

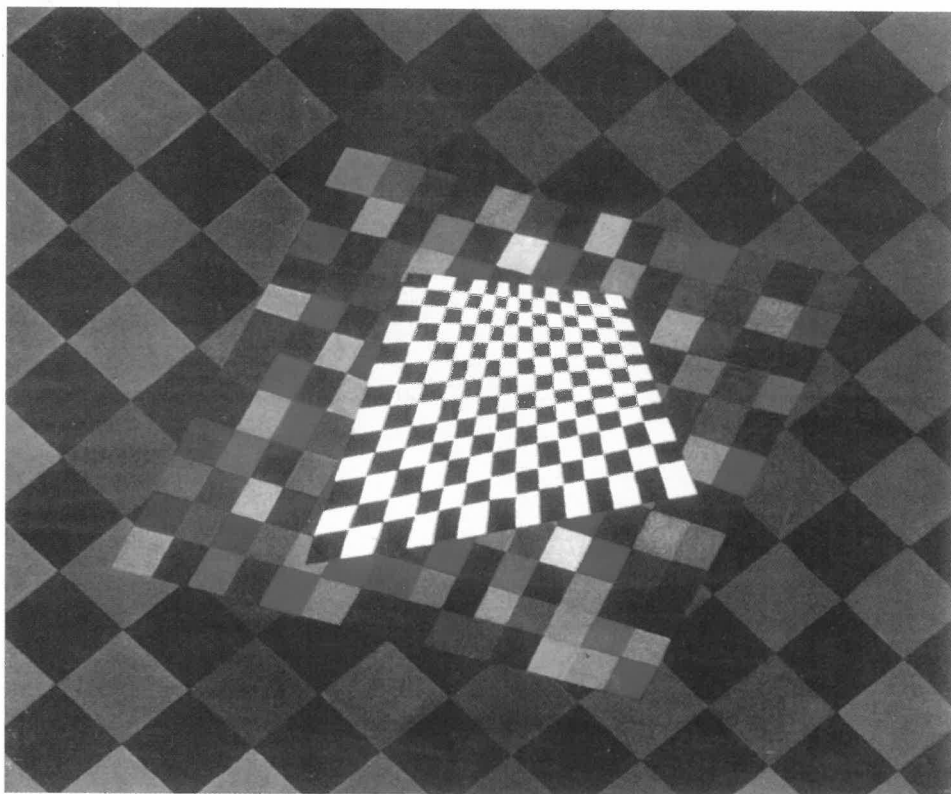
ODPISANO

2001

Letnik 48

3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 2001

letnik 48, številka 3, strani 65–92

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, telefon (01) 476-65-53, telefaks (01) 251-72-81, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d. d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 042961, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Martin Juvan (glavni urednik), Roman Drnovšek (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Boris Lavrič, Marko Zgonik (urednik za fiziko), Marjan Jerman (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Naročnina za člane društva je všteta v celoletno članarino, ki znaša 3600 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6600 SIT, za študente 1800 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 720 SIT, stare številke 480 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov. Revijo sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2001 DMFA Slovenije – 1460 Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

- Preštevane – osnovno in malo manj osnovno — Counting – basic and less basic (Primož Potočnik) 65–80
- Simetrije periodičnih vzorcev v ravnini — Symmetries of periodic patterns in the plane (Marko Kranjc) 82–91
- Med dvema ognjema? — Between two fires? (Janez Strnad) 92–94

Vesti — News

- Glede koledarja le toliko (Marijan Prosen) 80–81
- Ali je pot skozi življenje naključno gibanje? (Ivan Kuščer) 95–III
- Dr. Igor Kukavica je prejel nagrado Sloanovega sklada (Miran Černe in Aleksandar Jurišić) IV

Na ovitku: *Kvadrat*, Wassily Kandinsky, 1927.

PREŠTEVANJE – OSNOVNO IN MALO MANJ OSNOVNO

PRIMOŽ POTOČNIK

Math. Subj. Class. (2000): 05A05

Predstavimo metodo za reševanje nekaterih kombinatoričnih nalog s pomočjo preštevanja ekvivalenčnih razredov preslikav med dvema končnima množicama. Pričnemo pri štetju variacij in kombinacij ter končamo pri posplošitvah teorije Redfielda in Pólya.

COUNTING – BASIC AND LESS BASIC

A method for solving some combinatorial problems by counting equivalency classes of mappings between two finite sets is introduced. We begin with variations and combinations, and end with generalizations of the theory of Redfield and Pólya.

Kombinatorika sodi med manj priljubljena poglavja srednješolske matematike. Vzrok za to je morda iskati v dejstvu, da se kombinatoričnih nalog ne da reševati po nekem avtomatiziranem postopku, tako kot denimo sisteme linearnih enačb, risanje grafov racionalnih funkcij in podobno. Naj se dijak še tako vestno uči obrazcev in postopkov, dvoma, ali je uporabil pravo formulo, je reševal po pravem postopku, se ne more otresti. Današnji srednješolski učbeniki dijaka učijo, da naloge bodisi reši z neko ad hoc metodo (navajanje vseh možnosti ali uporaba osnovnega izreka kombinatorike) bodisi problem prevede na preštevanje permutacij, kombinacij oziroma variacij.

V pričujočem prispevku bom predstavil metodo reševanja nekaterih preštevalnih nalog, ki se mi zdi mnogo preglednejša in naravnejša kot sistem permutacij, variacij in kombinacij. Reši vse naloge, ki jih lahko rešimo z uporabo permutacij, variacij in kombinacij, poleg tega pa tudi precej sorodnih nalog, ki jim z njimi nismo kos. Seveda omenjena metoda ni zrasla na mojem zelniku. Najdemo jo lahko v mnogih učbenikih kombinatorike (glej na primer [1] ali [4]), predava pa se tudi pri predmetu Diskretna matematika na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Nikakor si ne upam trditi, da bi lahko tudi v srednjih šolah poučevali kombinatoriko na takšen način. Verjetno lahko o tem sodijo le tisti, ki imajo s poučevanjem srednješolcev bogate izkušnje. Moj namen pa bo v celoti izpolnjen, če bo prispevek vsaj nekaterim bralkam in bralcem srednješolsko (in malo manj srednješolsko) kombinatoriko pokazal v drugačni, jasnejši luči.

Tri naloge

Za začetek vabim bralce, da rešijo naslednje tri naloge:

1. naloga. Abeceda šteje 25 znakov. Koliko različnih besed dolžine 4 lahko sestavimo? Kaj pa, če smemo vsako črko uporabiti le enkrat?

2. naloga. Na voljo imamo 3 vrste čaja v vrečkah. Za pripravo vrča čaja potrebujemo 7 vrečk. Koliko različnih mešanic čaja lahko pripravimo?

3. naloga. Koliko besed dolžine 7 lahko sestavimo iz 4 črk, če se mora vsaka črka pojaviti vsaj enkrat?

Prva naloga je preprosta. Neuki bralec bi razmišljal takole: Za prvo črko besede imam 25 možnosti, pri vsaki izbiri prve črke še 25 možnosti za drugo, skupaj torej 25^2 . Tako nadaljujem in pridem do rezultata 25^4 . Če smem vsako črko abecede porabiti le enkrat, imam za drugo črko besede le 24 možnosti, za tretjo 23 in zadnjo 22. Skupaj torej $25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$. Malo bolj učen bralec bi v zgornjem razmišljanju prepoznal tako imenovani *osnovni izrek kombinatorike*. Tisti, ki pa ima gimnazijsko poglavje o kombinatoriki v mezincu, bi ustrelil: Gre za *variacije 25 elementov reda 4*. V prvem primeru *s ponavljanjem*, v drugem *brez ponavljanja*.

Druga naloga bi bila za neukega bralca že težja. Za 7 vrečk se moramo odločiti, kakšne vrste naj bodo. Pri prvi vrečki imamo 3 možnosti, pri naslednji spet 3, itd. Skupaj torej 3^7 možnih izbir. Seveda pa na to, kakšen bo čaj, vrstni red izbiranja vrečk nima vpliva. Če najprej izberemo 3 šipke, nato 1 meto in nazadnje 3 lipe, bo rezultat enak, kot če bi najprej izbrali 1 meto, nato 2 šipka, 3 lipe in nazadnje še 1 šipek. Očitno je možnih mešanic čaja precej manj kot 3^7 . Večina bi se tu odločila, da našteje vse možne kombinacije, in morda bi se celo dokopala do pravilnega rezultata. Šolani bralec je tu v prednosti. Če je poglavje o kombinatoriki dobro proučil, je pri tej nalogi prepoznal *kombinacije 7 elementov reda 3 s ponavljanjem*. Pravilni odgovor se torej glasi: $\binom{7+3-1}{7} = 36$.

Gimnazijsko znanje pa nas pri tretji nalogi (čeprav se zdi podobna prvima dvema) pusti na cedilu. No, morda se je kdo do pravilnega rezultata prebil tako, da je najprej preštel vse besede dolžine 7, teh je 4^7 , nato pa odštel število besed, kjer se pojavijo največ tri črke. Do tega števila bi prišel tako, da bi za vsako trojico izmed 4 črk preštel število besed, ki jih te črke sestavljajo (to znese 4-krat po 3^7), in nato upošteval, da je besede, ki premorejo po natanko dve izbrani različni črki, štel dvakrat, tiste, ki so sestavljene le iz ene črke, pa celo trikrat. Ker je število parov črk enako $\binom{4}{2} = 6$, mora prejšnjemu številu odšteti šestkratnik števila besed, ki vsebujejo največ dve izbrani različni črki (torej $6 \cdot 2^7$), nato pa prišteti še število besed iz ene črke (takšne so 4), saj smo izbrano takšno besedo odšteli 3-krat, namesto le 2-krat, kot bi bilo potrebno. Končni rezultat se tako glasi: $4^7 - (4 \cdot 3^7 - 6 \cdot 2^7 + 4) = 8400$. (Mimogrede, zgornji način razmišljanja nosi slikovito ime *pravilo vključitev in izključitev*.) Takšen način reševanja je pri majhnih številih (7 in 4) še znosen, pri večjih pa gotovo odpove. Je ta naloga res toliko zahtevnejša od prvih dveh ali tiči razlog za neobravnavanje takšnih nalog v gimnazijah preprosto v tem, da jih ne moremo uvrstiti v ustaljeni sistem permutacij, variacij in kombinacij?

