

IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

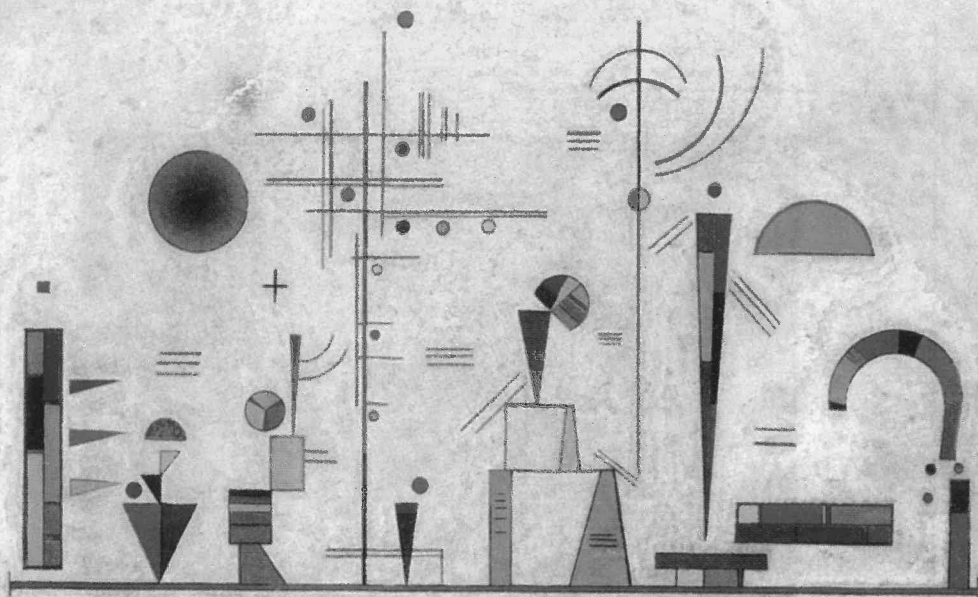
ODPISANO

2001

Letnik 48

4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



WASSILY KANDINSKY
ERNEST - SPASS 1930

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 2001

letnik 48, številka 4, strani 97–128

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, telefon (01) 476-65-53, telefaks (01) 251-72-81, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d. d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 042961, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Martin Juvan (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Boris Lavrič, Marko Zgonik (urednik za fiziko), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Naročnina za člane društva je všteta v celoletno članarino, ki znaša 3600 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6600 SIT, za študente 1800 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 720 SIT, stare številke 480 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1450 izvodov. Revijo sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2001 DMFA Slovenije – 1463 Poština plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles

Str.–Page

- Heronovi trikotniki z racionalnimi težiščnicami — Heron triangles with rational medians (Ivan Vidav) 97–108
- Peltierovo hlajenje: klasična in moderna oblika — Peltier refrigeration: A classical and a modern way (Boštjan Jug, Zvonko Trontelj) 109–120
- Andrej Perlah – 450. obletnica njegove smrti — Andrej Perlah – The 450th anniversary of his death (Marijan Prosen) 123–126

Vesti — News

- Razpis DMFA Slovenije za posebne pohvale šolam in Pravila o podeljevanju priznanj (Martin Čopič) 108
- Mag. Marija Vencelj – ob šestdesetletnici (Anton Suhadolc) 121–122
- Matematični kviz na internetu (Gašper Fijavž, Aleš Vavpetič, Martin Vuk in Emil Žagar) 126–III
- Strokovno srečanje in 53. občni zbor društva (Martin Čopič) III
9. slovensko srečanje o uporabi fizike IV

Nove knjige – New books

- Apostolos Doxiadis: Uncle Petros and Goldbach's Conjecture (Anton Suhadolc) 120–121

Na ovitku: *Resno-šaljivo*, Vasilij Kandinsky, 1930.

HERONOV TRIKOTNIKI Z RACIONALNIMI TEŽIŠČNICAMI

IVAN VIDAV

Math. Subj. Class. (2000): 11D25

V članku je prikazan rezultat R. H. Buchholtza in R. L. Rathbuna, da obstaja neskončno nepodobnih Heronovih trikotnikov z dvema racionalnima težiščnicama. Vsaki racionalni točki (λ, μ) na eliptični krivulji

$$\lambda\mu^2 - \lambda^2\mu + \lambda\mu + 2\mu - 2\lambda - 1 = 0,$$

pri kateri sta λ in μ oba različna od 0, 1 in -1 , pripada namreč tak trikotnik. Na navedeni krivulji je neskončno racionalnih točk.

HERON TRIANGLES WITH RATIONAL MEDIANS

In this article we present the result of R. H. Buchholtz and R. L. Rathbun that there exists an infinite set of Heron triangles with two rational medians. To each rational point (λ, μ) on the elliptic curve

$$\lambda\mu^2 - \lambda^2\mu + \lambda\mu + 2\mu - 2\lambda - 1 = 0,$$

there corresponds such a triangle, if λ and μ are both different from 0, 1 and -1 .

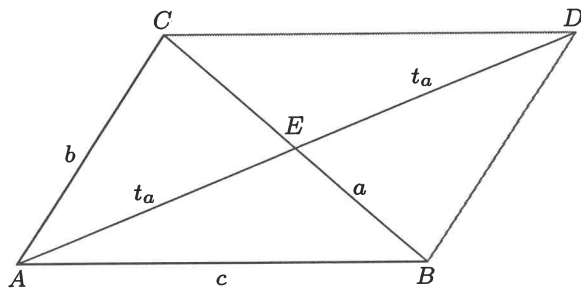
1. Elementarna geometrija je vir številnih zanimivih diofantskih enačb, med njimi tudi takih, za katere še ne vemo, ali so rešljive ali ne. Tu si bomo ogledali diofantske enačbe, ki se pojavijo pri iskanju trikotnikov z racionalnimi stranicami, racionalno ploščino in racionalnimi težiščnicami.

Trikotnik, pri katerem se izražajo stranice in ploščina z naravnimi števili, imenujemo *Heronov trikotnik*. To poimenovanje bomo razširili na trikotnike, pri katerih so stranice in ploščina racionalna števila. Vsak tak trikotnik je namreč podoben trikotniku, v katerem se stranice in ploščina izražajo s celimi števili.

Težiščnica je daljica ali dolžina daljice, ki veže kakšno oglišče trikotnika s središčem nasprotne stranice. Kako jo izračunamo, če poznamo stranice? Podaljšajmo težiščnico t_a – le-ta veže oglišče A s središčem E nasprotne stranice $a = \overline{BC}$ – preko točke E za njeno dolžino. Če tako dobljeno točko zaznamujemo z D , so A , B , C in D oglišča paralelograma, v katerem sta stranica a in dvojna težiščnica $2t_a$ diagonali (slika 1). V vsakem paralelogramu pa je vsota kvadratov vseh štirih stranic enaka vsoti kvadratov obeh diagonal. Ker sta v našem paralelogramu nevzporedni stranici b in c , velja torej enačba

$$2(b^2 + c^2) = 4t_a^2 + a^2. \quad (1)$$

Iz nje izračunamo t_a , če poznamo a , b in c . Podobni enačbi določata težiščnici t_b in t_c . Očitno t_a ni vselej racionalno število pri racionalnih a , b in c .



Slika 1. $\overline{BE} = \overline{EC}$, $\overline{AE} = \overline{ED}$

Če zapišemo enačbo (1) v obliki

$$(b+c)^2 - a^2 = (2t_a)^2 - (b-c)^2,$$

lahko levo in desno stran razstavimo v produkt dveh faktorjev. Postavimo

$$\frac{2t_a + b - c}{a + b + c} = \lambda. \quad (2)$$

Kvocien λ je pri racionalnih a , b , c in t_a racionalno število. Iz (1) in (2) dobimo zdaj enačbi

$$\begin{aligned} b + c - a &= \lambda(2t_a - b + c), \\ \lambda(a + b + c) &= 2t_a + b - c. \end{aligned}$$

Z eliminacijo težiščnice t_a pridemo do tele zveze

$$(\lambda^2 + 1)a + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)b + (\lambda^2 + 2\lambda - 1)c = 0. \quad (3)$$

Če so torej racionalna števila a , b in c stranice trikotnika z racionalno težiščnico t_a , obstaja racionalno število λ , ki zadošča enačbi (3).

Pri danih a , b , c je (3) kvadratna enačba za λ z diskriminanto

$$D = 8(b^2 + c^2) - 4a^2 = 16t_a^2.$$

Kvadratna enačba z racionalnimi koeficienti ima racionalen koren, kadar je diskriminanta kvadrat racionalnega števila. Zato velja tale

Pomožni izrek 1. *V trikotniku z racionalnimi stranicami a , b , c je težiščnica t_a racionalna natanko tedaj, kadar premore enačba (3) racionalen koren λ .*

Očitno pripadajo podobnim trikotnikom ekvivalentne kvadratne enačbe (3), ki imajo zato vse enake korene.

Kadar je koren λ enačbe (3) eno samo število 0, 1 ali -1 , je trikotnik izrojen. V prvem primeru je namreč $a = b + c$, v drugem $b = a + c$, v tretjem pa $c = a + b$.

Pripomba. Ker nastopajo v diskriminanti D samo kvadrati stranic a^2 , b^2 in c^2 , velja tale posplošitev pomožnega izreka: Naj bodo a , b , c taka pozitivna ali negativna racionalna števila, da ima enačba (3) racionalen koren λ . Če so $|a|$, $|b|$, $|c|$ stranice trikotnika, je njegova težiščnica t_a racionalna.

Denimo, da so v trikotniku z racionalnimi stranicami a , b , c vse tri težiščnice t_a , t_b in t_c racionalne. Potem so racionalno rešljive tele tri kvadratne enačbe

$$\begin{aligned}(\lambda^2 + 1)a + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)b + (\lambda^2 + 2\lambda - 1)c &= 0, \\(\mu^2 + 2\mu - 1)a + (\mu^2 + 1)b + (\mu^2 - 2\mu - 1)c &= 0, \\(\nu^2 - 2\nu - 1)a + (\nu^2 + 2\nu - 1)b + (\nu^2 + 1)c &= 0.\end{aligned}\tag{4}$$

Druga enačba ima namreč racionalen koren μ , ker je težiščnica t_b racionalna (velja zveza $2(a^2 + c^2) = 4t_b^2 + b^2$), tretja pa racionalen koren ν , ker je težiščnica t_c racionalna ($2(a^2 + b^2) = 4t_c^2 + c^2$).

Pri danih λ , μ , ν so enačbe (4) sistem treh homogenih linearnih enačb za a , b , c . Ker so stranice a , b , c različne od nič, ima ta sistem netrivialno rešitev in je zato determinanta njegovih koeficientov enaka nič, torej

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + 1, & \lambda^2 - 2\lambda - 1, & \lambda^2 + 2\lambda - 1 \\ \mu^2 + 2\mu - 1, & \mu^2 + 1, & \mu^2 - 2\mu - 1 \\ \nu^2 - 2\nu - 1, & \nu^2 + 2\nu - 1, & \nu^2 + 1 \end{vmatrix} = 0.\tag{5}$$

Vsak trikotnik z racionalnimi stranicami in racionalnimi težiščnicami določa torej tri racionalna števila λ , μ , ν , ki zadoščajo enačbi (5).

Vzemimo zdaj poljubni racionalni števili λ in μ in vstavimo ti vrednosti v prvi dve enačbi sistema (4). Ti enačbi določata razmerje števil a , b in c , in sicer je to razmerje enako razmerju poddeterminant zadnje vrstice determinante na levi strani enačbe (5). Ker sta λ in μ racionalna, so tudi poddeterminante racionalna števila in zato obstajajo racionalna števila a , b , c , ki zadoščajo prvima dvema enačbama sistema (4). Če so $|a|$, $|b|$, $|c|$ stranice trikotnika, sta v njem težiščnici t_a in t_b racionalni.

Naj bo dan poljuben trikotnik. Samo na končno mnogo načinov lahko izberemo realna števila a , b , c tako, da so $|a|$, $|b|$, $|c|$ stranice tega trikotnika. Pri izbranih a , b , c določa prva enačba sistema (4) dva korena λ , druga pa dva korena μ . Zato pripada le končno mnogo parom (λ, μ) isti trikotnik. Ker smo v prejšnjem odstavku racionalni števili λ in μ poljubno izbrali, vidimo, da je nešteto (nepodobnih) trikotnikov z racionalnimi stranicami in dvema racionalnima težiščnicama.

Oglejmo si primer, ko je $\mu = -\lambda$, kjer je $\lambda \neq -1$. Iz prvih dveh enačb sistema (4) izračunamo, da je $a = b$, trikotnik je torej enakokrak. Pri racionalnem λ sta težiščnici t_a in t_b , kjer je seveda $t_a = t_b$, racionalni.

Denimo zdaj, da racionalna števila λ , μ in ν zadoščajo enačbi (5). Potem ima ustrezni homogeni sistem (4) netrivialno rešitev, v kateri so a , b , c racionalna števila. Ker sta namreč izpolnjeni tudi prvi dve enačbi sistema (4), so a , b , c , kakor bomo videli, sorazmerni poddeterminantom zadnje vrstice, te pa so racionalna števila. Če so $|a|$, $|b|$, $|c|$ stranice trikotnika, so v tem trikotniku vse tri težiščnice racionalne.

