absorbirana energija laserskega sunka pa se uporabi le za vzbujanje elektronov iz valenčnega v prevodni pas in ne prispeva k izsevani energiji. Za povečevanje energije izsevanega sunka moramo zato povečevati zunanje električno polje ali/in volumen fotovzbujenega dela polprevodnika. Maksimalno zunanje električno polje v polprevodniku je zaradi električnega preboja navzgor omejeno, zato je treba za doseganje najvišjih energij povečevati volumen fotovzbujenega dela polprevodnika. Ker je absorpcijska globina svetlobe konstantna, se večanje osvetljenega volumna prevede na večanje osvetljene površine. Pri tem je seveda treba povečati tudi energijo laserskega sunka, da ostane volumska gostota fotovzbujenih nosilcev konstantna. Linearna dimenzija fotovzbujenega volumna polprevodnika zaradi potrebe po večjih energijah torej hitro preseže minimalne valovne dolžine v izsevanem polju, ki so vsega nekaj deset μm . Fotovzbujeni volumen polprevodnika zato sam seva teraherčni koherentni snop v prostorski kot, ki je določen z uklonom, in antena ni več potrebna. S takšnim izvorom preseka okoli 10 cm^2 so dosegli energije v teraherčnem sunku okoli μJ .

Najkrajšo možno dolžino sunka ter s tem maksimalno možno frekvenco določa časovna odvisnost fotoprevodnosti polprevodnika, ki jo v približku za en tip nosilcev opišemo z:

$$\sigma_f(t) = e\mu n(t) \quad (1)$$

kjer je $n(t)$ gostota fotovzbujenih nosilcev naboja, e njihov naboj in μ njihova gibljivost. V splošnem je tudi gibljivost lahko odvisna od časa. Gostoto fotovzbujenih nosilcev določa tekmovanje med fotovzbujanjem in rekombinacijo,

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{n(t)}{\tau} + g(t) \quad (2)$$

kjer je τ življenjski čas fotovzbujenih nosilcev, člen $g(t)$ pa pomeni fotovzbujanje z laserskim sunkom. Iz enačb (1) in (2) sledi,

$$\sigma_f(t) = e\mu \int_{-\infty}^t dt' g(t') \exp\left(-\frac{(t-t')}{\tau}\right). \quad (3)$$

Hitrost naraščanja fotoprevodnosti je torej omejena z dolžino laserskega sunka, medtem ko je hitrost upadanja omejena z življenjskim časom fotovzbujenih nosilcev. Laserski sunki so namreč dandanes navadno znatno krajši od 500 fs, ki je trenutno spodnja meja za τ . Ker je najvišja frekvenca v spektru sunka povezana z najhitrejšo spremembo fotoprevodnosti, je maksimalna frekvenca v principu omejena le z dolžino laserskega sunka. Kljub temu čimkrajši življenjski čas fotovzbujenih nosilcev pripomore k večji moči

v teraherčnem sunku in povečanju deleža visokofrekvenčnih komponent v spektru.

Izvori z optičnim usmerjanjem

V kratkem laserskem sunku, ki ga fokusiramo v snovi, je jakost električnega polja dovolj velika, da pridejo do izraza višji členi v razvoju polarizacije P v odvisnosti od jakosti električnega polja. [5] Električno polje kratkega svetlobnega sunka oblike:

$$E_{opt}(t, z) \propto A(t - z/c_g) \cos(\omega_{opt}(t - z/c)), \quad (4)$$

kjer je $A(t - z/c_g)$ envelope sunka, ω_{opt} srednja frekvenca v optičnem spektru, c_g skupinska in c fazna hitrost pri optični frekvenci, povzroči v snovi zaradi nelinearnosti dodatno polarizacijo. Zaradi enostavnosti smo pisali skalarje namesto vektorjev. Dodatna polarizacija vsebuje poleg komponente, ki oscilira z dvojno optično frekvenco, tudi počasno komponento,

$$P_t^{(2)}(t - z/c_g) \propto [A(t - z/c_g)]^2, \quad (5)$$

ki se spreminja na časovni skali dolžine sunka in potuje s skupinsko hitrostjo pri optični frekvenci c_g . Dodatna polarizacija seva elektromagnetno valovanje, katerega frekvence so v teraherčnem območju, kadar je optični sunek dovolj kratek. Pri računanju izsevanega teraherčnega polja lahko valovno enačbo za teraherčno električno polje E_t obravnavamo ločeno od valovne enačbe za optično polje, saj sta optična frekvenca in karakteristična teraherčna frekvenca zelo različni. Dodatna polarizacija nastopa v valovni enačbi za teraherčno polje kot nehomogeni člen,

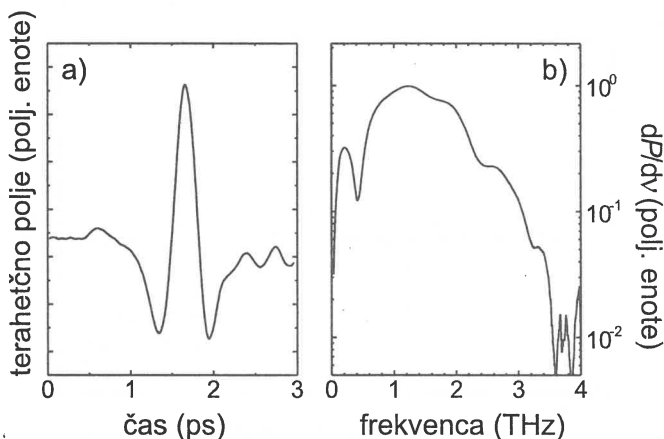
$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_t}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_t^{(2)}}{\partial t^2}, \quad (6)$$

kjer je μ_0 induksijska konstanta, v pa fazna hitrost v teraherčnem območju frekvenc, ki je drugačna od tiste pri optični frekvenci. Rešitev enačbe (6) je v primeru, ko optični sunek vpada na plast nelinearne snovi, ki se nahaja v območju $0 < z < L$, znotraj plasti podana z [4],

$$E_t(z, t) \propto \frac{1}{v^2 - c_g^2} \left(P_t^{(2)}(t - z/c_g) - \frac{(c_g + v_0)v}{(v + v_0)c_g} P_t^{(2)}(t - z/v) \right), \quad (7)$$

kjer je v_0 fazna hitrost v teraherčnem območju frekvenc zunaj plasti. Prvi člen v oklepaju pomeni partikularno rešitev, drugi člen pa rešitev homogene enačbe, ki jo določajo robni pogoji pri $z = 0$. Oba člena imata enako funkcijsko odvisnost kot nelinearna polarizacija, razlikujeta pa se v predznaku in

hitrosti potovanja. Sunek, ki ustreza partikularni rešitvi, potuje s skupinsko hitrostjo optičnega sunka c_g , drugi pa s fazno² hitrostjo v teraherčnem območju frekvenc ν , kar pri potovanju skozi snov povzroči zakasnitev med njima, ki narašča linearno s prepotovano razdaljo po snovi. Pri dovolj kratkih razdaljah se sunka deloma prekrivata, zato se prispevka obeh sunkov k električnem polju deloma odštejeta. Pri daljših razdaljah pa zakasnitev med sunkoma postane daljša od dolžine sunkov. Sunka sta zato prostorsko popolnoma ločena in posamezna prispevka k polju se ne odštejeta. Celotna amplituda električnega polja zato pri dovolj kratkih razdaljah narašča s prepotovano razdaljo, pri daljših razdaljah pa ne narašča več. Enako velja za energijo v teraherčnem polju. Tipične velikosti zakasnitev na prepotovano razdaljo so odvisne od snovi in se gibljejo v praktično najbolj zanimivih snoveh od 15 fs/mm v GaAs do 1100 fs/mm v ZnTe, pa tudi prek 10 ps/mm v drugih potencialno uporabnih snoveh. Pri dolžinah sunkov okoli 100 fs so torej praktično uporabne dolžine poti in s tem debeline plasti večinoma znatno manjše od milimetra.



Slika 3. a) Električno polje v teraherčnem sunku, izsevanem iz 0.9 mm debelega kristala ZnTe in b) njegov spekter. Dolžina vzbujevalnih laserskih sunkov je bila 130 fs. Zgornja frekvenčna meja prikazanega spektra je znatno večja kot pri fotoprevodnem izvoru (slika 2) predvsem zaradi uporabe elektrooptične detekcije teraherčnega polja.

Dejanska oblika teraherčnih elektromagnetnih sunkov, ki nastanejo pri optičnem usmerjanju, je zaradi disperzije fazne hitrosti v teraherčnem področju frekvenc precej drugačna, kot jo napove preprost model brez disperzije in je prikazana skupaj s spektrom teraherčnega sunka na sliki 3. V primerjavi s teraherčnim sunkom iz fotoprevodnega izvora na sliki 2 se zdi sunek, ki ga dobimo z optičnim usmerjanjem na sliki 3, krajši. Kot bomo

² Ko upoštevamo še disperzijo fazne hitrosti v teraherčnem območju, postane izraz (7) bolj zapleten. V tem primeru člen, ki ustreza homogeni rešitvi, potuje s skupinsko hitrostjo v teraherčnem območju frekvenc.