Tri stare in dve novi nalogi

Vrnimo se k 1. nalogi. Naj bo $N = \{1, 2, 3, 4\}$ štirielementna množica, naj $\mathcal{A}$ označuje množico 25 črk abecede in naj bo $\mathcal{A}^N$ množica vseh preslikav iz množice N v množico $\mathcal{A}$. (V nadaljevanju bo oznaka K^N , kjer sta K in N poljubni množici, vedno pomenila množico vseh preslikav iz množice N v množico K .) Vsaki preslikavi $f \in \mathcal{A}^N$ lahko priredimo besedo, ki ima na prvem mestu $f(1)$, na drugem $f(2)$, na tretjem $f(3)$ in na četrtem $f(4)$. Dve različni preslikavi določata različni besedi in vsaka beseda je prirejena neki preslikavi. To pomeni, da je besed dolžine 4 natanko toliko, kot je moč množice preslikav $\mathcal{A}^N$, torej $|\mathcal{A}|^{|N|}$. Ni težko razmisliti, da je besed, kjer se vsaka črka pojavi največ enkrat, ravno toliko, kot je v množici $\mathcal{A}^N$ injektivnih funkcij.

Podobno lahko obravnavamo 3. nalogo. Naj N zdaj označuje sedemelementno množico $\{1, 2, \dots, 7\}$ in naj bo K množica 4 črk, iz katerih sestavljamo besede. Vsaki preslikavi $f : N \rightarrow K$ lahko po enakem postopku kot pri 1. nalogi priredimo besedo $f(1)f(2)\dots f(7)$, vendar pa tako dobimo vse besede dolžine 7 in ne zgolj tistih, ki vsebujejo vse 4 črke iz množice K . Besede, ki zadoščajo takšni omejitvi, pripadajo surjektivnim preslikavam iz množice K^N . Iskano število je tako enako številu vseh *surjektivnih preslikav iz 7-elementne množice v 4-elementno*.

Situacija je nekoliko drugačna pri 2. nalogi. Naj N predstavlja 7-elementno množico $\{1, 2, \dots, 7\}$, ki si jo lahko predstavljamo kot množico 7 vrečk čaja, ki za zdaj še nimajo okusa. Množico 3 okusov združimo v množico K . Mešanico dobimo tako, da vsaki od sedmih vrečk iz množice N priredimo po en okus iz množice K . Tako smo nalogo zopet prevedli na preštevanje preslikav iz množice N v množico K . No, v resnici ne ravno preslikav. V tem primeru namreč dve različni preslikavi lahko določata isto mešanico čaja. Če smo natančni, dve preslikavi f in g določata isto mešanico natanko tedaj, ko imata isto sliko, šteto z večkratnostmi. S preprostim premislekom pa se lahko bralec prepriča, da se to zgodi natanko tedaj, ko obstaja neka permutacija π množice N , za katero je $f = g \circ \pi$. Za poljubno množico V naj $\text{Sym}(V)$ označuje množico vseh permutacij množice V . Definirajmo na množici preslikav K^N relacijo $\sim$ takole:

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstaja } \pi \in \text{Sym}(N), \text{ da velja } f = g \circ \pi. \quad (1)$$

Bralec se lahko sam prepriča, da je tako definirana relacija simetrična, reflektivna in tranzitivna, torej ekvivalenčna. Število, ki ga zahteva 2. naloga, je enako številu *ekvivalenčnih razredov* preslikav iz množice K^N glede na zgoraj definirano ekvivalenčno relacijo. Včasih se bomo v takšni situaciji izražali nekoliko ohlapno in rekli, da štejemo preslikave, pri čemer *elementov množice N ne ločimo*.

Nekatere naloge zahtevajo preštevanje preslikav iz množice N v množico K , kjer *ne ločimo elementov množice K* . Za zgled vzemimo naslednjo nalogo:

4. naloga. Devet (oštevilčenih) biljardnih krogel bi radi razporedili v tri skupine tako, da nobena skupina ne bo prazna. Na koliko načinov to lahko storimo?

Razmišljamo lahko takole: Vsaki od devetih krogel (množico krogel označimo z N) priredimo eno od treh skupin (trielementna množica K naj predstavlja množico treh skupin). Vsaki surjektivni preslikavi iz množice N v množico K pripada neka razporeditev devetih krogel v tri (neprazne) skupine. Pri tem res dobimo vse iskane razporeditve, dve različni preslikavi f in g pa določata isto razporeditev natanko tedaj, ko obstaja neka permutacija ρ množice K , za katero je $f = \rho \circ g$. Če definiramo relacijo $\sim$ na množici vseh surjektivnih preslikav s predpisom

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstaja } \rho \in \text{Sym}(K), \text{ da velja } f = \rho \circ g, \quad (2)$$

lahko nalogo prevedemo na vprašanje: Koliko je ekvivalenčnih razredov surjektivnih preslikav iz množice N v množico K glede na zgornjo ekvivalenčno relacijo. Ohlapno povedano, iščemo število surjektivnih preslikav iz N v K , kjer elementov množice K ne ločimo.

Omenimo še tip nalog, ki zahtevajo preštevanje preslikav iz N v K , kjer *ne ločimo niti elementov množice N niti elementov množice K* . Oglejmo si klasičen zgled takšne naloge:

5. naloga. Na koliko načinov lahko naravno število n zapišemo kot vsoto največ k sumandov? Pri tem vrstni red sumandov ni pomemben.

Naloge se lahko lotimo takole: Označimo z N množico $\{1, 2, \dots, n\}$ in s K množico $\{1, 2, \dots, k\}$. Za vsako preslikavo $f \in K^N$ si oglejmo moči $x_i := |f^{-1}(i)|$ praslik elementov $i \in K$. Očitno velja $n = x_1 + x_2 + \dots + x_k$. Vsaki preslikavi f tako določimo neki zapis števila n na k (ali manj, saj so nekatere praslike lahko prazne) sumandov. Bralcu prepuščam premislek, da dve preslikavi $f, g \in K^N$ določata isti zapis natanko tedaj, ko obstajata permutaciji $\pi \in \text{Sym}(N)$ in $\rho \in \text{Sym}(K)$, za kateri je $f = \rho \circ g \circ \pi$. Tako je spet na mestu definicija ekvivalenčne relacije:

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstajata } \rho \in \text{Sym}(K) \text{ in } \pi \in \text{Sym}(N), \quad (3)$$

da velja $f = \rho \circ g \circ \pi$.

Iskano število je tako spet enako številu ekvivalenčnih razredov preslikav iz n -elementne množice N v k -elementno množico K glede na zgoraj definirano ekvivalenčno relacijo.

Dvanajstera pot

V prejšnjem razdelku smo videli, da lahko veliko kombinatoričnih nalog prevedemo na preštevanje preslikav $f : N \rightarrow K$, kjer sta N in K končni množici (N moči n in K moči k). Glede na to, ali preštevamo vse funkcije, samo injektivne ali samo surjektivne in ali ločimo elemente množic K oziroma N , dobimo 12 problemov, ki jih imenujemo *dvanajstera pot*.

N	K	vse funkc.	inj. funkc.	surj. funkc.
ločimo	ločimo	var. s pon.	var. brez pon.	?
ne ločimo	ločimo	komb. s pon.	komb. brez pon.	?
ločimo	ne ločimo	?	?	?
ne ločimo	ne ločimo	?	?	?

Tabela 1. Dvanajstera pot.

Pri 1. nalogi smo že premislili, da preslikave $f : N \rightarrow K$, kjer ločimo tako elemente množice K kot elemente množice N , ustrezajo variacijam k elementov reda n . Kadar dopuščamo vse preslikave, dobimo variacije s ponavljanjem, če se omejimo zgolj na injektivne preslikave, dobimo variacije brez ponavljanja. Z zgledom smo tudi pojasnili formulo k^n za število variacij s ponavljanjem in formulo $k(k-1) \cdots (k-n+1)$ za variacije brez ponavljanja. Kako je s številom surjektivnih preslikav, naj za zdaj ostane skrivnost.

Pri 2. nalogi smo ugotovili, da preslikave $f : N \rightarrow K$, kjer elementov množice N ne ločimo (ločimo pa elemente množice K), ustrezajo kombinacijam k elementov reda n . Če dopuščamo vse preslikave, gre za kombinacije s ponavljanjem, če se omejimo na injektivne, dobimo kombinacije brez ponavljanja. Čeprav formulo $\binom{k}{n}$ za število kombinacij brez ponavljanja pozna vsak srednješolec, jo izpeljimo še s pomočjo štetja preslikav. Naj bo $g : N \rightarrow K$ injektivna preslikava in $g \circ \pi$ ter $g \circ \sigma$, kjer sta π ter σ permutaciji množice N , poljubni preslikavi iz ekvivalenčnega razreda preslikave g glede na ekvivalenčno relacijo (1). Ker je g injektivna preslikava, ji lahko poiščemo *levi inverz* $\bar{g} : K \rightarrow N$, za katerega velja $\bar{g} \circ g = \text{id}_N$. Do takšne preslikave $\bar{g}$ pridemo, če poljubnemu elementu y iz slike preslikave g priredimo njegovo (natanko določeno) g -prasliko, preostalim elementom iz množice K pa poljuben element iz množice N . Če sta preslikavi $g \circ \pi$ in $g \circ \sigma$ enaki, sledi, da je $\pi = \bar{g} \circ g \circ \pi = \bar{g} \circ g \circ \sigma = \sigma$. Seveda velja tudi obratno, če je $\pi = \sigma$, sta preslikavi $g \circ \pi$ in $g \circ \sigma$ enaki. S tem smo dokazali, da je moč ekvivalenčnega razreda poljubne injektivne preslikave enaka moči množice $\text{Sym}(N)$. Od tod pa sledi, da je število ekvivalenčnih razredov enako številu vseh injektivnih preslikav, deljeno z močjo ekvivalenčnega razreda, torej $\frac{k(k-1) \cdots (k-n+1)}{n!} = \binom{k}{n}$.