Kako pridemo do racionalnih rešitev diofantske enačbe (5), tu ne bomo opisovali. Povejmo le, da je že Euler našel enoparametrično družino trikotnikov z racionalnimi stranicami in racionalnimi težiščnicami ([2, str. 188]). Stranice se izražajo takole:

$$\begin{aligned}a &= 6r^4 + 20r^2 - 18, \\b &= r^5 + r^4 - 6r^3 + 26r^2 + 9r + 9, \\c &= r^5 - r^4 - 6r^3 - 26r^2 + 9r - 9.\end{aligned}$$

Pripadajoče dvojne težiščnice pa so:

$$\begin{aligned}2t_a &= 2r^5 - 20r^3 - 54r, \\2t_b &= r^5 + 3r^4 + 26r^3 - 18r^2 + 9r + 27, \\2t_c &= r^5 - 3r^4 + 26r^3 + 18r^2 + 9r - 27.\end{aligned}$$

Če je parameter r racionalen, so vsa navedena števila racionalna. Za stranice in težiščnice je treba pravzaprav vzeti absolutne vrednosti teh izrazov. Npr. pri $r = 2$ dobimo

$$a = 158, \quad b = 131, \quad c = 127, \quad 2t_a = 204, \quad 2t_b = 255, \quad 2t_c = 261.$$

(Pri $r = 0$ in $r = 1$ je pripadajoči trikotnik izrojen.)

Pripomba. Ne določa vsaka rešitev enačbe (5) trikotnika. Zgled: Racionalna števila $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\mu = \frac{18}{23}$, $\nu = \frac{25}{23}$ zadoščajo tej enačbi. Najmanjša rešitev sistema (4) z naravnimi števili je v tem primeru $a = 823$, $b = 134$, $c = 607$. Toda a , b , c niso stranice trikotnika, ker je $a = 823 > 741 = b + c$. Seveda pa so števila t_a , t_b in t_c , ki jih dobimo iz enačbe (1) in podobnih enačb za t_b in t_c , racionalna.

2. Ploščino trikotnika s stranicami a , b , c izračunamo po Heronovem obrazcu

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (6)$$

kjer pomeni $s = \frac{a+b+c}{2}$ polovični obseg. Pri racionalnih a , b in c je izraz pod korenem racionalen, ni pa vselej kvadrat racionalnega števila, se pravi, da ploščina p ni nujno racionalna in trikotnik ni Heronov.

Ali obstaja Heronov trikotnik z vsemi tremi racionalnimi težiščnicami? Odgovora na to vprašanje ne vem. Doslej takega (neizrojenega) trikotnika še niso našli. Pojavili so se celo dokazi, da takih trikotnikov ni, vendar se je potem izkazalo, da ti dokazi niso bili neoporečni. Pač pa ima vsak izrojen trikotnik z racionalnimi stranicami ploščino nič (to je racionalno število) in racionalne težiščnice.

Kako je s Heronovimi trikotniki z vsaj dvema racionalnima težiščnicama? Dolgo so mislili, da takih trikotnikov ni. Pred nekaj leti pa sta R. H. Buchholtz in R. L. Rathbun našla neskončno množico Heronovih trikotnikov z dvema racionalnima težiščnicama ([1]). Oglejmo si, kako pridemo do takih trikotnikov.

Imejmo trikotnik z racionalnimi stranicami a , b , c in dvema racionalnima težiščnicama t_a in t_b . Iz povedanega v prejšnjem razdelku izhaja, da obstajata racionalni števili λ in μ , ki zadoščata prvima dvema enačbama sistema (4). Ker trikotnik ni izrojen, sta λ in μ oba različna od 0, 1 in -1 . Pa postavimo

$$u = s - a, \quad v = s - b, \quad w = s - c, \quad (7)$$

kjer je seveda $s = \frac{a+b+c}{2}$ polovični obseg in je zato $u + v + w = s$. Obrazec (6) lahko sedaj zapišemo v obliki

$$p^2 = uvw(u + v + w). \quad (8)$$

Pri vsakem neizrojenem trikotniku so u , v , w pozitivna števila, stranice pa se z njimi izražajo takole:

$$a = v + w, \quad b = u + w, \quad c = u + v. \quad (7^*)$$

Če vstavimo izraze (7*) v prvi dve enačbi sistema (4) in ju nekoliko preuredimo, dobimo

$$\begin{aligned} (\lambda^2 - 1)u + (\lambda^2 + \lambda)v + (\lambda^2 - \lambda)w &= 0, \\ (\mu^2 - \mu)u + (\mu^2 - 1)v + (\mu^2 + \mu)w &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Ti dve enačbi povesta, da so u , v in w sorazmerni dvovrstnim determinantom

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \lambda & \lambda^2 - \lambda \\ \mu^2 - 1 & \mu^2 + \mu \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda^2 - \lambda & \lambda^2 - 1 \\ \mu^2 + \mu & \mu^2 - \mu \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda^2 + \lambda \\ \mu^2 - \mu & \mu^2 - 1 \end{vmatrix}.$$

Če je k sorazmernostni faktor, se potemtakem u , v in w izražajo takole:

$$\begin{aligned} u &= k\lambda(\mu + 1)(\lambda + 2\mu - 1), \\ v &= -k\mu(\lambda - 1)(2\lambda + \mu + 1), \\ w &= k(\lambda + 1)(\mu - 1)(\lambda - \mu - 1). \end{aligned} \quad (10)$$

Faktor k je racionalen, ker so u, v, w in λ, μ racionalna števila. Iz (10) izračunamo

$$u + v + w = k(3\lambda\mu - \lambda + \mu + 1).$$

Pripomba. Vse tri dvovrstne determinante hkrati niso nič. Ker sta namreč λ in μ oba različna od 0, 1 in -1 , bi bile vse tri determinante enake nič samo tedaj, kadar bi veljale enačbe

$$\lambda + 2\mu - 1 = 0, \quad 2\lambda + \mu + 1 = 0, \quad \lambda - \mu - 1 = 0.$$

Te tri enačbe pa nimajo skupne rešitve.

Kvadrat ploščine p našega trikotnika lahko po formuli (8) zapišemo v obliki $p^2 = k^4\omega^2$, kjer smo z ω zaznamovali število, ki zadošča enačbi

$$\omega^2 = \lambda\mu(\lambda^2 - 1)(\mu^2 - 1)(\lambda + 2\mu - 1)(2\lambda + \mu + 1)(\mu - \lambda + 1)(3\lambda\mu - \lambda + \mu + 1). \quad (11)$$

Ploščina $p = k^2\omega$ je racionalna natanko tedaj, kadar je ω racionalno število. Če torej izhajamo iz Heronovega trikotnika z racionalnima težiščnicama t_a in t_b , obstajata taki racionalni števili λ in μ , da je ω , ki ga določa enačba (11), racionalno število $\neq 0$.

Naj bo zdaj (λ, μ, ω) poljubna racionalna rešitev enačbe (11), pri kateri je $\omega \neq 0$. Vstavimo λ in μ v obrazce (10), kjer vzamemo za k poljubno racionalno število $\neq 0$. Dobljeni u, v, w so racionalni in zadoščajo enačbama (9), števila a, b, c , ki jih določajo (7*), pa očitno ustrezajo prvima dvema enačbama sistema (4). V trikotniku z racionalnimi stranicami $|a|, |b|, |c|$ sta torej težiščnici t_a in t_b racionalni. Če so u, v, w pozitivna števila (tedaj so tudi a, b, c pozitivni), ima ta trikotnik ploščino p , pri čemer je $p^2 = uvw(u + v + w)$. Enačba (11) pove, da je $p = k^2\omega$, torej racionalno število. Iz obrazcev (10) je razvidno, da so u, v, w gotovo pozitivni, kadar je $0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1, \lambda + 2\mu > 1$ in vzamemo sorazmernostni faktor $k > 0$.

Vendar u, v in w niso vselej pozitivni. Kako je s trikotnikom v tem primeru, pove

Pomožni izrek 2. *Naj bodo u, v, w taka realna števila, da je produkt $uvw(u + v + w)$ pozitiven. Potem so $|v + w|, |u + w|, |u + v|$ stranice trikotnika s ploščino p , pri čemer je $p^2 = uvw(u + v + w)$.*

Dokaz. Ker je navedeni produkt pozitiven, so bodisi njegovi štirje faktorji vsi pozitivni, bodisi vsi negativni, ali pa sta dva pozitivna in dva negativna. V prvem primeru so $v + w = a, u + w = b, u + v = c$ stranice trikotnika s ploščino p , v drugem primeru pa so navedene vsote z nasprotnim znakom stranice trikotnika s ploščino p .

Naj bosta zdaj dva faktorja pozitivna in dva negativna. Oglejmo si primer, ko je $v < 0$ in $w < 0$, toda $u > 0$ in $u + v + w > 0$. Postavimo

$v + w = -a$, kjer je $a > 0$. Iz neenakosti $u + v + w > 0$ izhaja, da je $u + v > -v > 0$ in $u + v > -w > 0$. Naj bo $b = u + w$ in $c = u + v$. Potem je $s = \frac{a+b+c}{2} = u > 0$, $s - a = u + v + w > 0$, $s - b = -w > 0$ in $s - c = -v > 0$. Zato so a, b, c stranice trikotnika, kvadrat njegove ploščine p pa je enak $p^2 = uvw(u + v + w)$.

Podobno ugotovimo, da so $a = v + w$, $b = -u - w$ in $c = -u - v$ stranice trikotnika s ploščino p v primeru, kadar je $v > 0$, $w > 0$, toda $u < 0$ in $u + v + w < 0$. ■

Števila u, v, w , ki jih določajo izrazi (10), ustrezajo pogojem pomožnega izreka, saj je produkt $uvw(u + v + w)$ enak $k^4\omega^2 > 0$. Izhajali smo namreč iz racionalne rešitve (λ, μ, ω) enačbe (11), pri kateri je $\omega \neq 0$. Zato so $|a| = |v + w|$, $|b| = |u + w|$, $|c| = |u + v|$ v vsakem primeru stranice trikotnika s ploščino $p = k^2\omega$. Tako smo dokazali

Izrek 3. Vsak Heronov trikotnik z dvema racionalnima težiščnicama določa racionalno rešitev (λ, μ, ω) enačbe (11), pri kateri je $\omega \neq 0$, in narobe, vsaki taki rešitvi enačbe (11) pripada Heronov trikotnik z dvema racionalnima težiščnicama.

3. Kako je z racionalnimi rešitvami diofantske enačbe (11)? Če je na desni kak faktor enak nič, je tudi $\omega = 0$, se pravi racionalen, toda pripadajoči trikotnik je izrojen, ker je njegova ploščina $p = k^2\omega = 0$.

Enačba (11) pomeni v prostoru, opremljenem s koordinatami λ, μ, ω , algebraično ploskev. Polinom na desni je enajste stopnje, pri danem μ (oziroma danem λ) pa je polinom sedme ali nižje stopnje spremenljivke λ (oziroma μ). Zato določa enačba (11) pri danem racionalnem μ v ravnini s koordinatama λ in ω v splošnem hipereliptično krivuljo z racionalnimi koeficienti. Faltingsov izrek pravi, da je na hipereliptični krivulji kvečjemu končno mnogo racionalnih točk¹.

Ali pridemo do eliptične krivulje, če vzamemo, da sta λ in μ na primeren način linearno povezana? Ponavadi ne. Včasih sicer dobimo eliptično krivuljo, toda žal tako, na kateri ni nobene racionalne točke ali pa so samo trivialne, ki določajo izrojene trikotnike.

Poskušajmo zdaj priti do racionalnih rešitev enačbe (11) po tejle poti: Denimo, da sta racionalni števili λ in μ med seboj povezani takole:

$$\mu(\lambda^2 - 1)(\lambda + 2\mu - 1) = \lambda(\mu^2 - 1)(2\lambda + \mu + 1). \quad (12)$$

Desna stran enačbe (11) je v tem primeru enaka

$$\lambda^2(\mu^2 - 1)^2(2\lambda + \mu + 1)^2(\mu - \lambda + 1)(3\lambda\mu - \lambda + \mu + 1).$$

¹ Bralec lahko o tej snovi najde obilo informacij v knjigi I. Vidava *Eliptične krivulje in eliptične funkcije*. (Op. urednika)

Ta izraz je kvadrat racionalnega števila, če je produkt zadnjih dveh faktorjev, namreč produkt $(\mu - \lambda + 1)(3\lambda\mu - \lambda + \mu + 1)$, kvadrat racionalnega števila. Na prvi pogled se zdi malo verjetno, da bi bilo to res.

Enakost (12) se da zapisati v obliki

$$(\lambda + \mu)(\lambda\mu^2 - \lambda^2\mu + \lambda\mu + 2\mu - 2\lambda - 1) = 0.$$

Imamo torej dve možnosti: ali je $\lambda + \mu = 0$ ali pa

$$\lambda\mu^2 - \lambda^2\mu + \lambda\mu + 2\mu - 2\lambda - 1 = 0. \quad (13)$$

V prvem primeru, ko je $\mu = -\lambda$, se produkt faktorjev $\mu - \lambda + 1$ in $3\lambda\mu - \lambda + \mu + 1$ glasi $(1 - 2\lambda)(1 - 2\lambda - 3\lambda^2)$. Ker mora biti kvadrat, je treba poiskati racionalne rešitve enačbe

$$\eta^2 = (1 - 2\lambda)(1 - 2\lambda - 3\lambda^2). \quad (14)$$

Sedem racionalnih točk na tej krivulji takoj uganemo

$$(\lambda, \eta) : \quad (0, 1), (0, -1), (-1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right), (1, 2), (1, -2).$$

Vse določajo izrojene trikotnike.