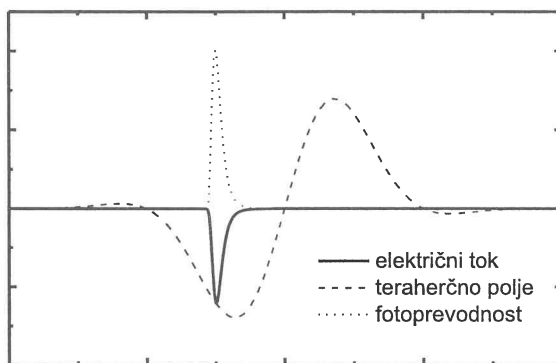
videli v naslednjem poglavju, je glavni razlog predvsem v širokopasovni elektrooptični detekciji, katere pasovna širina zlahka preseže nekaj THz.

Sunkovni teraherčni detektorji

Detektorji teraherčnih elektromagnetnih sunkov delujejo na enakih principih kot izvori, zato jih ravno tako ločimo na tiste na osnovi fotoprevodnosti in tiste, ki delujejo na osnovi optične nelinearnosti.

Detektorji na osnovi fotoprevodnosti

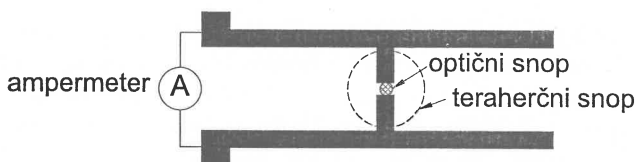
Kadar na polprevodnik sočasno vpadeta optični sunek, ki vzbudi fotoprevodnost, in teraherčni elektromagnetni sunek, zaradi električnega polja v teraherčnem sunku steče po polprevodniku sunek gostote električnega toka, $j(t) = \sigma_f(t)E_t(t)$, ki je sorazmeren s teraherčnim električnim poljem $E_t(t)$ in fotoprevodnostjo $\sigma_f(t)$. Optični sunek torej lahko uporabimo kot stikalo, ki vključi fotoprevodnost in omogoči merjenje jakosti teraherčnega polja v času trajanja fotoprevodnosti prek meritve sunka električnega toka.



čas (polj. enote)

Slika 4. Električni tok, teraherčno električno polje in fotoprevodnost v fotoprevodnem detektorju. Površina pod krivuljo, ki pomeni električni tok, je sorazmerna z uteženim povprečjem teraherčnega polja po času trajanja fotoprevodnosti. S spreminjanjem zakasnitve med optičnim sunkom, ki povzroči fotoprevodnost, in teraherčnim elektromagnetnim sunkom izmerimo časovno odvisnost jakosti električnega polja v teraherčnem sunku.

S spreminjanjem zakasnitve med optičnim sunkom, ki mora biti znatno krajši od teraherčnega, in teraherčnim elektromagnetnim sunkom lahko izmerimo jakost električnega polja teraherčnega sunka kot funkcijo časa. Časovna ločljivost pri meritvi je delno omejena z dolžino optičnega sunka, predvsem pa z življenjskim časom fotovzbujenih nosilcev naboja, ki je navadno daljši od 500 fs. Frekvenčno širino fotoprevodnega detektorja torej, drugače kakor pri fotoprevodnem izvoru, omejuje predvsem obratna vrednost življenjskega časa fotovzbujenih nosilcev, zato je navadno ožja kot pri ekvivalentnem izvoru.



Slika 5. Dipolna antena na planarnem valovodu kot fotoprevodni detektor teraheerčnih elektromagnetnih sunkov. Teraheerčni in optični snop vpadata pravokotno na ravnino strukture.

Najpogosteje kot detektor uporabljajo, podobno kot pri izvorih, kar dipolno anteno na planarnem valovodu. Na sliki 5 je prikazan tak detektor. Polprevodnik, na katerem je antena, je tipično GaAs gojen pri nizki temperaturi ali pa z ioni obstreljevan silicijev film na safirju. Gojenje pri nizki temperaturi oziroma obsevanje z ioni namreč povzroča napake v kristalu, zaradi katerih se življenjski čas fotovzbujenih delcev skrajša tja do 500 fs.

Sunki iz sunkovnega laserja navadno prihajajo v periodičnem zaporedju, zato merimo kar povprečni tok pri dani zakasnitvi med optičnim in teraheerčnim sunkom. Za izboljšavo razmerja med signalom in šumom praviloma intenziteto teraheerčnih sunkov periodično moduliramo s frekvencami do nekaj sto kHz, za merjenje električnega toka pa uporabimo fazno občutljiv ojačevalnik, ki ima referenčno fazo vključeno na fazo modulacije intenzitete.

Detektorji na osnovi optične nelinearnosti

Enako kot pri izvoru teraheerčnih elektromagnetnih sunkov tudi pri detektorjih na osnovi optične nelinearnosti izkoristimo nelinearnost drugega reda. Ob upoštevanju teraheerčnega in optičnega električnega polja se v nelinearni snovi poleg dodatne polarizacije, ki vsebuje komponente pri teraheerčni frekvenci, pojavi tudi člen, ki vsebuje produkt teraheerčnega in optičnega električnega polja,

$$P_{opt}^{(2)} \propto E_t E_{opt}. \quad (8)$$

Ta člen niha z optično frekvenco in je zato sklopljen neposredno z optičnim električnim poljem. Ker je linearen v optičnem polju, lahko v primeru, ko se E_t spreminja počasi v primerjavi z optično frekvenco, vpliv teraheerčnega električnega polja na optično polje v približku opišemo s spremenjenim lomnim količnikom pri optični frekvenci,

$$n_{opt} = n_0 - \frac{1}{2} r n_0^3 E_t, \quad (9)$$

kjer je n_0 nemoten lomni količnik pri optični frekvenci in r elektrooptični koeficient. Z meritvijo spremembe lomnega količnika s kratkim testnim optičnim sunkom lahko torej posredno izmerimo teraheerčno električno polje v času trajanja optičnega sunka. Tako kot pri fotoprevodnem detektorju s spreminjanjem zakasnitve med optičnim in teraheerčnim sunkom izmerimo časovno odvisnost električnega polja v teraheerčnem sunku.

Spremembe lomnega količnika zaradi teraherčnega polja so navadno anizotropne in jih zato merimo na standarden način prek spremembe polarizacije testnega optičnega sunka. V prisotnosti teraherčnega polja bo sicer optično izotropen kristal zaradi anizotropije elektrooptičnega koeficienta r postal rahlo dvolomen. Ob ustrezni izbiri koordinatnega sistema lahko lomni količnik pri optični frekvenci za ortogonalni polarizaciji svetlobe, ki potuje vzdolž osi z , zapišemo:

$$\begin{aligned} n_x &= n_0 + \frac{1}{2} r_x n_0^3 E_t, \\ n_y &= n_0 + \frac{1}{2} r_y n_0^3 E_t, \end{aligned} \quad (10)$$

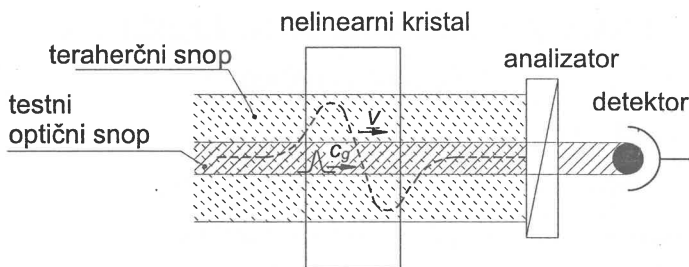
kjer sta n_x in n_y lomna količnika za polarizaciji vzdolž osi x in y ter r_x in r_y efektivna elektrooptična koeficienta, ki sta odvisna od snovi, orientacije kristala in smeri teraherčnega polja.³ V optičnem testnem sunku bo fazna razlika med komponentama s polarizacijama vzdolž osi x in y po prepotovanju razdalji L sorazmerna z jakostjo teraherčnega polja,

$$\Delta\Phi = \frac{\pi n_0^3}{\lambda_{opt}} (r_y - r_x) E_t L, \quad (11)$$

kjer je λ_{opt} valovna dolžina svetlobe v vakuumu. Testni sunek, ki je na začetku linearno polariziran vzdolž smeri $x + y$, bo pri prehodu skozi snov eliptično polariziran in bo vseboval tudi komponento polarizacije vzdolž smeri $x - y$, ki je ortogonalna na začetno polarizacijo sunka. Amplituda te komponente je sorazmerna s $\sqrt{1 - \cos(\Delta\Phi)}$. Testni sunek zato speljemo še skozi analizator (slika 6), ki prepušča le komponento polarizacije vzdolž smeri $x - y$. Intenziteta prepuščene svetlobe bo torej sorazmerna z $1 - \cos(\Delta\Phi) \approx (\Delta\Phi)^2/2$. Zveza med teraherčnim električnim poljem in intenziteto prepuščene svetlobe ni linearna, kar je slabost takšnega načina detekcije, vendar pa v odsotnosti teraherčnega polja ni prepuščene intenzitete, kar ugodno vpliva na razmerje signal šum. Nelinearnost odziva se da zmanjšati tako, da med nelinearni kristal in analizator dodamo dvolomno ploščico, ki poveča fazno razliko (11) za $\pi/2$ neodvisno od teraherčnega električnega polja. Intenziteta prepuščene svetlobe je sedaj sorazmerna z $1 + \sin(\Delta\Phi) \approx 1 + \Delta\Phi$. Slabost tega načina je, da moramo meriti majhne spremembe intenzitete na velikem ozadju, saj je $\Delta\Phi \ll 1$. Zato je nujno uporabiti fazno občutljiv ojačevalnik, da se znebimo šuma, ki ga prispeva ozadje.