Štetje kombinacij s ponavljanjem lahko prevedemo na štetje kombinacij brez ponavljanja. Ideja se skriva v naslednjem premisleku: Mislimo si, da množico N sestavlja n enakih kroglic, ki jih razporejamo v k med seboj različnih skupin (pri čemer so lahko nekatere skupine prazne). Razporeditvi sta enaki natanko tedaj, ko vsaka skupina vsebuje v obeh razporeditvah enako število kroglic, torej natanko tedaj, ko obstaja permutacija kroglic, ki eno razporeditev prevede v drugo. Število takšnih razporeditev je zato enako številu kombinacij k elementov reda n s ponavljanjem (primerjaj z 2. nalogo). Razporeditve enakih kroglic v različne skupine pa si lahko predstavljamo tudi drugače. V vrsto postavimo $n + k - 1$ enakih belih kroglic, izmed katerih jih $k - 1$ izberemo in pobarvamo rdeče. Bele kroglice

med dvema rdečima tvorijo skupino in takšnih skupin je natanko $k - 2$. Če dodamo še skupino belih kroglic od začetka vrste do prve rdeče in skupino belih kroglic od zadnje rdeče do konca vrste, dobimo natanko k skupin (od katerih jih je nekaj spet lahko praznih). Na ta način smo našli bijektivno korespondenco med kombinacijami k elementov reda n s ponavljanjem in izbori $k - 1$ elementov izmed $n + k - 1$ enakih elementov, torej kombinacijami $n + k - 1$ elementov reda $k - 1$ brez ponavljanja. Iskano število kombinacij k elementov reda n s ponavljanjem je tako enako $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$.

Ekvivalenčne razrede surjektivnih preslikav iz množice N v množico K glede na relacijo (1) preštejemo z naslednjim premislekom: Vsak element množice K je slika vsaj enega elementa množice N . Ker elementov množice N ne ločimo, lahko predpostavimo, da se prvih k elementov množice N bijektivno preslika na množico K . Preostalih $n - k$ elementov lahko nato poljubno slikamo v množico K . Surjektivne preslikave torej ustrezajo kombinacijam k elementov reda $n - k$ s ponavljanjem.

Lotimo se sedaj problemov, ki jim z gimnazijskim znanjem nismo kos.

Surjektivne preslikave, N ločimo, K ne ločimo. Število ekvivalenčnih razredov relacije (2) na množici $K^N_{Sur} = \{f \in K^N \mid f \text{ surjektivna}\}$ označimo s $S(n, k)$. Števila $S(n, k)$ imenujemo *Stirlingova*¹ *števila 2. vrste*. Preslikavi $f \in K^N_{Sur}$ priredimo množico praslik $R_f = \{f^{-1}(b) \mid b \in K\}$. Množica R_f je očitno razbitje množice N na k nepraznih podmnožic. Bralcu prepuščam premislek, da sta množici R_f in R_g enaki natanko tedaj, ko sta preslikavi f in g v relaciji (2). Tako smo dokazali naslednje:

Število $S(n, k)$ je enako številu vseh razbitij n -elementne množice na k nepraznih podmnožic.

Ker množice ne moremo razbiti na več nepraznih podmnožic, kot sama vsebuje elementov, velja:

$$S(n, k) = 0, \text{ če je } k > n.$$

Množico z n elementi lahko razbijemo na n nepraznih podmnožic na en sam način, na same enoelementne podmnožice. Podobno lahko množico razbijemo na eno samo podmnožico le tako, da je podmnožica enaka začetni množici. Tako velja:

$$S(n, n) = 1 = S(n, 1).$$

Naj bo sedaj $k, n \geq 2$ in $k < n$. Izberimo element x množice N in množico razbitij razdelimo na dve skupini. V prvi naj bodo tista, ki ne vsebujejo množice $\{x\}$. To so takšna razbitja, pri katerih element x nastopa v isti množici razbitja vsaj še z enim elementom množice N . Če element x iz ustrezne množice razbitja odstranimo, dobimo razbitje množice $N \setminus \{x\}$ na k še vedno nepraznih množic. Takšnih razbitij je $S(n - 1, k)$. Neko

¹ James Stirling (1692–1770), škotski matematik.

drugo razbitje množice N nam bo po takšni operaciji dalo enako razbitje množice $N \setminus \{x\}$ natanko tedaj, ko ga iz prvotnega dobimo tako, da element x prestavimo v eno od preostalih $k - 1$ množic razbitja. Takšnih razbitij je skupaj s prvotnim torej ravno k . Tako smo ugotovili, da je razbitij množice N iz prve skupine natanko $kS(n, k)$.

V drugi skupini so razbitja, ki vsebujejo množico $\{x\}$. Če množico $\{x\}$ odstranimo iz takšnega razbitja, dobimo razbitje množice $N \setminus \{x\}$ na $k - 1$ nepraznih podmnožic. Takšnih razbitij pa je $S(n - 1, k - 1)$. S tem smo dokazali, da za $k, n \geq 2$ velja naslednja rekurzivna formula:

$$S(n, k) = kS(n - 1, k) + S(n - 1, k - 1).$$

Rekurzivna formula nam omogoča, da števila $S(n, k)$ računamo podobno kot binomske koeficiente (s pomočjo Pascalovega trikotnika). Sestavimo tabelo, v kateri na presečišču n -te vrstice in k -tega stolpca stoji število $S(n, k)$:

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0	0
5	1	15	25	10	1	0	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0	0
7	1	63	301	350	140	21	1	0
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Tabela 2. Stirlingova števila 2. vrste $S(n, k)$.

Iz začetnih pogojev sledi, da so v prvem stolpcu in po diagonalni same enke, nad diagonalno same ničle, preostala števila $S(n, k)$ pa dobimo tako, da številu $S(n - 1, k - 1)$, ki leži diagonalno levo nad številom $S(n, k)$, prištejemo k -kratnik števila $S(n - 1, k)$, ki leži neposredno nad številom $S(n, k)$. Število 65, ki leži v vrstici 6 in stolpcu 4, smo torej dobili tako, da smo sešteli 25 (levo zgoraj) in $4 \cdot 10$ (smo v stolpcu 4, nad iskanim številom pa stoji 10).

Surjektivne preslikave, N ločimo, K ločimo. Vzemimo preslikavo $f \in K^N_{Sur}$ in preštejmo elemente njenega ekvivalenčnega razreda $\{\rho \circ f \mid \rho \in \text{Sym}(K)\}$. Ker za poljubni permutaciji $\rho, \sigma \in \text{Sym}(K)$ zaradi surjektivnosti preslikave f iz enakosti $\rho \circ f = \sigma \circ f$ sledi $\rho = \sigma$, premore ekvivalenčni razred preslikave f natanko $k!$ elementov. Surjektivnih preslikav iz n -elementne množice v k -elementno je zato natanko $k!S(n, k)$.

Vse preslikave, N ločimo, K ne ločimo. Vsaka preslikava je surjektivna na svojo sliko. Množico vseh preslikav lahko torej razdelimo

glede na moč njihovih slik. Od tod sledi, da je število vseh preslikav iz n -elementne množice N v k -elementno množico K natanko $\sum_{j=1}^k S(n, j)$.

Surjektivne preslikave, N ne ločimo, K ne ločimo. Število ekvivalenčnih razredov množice K^N_{Sur} glede na relacijo (3) označimo s $p_k(n)$. Podobno kot pri 5. nalogi prepuščamo bralcu v premislek, da je število $p_k(n)$ enako številu razbitij naravnega števila n na vsoto k neničelnih celoštevilskih sumandov, pri čemer vrstni red sumandov ni pomemben. Brez težav pridemo do naslednjih enakosti:

$$p_1(n) = p_n(n) = 1 \text{ in } p_k(n) = 0 \text{ za } k > n.$$

Naj bo sedaj $n > k \geq 2$. Razbitja naravnega števila n na vsoto k neničelnih sumandov v tem primeru razdelimo v dve skupini glede na to, ali je kateri od sumandov enak 1 ali ne. Če je kateri od sumandov enak 1, lahko ta sumand odstranimo in dobimo razbitje naravnega števila $n - 1$ na vsoto $k - 1$ sumandov. Takšnih je $p_{k-1}(n - 1)$. Če so vsi sumandi večji ali enaki 2, lahko vsakega zmanjšamo za 1 in dobimo razbitje števila $n - k$ na vsoto k sumandov. Od tod sledi rekurzivna formula

$$p_k(n) = p_{k-1}(n - 1) + p_k(n - k). \quad (\Delta)$$

Kot pri Stirlingovih številih 2. vrste si tudi tu računanje olajšamo, če sestavimo tabelo, v kateri na presečišču n -te vrstice in k -tega stolpca stoji število $p_k(n)$.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0	0	0
4	1	2	1	1	0	0	0	0
5	1	2	2	1	1	0	0	0
6	1	3	3	2	1	1	0	0
7	1	3	4	3	2	1	1	0
8	1	4	5	5	3	2	1	1

Tabela 3. Števila $p_k(n)$.