V prvem razdelku smo ugotovili, da je trikotnik enakokrak, kadar je $\mu = -\lambda$ in $\lambda \neq -1$. V enakokrakem Heronovem trikotniku so vse težiščnice racionalne, če sta racionalni dve. Ker Heronovih trikotnikov s samimi racionalnimi težiščnicami še niso našli, je malo verjetno, da bi bila na krivulji (14) kakšna netrivialna racionalna točka.

Oglejmo si še drugo možnost, da sta λ in μ povezana z enačbo (13). S preprostim računom ugotovimo, da velja za taka λ in μ identiteta

$$(\mu - \lambda + 1)(3\lambda\mu - \lambda + \mu + 1) = (2 + \lambda - \mu)^2.$$

Imeli smo srečo: Če sta λ in μ racionalni rešitvi enačbe (13), je produkt na levi kvadrat racionalnega števila $2 + \lambda - \mu$ in tudi ω , ki ga dobimo iz enačbe (11), je racionalen. Tako smo dokazali:

Izrek 4. *Za vsako racionalno rešitev (λ, μ) enačbe (13) je ω , ki ga določa enačba (11), racionalno število.*

Enačbo (13) sta odkrila R. H. Buchholtz in R. L. Ratbun (glej [1]).

4. Kako je z racionalnimi točkami na krivulji (13)? Ker je enačba tretje stopnje in so njeni koeficienti cela števila, pomeni eliptično krivuljo v obsegu $\mathbb{Q}$. (Ni vsaka kubična krivulja eliptična. Iz nadaljnjega bo razvidno, da

(13) je.) Če poznamo na eliptični krivulji kakšno racionalno točko, dobimo pogosto z metodo tangent in sekant naslednje racionalne točke.

Enačba (13), ki je sicer tretje stopnje, se odlikuje po tem, da je pri dani vrednosti ene spremenljivke kvadratna enačba za drugo spremenljivko. Zato pridemo iz znane racionalne točke do novih takih točk tudi takole: Naj bo (λ_0, μ_0) racionalna točka na krivulji (13). Vstavimo $\lambda = \lambda_0$ v (13). Dobljena kvadratna enačba

$$\lambda_0 \mu^2 - \lambda_0^2 \mu + \lambda_0 \mu + 2\mu - 2\lambda_0 - 1 = 0$$

ima racionalne koeficiente, en njen koren, namreč $\mu = \mu_0$, pa je racionalen. Zato je racionalen tudi drugi koren $\mu = \mu_1$. Tako smo prišli do nove racionalne točke (λ_1, μ_1) , kjer smo postavili $\lambda_1 = \lambda_0$. Če zdaj vstavimo $\mu = \mu_1$ v enačbo (13), dobimo kvadratno enačbo za λ , ki ima spet racionalne koeficiente in racionalen koren $\lambda = \lambda_1$. Potem je tudi njen drugi koren $\lambda = \lambda_2$ racionalen in smo dobili na krivulji (13) racionalno točko (λ_2, μ_2) , $\mu_2 = \mu_1$. Če tako nadaljujemo, pridemo do zaporedja točk

$$(\lambda_0, \mu_0), (\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2), \dots$$

Seveda ni rečeno, da so vse točke med seboj različne, saj bi se lahko zgodilo, da po nekaj korakih ne dobimo več nove točke, temveč kakšno prejšnjo. Zato nismo še gotovi, da je na krivulji (13) neskončno racionalnih točk.

Zgled. Če izhajamo iz racionalne točke $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$, $\mu_0 = 0$, dobimo po opisani poti zaporedje

$$(\lambda, \mu) : \left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{16}{5}, \frac{5}{2}\right), \left(\frac{16}{5}, -\frac{37}{40}\right), \left(-\frac{285}{296}, -\frac{37}{40}\right), \dots$$

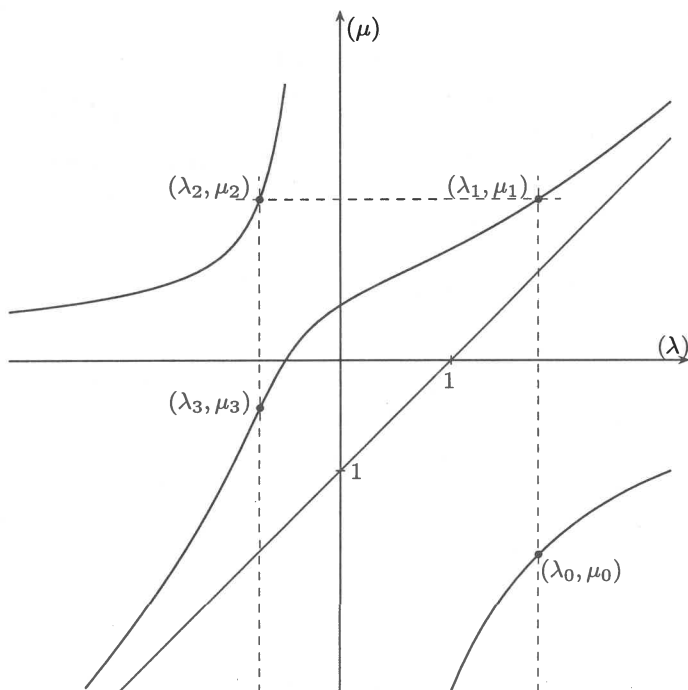
Točki $(-\frac{1}{2}, 0)$ pripada izrojeni trikotnik. Druga in tretja točka pa določata trikotnika

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) : a = 51, \quad b = 73, \quad c = 26, \quad 2t_a = 97, \quad 2t_b = 35, \quad p = 420$$

$$\left(\frac{16}{5}, \frac{5}{2}\right) : a = 626, \quad b = 875, \quad c = 291, \quad 2t_a = 1144, \quad 2t_b = 433, \quad p = 55440.$$

Sorazmernostni faktor k smo izbrali v formulah (10) tako, da so a, b, c cela tuja si števila.

Krivulja, ki jo določa enačba (13) v ravnini s koordinatama λ in μ , ima tri asimptote: prva asimptota je abscisna os, druga ordinatna os, tretja pa premica z enačbo $\mu = \lambda - 1$. To pomeni, da ima krivulja na pripadajoči projektivni ravnini tri realne točke v neskončnosti, namreč presečišča navedenih asimptot s premico v neskončnosti. Ker so koeficienti



Slika 2. Krivulja z enačbo $\lambda\mu^2 - \lambda^2\mu + \lambda\mu + 2\mu - 2\lambda - 1 = 0$. Asimptote so tri: abscisna os, ordinatna os in premica z enačbo $\mu = \lambda - 1$.

v enačbah teh asimptot racionalni (te enačbe se glasijo $\mu = 0$, $\lambda = 0$ in $\lambda - \mu = 1$), so presečišča s premico v neskončnosti racionalne točke. Zgoraj opisana metoda je zato v bistvu metoda sekant: Začetno točko (λ_0, μ_0) zvežemo najprej z drugo točko v neskončnosti. To napravimo tako, da potegnemo skozi točko (λ_0, μ_0) vzporednico z ordinatno osjo, ki ima enačbo $\lambda = \lambda_0$. Ker je krivulja (13) kubična, jo seče vzporednica trikrat, tretjič v točki (λ_1, μ_1) , kjer je $\lambda_1 = \lambda_0$ (slika 2). (Prvo presečišče je točka (λ_0, μ_0) , drugo točka v neskončnosti.) Nato zvežemo dobljeno točko (λ_1, μ_1) s prvo točko v neskončnosti, ta zveznica je vzporednica z abscisno osjo, njena enačba je $\mu = \mu_1$. Tako pridemo do točke (λ_2, μ_2) , kjer je $\mu_2 = \mu_1$, itd.

Krivulja (13) je kubična, toda njena enačba ni v običajni normalni obliki

$$y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D.$$

V to obliko prevedemo enačbo (13) z uvedbo novih koordinat x in y , ki se s prejšnjima λ in μ izražata takole:

$$x = \frac{8 + 4(\lambda - \mu)}{\mu - \lambda + 1}, \quad y = \frac{12(\lambda + \mu)}{\mu - \lambda + 1}. \quad (15)$$

Od tod izračunamo, da je

$$\lambda = \frac{x + y - 8}{2x + 8}, \quad \mu = \frac{8 - x + y}{2x + 8}. \quad (15^*)$$

V novih koordinatah se enačba (13) glasi:

$$y^2 = x^3 + 5x^2 - 32x. \quad (16)$$

Polinom na desni $x^3 + 5x^2 - 32x$ ima za koeficiente cela števila, čelni koeficient pri x^3 je 1, ničle tega polinoma pa so med seboj različne. Zato je (16) eliptična krivulja z enačbo v normalni obliki. Vsaki racionalni točki (λ, μ) na krivulji (13) priredita formuli (15) racionalno točko (x, y) na krivulji (16), formuli (15*) pa racionalni točki (x, y) na (16) racionalno točko (λ, μ) na (13).

Ali leži na krivulji (16) neskončno racionalnih točk? Odgovor na to vprašanje daje naslednji izrek, ki je posledica Nagell-Lutzovega izreka iz aritmetične teorije eliptičnih krivulj ([3, str. 56]):

Izrek 5 (Nagell-Lutz). *Naj bo eliptična krivulja podana z enačbo*

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad (17)$$

kjer so koeficienti a, b, c cela števila. Če je na njej samo končno mnogo racionalnih točk, so koordinate vseh racionalnih točk cela števila.

Kakor hitro torej najdemo na eliptični krivulji (17) racionalno točko (x, y) , pri kateri je npr. x pravi ulomek (ni celo število), je na njej neskončno racionalnih točk.

Enačba krivulje (16) ima obliko (17), koeficienti so v njej cela števila. Točki s koordinatama $\lambda = \frac{16}{5}$, $\mu = -\frac{37}{40}$ na krivulji (13) priredita formuli (15) racionalno točko $x = -\frac{196}{25}$, $y = -\frac{1092}{125}$ na krivulji (16). Ker koordinati x in y nista celi števili, sklepamo iz navedenega izreka, da je na krivulji (16) neskončno racionalnih točk. Isto potem velja za krivuljo (13).

Vsaka racionalna točka (λ, μ) na (13) določa racionalno rešitev (λ, μ, ω) enačbe (11). Izrek 1 pove, da pripada tej rešitvi (λ, μ, ω) Heronov trikotnik z dvema racionalnima težiščnicama, če je $\omega \neq 0$. Toda ω je enak nič le tedaj, kadar je kak faktor v produktu na desni strani enačbe (11) enak nič. Ker morata λ in μ ustrezati tudi enačbi (13), se brž prepričamo, da to nastopi le tedaj, kadar je ena od neznank λ in μ enaka 0, 1 ali -1 . Takih točk pa je na krivulji (13) samo končno mnogo.

Lahko se zgodi, da več racionalnih rešitev enačbe (13) določa v bistvu isti trikotnik. (To je na primer res za rešitvi (λ, μ) in (λ', μ') , kjer je $\lambda' = -\mu$, $\mu' = -\lambda$.) Toda v drugem razdelku smo ugotovili, da le končno mnogo parom (λ, μ) pripada isti trikotnik. Zato velja ([1]):

Izrek 6. *Množica racionalnih točk na krivulji (13) je neskončna. Tej množici pripada neskončna množica (nepodobnih) Heronovih trikotnikov z dvema racionalnima težiščnicama.*

5. Kdaj pa bi imel Heronov trikotnik vse težiščnice racionalne? Očitno moramo najti taki racionalni števili λ in μ , da je ω , ki ga določa enačba (11), racionalen in različen od nič ter da ima enačba (5) pri teh λ in μ racionalen koren ν . Enačba (5) je za ν kvadratna, njeni koeficienti so pri racionalnih λ in μ racionalni. Racionalen koren premore natanko tedaj, kadar je njena diskriminanta D kvadrat racionalnega števila. Račun pokaže, da je diskriminanta D polinom šeste stopnje $Q(\lambda, \mu)$ spremenljivk λ in μ z racionalnimi koeficienti. Zaznamujmo polinom enajste stopnje, ki je na desni strani enačbe (11), na kratko s $P(\lambda, \mu)$. Heronov trikotnik z vsemi racionalnimi težiščnicami bi dobili, če bi našli racionalna števila $\lambda, \mu, \omega, \zeta$, ki zadoščajo enačbama

$$\omega^2 = P(\lambda, \mu), \quad \zeta^2 = Q(\lambda, \mu)$$

in je pri tem $\omega \neq 0$. Ali obstaja taka rešitev teh dveh enačb, ni znano.

LITERATURA

- [1] R. H. Buchholtz, R. L. Rathburn, *An infinite set of Heron triangles with two rational medians*, Amer. Math. Monthly, **104**, 1997, str. 107–115.
- [2] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, druga izdaja, Springer Verlag, New York, 1994.
- [3] J. H. Silverman, J. Tate, *Rational Points on Elliptic Curves*, Springer Verlag, New York, 1992.

OBVESTILO

V prvi številki Obzornika za matematiko in fiziko za leto 1997 sta bila na 29. in 30. strani objavljena pravilnika:

- Razpis DMFA Slovenije za posebne pohvale šolam,
- Pravila o podeljevanju priznanj učiteljem matematike, fizike, astronomije in računalništva za delo z mladimi in za popularizacijo teh znanosti.