Časovna ločljivost je, drugače kako pri fotoprevodnem detektorju, tu omejena ali z dolžino testnega sunka ali, če je le-ta dovolj kratek, z zakasnitvijo med teraherčnim poljem in optičnim sunkom, ki nastane ob prehodu

³ Zaradi enostavnosti smo se omejili na optično izotropne kristale, vendar velja podobno tudi za anizotropne kristale.



Slika 6. Elektrooptična detekcija terahečnih elektromagnetnih sunkov. Električno polje terahečnega sunka (črtkana črta), ki potuje v nelinearnem kristalu s hitrostjo v , spremeni polarizacijo testnega optičnega sunka (polna črta), ki potuje s hitrostjo c_g . Spremembo polarizacije testnega sunka merimo z analizatorjem, ki je orientiran pravokotno na polarizacijo vpadnega optičnega sunka.

skozi nelinearni kristal. Skupinska hitrost c_g pri optičnih frekvencah je namreč drugačna od fazne hitrosti v v terahečnem področju frekvenc. Dolžino poti skozi kristal moramo zato omejiti, kar neugodno vpliva na občutljivost, saj je fazni zamik (11) sorazmeren z dolžino poti. Kljub temu so občutljivost in časovna ločljivost ter s tem frekvenčna širina bistveno večje kot pri fotoprevodnih detektorjih. Pasovna širina pri elektrooptični detekciji namreč zlahka preseže nekaj THz.

Elektrooptično detekcijsko shemo s slike 6 zlahka nadgradimo, da postane primerna za slikanje. Namesto ozkega testnega optičnega snopa uporabimo snop, ki je nekoliko širši od terahečnega, detektor pa zamenjamo s prostorsko ločljivim detektorjem CCD [6]. Tako lahko izmerimo prostorsko in časovno odvisnost terahečnega polja na mestu nelinearnega kristala. Z ustrezno optiko lahko na nelinearni kristal preslikamo s terahečnim snopom osvetljen (presvetljen) objekt. Prostorska ločljivost slike je omejena z uklonom, saj je velikost posameznih elementov detektorja CCD, ki je velikostnega reda $10 \mu\text{m}$, manjša od tipične valovne dolžine v terahečnem sunku.

LITERATURA

- [1] P. Y. Han, M. Tani, M. Usami, S. Kono, R. Kersting, X.-C. Zhang, *A direct comparison between terahertz time-domain spectroscopy and far-infrared Fourier transform spectroscopy*, J. Appl. Phys. **89** (2001) 2357.
- [2] P. Y. Han, X.-C. Zhang, *Time-domain spectroscopy targets the far-infrared*, Laser Focus World (oktober 2000) 117.
- [3] G. Mourou, C. V. Stancampiano, D. Blumenthal, *Picosecond microwave pulse generation*, Appl. Phys. Lett. **38** (1981) 470.
- [4] T. K. Gustafson, J.-P. E. Taran, P. L. Kelley, R. Y. Chiao, *Self-modulation of picosecond pulses in electro-optic crystals*, Optics Communications **2** (1970) 17.
- [5] I. Drevenšek-Olenik, *Nelinearna optika ob površinah*, Obzornik mat. fiz. **48** (2001) 43.
- [6] Q. Wu, T. D. Hewitt, X.-C. Zhang, *Two-dimensional electro-optic imaging of THz beams*, Appl. Phys. Lett. **69** (1996) 1026.

SEVALNI TLAK IN P. N. LEBEDEV

JANEZ STRNAD

PACS 01.60, 33.80.P

O sevalnem tlaku svetlobe so precej razpravljali, preden ga je v okviru elektrodinamike izpeljal J. C. Maxwell. Pred sto leti ga je prvič izmeril P. Lebedev pri zahtevnem poskusu, s katerim je dodatno podprl Maxwellovo elektrodinamiko.

RADIATION PRESSURE AND P. N. LEBEDEV

The radiation pressure was repeatedly discussed before it was derived by J. C. Maxwell within the framework of electrodynamics. Hundred years ago it was measured for the first time by P. Lebedev in a demanding experiment giving additional support to Maxwell's electrodynamics.

Uvod

Menda je sevalni tlak prvi omenil J. Kepler, ko je leta 1619 v delu o kometih z njim poskusil pojasniti, zakaj so repi kometov usmerjeni od Sonca.⁴ V času, ko so svetlobo imeli za curek delcev, se je tak tlak zdel naraven. Še Th. Young je mislil, da bi tlak nasprotoval valovni sliki svetlobe, čeprav je L. Euler že prej sodil, da ga je mogoče pojasniti z valovanjem in s curkom delcev. Sevalni tlak so zaradi pomena, ki so mu ga pripisovali, poskusili izmeriti C. du Fay, J. Michell, A. Fresnel in drugi. Niso ga mogli izmeriti, ker je motilo segrevanje. W. Crookes je pri takem merjenju leta 1874 odkril veliko večji *radiometrski tlak* in leto zatem so izdelali prvi radiometer [1]. Radiometer se vrti, ker se plin na osvetljeni strani bolj segreje in je tam tlak večji.

M. Faraday je pri raziskovanju v elektrostatiki opazil, da silnice v prečni smeri silijo vsaksebi, v vzdolžni smeri pa bi se rade skrčile. J. C. Maxwell je v *Razpravi o elektriki in magnetizmu* leta 1873 bolj sledil Faradayevim pogledom kot svojim. Premikalni tok in elektromagnetno valovanje, s katerim je pojasnil svetlobo, je obravnaval šele v drugi polovici druge knjige, in to manj izčrpno kot v svojih člankih. Sevalni tlak je ena od redkih izjem, ki jim je posvetil več pozornosti. Ob tem je vztrajal pri predstavi o etru in mehanične napetosti v etru ni razločeval od mehanične napetosti v dielektriku ali – v praznem prostoru [2].

Nakažimo pot Maxwellovih misli. V statičnem električnem polju si zamislimo v ravnovesju plast etra med ekvipotencialnima ploskvama, ki ju pravokotno predira cev silnic. Silnice v cevi izvirajo iz naboja ali se stekajo vanj in sila na naboj na ploskovno enoto prevodnika je⁵ $\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 E^2$. Tolikšen je tlak v smeri silnic, pa naj mislimo na eter, dielektrik ali – prazen prostor. S podobnim premislekom kot pri tlaku v kapljici zaradi površinske

⁴ Na repe kometov ne deluje samo sevalni tlak, ampak tudi sončni veter, to so hitri delci, ki se gibljejo od Sonca.

⁵ Polovica se pojavi iz podobnega razloga kot pri sili med ploščama kondenzatorja.

napetosti je Maxwell ugotovil, da je tolikšen tudi tlak pravokotno na silnice, le da ima nasproten znak. Nazadnje je navedel splošni izraz za tlak v električnem polju v smeri normale $\mathbf{n}$ na ploskev [2]:

$$(\mathbf{D} \cdot \mathbf{n})\mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbf{D} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n}.$$

Izraz za tlak v magnetnem polju dobimo tako, da jakost in gostoto električnega polja nadomestimo z jakostjo in gostoto magnetnega polja. Izračunajmo tlak elektromagnetnega valovanja, ki pravokotno pada na oviro in ga ta absorbira. Normalo $\mathbf{n}$ vzamemo pravokotno na ravnino jakosti in gostot ter upoštevamo, da k trenutni vrednosti tlaka na danem kraju prispevata električno in magnetno polje:

$$\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}B_0^2 \cos^2 \omega t / \mu\mu_0.$$

Zveza $B_0^2 / \mu\mu_0 = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2$, ki velja v valovanju, pripelje do časovnega povprečja sevalnega tlaka:

$$\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 = \overline{w} = \frac{j}{c}. \quad (1)$$

$\overline{w}$ je povprečna gostota energije v elektromagnetnem valovanju in $j = c\overline{w}$ gostota energijskega toka. Maxwell je sklenil: "V sredstvu, po katerem potuje valovanje, deluje v smeri valovanja tlak, ki je na vsakem kraju številsko enak tamkajšnji na enoto prostornine preračunani energiji."