Začetni pogoji pravijo, da v prvem stolpcu in po diagonali stojijo same enke, nad diagonalo pa same ničle. Do števil pod diagonalo pridemo z zaporednim upoštevanjem rekurzivne formule (Δ) .

Bralec bo gotovo znal razrešiti preostale tri od 12 problemov, ki smo jih zastavili na začetku razdelka. Svoje rezultate lahko zloži v naslednjo tabelo:

N	K	vse funkc.	inj. funkc.	surj. funkc.
ločimo	ločimo	k^n	$k(k-1)\cdots(k-n+1)$	$k!S(n, k)$
ne ločimo	ločimo	$\binom{n+k-1}{n}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{n-k}$
ločimo	ne ločimo	$\sum_{j=1}^k S(n, j)$	1, za $k \geq n$, 0 sicer	$S(n, k)$
ne ločimo	ne ločimo	$\sum_{j=1}^k p_j(n)$	1, za $k \geq n$, 0 sicer	$p_k(n)$

Tabela 4. Rešitve nalog dvanajstere poti.

Teorija Redfielda in Pólya

V tem razdelku si bomo bežno (in brez dokazov) ogledali teorijo Redfielda in Pólya, ki se ukvarja z nekaterimi posplošitvami preštevalnih nalog, s katerimi smo se ubadali v prejšnjih razdelkih. Teorijo sta neodvisno razvila J. H. Redfield leta 1928 (za nekatere posebne primere) in G. Pólya leta 1937 (splošneje). Podrobnejšo obravnavo snovi skupaj z vsemi izpeljavami lahko zahtevnejši bralec najde denimo v člankih [2,5,6,7] ali pa v učbenikih [1,8]. Za začetek pa rešimo naslednjo nalogo:

6. naloga. Trije mušketirji, Athos, Portos in Aramis, naletijo na 7 gardistov, ki se jim zdijo vsi enaki. Na koliko načinov si lahko razdelijo mikastenje gardistov?

Kdor je pozorno prebral prejšnji razdelek, se bo naloge lotil takole: Mikastenje gardistov si bo predstavljal kot preslikavo iz množice gardistov $\mathcal{G}$ v množico mušketirjev $\mathcal{M}$, ki vsakemu gardistu priredi tistega mušketirja, ki ga je *premikastil*. Ker so gardisti vsi enaki, elementov množice $\mathcal{G}$ ne ločimo med seboj. Opraviti imamo torej s preštevanjem ekvivalenčnih razredov množice $\mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ glede na relacijo

$f \sim g$ natanko tedaj, ko obstaja $\pi \in \text{Sym}(\mathcal{G})$, da velja $f = g \circ \pi$.

Odgovor se zato glasi: Mušketirji lahko gardiste premikastijo na $\binom{7+3-1}{7} = 36$ načinov. Zgornjo nalogo pa lahko malce zapletemo:

7. naloga. Trije mušketirji, Athos, Portos in Aramis, naletijo na 7 gardistov, od katerih je eden poveljnik, trije so inštruktorji in trije novinci. Na koliko načinov si lahko razdelijo mikastenje gardistov, če gardistov istega ranga med seboj ne ločijo?

Mikastenje gardistov lahko tako kot pri 6. nalogi predstavimo s preslikavo iz množice gardistov $\mathcal{G}$ v množico mušketirjev $\mathcal{M}$. Zaplete pa se pri vprašanju, kdaj dve preslikavi določata enako mikastenje. Ker gardista, ki nista istega ranga, mušketirji ločijo, ni vseeno, kdo dobi poveljnika in kdo novinca. Kljub temu pa gardistov znotraj skupine z istim rangom ne razlikujejo. Elemente množice $\mathcal{G}$ torej ločimo le delno. Znamo to povedati natančneje? Seveda. Dve preslikavi $f, g \in \mathcal{M}^{\mathcal{G}}$ določata isto mikastenje gardistov natanko tedaj, ko se razlikujeta za neko permutacijo množice $\mathcal{G}$, ki

poveljnika preslika v poveljnika, inštruktorja v inštruktorja in novinca v novinca. Če z G označimo množico takšnih permutacij in definiramo relacijo $\sim$ na množici $\mathcal{M}^G$ takole:

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstaja } \pi \in G, \text{ da velja } f = g \circ \pi, \quad (4)$$

lahko odgovorimo: Iskano število mikastenj je enako številu ekvivalenčnih razredov množice $\mathcal{M}^G$ glede na zgoraj definirano relacijo $\sim$.

In koliko je to? Poiskati odgovor na to vprašanje ni preprosto. Opazili smo že, da bodo pomembno vlogo pri reševanju zgornje naloge igrale tiste množice permutacij, ki *ohranjajo* strukturo množice gardistov. S tem da smo gardistom podelili vojaške nazive, smo namreč v množico G vpekljali nekakšno strukturo, ki je ne ohranjajo več vse permutacije množice G , temveč le nekatere. Hitro se lahko prepričamo, da kompozitum dveh permutacij, ki ohranjata strukturo množice G , prav tako ohranja strukturo, zato je množica G takšnih permutacij v resnici *podgrupa* grupe $\text{Sym}(G)$. Dokončni odgovor na nalogo o mušketirjih in rangiranih gardistih je vsebovan v odgovoru na naslednjo splošnejšo nalogo.

8. naloga. Naj bosta N in K končni množici in naj bo G podgrupa grupe $\text{Sym}(N)$. Na koliko ekvivalenčnih razredov razpade množica K^N pri relaciji (4)?

Odgovor je seveda odvisen od tega, koliko in kakšne permutacije vsebuje grupa G . Natančneje, odvisen je od *ciklične strukture* njenih elementov oziroma od *cikličnega indeksa grupe* G .

Ciklični indeks permutacijske grupe

Naj bo V poljubna končna množica. Če za poljubni permutaciji $\pi, \rho \in \text{Sym}(V)$ definiramo produkt $\pi\rho$ kot njun kompozitum $\pi \circ \rho$, postane množica $\text{Sym}(V)$ grupa. Naj bo π poljubna permutacija množice V . Točka $v \in V$ je za permutacijo π *negibna*, če velja $\pi(v) = v$, in *premaknjena*, če velja $\pi(v) \neq v$. Permutacijo, za katero so vse točke negibne, imenujemo *identiteta* in jo označujemo z id_V . Če je v negibna točka za permutacijo π , pravimo tudi, da permutacija π točko v *pribije*. Permutaciji, ki imata množici premaknjenih točk disjunktni, sta *ločeni*. Ločene permutacije med seboj komutirajo. Množica točk $\{\pi^k(v) \mid k \in \mathbb{Z}\}$, ki jo dobimo z zaporedno uporabo permutacije π na točki v , se imenuje *orbita* točke v in permutacije π . Orbita poljubne negibne točke v permutacije π vsebuje le točko v . Takšnim orbitam pravimo *trivialne orbite*. Permutaciji, ki premore natanko eno netrivialno orbito, pravimo *cikel*, moči njene netrivialne orbite pa *dolžina cikla*. Če je $\{v, \pi(v), \dots, \pi^k(v)\}$ netrivialna orbita cikla π , permutacijo π označimo s simbolom $(v, \pi(v), \dots, \pi^k(v))$.

Vsaka permutacija (ki ni enaka identiteti) se da do vrstnega reda faktorjev enolično predstaviti kot produkt paroma ločenih ciklov. Naj bo α_1

število negibnih točk neke permutacije $\pi \in \text{Sym}(V)$, n moč množice V in α_k , $k \in \{2, \dots, n\}$, število ciklov dolžine k v zapisu permutacije π kot produkt ločenih ciklov. Seveda so nekatera od števil α_i ničelna in velja enakost $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$. Polinomu

$$\zeta_\pi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

pravimo *ciklični indeks permutacije* π . Povprečju cikličnih indeksov neke grupe $G \leq \text{Sym}(V)$ pravimo *ciklični indeks grupe* G :

$$\zeta_G = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \zeta_\pi.$$

Zgled. Izračunajmo ciklični indeks simetrične grupe S_n pri njenem naravnem delovanju na množici z n elementi.

Naj bodo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nenegativna cela števila, za katera velja $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$. Koliko permutacij množice V ima ciklični indeks enak polinomu $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$?

Vsaka permutacija s takšnim cikličnim indeksom se zapiše kot produkt ločenih ciklov takole:

$$\underbrace{(*) (*) \dots (*)}_{\alpha_1} \underbrace{(**) \dots (**)}_{\alpha_2} \dots \underbrace{(* * \dots *)}_{\alpha_n}^n. \quad (+)$$

Pri tem smo zaradi nazornosti zapisali tudi točke, ki jih permutacija pribije. Zvezdice lahko nadomestimo z elementi množice V na $n!$ načinov, vendar bodo pri tem nekatere nadomestitve predstavljale iste permutacije. Premisljmo, koliko nadomestitev zvezdic z elementi množice V porodi isto permutacijo.

Vsak cikel dolžine k lahko zapišemo na k načinov, saj lahko elemente znotraj cikla krožno vrtimo. Ker lahko to počnemo neodvisno z vsakim od ciklov, ki nastopajo v cikličnem zapisu naše permutacije, je takšnih zapisov: $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}$. Poleg tega lahko cikle iste dolžine poljubno permutiramo. Takšnih preureditev je zato $\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$. Skupaj smo tako dobili

$$1^{\alpha_1} \alpha_1! 2^{\alpha_2} \alpha_2! \dots n^{\alpha_n} \alpha_n!$$

različnih zapisov oblike (+) iste permutacije. Od tod lahko sklepamo, da imamo v grupi S_n natanko $n! / (1^{\alpha_1} \alpha_1! 2^{\alpha_2} \alpha_2! \dots n^{\alpha_n} \alpha_n!)$ permutacij s predpisanim cikličnim indeksom. Ciklični indeks simetrične grupe S_n je tako enak:

$$\zeta_{S_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \left(\frac{x_1}{1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{x_n}{n}\right)^{\alpha_n}.$$

Pri računanju cikličnega indeksa grupe iz naloge o mušketirjih in rangiranih gardistih bomo potrebovali naslednjo trditev in njeno posledico.