Vabimo vas, da pisne predloge za priznanja učiteljem in pohvale šolam pošljete do **15. septembra 2001** na naslov:

DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost
1000 Ljubljana
Jadranska 19
p.p. 2964

Predlogi morajo vsebovati dovolj podatkov, da bodo zadoščali komisiji za vsestransko presojo in tehtno odločitev.

Predsednik DMFA Slovenije:
prof. dr. Martin Čopič

PELTIEROVO HLAJENJE: KLASIČNA IN MODERNA OBLIKA

BOŠTJAN JUG, ZVONKO TRONTELJ

PACS 74.50.+r

Klasični Peltierovi hladilniki so že dalj časa znana in uporabljana oblika mini hladilnikov. V članku so opisane teoretične osnove njihovega delovanja, njihove poglavitne praktične lastnosti in omejitve. Klasičnim, polprevodniškim Peltierovim hladilnikom, se je v zadnjem času pridružila nizkotemperaturna superprevodna izvedba hladilnikov, katere poglavitne lastnosti so opisane v drugem delu članka.

PELTIER REFRIGERATION: A CLASSICAL AND A MODERN WAY

Classical Peltier refrigerators are relatively widely used in several applications. In the paper the theoretical background, some practical aspects and limitations of semiconductive Peltier refrigerators are given. Recently the low temperature superconductive version of Peltier refrigerators was developed. Main characteristics of these refrigerators are described in the second part of the paper.

1. Uvod

Peltierov pojav je termoelektrični križni transportni pojav. Če pri direktnih transportnih pojavih neravnovesje v sistemu požene en sam tok (npr. ∇T požene toplotni tok), so križni transportni pojavi kombinacija vsaj dveh direktnih. Termoelektrični pojavi so kombinacija električnega toka zaradi električnega polja in toplotnega toka zaradi gradienta temperature. Vsak križni transportni pojav ima inverzni transportni pojav.

Prvega iz skupine termoelektričnih transportnih pojavov je leta 1821 odkril nemški fizik Thomas Seebeck: po električnem krogu, sestavljenem iz žic iz različnih kovin, katerih stiki so bili na različnih temperaturah, je tekel električni tok brez priključene zunanje napetosti. Sprememba smeri toplotnega toka je obrnila tudi smer električnega toka. Trinajst let kasneje je Francoz Jean Charles Peltier poskus obrnil: z zunanjo napetostjo je poganjal tok po opisanem električnem krogu in s tem stika vzdrževal pri različnih temperaturah, eden je bil toplejši, drugi pa hladnejši od okolice. Zamenjava predznaka priključene napetosti je poleg smeri električnega toka obrnila tudi smer toplotnega toka. Nabiti delci v električnem polju potujejo v smer, ki jo narekuje le-to. S seboj prenašajo tudi energijo. V električnem tokokrogu, ki je v celoti izdelan iz enega materiala, prenosa energije ne opazimo, saj so v vsaki točki tokokroga pritekli in odtekli energijski tokovi v ravnovesju. Drugače je v tokokrogu iz dveh različnih materialov. Tok nosilcev naboja, ki v različnih materialih omogoča enak električni tok, prenaša v teh materialih različno energijo. Posledica je kopičenje energije (gretje) na enem stiku in primanjkljaj energije (hlajenje) na drugem stiku dveh materialov.

Medtem ko izkoriščamo Seebeckov pojav praktično od odkritja dalje na nespremenjen način za merjenje temperaturnih razlik (termočleni) in na satelitih kot dopolnilo fotoelektričnih generatorjev, je Peltierov pojav postal zanimivejši z razmahom polprevodnikov. Ti so omogočili gradnjo hladilnikov, ki so sposobni črpati uporabno velike toplotne moči. Poleg hladilnih moči je za ekonomsko upravičenost hladilnikov pomembna njihova učinkovitost. Ta je iz praktičnih razlogov definirana kot obratna vrednost izkoristka. Pri hladilnikih je izkoristek definiran kot razmerje vložene električne moči in moči, prečrpane s hladne strani ($P_{el}/P_h = (P_t - P_h)/P_h$), kjer indeksa t in h označujeta toplo in hladno stran hladilnika). Lahko je torej večji od ena. Njegova obratna vrednost, učinkovitost ϕ pa je vedno med 0 in 1. Učinkovitost hladilnikov je torej podobna izkoristku toplotnih strojev. Povišanje sicer relativno nizke učinkovitosti Peltierovih hladilnikov so dosegli z optimizacijo snovnih lastnosti polprevodnikov. Žal je pri tem ostala učinkovitost Peltierovih hladilnikov prenizka za širšo komercialno uporabo. Njihova pglavitna prednost ostaja enostavna konstrukcija brez vsakršnih gibljivih delov, ki zagotavlja delovanje brez vibracij, zanesljivost in cenečnost. To pa so lastnosti, ki Peltierovim hladilnikom zagotavljajo uporabo v različnih aplikacijah, tudi tistih v vesolju.

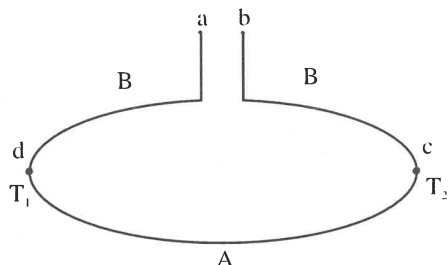
Vse širša uporaba klasičnih Peltierovih hladilnikov je spodbudila zanimanje pomembnejših vesoljskih agencij za nov tip Peltierovega hladilnika, ki temelji na stiku normalne kovine, izolatorja in superprevodnika (stik NIS). Ta hladilnik ni niti po hladilnih močeh niti po temperaturnem območju delovanja konkurent klasičnemu Peltierovemu hladilniku. Ker pa ohranja vse njegove dobre lastnosti, postaja pomembno dopolnilo klasičnim, v vesolju uporabljanim hladilnikom v temperaturnem območju nekaj 100 mK pri nekaj desetinkah nW hladilne moči.

2. Seebeckov in Peltierov pojav

Slika 1 prikazuje shemo sistema za študij Seebeckovega in Peltierovega pojava [1].

Stika c in d vodnikov A in B sta pri različnih stalnih temperaturah T_1 in T_2 . Na priključkih a in b izmerimo napetost $\Delta U = U_b - U_a$. Seebeckov koeficient je definiran kot:

$$S_{AB} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta T}. \quad (1)$$



Slika 1. Električni krog, sestavljen iz dveh različnih materialov (A in B), katerih stika sta pri različnih temperaturah (T_1 in T_2).

Tako definiran Seebeckov koeficient je relativna količina, saj se nanaša na par različnih materialov. Seebeckov koeficient je temperaturno odvisen. Ker pa so obravnavane temperaturne razlike (nekaj K) bistveno manjše od absolutne temperature ($200 - 300K$), to odvisnost lahko zanemarimo. Ugodno je definirati absolutni Seebeckov koeficient:

$$\vec{E} = S \nabla T \quad \Rightarrow \quad -\nabla U = S \nabla T, \quad (2)$$

pri čemer je $\vec{E}$ jakost električnega polja v snovi, ∇T pa gradient temperature v isti snovi. S , absolutni Seebeckov koeficient, je torej tenzorska količina. V resnici je enačba (2) nekoliko nenatančna, saj zanemarija kontaktno napetost, ki je posledica izravnave kemijskih potencialov na stiku kovin. Ker pa je kemijski potencial funkcija stanja, se po integriranju po celem tokokrogu njegovi prispevki odštejejo. Začetna napačna predpostavka se po integraciji tako izniči. Zvezo med relativnim in absolutnim Seebeckovim koeficientom dobimo najlažje, če enačbo (2) prepišemo ob predpostavki, da sta vodnika A in B kubično simetrična:

$$dU = -SdT. \quad (3)$$

Za razliko napetosti, ki jo izmerimo med točkama a in b velja:

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_b - U_a = (U_b - U_c) + (U_c - U_d) + (U_d - U_a) = \\ &= \int_c^b dU + \int_d^c dU + \int_a^d dU = - \int_c^b S_B dT - \int_d^c S_A dT - \int_a^d S_B dT = \\ &= - \int_{T_2}^{T_1} S_B dT - \int_{T_1}^{T_2} S_A dT = \int_{T_1}^{T_2} (S_B - S_A) dT. \end{aligned} \quad (4)$$

Če zadnjo enačbo primerjamo z enačbo (1), dobimo enostavno povezavo relativnega Seebeckovega koeficienta z absolutnimi:

$$S_{AB} = S_B - S_A. \quad (5)$$

Za opazovanje Peltierovega pojava v krogu s slike 1 med točki a in b priključimo napetost U , ki požene električni tok z gostoto j_E . Ker se začne eden od stikov vodnikov hladiti, drugi pa segrevati, teče poleg električnega tudi toplotni, Peltierov, tok (j_P). Zveza med obema tokovima je naslednja:

$$j_P = \Pi_{AB} j_E. \quad (6)$$

Relativni Peltierov koeficient Π_{AB} je z absolutnimi v podobni zvezi kot Seebeckov koeficient:

$$\Pi_{AB} = \Pi_B - \Pi_A. \quad (7)$$

Seebeckov in Peltierov pojav sta inverzna križna transportna pojava. Z upoštevanjem Onsagerjeve teorije o križnih transportnih pojavih dobimo zvezo med Seebeckovim in Peltierovim koeficientom, tako imenovano Kelvinovo relacijo [2]:

$$\Pi = TS. \quad (8)$$

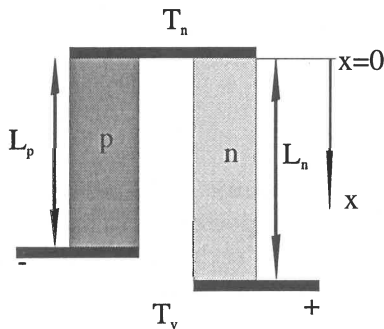
Razumljivo je, da se ob Peltierovem pojavu vedno splešča študirati tudi Seebeckov pojav in obratno. Iz enačb (6) in (8) je razvidna analogija Peltierovega s klasičnimi hladilniki. Zaradi očitne temperaturne odvisnosti Peltierovega koeficienta je toplotni tok skozi toplejši stik večji od toplotnega toka skozi hladnejši stik. Razliko med tokovima doda v časovni enoti opravljeno električno delo.

3. Peltierovo hlajenje

Peltierov hladilnik je naprava, ki izkorišča Peltierov pojav za hlajenje. En stik dveh različnih prevodnikov je povezan z objektom, ki ga želimo hladiti, drugi pa je zunaj hlajenega sistema in prečrpano toploto na časovno enoto (moč) oddaja v okolico (slika 2). Poleg ustrezne smeri električnega toka je najpomembnejša izbira materialov za vodnike. Ker sta predznaka Seebeckovega in Peltierovega koeficienta odvisna od predznaka nosilcev naboja, je iz enačbe (7) razvidno, da je zelo ugodno, če sta predznaka nosilcev naboja v različnih vejah tokokroga nasprotna – različno dopirana polprevodnika sta torej idealna izbira. Seveda šele kvantitativna obravnava Peltierovega hladilnika pokaže, kako naj bo le-ta zgrajen, da bo njegov učinek optimalen.

3.1. Termodinamski opis Peltierovega hladilnika

Na sliki 2 sta navpični veji električnega kroga označeni s p in n . V veji p so nosilci naboja pozitivno predznačeni (vrzeli), v veji n pa negativno (elektroni). Tako je doseženo, da električni tok vedno prispeva k toplotnemu toku v smeri od zgoraj navzdol, to je od nižje temperature (T_N) k višji (T_V) oziroma v smeri, nasprotni toplotnemu toku zaradi prevajanja toplote po polprevodnikih p in n . Nosilci naboja, ki prenašajo tudi energijo, namreč v obeh vejah potujejo s hladnejše na toplejšo stran. Dolžina vodnika p je L_p , njegov prečni presek pa A_p , dolžina vodnika n je L_n , njegov prečni presek pa A_n . Koordinato x



Slika 2. Shema Peltierovega hladilnika

štejem od $x = 0$ na hladnem stiku navzdol. λ_p in λ_n sta toplotni prevodnosti, ρ_p in ρ_n pa specifični električni upornosti p in n dopiranih polprevodniških vej Peltierovega hladilnega elementa.

Toplotni tok, prenesen s hladnega proti vročemu stiku, je v vejah p in n [3]:

$$P_{p,n} = \pm S_{p,n}IT - \lambda_{p,n}A_{p,n}\frac{\partial T}{\partial x}. \quad (9)$$

V obeh polprevodnikih se zaradi električnega toka sprošča Joulova toplota, ki se, če zanemarimo izgube v okolico, prevaja po vodnikih. Na časovno enoto in na enoto dolžine tokovodnika se sprosti sledeča količina Joulove toplote, ki ji je dodan še prirastek toplotnega toka, ta je posledica električnega dela, porabljenega za Peltierov pojav:

$$\frac{dP_{p,n}}{dx} = \frac{I^2\rho_{p,n}}{A_{p,n}} \pm S_{p,n}I\frac{dT}{dx} = -\lambda_{p,n}A_{p,n}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \pm S_{p,n}I\frac{dT}{dx}. \quad (10)$$

Enačbo (10) integriramo in upoštevamo vrednost odvoda dT/dx pri $x = L_{p,n}/2$. Dobimo:

$$\lambda_{p,n}A_{p,n}\frac{dT}{dx} = -\frac{I^2\rho_{p,n}(x - \frac{L_{p,n}}{2})}{A_{p,n}} + \frac{\lambda_{p,n}A_{p,n}(T_V - T_N)}{L_{p,n}}. \quad (11)$$

Enačbi (9), zapisani pri $x = 0$ in $T = T_N$ (hladni stik), sta sedaj takšni:

$$P_{p,n} = \pm S_{p,n}IT_N - \frac{I^2\rho_{p,n}L_{p,n}}{2A_{p,n}} - \frac{\lambda_{p,n}A_{p,n}(T_V - T_N)}{L_{p,n}}. \quad (12)$$

Hladilna moč, to je neto moč, ki se prenaša od hladnega k toplemu stiku, je vsota moči, ki se prenašata po obeh polprevodniških vejah Peltierovega hladilnika:

$$P_h = P_p + P_n = (S_p - S_n)IT_N - K(T_V - T_N) - \frac{I^2R}{2}. \quad (13)$$

Pri tem je $K = \frac{\lambda_p A_p}{L_p} + \frac{\lambda_n A_n}{L_n}$, električna upornost pa $R = \frac{L_p \rho_p}{A_p} + \frac{L_n \rho_n}{A_n}$.