Na zrcalu z odbojnostjo a se del energijskega toka odbije in je tlak večji:

$$(1 + a)\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 = (1 + a)\overline{w} = (1 + a)\frac{j}{c}. \quad (2)$$

Tlak na idealno zrcalo bi bil dvakrat večji kot tlak na črno telo. To spominja na silo curka, ki se od ovire odbije ali spolzi ob njej.

Neodvisno od Maxwella je sevalni tlak (1) izpeljal Adolfo Bartoli leta 1876. V knjižici *O gibanjih, ki jih povzroča toplota, in o Crookesovem radiometru* je radiometriški tlak pripisal pomanjkljivemu vakuumu. Ugotovil je, da je mogoče z gibajočim se zrcalom ob dovajanju dela prenesti toploto s kraja z nižjo temperaturo na kraj z višjo temperaturo. Zamislil si je reverzibilno krožno spremembo, pri kateri se entropija ne spremeni, dovedeno delo pa je vezano na tlak svetlobe na zrcalo. Knjižica je ostala skoraj povsem neopažena. Ludwig Boltzmann, ki so ga nanjo opozorili, je povzel njeno vsebino in podprl misel, da entropijski zakon zahteva sevalni tlak. V nadaljevanju je leta 1884 s krožno spremembo za toplotni stroj s svetlobo kot delovno snovjo utemeljil Stefanov zakon iz leta 1879. Po tem je mogoče sklepati, da je bil Bartoli blizu Stefanovega zakona, a ni bil pozoren na temperaturno odvisnost gostote energijskega toka, ki jo seva črno telo. Bartoli je objavil povzetka knjižice v letih 1884 in 1885.

P. N. Lebedev

Pjotr (Peter) Nikolajevič Lebedev je bil rojen v Moskvi leta 1866 v družini trgovca. Fiziko je začel študirati na višji tehniški šoli v domačem mestu. Študij je nadaljeval pri H. von Helmholtzu, F. W. Kohlrauschu in A. Kundtu in doktoriral na univerzi v Strassburgu leta 1891. Po vrnitvi v Rusijo je, potem ko mu je doktorat podelila še moskovska univerza, postal na njej profesor fizike. Že prej je leta 1895 ponovil Hertzeve poskuse z radijskimi valovi, da bi podprl Maxwellovo elektrodinamiko. Izdelal je zelo občutljive naprave za valove z valovno dolžino 6 mm in tako zožil vrzel med radijskimi valovi in infrardečo svetlobo. S temi valovi je v anizotropni snovi opazoval dvojni lom, podobno kot so ga opazovali z vidno svetlobo.

Raziskoval je sevalni tlak pri valovih na vodni gladini in zvoku ter pri elektromagnetnem valovanju. Merjenja sevalnega tlaka se je lotil tudi zato, da bi še s te strani podprl napoved Maxwellove elektrodinamike. Z radijskimi valovi je ugotovil, da v votlini nastane največji tlak na steno v resonanci. Prva merjenja s svetlobo je začel leta 1899, leto zatem je izšlo začetno poročilo, leta 1901 pa glavno poročilo [3]. Pozneje je izmeril še tlak svetlobe na plin. Leta 1911 je iz protesta proti odločitvam ministra za izobraževanje zapustil državno univerzo ter prešel na zasebno univerzo, na kateri si je opremil laboratorij. Umrli je leta 1912.

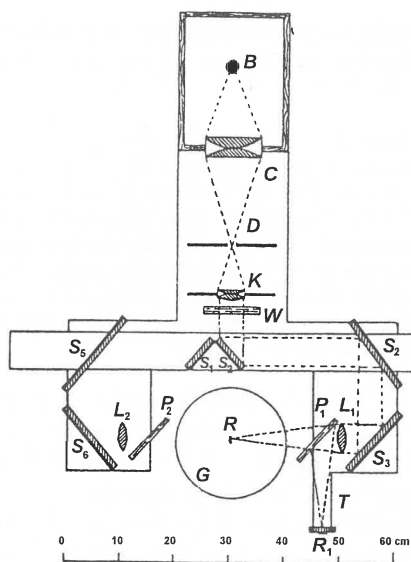
Poskus

Maxwell je sevalni tlak sončne svetlobe ocenil na $4 \cdot 10^{-6} \text{ N/m}^2$ in pripomnil: "Zgoščena električna svetloba bo verjetno izvajala še večji tlak in ni nemogoče, da bi curek take svetlobe, če bi zadel tanek kovinski listič, ki bi bil skrbno obešen v vakuumu, nanj deloval z opaznim mehaničnim učinkom." Lebedev se je zavedal dveh glavnih težav. Radiometriški tlak naj bi bil desettisočkrat večji od sevalnega tlaka. Motila naj bi še konvekcija, ker se ob osvetljenem krilcu dviga segreti zrak in deluje na krilce s prečno silo, če ni popolnoma navpično. Konvekcija je odvisna samo od segrevanja, ne od smeri, iz katere pade curek na krilce. Po nekaj začetnih poskusih je uvidel, da je Maxwellovo zamisel mogoče izvesti. Da bi bili motniji čim manjši, je uporabil dokaj veliko okroglo posodo s premerom 20 cm, poskrbel za zelo dober vakuum in za krilca izbral tanke kovinske lističe. Iz curka je izločil infrardečo svetlobo, da bi se ne absorbirala v stekleni steni posode (slika 1).

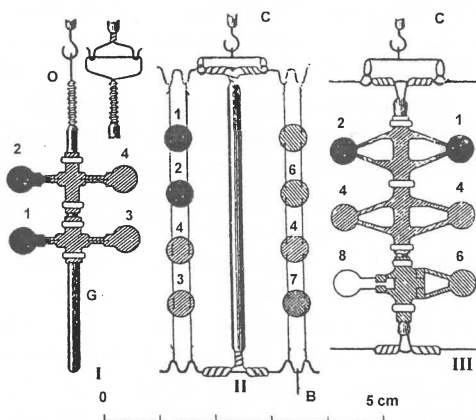
Radiometriški tlak je sorazmeren z razliko temperatur osvetljenega in neosvetljenega krilca in pri različno debelih krilcih iz iste snovi narašča z debelino krilca (slika 2). Z ekstrapolacijo na debelino 0 je ugotovil, da je bil ta tlak „pri kovinskih lističih proti pričakovanju zanemarljivo majhen”.

Tridesetcentimetrski torzijski nitka iz stekla je segala v vrat vakuumske posode in je bila vpeta na zgornjem krajišču v tečaj, nad spodnjim krajiščem pa je bilo z aluminijevim okvirčkom nanjo pritrjeno zrcalce za merjenje zasuka (slika 3). Koeficient torzijske nitke, $4,94 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{N}$, je določil zunaj

Slika 1. Naprava, s katero je P. N. Lebedev prvi izmeril sevalni tlak svetlobe. Pri poskusu je svetlo pego obločnice B s kondenzorjem C preslikal na vstopno zenico D s premerom 4 mm v zaslonu. Voda v ploški posodici W je zadržala infrardečo svetlobo, ultravijolične pa niso prepustile steklene leče. Leča K je dala vzporedni curek svetlobe, ki so ga usmerila ravna zrcala S_1 , S_2 in S_3 in zbiralna leča L_1 zbrala na mestu R, kjer je imel premer 10 mm. Steklена ploščica P_1 je majhen del svetlobnega toka usmerila na baterijo termoelementov iz bakra in konstantana T, na katero je bil priključen galvanometer z vrtljivo tuljavico. S premikom ročice je curek prek zrcal S_4 , S_5 in S_6 preusmeril iz desnega kraka v levi krak, tako da je imel curek na mestu R nasprotno smer. Leča L_2 in ploščica P_2 sta poskrbeli, da je levi krak ustrežal desnemu, le termobaterije ni bilo in v času, ko je curek šel na levo, je galvanometer naravnal na 0 [3].



Slika 2. Tri prečke, ki jih je pri merjenju sevalnega tlaka uporabljal P. N. Lebedev. Največ merjenj je naredil s prečko II. Na prečkah so bila nameščena krilca. Njihova središča so bilo za 9 do 11 mm oddaljena od osi. Oddaljenost vsakega krilca je izmeril posebej. Na mestu R je curek zadell krilce s premerom 5 mm. Prva prečka I je imela dva para krilc, togo pritrjenih na stekleno paličko G. Platinsko zanko O v ravnini, pravokotni na ravnino krilc, na vrhu steklene paličke je obesil na dvodelni kavelj na spodnjem krajišču torzijske nitke. Druga prečka II je imela na stekleno paličko pritaljene platinske ročice, na katere so bile napete platinske žičke s premerom 0,05 mm, ki so tekle skozi odprtine v krilcih in jih vezale na prečko. Tretja prečka III je bila narejena podobno kot prva. Krilca so bila iz platine, počrtnjena so bila z debelo (1) in s tanko plastjo (2), zglačena pa so bila debela 0,1 mm (3) in 0,02 mm (4). Krilca so bila še iz zglačenega aluminija debela 0,1 mm (5) in 0,02 mm (6), iz zglačenega niklja debela 0,02 mm (7) in iz sljude (8).



posode z nihanjem. Izmeril je nihajni čas nitke z zrcalcem, nato pa še nitke z zrcalcem in bakreno žičko z znano dolžino in maso. Z živosrebrno črpalko je dosegel tlak 10^{-4} milibara.