Trditev 1. Naj bodo $V_1, V_2, \dots, V_k$ paroma disjunktna množica in G_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, podgrupe simetričnih grup $\text{Sym}(V_i)$. Z $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$ označimo produkt grup $G_1, G_2, \dots, G_k$, z $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ pa unijo množic $V_1, V_2, \dots, V_k$. Če za poljuben indeks i , poljuben element $(g_1, g_2, \dots, g_k)$ grupe G in poljuben element v_i množice V_i definiramo $(g_1, g_2, \dots, g_k)(v_i) = g_i(v_i)$, predstavimo s tem grupo G kot podgrupo grupe $\text{Sym}(V)$. Pri tem za ciklični indeks grupe G velja: $\zeta_G = \zeta_{G_1} \zeta_{G_2} \dots \zeta_{G_k}$.

Od tod lahko izpeljemo naslednjo posledico:

Posledica 2. Naj bo $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ razbitje množice V in naj bo G množica vseh tistih permutacij množice V , ki ohranjajo vsako od množic $V_1, V_2, \dots, V_k$. Tedaj je grupa G premi produkt grup $\text{Sym}(V_1), \text{Sym}(V_2), \dots, \text{Sym}(V_k)$ in njen ciklični indeks je enak produktu cikličnih indeksov grup $\text{Sym}(V_1), \text{Sym}(V_2), \dots, \text{Sym}(V_k)$.

Zdaj lahko povemo, kakšen je ciklični indeks grupe G iz naloge o treh mušketirjih in sedmih rangiranih gardistih. Ker smo množico gardistov razbili na tri skupine: 1 poveljnik, 3 inštruktorji in 3 novinci, je ciklični indeks grupe G enak:

$$\begin{aligned} \zeta_G(x_1, x_2, \dots, x_7) &= \zeta_{S_1}(x_1, x_2, \dots, x_7) \zeta_{S_3}^2(x_1, x_2, \dots, x_7) = \\ &= \frac{1}{36} x_1 (x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3)^2 = \\ &= \frac{1}{36} (x_1^7 + 9x_1^3 x_2^2 + 4x_1 x_3^2 + 6x_1^5 x_2 + 4x_1^4 x_3 + 12x_1^2 x_2 x_3). \end{aligned}$$

Nazaj k Redfieldu in Pólyu ...

Bralec se je pri branju prejšnjega razdelka upravičeno spraševal, kaj imata skupnega ciklični indeks grupe in 8. naloga. Odgovor daje naslednji izrek:

Izrek 3 (Redfield (1928), Pólya (1937)). Naj bo N množica moči n , K množica moči k , G podgrupa grupe $\text{Sym}(N)$ s cikličnim indeksom $\zeta_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ in naj bo ekvivalenčna relacija $\sim$ na množici K^N vseh preslikav iz N v K določena s predpisom

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstaja } \pi \in G, \text{ da velja } f = g \circ \pi.$$

Tedaj relacija $\sim$ razbije množico K^N na $\zeta_G(k, k, \dots, k)$ ekvivalenčnih razredov.

Če zgoraj povedano uporabimo pri nalogi z mušketirji in gardisti, pridemo do števila:

$$\frac{1}{36}(3^7 + 9 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3^3 + 6 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^5 + 12 \cdot 3^4) = 300.$$

Dokaz, da nas zgoraj opisani postopek res vedno pripelje do pravilnega odgovora, ni posebej težak, zahteva pa kar nekaj pomožnih rezultatov, katerih izpeljave bi nam vzele precej časa in prostora. Bralca vabim, da si natančen dokaz ogleda v že omenjeni literaturi. Preden gremo naprej, pa predlagam, da si ogledamo naslednja zgleda:

Zgled. Naj bo $G = \{\text{id}_N\}$ trivialna grupa. Tedaj je ciklični indeks $\zeta_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^n$. Izrek Redfielda in Pólya tedaj pravi, da je število ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$ enako $\zeta_G(k, k, \dots, k) = k^n$, kar po pričakovanjih ustreza številu variacij s ponavljanjem.

Zgled. Naj bo $G = \text{Sym}(N)$. Ciklični indeks simetrične grupe $\text{Sym}(N)$ smo izračunali v razdelku o cikličnem indeksu:

$$\zeta_G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \left(\frac{x_1}{1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{x_2}{2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{x_n}{n}\right)^{\alpha_n}.$$

V skladu z izrekom Redfielda in Pólya je število ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$ enako

$$\zeta_G(k, k, \dots, k) = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n! 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}} k^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}.$$

Ker je relacija $\sim$ v našem primeru enaka relaciji iz formule (1), mora biti zgornje število enako številu kombinacij s ponavljanjem. Tako smo izpeljali zanimivo enakost:

$$\binom{n+k-1}{n} = \sum_{\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n} \frac{1}{\alpha_1! \dots \alpha_n! 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}} k^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}.$$

... in naprej

Definicije ekvivalenčnih relacij (1), (2) in (3) nas skupaj z 8. nalogo kar silijo k naslednji nalogi, ki v svoji splošnosti zaobjame tako prvi stolpec dvanajstere poti kot izrek Redfielda in Pólya.

9. naloga. Naj bosta N in K končni množici, G podgrupa grupe $\text{Sym}(N)$ in H podgrupa grupe $\text{Sym}(K)$. Na koliko ekvivalenčnih razredov razpade množica K^N pri relaciji

$$f \sim g \text{ natanko tedaj, ko obstajata } \rho \in H \text{ in } \pi \in G, \quad (5)$$

$$\text{da velja } f = \rho \circ g \circ \pi?$$

Odgovor na zgornje vprašanje je našel N. J. de Bruijn (glej njegov pregledni članek [3]).

Izrek 4 (de Bruijn). *Naj bodo N, K, G, H in $\sim$ kot v besedilu 9. naloge, $|N| = n$, $|K| = k$ in naj bo $\zeta_G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ciklični indeks grupe G . Za vsako permutacijo $h \in H$ naj $\alpha_1(h)$ predstavlja število negibnih točk permutacije h , $\alpha_i(h)$, za $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, pa število ciklov dolžine i pri zapisu permutacije h kot produkt ločenih ciklov. Za poljubno naravno število m naj $D(m)$ pomeni množico naravnih števil, ki delijo število m . Označimo še:*

$$s_i(h) = \sum_{j \in D(i)} j \alpha_j(h).$$

Tedaj je število ekvivalenčnih razredov relacije $\sim$ enako številu

$$\frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \zeta_G(s_1(h), s_2(h), \dots, s_n(h)).$$

Če za grupo H vzamemo bodisi trivialno grupo $\{\text{id}_K\}$ bodisi simetrično grupo $\text{Sym}(K)$, za grupo G pa bodisi trivialno grupo $\{\text{id}_N\}$ bodisi simetrično grupo $\text{Sym}(N)$, nam de Bruijnov izrek razreši prvi stolpec dvanajstere poti. Če pa za H vzamemo trivialno grupo $\{\text{id}_K\}$, za G pa poljubno podgrupo simetrične grupe $\text{Sym}(N)$, nam de Bruijnov izrek preide v izrek Redfielda in Pólya. Preverimo. Naj bo $H = \{\text{id}_K\}$ in $G \leq \text{Sym}(N)$. Izračunajmo število $s_i(\text{id}_K)$ za poljuben $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ker permutacija id_K ne vsebuje nobenih ciklov dolžine $j \geq 2$, pribije pa vse točke množice K , je $\alpha_j(\text{id}_K) = 0$ za vsak $j \geq 2$ in $\alpha_1(\text{id}_K) = k$. Od tod sledi, da je $s_i(\text{id}_K) = k$ za vsak $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. De Bruijnov izrek pravi, da je število ekvivalenčnih razredov tedaj enako

$$\zeta_G(s_1(\text{id}_K), s_2(\text{id}_K), \dots, s_n(\text{id}_K)) = \zeta_G(k, k, \dots, k).$$

Natanko to pa trdi tudi izrek Redfielda in Pólya. Za konec pa z uporabo de Bruijnovega izreka rešimo še eno različico naloge o mušketirjih in gardistih.

10. naloga. Trije mušketirji, Athos, Portos in Aramis, naletijo na 7 gardistov, od katerih je eden poveljnik, trije inštruktorji in trije novinci. Athos ima za sabo naporen dan, zato se boja ne udeleži, v zameno pa na stran mušketirjev povabi tri slučajne opazovalce – trojčke. Trojčki so si tako podobni, da jih nihče ne loči med seboj (niti sami sebe ne). Na koliko načinov si lahko potem Portos, Aramis in trojčki razdelijo mikastenje gardistov, če gardistov istega ranga med seboj ne ločijo?