Če želimo izračunati učinkovitost hladilnika, potrebujemo tudi podatek o porabljeni električni moči. Ta je sestavljena iz moči, porabljene za Peltierov pojav, in Joulove moči:

$$\begin{aligned} P_{el.p} &= S_p I(T_V - T_N) + \frac{I^2 \rho_p L_p}{A_p} \\ P_{el.n} &= -S_n I(T_V - T_N) + \frac{I^2 \rho_n L_n}{A_n} \end{aligned} \quad (14)$$

Celotna porabljena električna moč je seveda vsota moči, porabljenih v posameznih delih električnega kroga:

$$P_{el.} = P_{el.p} + P_{el.n} = I(T_V - T_N)(S_p - S_n) + I^2 R. \quad (15)$$

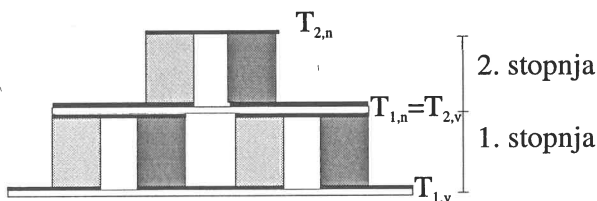
Učinkovitost hladilnika je definirana kot razmerje med prečrpano toplotno močjo in porabljeno električno močjo:

$$\phi = \frac{P_h}{P_{el.}} = \frac{(S_p - S_n)IT_N - K(T_V - T_N) - \frac{I^2 R}{2}}{(S_p - S_n)I(T_V - T_N) + I^2 R}. \quad (16)$$

3.2. Izdelava Peltierovega hladilnika

Tudi pri izdelavi Peltierovega hladilnika je treba vnaprej vedeti, v kakšne namene bo hladilnik uporabljan. Najpomembnejša podatka za načrtovanje priprave sta moč, ki naj bi jo hladilnik črpal, in temperaturna razlika, ki naj bi jo ustvaril. Če poznamo še temperaturno območje, v katerem naj bi hladilnik deloval, lahko izberemo najustreznejše materiale, določimo najprimernejšo obliko hladilnika in izračunamo njegove geometrijske lastnosti tako, da bo izdelana naprava čimbolj ustrezala zahtevam [4].

Velikokrat se izkaže, da hladilnik z lastnostmi, opisanimi z enačbami (13) in (16), ne bo ustvaril želene temperaturne razlike med hladno in toplo stranjo. V takem primeru je treba skonstruiranemu hladilniku dodati vsaj še eno stopnjo, ki bo postavljena tako, da bo s svojo hladno stranjo ohlajala toplo stran tega hladilnika. Takšen večstopenjski hladilnik imenujemo tudi kaskadni hladilnik (slika 3).



Slika 3. Dvostopenjski kaskadni hladilnik

Poleg vseh zahtev, ki veljajo za enostopenjski hladilnik, mora imeti prva stopnja dovolj veliko hladilno moč, da odvaja s hladne na toplo stran tudi vso moč, ki jo na svojo toplo stran prečrpa hladilnik druge stopnje. Hladilno moč za prvo stopnjo kaskadnega hladilnika zapišemo tako:

$$P_H = N_1(S_p - S_n)IT_{1,N} - N_1K(T_{1,V} - T_{1,N}) - \frac{N_1 I^2 R}{2} - N_2(S_p - S_n)IT_{2,N} + N_2K(T_{2,V} - T_{2,N}) - \frac{N_2 I^2 R}{2} \quad (17)$$

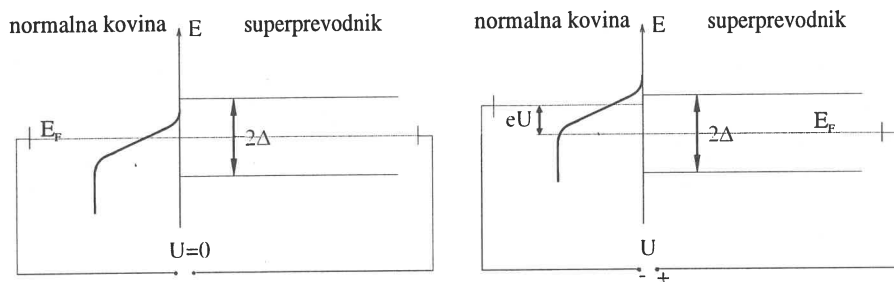
pri čemer N_1 pomeni število členov p - n v hladilni bateriji prve stopnje, N_2 pa v hladilniku druge stopnje (v našem primeru je $N_z = 1$). Skozi obe stopnji hladilnika teče enak električni tok, saj sta hladilnika povezana električno zaporedno. Za obe stopnji smo predpostavili tudi enaki konstanti K in R . Iz enačbe (17) je mogoče izračunati, pri kolikšnem številu členov bi hladilnik ravno izpolnil zahteve za hlajenje. Glede na želene lastnosti hladilnika seveda to število ustrezno povečamo.

4. Osnove elektronskega hlajenja

Selekcijo zgolj visokoenergijskih elektronov iz kovine na stiku kovine in polprevodnika omogoča energijska reža polprevodnika. Ta preprečuje prehod nizkoenergijskih elektronov v polprevodnik. Idejo klasičnih Peltierovih hladilnikov lahko torej razširimo še na druge znane materiale z energijsko režo – superprevodnike. Energijska reža je v tem primeru sicer približno tisočkrat ožja in tudi Fermijevega nivoja ne moremo premikati z dodatki dopantov. Kljub temu pa je mogoče s primerno kombinacijo normalnega prevodnika, izolatorja in superprevodnika (stik NIS) izdelati hladilnik, ki bo pri temperaturah okolice, nižjih od $1K$, ohladil elektrone normalne kovine.

Elektronskih hladilnikov ne opisujemo s termodinamskimi enačbami kot klasične Peltierove hladilnike. Mikroskopski opis pojava, ki ga uporabimo, je v tem primeru upravičen, ker je Seebeckov koeficient superprevodnikov enak nič. V primeru stika NIS bi sicer lahko ponovili račun, podoben tistemu za klasične Peltierove hladilnike, ker je Seebeckov koeficient normalne kovine različen od nič. V primeru stika $S'IS$, kjer sta s S' in s S označena superprevodnika z različnima širinama reže, pa termodinamskega računa ne moremo opraviti, hladilni efekt pa vendarle opazimo. Dodatni argument, ki govori v prid mikroskopski obravnavi pojava, so dodatni mikroskopski pojavi, ki močno vplivajo na hladilne lastnosti stika NIS in jih ne moremo opisati s termodinamskimi enačbami.

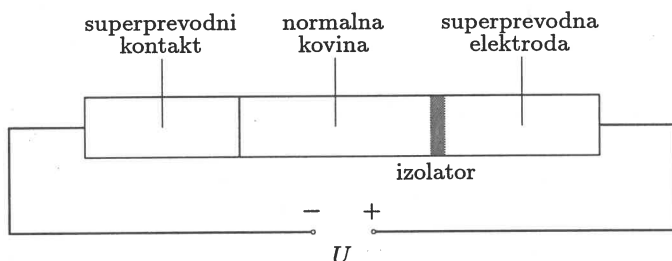
Delovanje elektronskega hladilnika lahko enostavno pojasnimo s skicami energijskih nivojev elektronov na stiku NIS v termičnem ravnovesju in ko je stik priključen na zunanjo napetost U (slika 4) [5]. Zaradi energijske reže superprevodnika lahko tunelirajo iz normalne kovine skozi izolator le visokoenergijski elektroni iz repa Fermi-Diracove porazdelitve. Brez zunanje napetosti se tokova v superprevodnik in iz njega takoj izenačita, vzpostavi se termično ravnovesje. Če pa z zunanjo uravnalno napetostjo U premaknemo energijske nivoje v normalni kovini ali v superprevodniku tako, da je Fermijev nivo normalne kovine poravnan z gornjim robom energijske reže superprevodnika (Δ), bo tuneliranje omogočeno vsem elektronom iz normalne kovine z energijami, višjimi od Fermijeve energije. Če bomo poskrbeli, da bodo elektrone, ki so prešli v superprevodnik, v normalni kovini nadomestili taki z nižjimi energijami, bo rep Fermi-Diracove porazdelitve postajal



Slika 4. Shema energijskih nivojev stika NIS v termičnem ravnovesju (levo) in ko je med normalno kovino in superprevodnik priključena napetost U (desno). Na levi sliki sta tokova v superprevodnik in iz njega enaka in se odštejeta, neto električni tok je enak nič. Napetost na desni sliki omogoči relativni premik energijskih nivojev tako, da je mogoče tuneliranje elektronov iz normalne kovine v superprevodnik. Električni in toplotni tok v superprevodnik sta večja kot tista iz njega, omogočeno je hlajenje elektronskega plina.

čedalje krajši, porazdelitev vse bolj stopničasta, z drugimi besedami, temperatura elektronov se bo nižala.

Opisani pojav je mogoč zato, ker so pri nizkih temperaturah elektroni in mrežna nihanja zelo šibko sklopljeni. Moč, ki se prenaša med omenjenima sistemoma, je linearno odvisna od volumna kovine V , bistveno močnejše pa od temperature elektronov T_e in fononov (mrežnih nihanj) T_f : $P = \Omega V (T_e^5 - T_f^5)$ [6]. Sorazmernostni koeficient Ω je materialna konstanta reda velikosti nekaj $\text{nWm}^{-3}\text{K}^{-5}$. Ker nastopajo zelo nizke temperature v petih potencah, je moč sklapljanja elektronov in mrežnih nihanj zanemarljivo nizka.



Slika 5. Shema elektronskega hladilnika

Shema elektronskega hladilnika je prikazana na sliki 5. Na njej je poleg stika NIS razviden tudi superprevodni kontakt, ki skrbi za to, da je električni tokokrog pravilno sklenjen. Skozi stik normalne kovine in superprevodnika (NS stik) prehajajo iz superprevodnika Cooperjevi pari, ki se v normalni kovini obnašajo kot običajni elektroni s povprečno Fermijevo energijo. Tak prehod poteka nemoteno, prehod visokoenergijskih elektronov pa je močno oviran. Odboj Andreeva [7], kot se pojav imenuje, torej omogoča električni tok skozi tak stik, preprečuje pa toplotni tok.

V praksi se stik NS ne obnaša kot idealni električni prevodnik in hkrati kot idealni toplotni izolator. Bilanco stika kvari predvsem tok pod energijsko režo superprevodnika. Zato se stik NS običajno nadomesti z dodatnim stikom NIS, ki mora biti z zunanjo napetostjo uravnan tako, da sta poravnana Fermijev nivo normalne kovine in spodnji rob energijske reže superprevodnika. Takšen SINIS hladilnik ima dvakrat večjo hladilno moč od hladilnika s slike 5 pa še zniževanja hladilne moči zaradi neidealnega NS stika se ni bati.

4.1. Električni tok in hladilna moč stika NIS

Poglavitna lastnost vsakega hladilnika je njegova hladilna moč: moč, ki jo hladilnik črpa s svoje hladne na svojo toplo stran. Pri NIS hladilniku je ta moč tesno povezana s tunelskim električnim tokom skozi stik NIS.