Termobaterijo je umeril tako, da je svetlobni tok neposredno izmeril s kalorimetrom, ki ga je osvetlil, ko tam ni bilo vakuumske posode. Za pri-

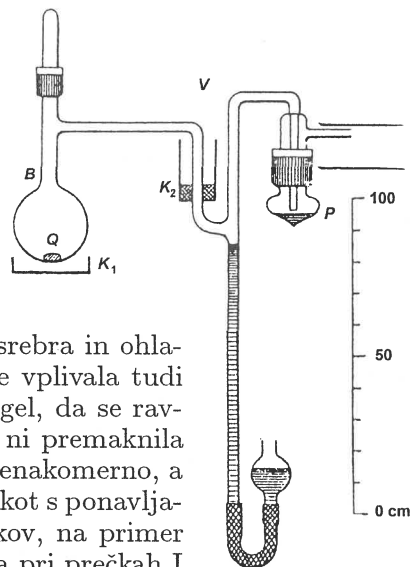
merjavo je meril hitrost segrevanja in ohlajanja dveh različnih kalorimetrov. Svetlobna tokova v prvem in drugem kraku sta se razlikovala za manj kot 1 %.

Slika 3. Vakuumska posoda P. N. Lebedeva. Dodatno je tlak znižal tako, da je na dno vakuumske posode kanil kapljo živega srebra Q. Nato je dno malo segrel, da je del kaplje izhlapel in je črpalka skupaj z živosrebrnimi parami izsesala še nekaj preostalega zraka. Nazadnje je dno posode potopil v hladilno zmes leda in soli K_1 in s tem še dodatno znižal tlak preostalih živosrebrnih par.

Pred začetkom poskusa je posodo odčrpaval več dni. Za vsak niz merjenj je znižal tlak z izhlapevanjem živega srebra in ohlajanjem. Najbolj je motila konvekcija, ki je vplivala tudi na ravnovesno lego prečke. Z vajo je dosegel, da se ravnovesna lega pri merjenju na istem krilcu ni premaknila več dni. Obločnica ni delovala popolnoma enakomerno, a proti temu ni bilo mogoče ukrepati drugače kot s ponavljanjem merjenj. Upošteval je nekaj popravkov, na primer to, da krilca ni zadel vzporedni curek in da pri prečkah I in III curek ni zadel samo krilca, ampak tudi ročico.

Skozi daljnogled je določil odklon zrcalca na eno in drugo stran, ko je osvetlil krilce z druge strani, in ravnovesno lego. Hkrati je skozi drugi daljnogled opazoval odklon galvanometra. Nazadnje je izračunal silo sevalnega tlaka, $3,08 \cdot 10^{-10}$ N, in jo primerjal z izidom, ki ga je dal s kalorimetrom izmerjeni energijski tok $0,0774 \text{ W} / 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-2} = 2,58 \cdot 10^{-10}$ N, kar je dalo razmerje 1,19, če za zgled navedemo podatke za eno od zglajenih platinskih krilc. Odbojnosti krilc ni bilo mogoče naravnost izmeriti, zato je s fotometrom izmeril odbojnost večjega kosa zglajene pločevine. Za odbojnost je dobil 0,5 za platino, 0,6 za aluminij in 0,35 za nikelj. Izmerjeni sevalni tlak je bil za platino, aluminij in nikelj po vrsti 1,7-krat, 2,1-krat in 1,4-krat večji od tlaka (1) za črno telo. Zaradi odboja je bil tlak (2) $1 + a$ -krat, to je 1,5-, 1,6- in 1,35-krat, večji. Obe vrsti števil sta se razlikovali v okviru napake, ki jo je Lebedev ocenil na 10 % do 20 %.

Danes nam klasične elektrodinamike ni treba več posebej utemeljevati, zato utegne merjenje Lebedeva zapustiti bolj bled vtis. Na prelomu stoletja, ko si je klasična elektrodinamika komaj pridobila širše zaupanje, so gledali nanj precej drugače. Na to kaže na primer izjava lorda Kelvina nekemu Rusu: "Morda veste, da sem vse življenje nasprotoval Maxwellu, ker nisem priznaval njegovega sevalnega tlaka, zdaj pa me je vaš Lebedev prisilil, da sem se vdal njegovim poskusom." Sodobnemu bralcu članek Lebedeva razkrije veliko skrbnost pri izdelavi naprav in nekaj težav pri izvedbi ter nedoslednosti pri obdelavi izmerjenih podatkov, na primer to, da ni upošteval vseh podatkov, nekaterih pa sploh ni navedel. Podobne poteze je mogoče



opaziti tudi pri nekaterih drugih fizikih, ki so se pred sto leti lotili natančnega merjenja.

Pozneje so sevalni tlak izmerili natančneje. Prva sta po Lebedevu to storila E. Nichols in G. F. Hull leta 1903. Eno od natančnejših merjenj, ki se je začelo s poskusi z radiometrom, sta opravila Alice Golsen in Walther Gerlach [4]. Po njunem mnenju je Lebedev precenil natančnost svojih merjenj in mu v resnici ni uspelo, da bi se v celoti izognil radiometrskemu tlaku. Na to naj bi opozarjali previsoki izidi.

Po letu 1960 so začeli delovati prvi laserji in je merjenje sevalnega tlaka postalo veliko preprostejše [5]. Vse prejšnje poskuse s tega gledišča štejejo "v prazgodovino sevalnega tlaka". Tako je merjenje sevalnega tlaka zgovoren zgled za to, kako se je fizika razvila v sto letih. Ali bodo fiziki leta 2101 glede merjenj enako uspešni v primeri z današnjimi fiziki, kot so današnji fiziki v primeri s fiziki iz leta 1901?

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Svetlobni mlinček*, Presek **24** (1996/97) 130.
- [2] E. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity. The Classical Theories*, Nelson, London 1951, str. 275.
- [3] P. Lebedev, *Untersuchungen über die Druckkräfte des Lichtes*, Ann. Phys. **6** (1901) 434.
- [4] W. Gerlach, A. Golsen, *Untersuchungen an Radiometern. II. Eine neue Messung des Strahlungsdruckes*, Z. Phys. **5** (1923) 1; A. Golsen, *Über eine neue Messung des Strahlungsdruckes*, Ann. Phys. **73** (1924) 624.
- [5] A. Ashkin, *The pressure of laser light*, Sci. Am. **227** (1972) 63 (2).

VESTI

Osmo mednarodno tekmovanje študentov matematike

Letošnje tekmovanje študentov matematike je potekalo od 19. do 25. julija v Pragi. Udeležile so se ga ekipe 49 univerz iz 24 držav, skupaj 185 tekmovalcev. V naši ekipi so bili Jure Kališnik iz drugega letnika, Tomaž Kosem in Matija Mazi iz tretjega ter Matjaž Konvalinka iz četrtega letnika. Reševanje nalog je trajalo dva dni, vsak dan so imeli študenti na voljo pet ur za reševanje šestih nalog. Vsaka naloga je bila vredna 20 točk, tako da je bilo možno doseči največ 240 točk. Letos se je komisija še posebej potrudila in izbrala naloge, ki so bile resnično težke. Bralca vabim, da jih poskuša rešiti in se tako sam prepriča o njihovi težavnosti.

Prvi dan

1. Naj bo n pozitivno celo število. V matriko velikosti $n \times n$ zapišemo po vrsti (od leve proti desni, od zgoraj navzdol) števila od 1 do n^2 . Nato v matriki izberemo n elementov, v vsaki vrstici enega in v vsakem stolpcu prav tako enega. Katere vrednosti lahko zavzame vsota tako izbranih števil?