Z N označimo množico sedmih gardistov, s K pa petelementno množico, ki vsebuje oba bojujoča mušketirja in vse tri trojčke. Bralec je gotovo že sam ugotovil, da naloga sprašuje po številu ekvivalenčnih razredov relacije (5). Pri tem za grupo G vzamemo enako grupo kot pri 7. nalogi, torej grupo, ki je izomorfna direktnemu produktu $S_1 \times S_3 \times S_3$ in ki ima ciklični indeks enak

$$\zeta_G(x_1, x_2, \dots, x_7) = \frac{1}{36}(x_1^7 + 9x_1^3x_2^2 + 4x_1x_3^2 + 6x_1^5x_2 + 4x_1^4x_3 + 12x_1^2x_2x_3),$$

za grupo H pa vzamemo podgrupo grupe $\text{Sym}(K)$, ki priblije oba mušketirja, trojčke pa med seboj poljubno premetava. Takšna grupa je izomorfna grupi $S_1 \times S_1 \times S_3$. Če mušketirja označimo s števili 4 in 5, trojčke pa s števili 1, 2 in 3, grupa H vsebuje naslednje permutacije:

$$H = \{\text{id}_K, (1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$$

Vsaki permutaciji $h \in H$ priredimo urejeno peterko $(\alpha_1(h), \alpha_2(h), \dots, \alpha_5(h))$. V grupi H imamo glede na ciklično strukturo tri tipe permutacij: identiteto, transpozicijo in cikel dolžine 3. Tem tipom pripadajo naslednje urejene peterke: identiteti peterka $(5, 0, 0, 0, 0)$, transpoziciji peterka $(3, 1, 0, 0, 0)$ in ciklu dolžine tri peterka $(2, 0, 1, 0, 0)$. Potrebujemo še števila $s_i(h)$ za $h \in H$ in $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$. Ker je število $s_i(h)$ odvisno le od cikličnega tipa permutacije h , se lahko omejimo na $h \in \{\text{id}_K, (1, 2), (1, 2, 3)\}$, in ker v cikličnem indeksu ζ_G nastopajo le nedoločenske x_1, x_2 in x_3 , moramo zgornja števila izračunati le za $i \in \{1, 2, 3\}$. Že iz prejšnjega zgleada vemo, da je $s_i(\text{id}_K) = |K| = 5$ za vsako naravno število i . Izračunajmo še preostalo

$$s_1(1, 2) = \alpha_1(1, 2) = 3, \quad s_2(1, 2) = \alpha_1(1, 2) + 2\alpha_2(1, 2) = 3 + 2 = 5,$$

$$s_3(1, 2) = \alpha_1(1, 2) + 3\alpha_3(1, 2) = 3.$$

$$s_1(1, 2, 3) = \alpha_1(1, 2, 3) = 2, \quad s_2(1, 2, 3) = \alpha_1(1, 2, 3) + 2\alpha_2(1, 2, 3) = 2,$$

$$s_3(1, 2, 3) = \alpha_1(1, 2, 3) + 3\alpha_3(1, 2, 3) = 2 + 3 = 5.$$

Izračunati moramo še ciklične indekse $\zeta(h) = \zeta_G(s_1(h), s_2(h), s_3(h), \dots, s_7(h))$ za $h = \text{id}_K$, $h = (1, 2)$ in $h = (1, 2, 3)$. Kratek račun pokaže, da velja

$$\zeta(\text{id}_K) = 6125, \quad \zeta(1, 2) = 507, \quad \zeta(1, 2, 3) = 50.$$

Odgovor na vprašanje se tako glasi:

$$\frac{1}{|H|}(\zeta(\text{id}) + 3\zeta((1, 2)) + 2\zeta((1, 2, 3))) = \frac{1}{6}(6125 + 3 \cdot 507 + 2 \cdot 50) = 1291.$$

Za občutek izračunajmo še, na koliko načinov bi lahko bili tepeni gardisti, če bi trojčke med seboj razlikovali: $\zeta_G(5, 5, 5) = 6125$, in če bi namesto enojajčnih trojčkov imeli dva pomočnika, ki bi ju ločili med seboj: $\zeta_G(4, 4, 4) = 1600$. Če pa trojčke nadomestimo s počivajočim Athosom, vemo, da rezultat znaša $\zeta_G(3, 3, 3) = 300$.

Zahvala. Zahvaljujem se dr. Borisu Zgrabliću za nadvse koristne pripombe in predloge.

LITERATURA

- [1] V. Batagelj, *Kombinatorika*, samozaložba, Ljubljana, 1997.
- [2] N. J. de Bruijn, *Pólya's Theory of Counting Applied Combinatorial Mathematics*, ur. E. F. Beckenbach, Wiley, New York, 1964.
- [3] N. J. de Bruijn, *A survey of generalizations of Pólya's enumeration theorem*, Nieuw. Arch. Wisk. (3), **19**, (1971) 89–112.
- [4] M. Juvan, P. Potočnik, *Teorija grafov in kombinatorika*, DMFAS, Ljubljana, 2000.
- [5] G. Pólya, *Kombinatorische Anzählbestimmungen für Gruppen, Graphen und Chemische Verbindungen*, Acta Math. **68**, (1937) 145–254.
- [6] G. Pólya, R. C. Read, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs and Chemical Compounds*, Springer Verlag, New York, 1987.
- [7] J. H. Redfield, *The Theory of Group-Reduced Distributions*, Amer. J. Math. **49**, (1928) 433–455.
- [8] D. Veljan, *Kombinatorika s teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

VESTI

GLEDE KOLEDARJA LE TOLIKO

Po predavanju o koledarju [1] me je kolega vprašal, ali se da, ampak zares zelo na kratko in čim bolj preprosto, nekaj povedati o fizikalnih osnovah koledarja in podati najnujnejšo matematično interpretacijo. Seveda se da, a brez najmanjšega napora ne gre, sem odgovoril. Ker je *Obzornik za matematiko in fiziko* pred kratkim pisal o precesiji [2], naj začnem kar pri njej, čeprav bi o koledarju lahko pisal tudi drugače [3].

Precesija zemeljske vrtilne osi je tako počasen proces, da lahko njegov vpliv v času enega človeškega življenja zanemarimo. Toda astronomom povzroča veliko neprijetnosti. Precesijo moramo neogibno upoštevati pri sestavljanju koledarja, da bi bil uporaben tisočletja.

Za zemljane so pomembni periodični pojavi (dogodki), kot so npr. menjavanje dneva in noči, spreminjanje Luninih men in letnih časov. Naše vsakdanje življenje je tesno povezano s Soncem. Z letnimi časi se spreminja

trajanje dneva in noči, vreme itn., s čimer so povezana poljedelska dela. Koledar, osnovan na periodičnosti teh pojavov, je zato za nas najprimernejši. Sestaviti ga pa je izredno zahtevno opravilo.

Izhodiščni natančni fizikalni podatki, neogibni za sestavo našega sončevega koledarja, so: zvezdno leto $t_{zv.l.} = 31\,558\,150,14$ s, zvezdni dan $t_{zv.d.} = 86\,164,09$ s, precesijski čas (perioda precesije) $t_{prec} = 25\,780$ zvezdnih let $= 8,135 \cdot 10^{11}$ s.

Najprej izračunajmo čas med dvema zaporednima enakonočjema. Ta čas imenujemo *tropsko leto*. Je osnova za naš koledar (definira začetek enakonočja in tudi začetke drugih letnih časov, da padejo na isti datum). Pomladišče na nebesni krogli je določeno s trenutkom, ko je spomladi smer Zemlja–Sonce pravokotna na zemeljsko vrtilno os. Pomladišče se premika v smer, nasprotno kroženju Zemlje (planetov). Trajanje tropskega leta t_{trop} izračunamo iz enačbe $1/t_{trop} = 1/t_{zv.l.} + 1/t_{prec}$; $t_{trop} = 31\,556\,926$ s. Tropsko leto je za približno 12,5 min krajše od zvezdnega leta (tj. dejanskega obhodnega časa Zemlje okrog Sonca) in je najprimernejši podatek za izračun srednjega sončevega dne.

Za sestavo koledarja je torej treba najti vrednost srednjega sončevega dne t_S , tj. vrtilni čas Zemlje glede na Sonce. Ker potekata vrtenje in kroženje Zemlje v isti smeri, velja enačba $1/t_S = 1/t_{zv.d.} - 1/t_{trop}$. Iz nje izračunamo $t_S = 86\,400$ s. To je znano število sekund v srednjem sončevem dnevu ($86\,400 = 24 \cdot 60 \cdot 60$).

S kvocientom $t_{trop}/t_S = 365,2422 \dots$ dobimo, koliko sončevih dni pride na tropsko leto. Prve tri številke tega števila povedo število dni v navadnem letu. Pri zaokrožanju na $0,25 = \frac{1}{4}$ spoznamo vzrok pojavljanja prestopnega leta: vsake štiri leta dodamo en dan (29. 2.), da datum nastopa enakonočja ostane 21. 3. Razlika med približkom 365,25 dneva (julijanski koledar) in 365,2422 dneva je 0,0078 dneva. Pri takem koledarju se enakonočje „premakne“ za en dan v 1/0,0078 letih = 128 letih. Zato v nam privzetem koledarju na vsakih 400 let ne pride 100, ampak 97 prestopnih let. Leto 1600 je bilo prestopno, leta 1700, 1800, 1900 ne, leto 2000 pa je bilo spet prestopno itn.

Tudi približek $365 \frac{97}{400} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400} = 365,2425$ (gregorijanski koledar) se ne ujema z natančno vrednostjo tropskega leta. Formalno lahko sicer izračunamo, v kolikšnem času (1/0,0003 letih) se datum spomladanskega enakonočja „premakne“ za en dan. Vendar pa to v splošnem sploh ni preprosto, saj je kvocient t_{trop}/t_S spremenljiv.

Vsekakor naslednjih tisoč let lahko mirne duše uporabljamo današnji koledar, ne da bi uvedli kak popravek glede datuma spomladanskega enakonočja (21. marec).

Marijan Prosen

LITERATURA

- [1] M. Razpet, *Jurij Vega in koledar*, Zreče, 10. 11. 2000.
- [2] J. Strnad, *Precesija enakonočij*, Obzornik mat. fiz. **47** (2000) 120.
- [3] F. Avsec in M. Prosen, *Astronomija za 4. r. gimnazij*, DMFA, 55.