Na sliki 4 vidimo, da bomo hladili elektrone normalne kovine, če bodo elektroni iz repa Fermi-Diracove porazdelitve tunelirali skozi potencialno oviro (izolator) v superprevodno elektrodo. Električni tok bo torej sorazmeren številu elektronov v normalni kovini in številu prostih mest nad režo v superprevodniku, sorazmernostni faktor pa bo verjetnost za tuneliranje. Ker nas zanima neto električni tok, je treba na podoben način upoštevati električni tok iz superprevodnika v normalno kovino in prispevka odšteti. Tako pridemo do izraza:

$$I = \int P g_N(E - eU) g_S(E) [f(E - eU) - f(E)] dE. \quad (18)$$

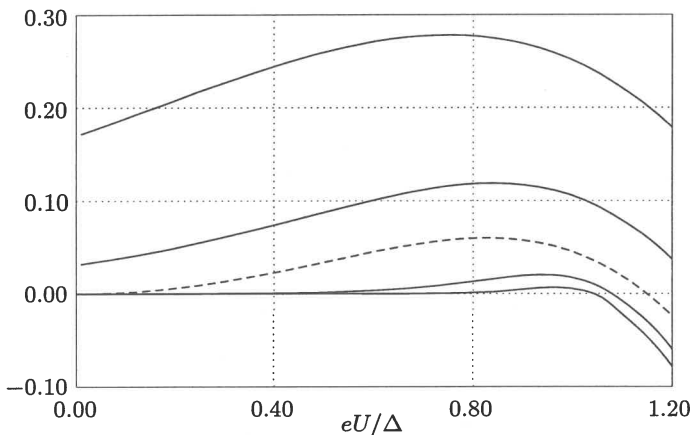
Z g_N in g_S sta označeni gostoti stanj v normalni kovini in v superprevodniku, s $f(E)$ je označena Fermi-Diracova zasedenost stanj, s P pa verjetnost za tuneliranje elektrona skozi izolator. Zaradi nizkih temperatur, pri katerih deluje takšen hladilnik, lahko gornji izraz poenostavimo, če predpostavimo, da so vsa elektronska stanja nad režo superprevodnika nezasedena ($f(E) \approx 0$). Nizke temperature tu pomenijo temperature, ki so precej pod temperaturo prehoda v superprevodno stanje. Pri v te namene najpogostejše uporabljanem aluminijevem filmu, na primer, je prehod pri 1.4 K. Ker se vse zanimivo dogajanje vrti v bližini Fermijeve energije (spet zaradi nizkih temperatur; $k_B T \ll E_F$), lahko predpostavimo še to, da sta gostoti stanj v normalni kovini in v superprevodniku, ko je ta v nesuperprevodnem stanju, konstantni. Podobno je glede verjetnosti za tuneliranje. Faktor, ki ga k gostoti stanj nesuperprevodnega materiala doda teorija BCS ob prehodu v superprevodno stanje ($\frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}$, ko za ničlo energije izberemo Fermijevo energijo, kar naj velja v vseh nadaljnjih računih), je zaradi izrazite energijske odvisnosti seveda treba integrirati. Ko upoštevamo še Ohmov zakon in uvedemo upornost tunelskega stika $R_N = 1/ePN_NN_{NS}$, pri čemer je N_{NS} gostota stanj superprevodnika, ko je ta v nesuperprevodnem stanju, dobimo

praktično uporabnejši izraz:

$$I = \frac{1}{eR_N} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} f(E - eU) dE \quad (19)$$

Popolnoma enak razmislek in zelo podoben račun moramo narediti pri izračunu hladilne moči hladilnika. Kot dodaten faktor je treba upoštevati še razliko med energijo, ki jo vsak tunelirajoči elektron prenese iz normalne kovine v superprevodnik E , in energijo eU , ki jo v normalno kovino prinese nov elektron iz superprevodnega kontakta (enačba (20)). Rezultati izračunov, opravljenih pri različnih temperaturah stika NIS, so prikazani na sliki 6.

$$P_H = \frac{1}{e^2 R_N} \int_{\Delta}^{\infty} (E - eU) \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} f(E - eU) dE \quad (20)$$



Slika 6. Brezdimenzijska moč v odvisnosti od brezdimenzijske napetosti na stiku NIS za različne temperature stika; od spodaj navzgor: $T/T_C = 0.05, 0.1, 0.3, 0.5$. Rezultati poenostavljenega izračuna odvisnosti, zapisane v enačbi (20), so predstavljeni s polno črto. S črtno krivuljo je prikazana natančneje izračunana hladilna moč pri temperaturi stika $T/T_C = 0.3$. Pri dovolj velikih napetostih lahko iz normalne kovine tunelirajo elektroni z energijami, nižjimi od eU (slika 4), ki jih nadomestijo elektroni z energijami, v povprečju enakimi eU . Posledica so negativne hladilne moči oziroma gretje kovinske elektrode.

Tako električni tok kot hladilna moč imata pri višjih temperaturah neničelne vrednosti tudi, ko na stiku ni nobene uravnavne napetosti. To je seveda nemogoče, saj je v termičnem ravnovesju tunnelski tok v obe smeri enak – neto električni in toplotni tok sta nič. Napaka je posledica predpostavke, da so vsa mesta nad režo superprevodnika prazna. To je res le pri nizkih temperaturah. Pri višjih pa je tam toliko vzbujenih elektronov, da postane prispevek električnega ali toplotnega toka k celotnemu toku nezamisljiv. Enačbi (19) in (20) postaneta nekoliko bolj zapleteni, integriranje nekoliko dolgotrajnejše, rezultat (črtna krivulja na sliki 6) pa je pravilen.

5. Podobnosti

Kljub neprimerljivim temperaturnim območjem delovanja in neprimerljivim hladilnim močem klasičnega Peltierovega hlajenja in elektronskega hlajenja nam primerjava mehanizmov delovanja pokaže, da sta obe vrsti hladilnikov v bližnjem sorodstvu.

V obeh primerih uporabljamo kot enega od dveh različnih materialov material z energijsko režo (polprevodnik oziroma superprevodnik). Ta omogoči selektivno črpanje zgolj visokoenergijskih elektronov iz drugega materiala v tokokrogu.

Hladilne lastnosti obeh vrst hladilnikov optimiziramo s premikom Fermijevega nivoja v enem materialu glede na drugega: v klasičnem Peltierovem hladilniku dosežemo to z dopiranjem polprevodnikov, v elektronskem hladilniku pa z izolatorsko plastjo in z zunanjo napetostjo.

In končno, tokokroga v obeh primerih sklenemo simetrično, tako da električni tok na eni strani priteka v hladilnik, na drugi pa odteka iz njega, medtem ko toplotni tok odteka na obeh straneh vezja [8].

6. Zaključek

Iz izračunanih brezdimenzijskih podatkov zlahka ocenimo električne tokove in hladilne moči elektronskih hladilnikov. Električni tokovi jakosti nekaj 10 nA in hladilne moči nekaj desetink nW so tako nizki, da jasno kažejo na uporabo v res specifičnih primerih. Vendar je znižanje temperature elektronov v kovinskem lističu z volumnom nekaj sto μm^3 za nekaj sto mK v temperaturnem območju pod 1 K za bolometerske lastnosti tega lističa tako blagodejno, da so elektronski hladilniki zelo perspektivna oblika tako imenovanih nanohladilnikov kljub relativno zapleteni izdelavi. Naj omenimo, da je hlajenje elektronov zgolj prvi korak. Kljub šibki sklopitvi elektronov in mrežnih nihanj [6] je vendarle treba čimbolj ohladiti tudi te, da se zares ohladi celoten bolometerski senzor. Ta cilj je moč doseči z optimizacijo geometrijskih in materialnih konstrukcijskih lastnosti hladilnika [9].

Klasični Peltierovi hladilniki s hladilnimi močmi od nekaj desetink W do nekaj W pri električnih tokovih nekaj A so relativno razširjeni tudi v vsakdanjem življenju, čeprav je učinkovitost, ki znaša nekaj odstotkov, premajhna, da bi bili resen konkurent običajnim, kompresorskim hladilnikom.

V praksi se seveda tako pri klasičnih kot pri elektronskih Peltierovih hladilnikih pojavlja veliko problemov. Vsem so skupni različni, tako imenovani parazitski viri toplote, ki že tako nizke učinkovitosti še znižujejo. Pri klasičnih Peltierovih hladilnikih je tako največjo pozornost treba nameniti Ohmski upornosti stikov med polprevodniki in veznimi prevodnimi ploščicami ter dobri toplotni prevodnosti med posameznimi stopnjami kaskadnih hladilnikov. Pri hladilnikih z NIS stiki sta poglobitna vira neželene

toplote tvorba Cooperjevih parov oziroma kondenzacijska energija, ki se pri tem sprosti, in povratno tuneliranje visokoenergijskih elektronov iz superprevodnika nazaj v elektrodo iz normalne kovine. Trenutno se zdi, da so ti glavni problemi Peltierovega hlajenja razumljeni, do dokončne optimizacije hladilnikov v praksi pa je seveda še dolga pot.

LITERATURA

- [1] H. J. Goldsmid, *Electronic Refrigeration*, Pion Ltd., London 1986.
- [2] I. Kuščer, S. Žumer, *Toplota*, DMFA in ZOTKS, Ljubljana 1987.
- [3] B. Jug, *diplomsko delo*, Ljubljana, 1995.
- [4] T. C. Harman, J. M. Honig, *Thermoelectric and Thermomagnetic Effects and Applications*, Mc Graw-Hill Book Company, New York 1967.
- [5] L. Solymar, *Superconductive Tunneling and Applications*, Chapman and Hall, London 1972.
- [6] F. C. Wellstood, C. Urbina, J. Clarke, *IEEE Trans. Magn.* **25** (1989), 1001.
- [7] A. F. Andreev, *Sov. Phys. JETP*, **19** (1964), 1228.
- [8] M. M. Leivo, J. P. Pekola, D. V. Averin, *Appl. Phys. Lett.* **68** (1996), 1996.
- [9] A. J. Manninen, M. M. Leivo, J. P. Pekola, *Appl. Phys. Lett.* **70** (1997), 1885.

NOVE KNJIGE

Apostolos Doxiadis: Uncle Petros and Goldbach's Conjecture, Faber and Faber, London 2000, 211 strani.²

Avtor opisuje življenjsko pot svojega (izmišljenega) strica matematika Petrosa Papachristosa. Kot matematični talent je študiral na eni najboljših univerz v ZDA, po krajšem praktičnem delu med prvo svetovno vojno se je posvetil študiju teorije števil. Predvsem ga je zanimala 250 let stara Goldbachova hipoteza, da je vsako sodo število, večje od 2, vsota dveh praštevil. Hipoteza še sedaj navkljub preprostosti trditve ni dokazana. Po krajšem uspešnem sodelovanju s Hardyjem in Littlewoodom je postal redni profesor analize na univerzi v Münchnu. Goldbachova hipoteza ga je povsem prevzela, vse svoje talente je posvetil njenemu dokazu. Pomembnih delnih rezultatov ni objavil, v strahu, da bi ti pomagali komu drugemu do dokaza hipoteze. Njegova vnema je že mejila na obsedenost. V tridesetih letih je slučajno izvedel za rezultate Kurta Gödla, ki je dokazal, da obstajajo v teoriji števil pravilne trditve, ki se ne dajo dokazati. Stric Petros se je pozanimal pri Gödlu, ali se za konkretno trditev (npr. Goldbachovo hipotezo) da ugotoviti, ali je dokazljiva ali ne. Tega Gödel ni vedel. Stric

² Ta knjiga je bila omenjena tudi v članku P. Potočnika, objavljenem v Preseku 28 (2000/01), 106–107.

Petros je za svoj neuspeh, da ni mogel potrditi Goldbachove hipoteze, krivil domnevo, da je Goldbachova hipoteza pač ena od nedokazljivih trditev teorije števil. Pač pa je matematik Alan Turing kmalu dokazal, da se za nedokazano trditev ne da ugotoviti, ali je dokazljiva ali ne. To je bil še zadnji udarec; zaradi obupa nad svojim delom in bližajoče se druge svetovne vojne je stric Petros zapustil univerzo v Münchnu, se preselil v Atene in se posvetil negovanju vrta in sadovnjaka ter igranju šaha.

Avtor kot nečak je v srednji šoli kazal matematični talent. Stric Petros mu je rekel, naj poskusi v počitnicah dokazati Goldbachovo hipotezo, le da imena ni omenil, tudi ni povedal, da je to stoletja star nerešen problem. Če ga nečak ne bo rešil, naj pokoplje misel na študij matematike. Nečak je šele na univerzi spoznal stričevo nenavadno vedenje. Kot diplomirani ekonomist z nekaj semestri študija matematike je strica, že precej ostarelega, skušal pripraviti do spoznanja, da je prezgodaj obupal. Stric je reagiral tako, da se je spet začel ukvarjati z dokazom hipoteze, vendar je pri tem dokončno izgubil duševno zdravje in tudi z izjavo, da je našel rešitev, preminil.

Roman opisuje talentiranega matematika, ki je vse svoje življenje posvetil reševanju enega samega, slavnega problema. Razlog za tak odnos je ekstremna Petrosova življenjska filozofija: ali rešiš kakšen slaven nerešen problem in si prvi med matematiki, gotovo tudi prejemnik Fieldsove medalje (če nisi starejši od 40 let), ali pa si eden od mnogih, nepomemben, neuspešnež. Ko se je upanje v rešitev podrlo, se je tudi Petros sesul vase.

Knjiga je napisana zanimivo, pozornost bralca vse do konca ne popusti. Priporočam jo v branje za razvedrilo, pa tudi v svarilo.

Anton Suhadolc

VESTI

MAG. MARIJA VENCELJ – OB ŠESTDESETLETNICI

Nedavno je mag. Marija Vencelj praznovala lep življenjski jubilej, skoraj istočasno pa je tudi končala predavateljsko kariero na Oddelku za matematiko in mehaniko, ki ji je posvetila dobrih 37 let svojega življenja.

Rojena je bila 3. januarja 1941 v Kranju, kjer je tudi dobila srednješolsko izobrazbo. Na univerzi je bila skupaj s prof. Jožetom Vrabcem prva generacija nepedagoške smeri matematike, ki se je tedaj imenovala tehnična matematika. Po diplomu z odliko, za katero je prejela tudi študentsko Prešernovo nagrado, je bila krajši čas, kot mnogi drugi matematiki, zaposlena na inštitutu J. Stefan, do izvolitve za asistentko. V tistem času so tudi v Ljubljano prišli računalniki, z njimi pa potreba po računalniških znanjih in po numerični matematiki. Kot skoraj vsi matematiki na Oddelku za matematiko in mehaniko je tudi ona plačala davek tej

novosti, kar se vidi tudi iz bibliografije: trije članki z omenjenih področij in sodelovanje pri štirih raziskovalnih nalogah.