2. Naj bodo r, s in t paroma tuja pozitivna cela števila. Naj bosta a in b elementa komutativne multiplikativne grupe, za katera velja $a^r = b^s = (ab)^t = e$, kjer je e enota. Pokaži, da velja $a = b = e$.
Ali sklep velja tudi, če sta a in b elementa nekomutativne grupe?
3. Izračunaj limito

$$\lim_{t \nearrow 1} (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}.$$

4. Naj bosta k in n pozitivni celi števili. Naj bo $p(x)$ polinom stopnje n s koeficienti $-1, 0$ in 1 in naj bo deljiv z $(x-1)^k$. Naj bo q praštevilo, za katero velja $\frac{q}{\log q} < \frac{k}{\log(n+1)}$. Dokaži, da so q -ti koreni enote ničle polinoma $p(x)$.
5. Naj bo A kompleksna $n \times n$ matrika, za katero je $A \neq \lambda I$ za vse $\lambda \in \mathbb{C}$. Dokaži, da je A podobna matriki, ki ima na diagonali kvečjemu en neničelni element.
6. Naj za odvedljive funkcije $a, b, f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ velja

$$f(x) \geq 0, f'(x) \geq 0, g(x) > 0, g'(x) > 0 \text{ za vse } x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a(x) = A > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} b(x) = B > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty,$$

in

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} + a(x) \frac{f(x)}{g(x)} = b(x).$$

Pokaži, da velja

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B}{A+1}.$$

Drugi dan

1. Naj bosta $r, s \geq 1$ celi števili in naj bodo $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, b_0, b_1, \dots, b_{s-1}$ realna nenegativna števila, za katera velja

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{r-1}x^{r-1} + x^r) \cdot \\ & \cdot (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{s-1}x^{s-1} + x^s) = \\ & = 1 + x + x^2 + \dots + x^{r+s-1} + x^{r+s}. \end{aligned}$$

Pokaži, da je vsak a_i in vsak b_j enak bodisi 0 bodisi 1.

2. Naj bo $a_0 = \sqrt{2}$, $b_0 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$, $b_{n+1} = \frac{2b_n}{2 + \sqrt{4 + b_n^2}}$.

(a) Dokaži, da sta zaporedji $\{a_n\}$ in $\{b_n\}$ padajoči in da je njuna limita enaka 0.

- (b) Dokaži, da je $\{2^n a_n\}$ naraščajoče zaporedje, $\{2^n b_n\}$ padajoče zaporedje in da imata isto limito.
 (c) Dokaži, da obstaja konstanta C , da za vse n velja

$$0 < b_n - a_n < \frac{C}{8^n}.$$

3. Največ koliko točk lahko izberemo na enotski sferi v $\mathbb{R}^n$, tako da bo razdalja med poljubnima dvema izbranimi točkama strogo večja od $\sqrt{2}$?
 4. Naj bo $A = (a_{k,l})_{k,l=1,\dots,n}$ kompleksna $n \times n$ matrika, za katero je za vsak $m \in \{1, \dots, n\}$ in $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_m \leq n$ determinanta matrike $(a_{j_k, j_l})_{k,l=1,\dots,m}$ enaka 0. Dokaži, da je $A^n = 0$ in da obstaja permutacija $\sigma \in S_n$, da ima matrika $(a_{\sigma(k), \sigma(l)})_{k,l=1,\dots,n}$ vse neničelne elemente nad diagonalo.
 5. Dokaži, da ne obstaja funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, za katero je $f(0) > 0$ in za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$f(x+y) \geq f(x) + yf(f(x)).$$

6. Naj bo

$$f_n(\theta) = \sin \theta \cdot \sin(2\theta) \cdot \sin(4\theta) \cdots \sin(2^n \theta).$$

Pokaži, da za poljuben realen θ in vsak n velja

$$|f_n(\theta)| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} |f_n(\pi/3)|.$$

Naša ekipa je naloge reševala zelo uspešno, saj je Matjaž Konvalinka osvojil prvo nagrado, Jure Kališnik drugo nagrado, Tomaž Kosem tretjo, Matija Mazi pa je dobil pohvalo. Zmagal je študent iz Odesse in za nagrado dobil letno štipendijo za študij na University College London v višini 20.000 funtov. Za zmago je zaradi res težkih nalog letos zadoščalo 168 točk. Število tekmovalcev na tem tekmovanju se je v zadnjih dveh letih več kot podvojilo. To kaže pripravljenost univerz, da se pomerijo v kvaliteti. Nekatere med njimi celo organizirajo priprave posebej za to tekmovanje. Naši vsakoletni uspehi torej kažejo, da imamo v Ljubljani zelo dober študijski program – ali pa veliko srečo pri izbiri tekmovalcev.

Prihodnost tekmovanja pa vseeno ni tako rožnata. Nekatere univerze namreč menijo, da je tekmovanje trenutno bolj nadaljevanje srednješolskih matematičnih olimpiad kot pa pravo univerzitetno tekmovanje, ter predlagajo zasuk bolj v funkcionalno analizo ali pa vsaj nekaj nalog iz parcialnih diferencialnih enačb. Poleg tega tudi še ni znano, kje bo tekmovanje prihodnje leto. Morda v Ljubljani?

Gregor Šega

VESTI

Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 2000*

Pedagoška fakulteta – Maribor

Univerzitetni študij

Matematika

- | | |
|-----------------------|---|
| 38. Antolin Helena | Kvadratični ostanki |
| 39. Banič Iztok | Bingov eksotičen faktor mnogoterosti |
| 40. Breznik Kristijan | Schnyderjev izrek |
| 41. Čelofiga Leo | Algoritmi za hitro množenje polinomov |
| 42. Čotar Alojz | Kompleksni potencial |
| 43. Čujež Smiljan | Centralizatorji na kolobarjih |
| 44. Kraner Tadeja | Vektorski prostori in moduli |
| 45. Ledinšek Biserka | Geometrijski liki v osnovnošolski matematiki in v 1. letniku srednje šole |
| 46. Leskovar Andreja | Geometrija s programom CABRI |
| 47. Leskovar Iztok | Aritmetika kvadratičnih form |
| 48. Marovt Janko | Kanonične forme matrik |
| 49. Mlakar Matej | Dirichletov izrek o praštevilih v aritmetičnih zaporedjih |
| 50. Perčič Ksenija | Kompaktni metrični prostori |
| 51. Puconja Karmen | Uporaba analitičnih funkcij v hidrodinamiki |
| 52. Riegler Primož | Kitajski problem poštarja |
| 53. Sabo Sandra | Deformacije matričnih algeber |
| 54. Šegula Martina | Kompozitumi izometrij |
| 55. Števanec Lea | Abelove grupe |
| 56. Tepoh Aleksandra | Unitarna podobnost in normalne matrike |
| 57. Žnidarič Jelena | Vpeta drevesa in Steinerjev problem |
| 58. Žunko Loreta | Verige dotikajočih se krožnic |

Fizika

- | | |
|-------------------|---|
| 11. Dregarič Igor | Interferenčni merilnik temperaturnih in tlačnih sprememb |
| 12. Marhl Marko | Matematično modeliranje oscilarijoče izmenjave kalcija med citoplazmo in celičnimi organelami |
| 13. Žigart Marko | Študij razgradnje krvnih strdkov |

Matematika–fizika

- | | |
|----------------------|---|
| 95. Belec Danijel | Fizikalne značilnosti razvoja človeškega glasu od 7. – 18. leta |
| 96. Bergel Maruša | Direktorsko polje nematičnega tekočega kristala ograjenega v cilindru |
| 97. Činč Andrej | Besselova diferencialna enačba |
| 98. Ferik Andreja | Praštevila |
| 99. Jelenko Irena | Tlakovanje – aktivnosti za učence |
| 100. Jovan Martina | Razdelitev grafov |
| 101. Klemenčič Dušan | Učenje na daljavo s pomočjo interneta pri pouku fizike |
| 109. Kotnik Aleš | Aberacija svetlobe |

* Seznam diplomantov za leto 1999 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. **47** (2000) 5.

- | | |
|--------------------------|--|
| 110. Novak Anica | Občutljivost numeričnih problemov |
| 111. Potočnik Boštjan | Napoleonovi trikotniki in točke |
| 112. Ranfl Roškar Jožica | Izometrije ravnine |
| 113. Sušak Branko | Načelo vključitve izključitve in njegove posplošitve |
| 114. Šalamon Božidar | Liouvillova števila |
| 115. Šumej Mateja | Algoritem razcepljanja za egipčanske ulomke |

Angleški jezik – matematika

- | | |
|----------------|----------|
| 2. Vrečko Anka | Acronyms |
|----------------|----------|

Matematika in teologija

- | | |
|---------------------|-----------------------------------|
| 1. Leskovar Evelina | Tuckerjeve krožnice |
| 2. Pavlovič Jože | $\varphi(30n + 1) < \varphi(30n)$ |
| 3. Sernec Helena | Waringow problem za $k = 2$ |

Matematika – sociologija

- | | |
|------------------|--|
| 1. Pudgar Nataša | Polinomi s celoštevilskimi in praštevilskimi koeficienti |
|------------------|--|

Biologija – matematika

- | | |
|----------------------|-------------------|
| 5. Kovač Barbara | Egipčanski ulomki |
| 6. Redenšek Klaudija | Uporaba inverzije |

Biologija – fizika

- | | |
|-----------------|-------------------------------|
| 1. Peter Tajana | Značilna velikost živih bitij |
|-----------------|-------------------------------|