SIMETRIJE PERIODIČNIH VZORCEV V RAVNINI

MARKO KRANJC*

Math. Subj. Class. (2000): 57M10

V članku je orisana geometrijska klasifikacija kristalografskih grup v evklidski ravnini.

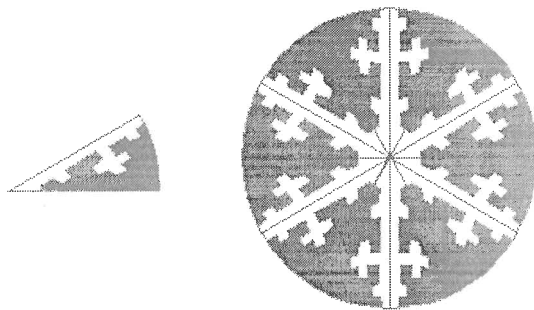
SYMMETRIES OF PERIODIC PATTERNS IN THE PLANE

The article outlines a geometric classification of chrystallographic groups in the euclidean plane

V vsakdanjem življenju je obilica različnih vzorcev, od vzorcev v naravi kot na primer čebelar satovje, do umetnih vzorcev. Eden od razlogov za privlačnost vzorcev so njihove simetrije. Zato je naravno vprašanje, kakšne so možne simetrije vzorcev.

Simetrije omogočajo rekonstrukcijo celega vzorca iz manjšega kosa. Tako na primer za ravninski vzorec, ki ima kot simetrijo zrcaljenje prek abscise, zadostuje vzorec na spodnji polovici ravnine.

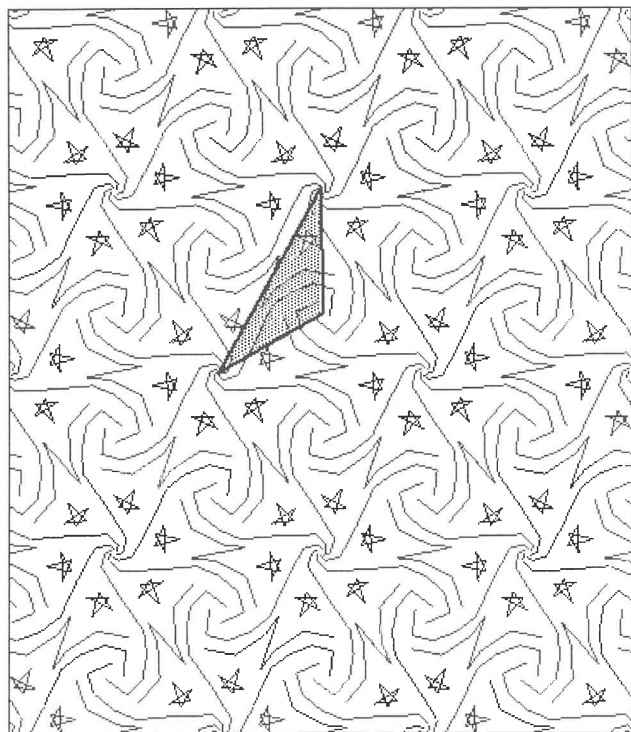
Znan primer izdelave simetričnih vzorcev so prtički, ki jih otroci izrežejo tako, da kos papirja večkrat prepognejo, potem pa tako prepognjen papir izrežejo. Ko papir razgrnejo, dobijo simetričen vzorec, katerega simetrije so odvisne od tega, kolikokrat je bil papir prepognjen. Če papir prepognemo tako, da dobimo dvanaajstkraten sloj, lahko izrežemo snežinko, kot kaže slika 1.



Slika 1

Majhen kos vzorca smo razvili v celo snežinko. Podobno lahko razvijemo vzorce, ki pokrivajo vso ravnino, iz manjšega kosa. Kot primer si oglejmo vzorec na sliki 2.

* Članek je nastal s finančno pomočjo Ministrstva za šolstvo, znanost in šport (projekt J1-7039/94).



Slika 2

Osenčeni del je trikotnik, ki ga bomo označili s T . Če T prepognemo vzdolž višine na najdaljšo stranico in zlepimo robove, dobimo ploskev na sliki 2 (desno).

To ploskev imenujemo generator vzorca. Ploskev hkrati z vzorcem pa imenujemo šampiljka vzorca, ker lahko ves vzorec odtisnemo, če to šampiljko valimo po ravnini v vseh možnih smereh (to valjenje se imenuje *razvojna preslikava*). Ne glede na to, s kakšnim vzorcem opremimo generator, bo ustrezni vzorec v ravnini imel določene simetrije. Zato bomo dobili vse možne grupe simetrij ravninskih vzorcev, če bomo našli vse možne generatorje.

Za študij ravninskih vzorcev je najprej smiselno razumeti vzorce na enotnem disku $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Preden pa se lotimo resnejšega študija, nekaj definicij.

Definicija. Vzorec na podmnožici P evklidske ravnine E^2 je poljubna podmnožica $V \subset P$.

Naj bo $E(2)$ grupa izometrij evklidske ravnine E^2 . Znano je, da jo generirajo translacije, rotacije in zrcaljenja.

Definicija. Če je V vzorec na P , imenujemo množico

$$\Gamma_V = \{\phi \in E(2); \phi(V) = V, \phi(P) = P\}$$

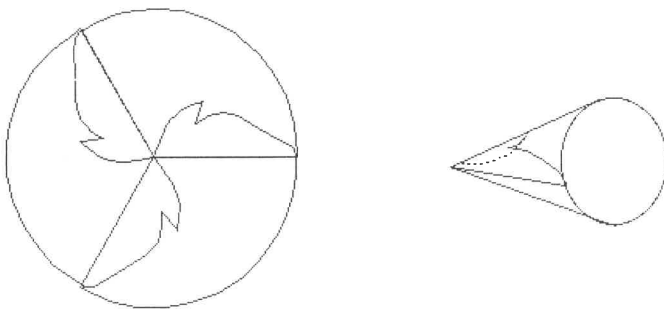
grupa simetrij vzorca V . Torej sestoji Γ_V iz tistih simetrij evklidske ravnine, ki ohranjajo množico V in P .

Ni težko videti, da je Γ_V res grupa.

Par $(P/\Gamma_V, V/\Gamma_V)$ bomo imenovali *šampiljka*, prostor P/Γ_V pa *generator* vzorca V . To je konsistentno s prejšnjo terminologijo, saj je tudi tukaj šampiljka generator skupaj z vzorcem. Bralca naj spomnimo, da je P/Γ_V prostor orbit delovanja grupe Γ_V na P . Orbita točke $x \in P$ sestoji iz vseh točk $\phi(x)$, $\phi \in \Gamma_V$. V praksi realiziramo P/Γ_V tako, da na naraven način izberemo iz vsake orbite eno točko.

Naj bo $V \subset D$ vzorec na disku. Znano je, da so možne simetrije diska rotacije okrog središča in zrcaljenja prek premerov. Nas bodo zanimali samo vzorci s končnimi skupami simetrij. V tem primeru je Γ_V ali ciklična grupa $\mathbb{Z}_n$, ki sestoji iz vseh rotacij za večkratnike kota $2\pi/n$, ali grupa simetrij pravilnega n -kotnika D_{2n} , ki je generirana z rotacijo za kot $2\pi/n$ in enim zrcaljenjem. Poiščimo generator za oba primera.

Če je Γ_V ciklična grupa reda n , potem krožni izsek s kotom $2\pi/n$ vsebuje po en element vsake orbite z izjemo obeh ravnih stranic, kjer pari točk, ki so enako oddaljene od središča, pripadajo istim orbitam. Če ta robova zlepimo, vsebuje dobljeni stožec S_n natanko en element vsake orbite in zato predstavlja generator $D^2/\mathbb{Z}_n$. Slika 3 kaže vzorec, katerega grupa simetrij je $\mathbb{Z}_3$, in njegovo šampiljko. Z valjenjem šampiljke okrog vrha stožca res dobimo vzorec.



Slika 3

Če pa je Γ_V grupa D_{2n} , potem krožni izsek s kotom π/n vsebuje natanko eno točko vsake orbite in zato predstavlja generator. Pri snežinki je generator krožni izsek s kotom $30^\circ = \frac{180^\circ}{6}$ (glej sliko 1). (Če snežinko delamo iz papirja, potem je prepognjeni papir generator. Ko ga izrežemo, dobimo šampiljko, vzorec pa, ko papir zravnamo.)

Kot vidimo, so možni generatorji vzorcev na disku s končno grupo simetrij stožci ali pa krožni izseki.

Zdaj se bomo lotili iskanja vseh možnih generatorjev vzorcev, ki pokrivajo vso evklidsko ravnino, saj bomo s tem našli vse možne grupe simetrij.

Pri tem se bomo omejili na kristalografske vzorce. To so vzorci, ki se jih da rekonstruirati s pomočjo simetrij iz končnega dela ravnine, kar pomeni, da se mora isti del vzorca ponavljati. Zato morajo biti med simetrijami translacije. Če so vse translacije vzdolž iste premice, potem so kosi vzorca, ki se ponavljajo, neskončni. Ker pa mi tega nočemo, morajo obstajati translacije vzdolž nevzporednih premic. Taki vzorci se imenujejo *dvojno periodični*. Če grupa simetrij dvojno periodičnega vzorca vsebuje samo translacije, potem je generator torus, saj predstavniki vseh orbit leže na paralelogramu, ki je določen z dvema translacijama v nevzporednih smereh, pri čemer pari točk na vzporednih robovih pripadajo istim orbitam. Če pa ima vzorec poleg translacij še druge simetrije, potem je generator kvocienten prostor torusa, saj v tem primeru orbite grupe vseh simetrij vsebujejo orbite grupe tistih translacij, ki ohranjajo vzorec.