Pozneje se je ukvarjala z algebro, posebno v času strokovnega izpopolnjevanja v Nancyju; z analizo, s topologijo, posebno v času magistrskega študija na zagrebški univerzi; takrat namreč v Ljubljani še ni bilo magistrskega študija iz matematike. Po odlično opravljenem magisteriju leta 1970 se je povsem posvetila vzgoji študentov pedagoške smeri matematike. Po izvolitvi za predavateljico Elementarne matematike z metodiko leta 1975 je vodila tudi seminarje za študente pedagoške smeri, organizirala in vodila nastope študentov v osnovnih in srednjih šolah, poleg tega je predavala matematiko študentom agronomije, farmacije, montanistike, tekstilne tehnologije, psihologije in še katerim.

Poleg šolskih dolžnosti je pogosto predavala na seminarjih za srednješolske profesorje in dijakom v okviru matematičnih krožkov. Pedagoško delo je razvidno tudi iz bibliografije: sodelovala je pri pisanju dveh visokošolskih učbenikov, sodelovala pri šestih raziskovalnih nalogah, pisala recenzije srednješolskih učbenikov in zbirk nalog, nedavno pa je spisala vzorne učbenike za vse tri letnike triletnih poklicnih šol. Zato moremo uvrstiti kolegico Venclejo v nadaljevalko tradicije piscev učbenikov, od Močnika, Hočevarja, Zupančiča do Križaniča, Legiša, da omenim le najpomembnejše. Kot ena glavnih učiteljev študentov pedagoške smeri je pod njenim vodstvom izdelalo diplomsko delo več kot 20 študentov.

Prav tako intenzivno si je prizadevala za popularizacijo matematike. Že od leta 1991 je urednica *Preseka*, kar ji gotovo jemlje ogromno časa, daje pa tudi zadovoljstvo ob opravljanju koristnega dela. Za *Obzornik za matematiko in fiziko* in za *Presek* je spisala precej več kot sto strokovnih prispevkov, nalog, vprašanj in ugank. Za delo v okviru Društva matematikov, fizikov in astronomov je ob petdesetletnici društva prejela jubilejno nagrado.

Pred nekaj leti se je preselila v napol izdelano stanovanje v okolici Ljubljane. Pri dokončni izdelavi, opremljenosti in urejanju okolice je naša slavljenska pokazala še druge talente, kot se lahko obiskovalec sam prepriča: postala je pravi strokovnjak za urejanje vrta.

Z odhodom v pokoj izredno bogata dejavnost slavljenske ni zamrla. Še vedno je urednica *Preseka* in ena od njegovih pomembnejših avtorjev. Sprejela je tudi pisanje novih srednješolskih učbenikov, na vrtu in v hiši pa se delo tako nikoli ne konča.

Želimo ji dobrega zdravja, da bo mogla nadaljevati s plodnim delom še vrsto let.

Anton Suhadolc

ANDREJ PERLAH – 450. OBLETNICA NJEGOVE SMRTI

MARIJAN PROSEN

Math. Subj. Class. (2000): 01A70

Humanist slovenskega rodu Andrej Perlah (Andreas Perlachius Stirus-Štajerski, 17. 11. 1490–11. 6. 1551), rojen v Svečini nad Mariborom, profesor matematike in medicine na dunajski univerzi, njen rektor ter ugleden zdravnik, je spisal vrsto sestavkov in knjig astronomske vsebine. Izdajal je astronomske efemeride, almanahe in letopise, v katerih je tabelarično prikazal izračunane lege vesoljskih teles za vsak dan v letu.

ANDREJ PERLAH – THE 450th ANNIVERSARY OF HIS DEATH

The Slovene humanistic intellectual Andrej Perlah (Andreas Perlachius Stirus, 1490–1551) from Svečina near Maribor, professor of mathematics and medicine at Viennese university, its rector, and distinguished doctor, wrote a series of articles and books with astronomical contents, for instance ephemeris, almanachs and chronicles.

Že pred N. Kopernikom (1473–1543) smo imeli Slovenci vsaj tri astronome¹, ki so se bolj ali manj proslavili v kulturnem prostoru tedanje Evrope [1]. Med njimi je za našo astronomijo najpomembnejši A. Perlah. Razpet med eksaktnimi vedami in medicino se pojavlja kot naš prvi astronom, ki nam je zapustil tiskana dela [1], [5].

V Perlahovem času je bil še vedno v veljavi poldrugo tisočletje star Ptolemejev geocentrični sistem. Na osnovi tega sistema so astronomi lahko spremljali gibanje Sonca, Lune in planetov, napovedovali Sončeve in Lunine mrke ter določali zemljepisne koordinate (zemljepisno dolžino in širino) krajev na Zemlji. Za takšno uporabo astronomije sta poskrbela matematika in astronom G. Purbach (1423–1461) in njegov učenec J. Müller-Regiomontanus (1436–1476), ki sta bila oba profesorja na dunajski univerzi. V latinščino sta prevedla in priredila Ptolemejev *Almagest*, izpopolnila astronomske (kotomerne) instrumente, izdelala računske metode in tako opremljena opravila številna opazovanja Lune, Sonca, planetov in mrkov. Iz opazovanj sta ugotovila, da imajo stare astronomske tabele (npr. Alfonzove iz 13. stol.) napako več kotnih stopinj. To v praksi npr. pomeni, da v napovedanem trenutku leži planet Mars za ,več Lun' stran od njegove resnične lege, ali pa, da kak mrk nastopi tudi kakšno uro kasneje, kot je bil napovedan. Na podlagi opazovanj sta vnesla popravke in izdala nove, natančne tabele, v katerih so bile preračunane vsakodnevne lege vesoljskih teles. Te astronomske tabele sta imenovala efemeride. Izšle so v Nürnbergu 1474 kot prve tiskane astronomske tabele. V njih so bile izračunane dnevne

¹ Hermannus de Carinthia (Herman Koroški, 12. stol.), sholastični filozofski pisec, prevajalec arabskih in grških astronomskih del v latinščino; Johannes Lezicius (Janez Lezič, 13. stol.), ljubljanski ,zvezdogled'; Bernard Perger (1440–1502) iz Slovenskih goric, prof. latinščine in matematike (z astronomijo) na dunajski univerzi in tudi njen rektor.

lege Sonca, Lune in planetov za obdobje od 1475 do 1506 in seznam mrkov za čas od 1475 do 1530 (menda sta jih uporabljala Kolumb in Vasco da Gama).

Purbach in Regiomontanus sta s svojim delom pomembno vplivala na dunajsko matematično-astronomsko šolo in tako tudi na Perlaho, ki je tudi izdajal take efemeride, sprva še pod pokroviteljstvom svojih učiteljev, pozneje pa vse bolj samostojno z vedno boljšimi in prikladnejšimi prikazi astronomskih podatkov.

Z astronomijo se je Perlah začel ukvarjati že kot študent. Prirejal je dela starejših avtorjev. Komaj leto dni po diplomu (1516), ko je dosegel artistično licenco in začel predavati matematiko in astronomijo na dunajski univerzi, je Perlah že objavil prve astronomske efemeride. V njih je čutiti vpliv njegovih učiteljev in predhodnikov. Naslov prvih efemerid je bil *Novi almanah za leto 1518*. Pozneje je izdal podoben almanah za leti 1519 in 1520.

Efemeride za leto 1529 so že samostojno delo. V njem se Perlah ne sklicuje več na preglednice svojih predhodnikov. Podaja originalne tabele, kjer najdemo podatke o medsebojni legi planetov in legi planetov glede na svetlejšje zvezde. Nato je izdal *Efemeride za leto 1531*, ki vsebujejo še Prognosticon. Verjetno je Perlah napisal še letopisa za leti 1528 in 1530 ter na novo objavil (priredil) Purbachove tabele mrkov. Leta 1551 pa so izšli znameniti *Komentarji Perlahovih efemerid*, njegovo zadnje delo (sliki 1 in 2). Tako letos poteka tudi 450 let od izdaje te za slovensko astronomijo vsekakor zelo pomembne knjige. Vse Perlahove knjige so napisane v latinščini in so izšle na Dunaju.

Slika 1. Naslovnica zadnje izdaje Perlahovih efemerid *Commentaria ephemeridum ... (Komentarji Perlahovih efemerid ...)*. To delo, ki se zdi tudi kot nekakšen učbenik, je izšlo 1551, vendar po Perlahovi smrti. Brez dvoma gre za najpomembnejše astronomsko delo, ki ga je kak Slovenec napisal v latinskem jeziku. En izvod tega dela hrani tudi NUK.

Perlah je konstruiral tudi nekaj kotomernih astronomskih instrumentov (med njimi astrolab in trikveter) in z njimi opazoval planet Merkur, kar je tedaj uspelo le maloštevilnim astronomom.

COMMENTARIA

EPHEMERIDVM CLARISSIMI VIRI D. ANDREÆ PERLACHII STIRI, MEDICAE ARTIS DOCTORIS, AC IN ACADEMIA Viennensi Ordinarij quondam Mathematici, ad vsũ studioforum ita fideliter conscripta, vt quisq; abiq; Praeceptore, ex solalectione intersuminde artem consequi possit.

*



Cum gratia & privilegio Imperialis Rom. Hung. & Boem. Regis, &c.

Impensis nobilibs. atque ornatiss. viri D. Jacobi Taurelli &c.

VIENNÆ AVSTRIÆ excudebat Egidius Aquila. Anno M. D. LI.

Poskusimo na kratko podati karakteristiko Perlahovega dela. Rekli bi lahko, da je v bistvu obnavljal, prirejal in razširjal učbenike svojih učiteljev in izdajal efemeride, almanahe in letopise z astronomsko, astrološko in medicinsko vsebino. Glede na tedanje običaje so takim publikacijam dodajali poglavje prognostica – prerokovanja (ugodne in pogubne napovedi iz medsebojnih leg vesoljskih teles), dolgoročne napovedi vremena in letine, napovedi in svarila pred vojskami, potresi in boleznimi, napotki za premagovanje najrazličnejših človeških tegob, pa tudi hvalnice kraljevski umetnosti astronomiji, ki zna posredovati vse te stvari. Zaradi številnih in različno uporabnih podatkov, koristnih navodil in zakoreninjenega verovanja v napovedi (tega je pri Perlahu manj kot pri drugih piscih podobnih publikacij) so bile te knjižice zelo priljubljene med ljudmi.

Slika 2. Zgornja polovica ene strani v *Komentarjih* (1551).

A Q V A R I V S ☽									
Diversitas latitudinis Lunæ.									
Distantia verā meridie	Signa argumenti ☽.								
		1	2	3	4	5			
	0						6		
Ho.	M.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
4	20								
4	0	45	46	48	50	52	53	54	
3	0	47	48	50	52	54	56	57	
2	0	49	50	52	54	56	57	58	
1	12	48	49	51	53	55	57	58	
		Nonages. gra. ab ascē.							
1	12	48	49	51	53	55	57	58	
1	0	48	49	51	53	55	57	58	
Meridies		45	46	48	50	52	54	55	
Post meridie	1	0	41	42	43	45	47	48	49
	2	0	37	38	39	40	42	43	44
	3	0	33	34	35	36	38	39	40
	4	0							
	4	20							

Pomen Perlahovega astronomskega dela v slovenskem pa tudi širše, v evropskem kulturnem prostoru je gotovo večji, kot danes mislimo². Njegovo delo še ni v celoti ovrednoteno. Čeprav Perlaha (najbrž še) ni prevevala ideja heliocentričnosti, lahko vseeno mirne duše zatrdimo: zapustil nam je tako obsežna in vsebinsko bogata astronomska dela, da ga imamo lahko za najpomembnejšega astronoma preteklosti, pravzaprav za začetnika naše astronomije.

LITERATURA

- [1] P. Simoniti, *Sloveniae scriptores latini recentioris aetatis. Opera scriptorum latinorum Sloveniae ...*, Ljubljana – Zagreb 1972.

² Kako priznan med matematiki je bil A. Perlah, pripoveduje tudi elegija, ki jo je ob Perlahovi smrti v elegantnih latinskih verzih napisal prigraden pesnik. V elegiji slavi pomembne dunajske matematike, med njimi tudi Perlaha. Navajamo nekaj vrstic te pesnitve (slovenski prevod v nevezani besedi):

... In ta, ki z doma svojega je vzel priimek – Janus Regiomontanus,
po svoji učenosti znan, saj glas mu segel je že do neba.

... In Stabius, ki ni bilo je vede, da zanjo ne bi bil nadarjen,
dela njegova premnoga pričajo tako.

... In Tannstetter (Pergerjev učitelj matematike) še, ne zadnji med tolikimi,
saj dela nas učijo, da bil zelo zelo je slaven.

... Nazadnje naš Andreas Perlach, velikan v tej sveti vedi,
ki ga pobrala še nedavno starčka, zla zavistna je usoda.

- [2] V. Murko, *Astronomi*, Zbornik za zgodovino naravoslovja in tehnike 2, Ljubljana 1974.
- [3] F. Dominko, *Astronomija – Slovenija SR*, Enciklopedija Jugoslavije (slovenska izdaja), št. 1, 327, Jugosl. leksikogr. zavod, Zagreb 1983.
- [4] M. Prosen, *Astronomija*, Enciklopedija Slovenije, št. 1 (1987), 124 in št. 8 (1994), 304, MK, Ljubljana.
- [5] M. Prosen, *Perlah kot astronom*, Časopis za zgodovino in narodopisje 62 – Nova vrsta, 2. zvezek (posvečeno A. Perlachu), 251, Obzorje, Maribor 1991.
- [6] Znanstveni simpozij ob 500-letnici rojstva A. Perlacha, 27. 10. 1990, Maribor.