Filozofija in fizika

- | | |
|-------------------|------------------------------------|
| 1. Andrejč Gorazd | O čudežih in o Jezusovem vstajenju |
|-------------------|------------------------------------|

Matematika – proizvodno tehnična vzgoja

- | | |
|------------------------------|--|
| 16. Cvetko Andreja | Prirejanje v grafih |
| 17. Kebrič Srečko | CNC v osnovni šoli |
| 18. Krk Nataša | Povezanost grafov |
| 19. Miklavčič Jenič Antonija | Preučevanje tehnično fizikalnih sestav in osnov v povezanosti z izvajanjem in vrednotenjem ustvarjalnega dela na področju zmagarstva |
| 20. Ploj Mateja | Erdős-Mordellova neenakost |
| 21. Šalabaliya Žarko | Eulerjevi grafi |
| 22. Špacapan Darko | Električna omrežja in matrične enačbe |
| 23. Ulaga Mateja | Triangulirani grafi |
| 24. Zendzianowski Matejka | Simsonove in Cantorjeve premice |

Proizvodno tehnična vzgoja – fizika

- | | |
|--------------------|---|
| 14. Sterkuš Robert | Fizikalno ozadje kitare |
| 15. Šalamon Romeo | Viri energije. Alternativni viri. Študij primera na mobilni vetrni centrali |
| 16. Voglar Rafaela | Samooorganizirana kritičnost |
| 17. Zemljič Mojca | Osnove obnovljivih virov energije in njihovo koriščenje – sončni zbiralnik |

Doktorati – matematika

- | | |
|-------------------|--|
| 4. Brešar Boštjan | Kartezični produkti grafov in ekspanzije |
|-------------------|--|

Univerzitetni študij

Matematika in fizika

- | | |
|----------------------|---|
| 158. Babič Barbara | Analiza grup z računalniškim programom MAGMA |
| 159. Beden Barbara | Demonstracija pojavov v ozračju s pomočjo laserskega kazalnika |
| 160. Čevka Stanka | Generalizirani Petersenovi grafi |
| 161. Djekić Sanja | Reševanje matematičnih ugank z računalniškim programom MAGMA |
| 162. Drnovšček Petra | Svet rodovnih funkcij |
| 163. Hvasti Katarina | Kletke |
| 164. Kastelic Špela | Obravnava prostornine v osnovnošolski matematiki |
| 165. Kržan Urban | Tietzejeva lema |
| 166. Lazar Mojca | James Stirling |
| 167. Manfreda Tanja | Logaritemska spirala |
| 168. Mav Blanka | Nelinearni električni krog |
| 169. Peterka Petra | Radioaktivnost in okolje |
| 170. Primožič Nataša | Hamiltonski cikli v metacirkulantih |
| 171. Španić Katarina | Entropija in Boltzmannova porazdelitev |
| 172. Šraj Simona | Gibanje togega telesa v vrtečem se sistemu |
| 173. Šubelj Jožica | Grupe simetrij v dveh in treh dimenzijah |
| 174. Šubic Martina | Kotna odvisnost izrednega lomnega kvocienta v tekočih kristalih |
| 175. Vengar Darja | Kvantna stanja delcev v centralno simetričnem potencialu |
| 176. Vilar Tatjana | Zlati rez |

Matematika in tehnika

- | | |
|---------------------------------|--|
| 63. Cemič Marjanca | Hamiltonski cikli v točkovno tranzitivnih grafih reda $2p$ |
| 64. Cokan Petra | Lorenzov atraktor |
| 65. Čemažar Monika | Projektni tehnični dnevi v novi devetletki. Izdelava računal „od ideje do izdelka“ |
| 66. Čermelj Peter | Sistemi linearnih diferencialnih enačb |
| 67. Jemec Metka | Henonova preslikava in atraktor |
| 68. Kravcar Franci | Duffingov oscilator |
| 69. Mavri Bojana | Bifurkacijski diagram |
| 70. Murn Katarina | Homeomorfizem krožnice |
| 71. Perše Katja | Smaleova podkev |
| 72. Pirc Peter | Gaussov problem in Kuzminov izrek |
| 73. Prešern Igor | Projektni tehnični dnevi v novi devetletki. Umetno kovaštvo od ideje do izdelka |
| 74. Šporn Aleš | Delovanje in uporaba piroelektričnega senzorja |
| 75. Štor Andreja | Matrične igre |
| 76. Vuk Lara | Eulerjevi grafi |
| 77. Zabukovec Žnidaršič Jerneja | Izrek Kuratowskega |

Fakulteta za matematiko in fiziko

Višješolski študij

Matematika – uporabna smer

- | | |
|------------------------|--|
| 327. Mušič Vesna | Oblike z ekstremnim integralom povprečne ukrivljenosti ploskve |
| 328. Kovič Andrej | Aproksimacija funkcije s polinomi |
| 329. Anderluh Veronika | Posplošeni problem lastnih vrednosti |
| 330. Verbovšek Uroš | Ortogonalni polinomi |
| 331. Novak Jan Jakob | Harmonične funkcije z vidika kompleksne analize |
| 332. Lenarčič Bojan | Absolutna stabilnost metod za reševanje diferencialnih enačb |

Visokošolski strokovni študij

Praktična matematika

- | | |
|-------------------|--|
| 2. Mastnak Matjaž | Razvoj poslovne aplikacije s projektno orientiranimi programskimi jeziki |
|-------------------|--|

Univerzitetni študij

Matematika – pedagoška smer

- | | |
|-----------------------|---|
| 523. Kos Silva | Ponceletov izrek |
| 524. Kocjančič Alenka | Nesingularne kubične ploskve v projektivnem prostoru |
| 525. Kržišnik Blanka | Henstock-Kurzweilov integral |
| 526. Špilak Goran | Geometrija Foucaultovega nihala |
| 527. Sveršina Petra | Sedemindvajset premic na nesingularni kubični ploskvi |
| 528. Maver Jan | Vizualizacija matematike z računalnikom |
| 529. Boldin Barbara | Stabilne norme |
| 530. Likar Mateja | Preslikave v inverzivni ravnini |
| 531. Pavlinič Tanja | Napoleonov izrek |
| 532. Poličar Jana | Tlakovanja evklidske ravnine |

Matematika – uporabna smer

- | | |
|----------------------|--|
| 573. Beguš Rok | Spremenljive matrike |
| 574. Kanalec Mirjam | Projektivne konfiguracije |
| 575. Šuler Tatjana | Programski jezik Mathcad in računanje kapitalskih ustreznosti bank |
| 576. Kuplenk Barbara | Permutacije brez prepovedanih vzorcev |
| 577. Velkavrh Jurij | Predstavitev programskega orodja MapObjects in njegova uporaba |
| 578. Škufca Viktor | Polinomsko rešljivi primeri problema trgovskega potnika |
| 579. Orbanič Alen | Vlaganje grafov na torus preko projektivne ravnine |
| 580. Šmigoc Metoda | Diskriminantna analiza |
| 581. Novak Tadej | Preverjanje naključnosti v kriptografiji |
| 582. Škrlep Bernard | Dokazi brez razkritja znanja |

Matematika – teoretična smer

- | | |
|--------------------|---|
| 66. Velušček Dejan | Polgrupe s kohomološko razsežnostjo 1 |
| 67. Gornik Bojan | Normalna Eulerjeva karakteristika poliedrskih ploskev |
| 68. Novak Nika | Produkti kvazinilpotentnih operatorjev |
| 69. Barbič Jernej | Schoofov Algoritem |
| 70. Mojskerc Blaž | Preslikave, ki ohranjajo spekter |

Matematika – smer računalništvo z matematiko

8. Divjak Alen Učenje na daljavo
9. Reberšek Marko Algoritmi za računanje največjega skupnega delitelja v kolo-
barju polinomov