VESTI

MATEMATIČNI KVIZ NA INTERNETU

Ideja

V okviru matematičnega leta 2000 so v Barceloni na Centre de Recerca Matematica organizirali matematični kviz. Potekal je 4. decembra 2000 po internetu na naslovu <http://www.mq2000.org>, tako da so lahko tekmovali matematiki (in drugi ljubitelji kvizov) z vseh koncev sveta. Vsi udeleženci kviza so tekmovali istočasno, pogoji za vse tekmovalce pa so bili enaki, saj se je organizator odločil, da kviz poteka nepretrgoma 24 ur. To pa pomeni, da smo si morali udeleženci priskrbeti zadostno količino kave oziroma zamenjavo za čas, ko smo imeli pretežke oči. Organizator je priporočal, da tekmuje skupina in ne le posameznik, saj so se vprašanja dotikala vseh področij matematike in le kdo danes pozna definicije glavnih pojmov iz vseh vej matematike, kaj šele, da bi znal rešiti nalogo.

Pravila

Osnovna ideja je slonela na igri štiri v vrsto. Ob prijavi je tekmovalec dobil kvadratno tablico s šestnajstimi polji, klik na posamezno polje pa je razkril vprašanje. Odgovarjal je lahko le na eno vprašanje naenkrat. Ko je tekmovalec zbral štiri pravilne odgovore v vrsto, stolpec ali eno od glavnih diagonal, je napredoval na naslednjo tablico. Da ne bi obtičal, sta bili na voljo še dve možnosti. Na naslednjo tablico je napredoval tudi, če je pravilno odgovoril na sedem vprašanj ali pa je pravilno odgovoril na štiri vprašanja in je od zadnjega pravilnega odgovora potekla ena ura. Za pravičen odgovor je tekmovalec dobil toliko točk, kot je bila trenutna vrednost tablice, za napačnega pa je izgubil četrtno vrednosti tablice. Poleg tega je bilo mogoče na vsaki tablici zavrtni dve vprašanji. Pomembno je bilo čim hitreje napredovati na naslednje tablice, saj je njihova vrednost naraščala kot Fibonaccijevo zaporedje. Tako je bilo vprašanje na prvi tablici vredno 1 točko, na peti 8 in na deseti že 89 točk. Težavnost vprašanj pa ni bila odvisna od tega, na kateri tablici je tekmovalec trenutno bil. Posledica takega točkovanja so bile velike razlike med tekmovalci. Zmagovalec, ki je bil, mimogrede, Katalonec, je tako zbral 925 točk, medtem ko jih je drugouvrščeni le 589.25. Naša najboljša ekipa je prišla do šeste

tablice z vrednostjo 13 in je na koncu dosegla trinajsto mesto z 91 točkami. Preostali dve sta se s približno 25 točkami uvrstili okrog dvajsetega mesta. Vseh tekmovalcev (torej ekip), ki so sploh poskusili odgovoriti na kakšno vprašanje, je bilo malo manj kot 200.

Vse odgovore je sprejemal in vrednotil računalnik, zato so organizatorji zelo natančno določili njihovo sintakso. Prvi poskus kviza, ki je bil 17. oktobra 2000, se je prav zato izjalovil. Računalniki namreč niso zmogli obvladati začetnega navala tekmovalcev. V drugo je sistem deloval brezhibno, če odmislimo, da so bili v računalniški bazi nekateri odgovori nepravilni. V podrobnejše opisovanje sintakse se ne bi spuščali, omenili bi le to, da so organizatorji objavili tudi seznam dovoljenih iracionalnih števil. Če je bil torej odgovor na vprašanje število, je bilo bodisi racionalno bodisi se je nahajalo na seznamu, kar nam je precej olajšalo seštevanje vrst in računanje raznih konstant.

Naloge

Naloge na kvizu so bile najrazličnejših težavnostnih stopenj. Za najlažje smo potrebovali vsega nekaj vrstic direktnega računa, ostro oko ali nekaj minut brskanja po internetu. Za težje pa je bilo treba precej več dela, tudi programiranja, brskanja po knjižnici ali iskanja pomoči po telefonu. Zgodilo se je tudi, da smo nad nalogo obupali. Zastopana so bila vsa področja matematike, relativno veliko vprašanj se je nanašalo na zgodovino matematike. Sledi nekaj primerov nalog:

1. Magična kocka sestoji iz števil tako razporejenih v obliko kocke, da je vsota v vsaki vrstici, vzporedni poljubnemu robu kocke, kot tudi vzdolž telesnih diagonal kocke konstantna. Denimo, da sestavimo magično kocko velikosti $4 \times 4 \times 4$ z zaporednimi lihimi števili 3, 5, 7, ... Kolikšna je vsota vzdolž telesne diagonale?

Rešitev: 264.

2. Južno steno Bietschorna, ki je zahteven vzpon v Švicarskih Alpah, je prvič preplezala dvojica alpinistov 21. avgusta 1947. Eden od članov naveze ni bil le prvovrsten alpinist, temveč tudi izvrsten matematik. Katerega leta je doktoriral?

Rešitev: 1931 (Georges de Rham).

3. Naj bo $(F_n)_n$ zaporedje Fibonaccijevih števil, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 1$. Izračunajte vsoti

$$\sum_{m=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{F_{2m+1}}, \quad \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{F_{2m}} - 1.$$

(To je primer naloge, za katero so kasneje organizatorji priznali „napako“. Vsota druge vrste namreč še ni znana. Najverjetneje so imeli organizatorji v mislih kakšno drugo vrsto, pa so napačno pretipkali predpis za

njen splošni člen.)

Rešitev: Vsota prve vrste je $\pi/4$.

4. Naj bo L poljubna krivulja iz določene družine krivulj. Za dani lok p krivulje L nad tetivo AB označimo s C točko na p , v kateri je tangenta na krivuljo vzporedna AB . Naj bo $\alpha(L) = T/S$, kjer je T ploščina trikotnika ABC in S ploščina območja med lokom p in tetivo AB . Dane so naslednje družine krivulj:
- a) elipse,
 - b) hiperbole,
 - c) parabole,
 - č) verižnice,
 - d) križnice (angleško „cross curves“ z enačbo $a^2/x^2 + b^2/y^2 = 1$),
 - e) kodri Marije Agnesi,
 - f) Eudoxove krivulje (angleško „Kampyles of Eudoxus“ z enačbo $a^2 x^4 = x^2 + y^2$).

Za katero izmed teh družin je število $\alpha(L)$ konstanta, neodvisna od L ? Določite to konstanto!

Rešitev: $c, 3/4$.

5. Neodvisni slučajni spremenljivki X_1 in X_2 naj imata enako porazdelitev. Ravno takšno porazdelitev naj ima tudi slučajna spremenljivka $(X_1 + X_2)/\sqrt{2}$. Kako je porazdeljena slučajna spremenljivka X_1 ?

Rešitev: X_1 je porazdeljena normalno.

6. Naj bosta A in B podmnožici v $\mathbb{R}^n$. Pravimo, da sfera $S = \{x : \|x - p\| = r\}$ strogo separira A in B , če je $A \subset \{x : \|x - p\| < r\}$ in $B \subset \{x : \|x - p\| > r\}$, ali $B \subset \{x : \|x - p\| < r\}$ in $A \subset \{x : \|x - p\| > r\}$.

Recimo, da sta A in B neprazni kompaktni podmnožici v $\mathbb{R}^n$. Potem obstaja sfera, ki strogo separira A in B natanko tedaj, ko za vsako končno podmnožico $T \subset A \cup B$ z največ $p(n)$ točkami obstaja sfera, ki strogo separira $T \cap A$ in $T \cap B$. Pri tem je p neki polinom, ki ga morate določiti.

Rešitev: $p(x) = x + 3$.

7. V dvorazsežnem realnem vektorskem normiranem prostoru E naj $\beta(E)$ pomeni obseg enotske krogle. Definirajmo

$$\alpha := \inf\{\beta(E) \mid E \text{ 2-razsežen, realen, normiran}\}$$

in

$$\beta := \sup\{\beta(E) \mid E \text{ 2-razsežen, realen, normiran}\}.$$

Določite α in β .

Rešitev: Naloge nam ni uspelo rešiti, vabimo pa bralce, da se z njo spoprimejo in nam sporočijo svoje rezultate.

Poleg avtorjev tega članka je bilo v naših treh ekipah še nekaj stalnih članov. Veliko pa je bilo pomočnikov, ki so nam prijazno dovolili, da jih lahko za pomoč povprašamo po telefonu, ali pa so se za krajši čas oglasili v naši „bazi“ na Fakulteti za računalništvo in informatiko v Ljubljani. V imenu vseh treh ekip se zahvaljujemo vsem, ki so nam kakorkoli pomagali pri reševanju nalog.

Gašper Fijavž, Aleš Vavpetič, Martin Vuk in Emil Žagar

VABILO

Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi vse matematike, fizike in astronome na

STROKOVNO SREČANJE IN 53. OBČNI ZBOR DRUŠTVA

ter

9. SLOVENSKO SREČANJE O UPORABI FIZIKE

ki bodo 18., 19. in 20. oktobra 2001 v Kranjski Gori v hotelu Kompas

Program:

9. slovensko srečanje o uporabi fizike

Četrtek, 18. 10. 2001

8.30–18.00 Registracija, predavanja, predstavitev plakatov

18.00 Okrogla miza

Strokovno srečanje in 53. občni zbor društva

Četrtek, 18. 10. 2001

15.00–19.30 Strokovno srečanje: prispevki udeležencev

Petek, 19. 10. 2001

9.00–20.00 Strokovno srečanje: vabljeni predavanja, prispevki udeležencev, okrogla miza o tekmovanjih

20.00 Večerja, družabni večer

Sobota, 20. 10. 2001

9.00 Občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

14.00 Izlet

Pregled vabljenih predavanj in prispevkov udeležencev ter dnevni red občnega zbora bosta objavljena kasneje. Podrobno vabilo k sodelovanju na 9. slovenskem srečanju o uporabi fizike si, prosimo, oglejte v tej številki Obzornika.

Prijave za udeležbo na strokovnem srečanju in 53. občnem zboru DMFA pošljite najkasneje do sobote, 6. oktobra 2001, na naslov:

Janez Krušič, DMFA Slovenije, Jadranska c. 19, 1000 Ljubljana.

Predsednik DMFA Slovenije:

Martin Čopič

VABILO

R 177/01



100000142,4

COB

Nacionalni komite za fiziko pri Društvu matemati
Slovenije vabi fizike iz industrije, inštitutov in dr

9. SLOVENSKO SREČANJE O UPORABI FIZIKE

v četrtek, 18. oktobra, v hotelu Kompas v Kranjski Gori.

Dve leti sta pretekli in v Nacionalnem komiteju za fiziko pri DMFA Slovenije spet pripravljamo tokrat že deveto slovensko srečanje o uporabi fizike. Kakor pred dvema letoma v Moravskih Toplicah bo tudi letošnje srečanje enodnevno, sicer pa vpeto v okvir strokovnih prireditev ob 53. občnem zboru DMFA Slovenije. Vabimo vas, da se letošnjega srečanja udeležite s svojim prispevkom in nam pomagata utrditi pomen fizikalnega znanja v slovenskem prostoru!

Letos bo v organizaciji srečanja nekaj sprememb. V pripravljalnem odboru smo ugotovili, da je bil na dosedanjih srečanjih program morda preveč natrpan, zmanjkalo pa je časa za osebne stike in pogovore. Zaradi tega bo letos na sporedu nekaj predavanj manj, v uvodnem delu srečanja pa bomo poslušali vabljeni predavanji dveh uveljavljenih slovenskih fizikov. Srečanje bomo sklenili s skupnim pogovorom o eni od tem, ki zanima fizike s področja aplikativnih raziskav in industrije.

Pripravljalni odbor srečanja

Matjaž Babič, Iskraemeco d. d., Kranj

Janko Lužnik, Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana

Igor Muševič, Inštitut Jožef Stefan, Ljubljana

Pričakujemo prispevke o uporabi fizike v industriji, na različnih področjih aplikativnih raziskav, pri razvoju novih metod, naprav ali materialov, pri določanju tehnoloških postopkov, v meroslovju in zagotavljanju kakovosti, v medicini in podobno. Prispevki naj poudarijo uporabno plat fizikalnih znanj v reševanju strokovnih problemov.

Avtorji, ki želijo sodelovati na srečanju s svojimi prispevki, naj pošljejo tri izvide povzetka prispevka na naslov predsednika pripravljalnega odbora

Matjaž Babič, Iskraemeco d. d., 4000 Kranj, Savska loka 4,
tel. (04) 2064624, fax. (04) 2064700

ali po elektronski pošti na naslov

matjaz.babic@rd.iskraemeco.si

Za ustno predstavitev bo na voljo 15 minut, avtorji pa lahko svoj prispevek pripravijo tudi v obliki posterja. Zbornik povzetkov bo pripravljen do pričetka srečanja. Vse informacije o srečanju najdete tudi na www2.arnes.si/~mbabic8/kr-gora.htm

Rok za oddajo povzetkov je ponedeljek, 24. september 2001!

Vabljeni v Kranjsko Goro!