Fizika

770. Gašperut Cveto Električne meritve odzivov na energijske motnje v visoko-
temperaturnem superprevodniku $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$
771. Čotar Uroš Električne lastnosti stikov kovina – organski polprevodniki
772. Žnidarič Marko Ergodične lastnosti klasičnih oscilatorskih verig: obrnjen mo-
del fermija, paste in ulama
773. Straus Matjaž Meritve frekvenčnega šuma laserja He-Ne s krmiljenim Fabry-
Perotovim resonatorjem
774. Kolar Janko Meritve popuščanja sevalnih poškodb v silicijevih detektorjih
775. Koklič Tilen EPR raziskave domenske strukture membran liposomov iz
akil fosfolipidov in holesterola
776. Ahčan Aleš Opazovanje vplivov staranja na strukturo trdnih lipidnih na-
nodelcev z metodama elektronske paramagnetne resonance in
elektronske mikroskopije
777. Markovič Damijan Optimizacija oblike orodja pri dvostopenjskem preoblikova-
nju
778. Praprotnik Anita Kršitev parnosti pri tvorbi mionov v trkalnikih elektronov in
pozitronov s težiščno energijo okoli 10 GeV
779. Zorko Andrej Študij enodimenzionalnega prevodnika $(\text{TMTFTF})_2\text{Br}$ s pul-
zno elektronsko paramagnetno resonanco
780. Jeglič Peter Študij mehčanja bitumnov z jedrsko magnetno resonanco
781. Bažec Matej Računalniška simulacija polimerne disperzije tekočega kri-
stala
782. Zaplotnik Tomaž Metoda za meritev mešanja v sistemu nevtralnih mezonov D^0
s spektrometrom HERA-B
783. Giacomelli Marko Analiza tkiv s protonsko radiografijo
784. Fošnarič Miha Vpliv membranskih inkluzij na stabilnost torocitne oblike
hčerinskih mehurčkov membrane eritrocita
785. Studen Andrej Električno polje v sevalno poškodovani silicijevi p^+mn^+ diodi
786. Cvelbar Uroš Študij lastnosti mikroskopskih magnetnih delcev v levitacijski
pasti
787. Dvoršek Damjan Kvantno računalništvo z amplitudami
788. Vodopivec Boris Modificiran elektromagnetni merilnik pretoka tekočin
789. Mrak Alja Meritve temperaturne odvisnosti signalov v silicijevih detek-
torjih
790. Žnidarčič Tadej Vpliv pH na deformabilnost eritrocitov
791. Feguš Urška Struktura in elastične lastnosti MoS_2 mikrocevk
792. Vidmar Gregor Stabilne oblike mielinskih struktur
793. Šarvari Attila Monte Carlo simulacije za izračun optimalne oblike aplika-
torja za površinsko brahterapijo
794. Kučan Zdravko Rekonstrukcija tomogramov geometrij s kovinskimi vsadki
795. Malovrh Jure Prehod med integrabilnostjo in kaosom v sistemih izven območja
veljavnosti izreka KAM

Meteorologija

- | | |
|----------------------|---|
| 71. Bergant Uroš | Napovedovanje megle na letališču Ljubljana z metodami statistične interpretacije opazovanj in rezultatov numeričnih modelov |
| 72. Žorž Boris | Verifikacija napovedi višine baze oblakov nad letališčem Brnik |
| 73. Merše Janko | Simulacija turbulentnega razkroja jezera hladnega zraka z modelom MM5 |
| 74. Razpotnik Rahela | Proučevanje spreminjanja koncentracij SO_2 v Zasavju s pomočjo trajektorij |
| 75. Marolt Damijana | Prostorske interpolacije minimalne in maksimalne temperature zraka |

Podiplomski študij

Matematika – izobraževalna smer

- | | |
|------------------------|--|
| 22. Marinič Andreja | Razredi in množice z vidika notranjih modelov teorije ZF |
| 23. Klokočovnik Alenka | Origami |
| 24. Komar Mojca | Algebraične krivulje |

Matematika – raziskovalna smer

- | | |
|--------------------------|---------------------------------|
| 102. Šega Gregor | Pronicanje in kontaktni procesi |
| 103. Črnjarič-Žic Nelida | Elementarni operatorji |

Fizika

- | | |
|-------------------|--|
| 183. Horvat Darja | Optodinamsko opazovanje procesov v kapljevinah |
| 184. Mali Tadej | Karakterizacije in študij prostorske ločljivosti sistema za rentgensko slikanje z mikropasovnimi silicijevimi detektorji |

Jedrska tehnika

- | | |
|-----------------|---|
| 29. Kovač Marko | Numerična analiza naključnih medsebojno delujočih razvejanih razpok |
|-----------------|---|

Doktorati – matematika

- | | |
|----------------------|--|
| 58. Plestenjak Bor | Metode zveznega nadaljevanja za večparametrične probleme lastnih vrednosti |
| 59. Zgrablić Boris | Sosednostno prehodni grafi |
| 60. Škrekovski Riste | Barvanje grafov |

Doktorati – fizika

- | | |
|-----------------------|---|
| 209. Škrk Damijan | Calibration of the ring imaging Čerenkov counter of the HERA-B spectrometer |
| 210. Rovšek Barbara | Polarni smektiki v omejenih planarnih geometrijah |
| 211. Marinček Marko | Razvoj elektromagnetnega polja v sunkovnih trdninskih laserjih |
| 212. Eržen Borut | Measurement of the $ V_{cs} $ with the Delphi spectrometer |
| 213. Jeraj Robert | Monte Carlo based inverse treatment planning |
| 214. Duh Andrej | Omejena lastna difuzija molekul in ojačitev robov pri NMR mikroskopiji |
| 215. Peršič Andreja | Testni kritični eksperiment na reaktorju TRIGA z delno zgozrelim gorivom |
| 216. Križman Milko J. | Radon in njegovi kratkoživi potomci v okolju kot posledica rudarjenja urana na Žirovskem vrhu |
| 217. Škarja Metod | Mikromaser: atomi in molekule v resonatorju |

R 177/01



100000142,5

COS

218. Demšar Jure Photoexcited carrier relaxation of
conductors probed by ultrafast spectroscopy
219. Žagar Mark Napovedovanje pojavov majhnih
prilagajanjem
220. Leskovar Matjaž Model drugega reda natančno
tekočin
221. Kavčič Matjaž Ionizacija lupine L lahkih elementov pri centralnih trkih z
ioni
222. Borštnik Anamarija Sile, ki jih posreduje delno urejen nematični tekoči kristal
223. Prelovšek Komelj Saša Weak decays of heavy mesons

*Janez Krušič***Novi člani društva v letu 2000⁶**

Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 93 novih članov:

- | | | |
|--------------------------|---------------------------|--------------------------------|
| 1938. Batič Majcen Ivana | 1969. Kronovšek Nataša | 2000. Repar Miroslav |
| 1939. Bogovič Vesna | 1970. Krstuloviš Branko | 2001. Resman Alenka |
| 1940. Bregar Zvonko | 1971. Krulec Brigita | 2002. Roršek Jožica |
| 1941. Brišnik Suzana | 1972. Kunšič Nevenka | 2003. Rutar Jože |
| 1942. Cimperman Ana | 1973. Kurbos Irena | 2004. Serec Alojz |
| 1943. Colnerič Monika | 1974. Kurillo Dragica | 2005. Simšič Miljanka |
| 1944. Fošner Maja | 1975. Lah Tatjana | 2006. Skaza Helena |
| 1945. Galičič Mirjam | 1976. Marter Jožica | 2007. Slana Romana |
| 1946. Galjot Marina | 1977. Mertuk Valentina | 2008. Soklič Metka |
| 1947. Godec Jelka | 1978. Mezgec Ljubica | 2009. Stanič Samo |
| 1948. Golc Majda | 1979. Milanič Martin | 2010. Šček Cirila |
| 1949. Herodež Marjetka | 1980. Mohorčič Polonca | 2011. Šegula Helena |
| 1950. Iskrič Goran | 1981. Nusdorfer Janja | 2012. Šivak Maja |
| 1951. Ivačič Anica | 1982. Obrovnik Margareta | 2013. Šmigoc Helena |
| 1952. Jakob Tilka | 1983. Oder Andreja | 2014. Štuklek Milena |
| 1953. Jelenko Irena | 1984. Pagon Andreja | 2015. Tkalčič Diomira |
| 1954. Jeromen Andrej | 1985. Peljhan Danica | 2016. Tomažič Mateja |
| 1955. Jevnikar Milan | 1986. Penca Mateja | 2017. Trček Primož |
| 1956. Jež Nataša | 1987. Perko Sonja | 2018. Turk Alenka |
| 1957. Jovanovič Peter | 1988. Petek Marija | 2019. Tursan Poljanšek Ivana |
| 1958. Jurjevec Milovanka | 1989. Petelinšek Zdenka | 2020. Uran Bojan |
| 1959. Kalan Dragica | 1990. Peternejl Jože | 2021. Urbanč Suzana |
| 1960. Kavkler Izток | 1991. Polanec Stanko | 2022. Vehovec Majda |
| 1961. Kobal Damjan | 1992. Potočnik Primož | 2023. Velikonja Elvica |
| 1962. Kodelja Ana | 1993. Povše Danica | 2024. Vencelj Urbanija Francka |
| 1963. Koštomaj Mihaela | 1994. Radoš Bernarda | 2025. Volk Nives |
| 1964. Kovačec Anton | 1995. Rakuša Darinka | 2026. Vrečar Simon |
| 1965. Koželj Sonja | 1996. Ranfl Roškar Jožica | 2027. Vrenčur Dušanka |
| 1966. Kračun Lucijana | 1997. Ratej Sonja | 2028. Zagorščak Gorazd |
| 1967. Kresovič Ljudmila | 1998. Ravnikar Nataša | 2029. Žižek Darinka |
| 1968. Krofel Jolanda | 1999. Razdrtič Nada | 2030. Žontar Dejan |

Vladimir Bensa

⁶ Novi člani za leto 1999 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko 47 (2000), 134.