Pa navedimo precizno definicijo kristalografskih vzorcev.

Definicija. Vzorec $V \subset E^2$ je *kristalografski*, če velja:

- (i) V je dvojno periodičen,
- (ii) orbite delovanja grupe Γ_V so diskretne,
- (iii) prostor E^2/Γ_V je kompakten.

Pri kristalografskih vzorcih so lokalne lastnosti generatorja določene z lastnostmi vzorca v okolici posameznih točk. To pomeni, da so lokalno generatorji enaki generatorjem vzorcev na disku. Ker ima vsaka točka vzorca okolico, ki je disk, ima vsaka točka x poljubnega generatorja okolico, ki je ali disk, ali stožec, ali pa krožni izsek. V primeru stožca, katerega kot je $2\pi/n$, imenujemo x stožčasta točka reda n . Če je okolica krožni izsek s kotom π/n , potem je *red* te točke n , in če je $n > 1$, jo imenujemo vogal. Odtod vidimo, da je topološko vsak generator ploskev. Ta ploskev ima rob, če ima vzorec med simetrijami tudi zrcaljenja. Stožčaste točke reda n bomo označili z n , vogale reda n pa z $\bar{n}$. Tako je na primer $D2\bar{2}\bar{2}$ disk z dvema vogaloma reda 2 in z eno stožčasto točko reda 2 (glej sliko 4).

Vsak generator je topološko ploskev, ki je opremljena z dodatno geometrijsko strukturo, saj se mora lokalno na en sam način (do evklidske transformacije) prilegati evklidski ravnini. Seveda pa ne vemo, ali je vsaka taka ploskev res generator kakega vzorca. Ker je vsak generator prostor orbit delovanja neke grupe, bomo imenovali *orbiterost* vsako kompaktno ploskev, ki se lokalno prilega nekemu geometrijskemu modelu (v našem primeru je to evklidska ravnina, lahko pa namesto tega vzamemo hiperbolično ravnino ali pa sfero) in ima to lastnost, da ima okolica vsake točke obliko diska, stožca ali krožnega izseka. V točkah z okolicami, ki so diski, je ploskev gladka mnogoterost. Stožčaste točke in vogale imenujemo *izjemne točke*. Izjemne točke tvorijo diskretno podmnožico orbiterosti, točke, katerih okolica pa je krožni izsek, ki tvori kot 180° , pa so vsebovane v (topološkem) robu orbiterosti. Naša naloga je poiskati vse orbiterosti, ki so kandidatke za generatorje vzorca. Take orbiterosti morajo očitno imeti ničelno Gaussovo ukrivljenost,

če naj se lokalno prilagajo evklidski ravnini. Vprašanje je, kako meriti Gaussovo ukrivljenost. Pri običajnih ploskvah vemo, da je integral Gaussove ukrivljenosti proporcionalen Eulerjevi karakteristiki (Gauss-Bonnetova formula), ki je ni težko izračunati. (Za bralca, ki mu pojem Eulerjeve karakteristike ni domač, bomo v Dodatku na kratko ponovili definicijo in navedli nekaj primerov.) Kot vidimo iz primera na sliki 2, pa to očitno ni res za orbiterosti, saj je tu generator topološka sfera, ki ima Gaussovo ukrivljenost povsod, razen v izjemnih točkah (vogalih ali stožčastih točkah), enako nič, njena Eulerjeva karakteristika pa je enaka 2. Seveda pa običajna Eulerjeva karakteristika ne upošteva dodatne strukture. Zato jo bomo priredili tako, da bo v primeru orbiterosti upoštevala izjemne točke.

Kot vemo, je običajna Eulerjeva karakteristika krovnega prostora večkratnik Eulerjeve karakteristike baze. (Naj spomnimo bralca, da ima pri k -kratnem krovu $p : \tilde{X} \rightarrow X$ praslika vsake točke k elementov. V tem primeru je $\chi(\tilde{X}) = k\chi(X)$.) Kot smo ugotovili, je vsak generator G evklidskega vzorca kvocienten prostor torusa T . Naj bo $q : T \rightarrow G$ naravna projekcija. Seveda q v splošnem ni krovna preslikava, saj praslike izjemnih točk ne vsebujejo istega števila elementov kot praslike preostalih točk. Če pa definiramo Eulerjevo karakteristiko orbiterosti tako, da vzamemo T za krovni prostor generatorja G , potem bodo vsi kandidati za generatorje med tistimi orbiterostmi, ki imajo Eulerjevo karakteristiko enako nič.

Najprej se spomnimo, da je Eulerjeva karakteristika $\chi(X)$ ploskve X , ki ima a celic dimenzije nič, b enodimenzionalnih in c dvodimenzionalnih celic, enaka

$$\chi(X) = a - b + c.$$

Recimo, da je G poljubna orbiterost. Izberimo celično dekompozicijo tako, da so med 0-dimenzionalnimi celicami vse izjemne točke. Naj bo x stožčasta točka reda n . Potem je majhna okolica te točke kvocientni prostor $D/\mathbb{Z}_n$. Disk pokriva vsako točko te okolice razen točke x n -krat. Ker pa bi mi radi, da je tudi x pokrit n -krat, ga bomo v definiciji Eulerjeve karakteristike orbiterosti šteli samo $(\frac{1}{n})$ -krat. Iz istih razlogov bomo šteli vogal reda n samo $(\frac{1}{2n})$ -krat, 1-dimenzionalne celice na robu pa polovično. Naj bodo $s_1, \dots, s_k$ vse stožčaste točke in naj ima s_j red m_j , $j = 1, \dots, k$. Naj bodo $v_1, \dots, v_L$ vse 0-dimenzionalne celice, ki ležijo na robu, in naj ima v_j red n_j , $j = 1, \dots, L$. Očitno je število 1-dimenzionalnih celic na robu tudi enako L , označimo jih z $r_1, \dots, r_L$. Točke $v_1, \dots, v_L$ so ali vogali ali pa robne točke, ki niso vogali. Uredimo jih tako, da so vsi vogali točke $v_1, \dots, v_l$.

Če upoštevamo, kako bomo šteli v Eulerjevi karakteristiki orbiterosti izjemne točke, potem dobimo naslednjo definicijo:

$$\tilde{\chi}(G) = \chi(G) - \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) - \sum_{j=1}^L \left(1 - \frac{1}{2n_j}\right) + \sum_{j=1}^L \frac{1}{2},$$

pri čemer pa smo s $\tilde{\chi}$ označili Eulerjevo karakteristiko orbiterosti. Prva vsota na desni ustreza popravku pri štetju stožčastih 0-celic, druga popravku pri

štetju 0-dimenzionalnih celic na robu, tretja pa pri štetju 1-dimenzionalnih celic na robu (prvi vsoti sta odšteti, ker 0-dimenzionalne celice v Eulerjevi karakteristiki nastopajo s pozitivnim znakom, zadnja vsota pa je prišteta, ker 1-dimenzionalne celice nastopajo z negativnim znakom).

Če ta izraz nekoliko poenostavimo, dobimo naslednjo definicijo Eulerjeve karakteristike za orbiterosti:

Definicija. Pri zgornjih oznakah je Eulerjeva karakteristika orbiterosti G enaka

$$\tilde{\chi}(G) = \chi(G) - \sum_{j=1}^k \left(1 - \frac{1}{m_j}\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_j}\right). \quad (1)$$

V zadnji vsoti smo upoštevali, da je $1 - \frac{1}{n_j} = 0$, če je $j > l$. V Dodatku se bomo prepričali, da s to definicijo Gauss-Bonnetova formula ostaja veljavna tudi za orbiterosti.

Iz te definicije je jasno, da mora imeti generator G poljubnega kristalografskega vzorca v evklidski ravnini Eulerjevo karakteristiko enako nič, saj je $\tilde{\chi}(G)$ večkratnik Eulerjeve karakteristike torusa (ki je enaka nič). Če torej rešimo enačbo $\tilde{\chi}(G) = 0$, bomo našli vse možne kandidate za generatorje kristalografskih vzorcev.

Naj bo $\tilde{\chi}(G) = 0$. Ker sta obe vsoti na desni strani definicije (1) nenegativni, je $\tilde{\chi}(G) \leq \chi(G)$. Zato so možne vrednosti za $\chi(G)$ le 0, 1 in 2. Iz klasifikacije ploskev sledi, da je G ena od naslednjih ploskev: sfera S , projekтивna ravnina P , disk D , Kleinova steklenica K , torus T , Möbiusov trak M ali pa kolobar A . Ker so vsi m_j in n_j večji od ena, dobimo naslednjo neenakost:

$$0 = \tilde{\chi}(G) \leq \chi(G) - \frac{k}{2} - \frac{l}{4}.$$

Če l in k nista oba nič, dobimo tudi neenakost $\chi(G) - k - \frac{l}{2} < 0$.

Omejili se bomo na primer, ko je $G = D$ in prepustili druge primere bralcu. Ker je $\chi(D) = 1$, nam zgornji neenakosti dasta $1 < k + \frac{l}{2} \leq 2$ ali

$$2 < 2k + l \leq 4.$$

Ločili bomo več primerov.

(i) $k=0, l=4$

V tem primeru je $\chi(G) = 1 - 2 + \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2n_j}$ ali $\sum_{j=1}^4 \frac{1}{2n_j} = 1$. Ker je vsak n_j večji od ena, dobimo

$$1 = \sum_{j=1}^4 \frac{1}{2n_j} \leq \sum_{j=1}^4 \frac{1}{4} = 1,$$

zato je edina rešitev v tem primeru disk s štirimi konicami reda 2, ki ga bomo označili z $D\overline{2222}$.

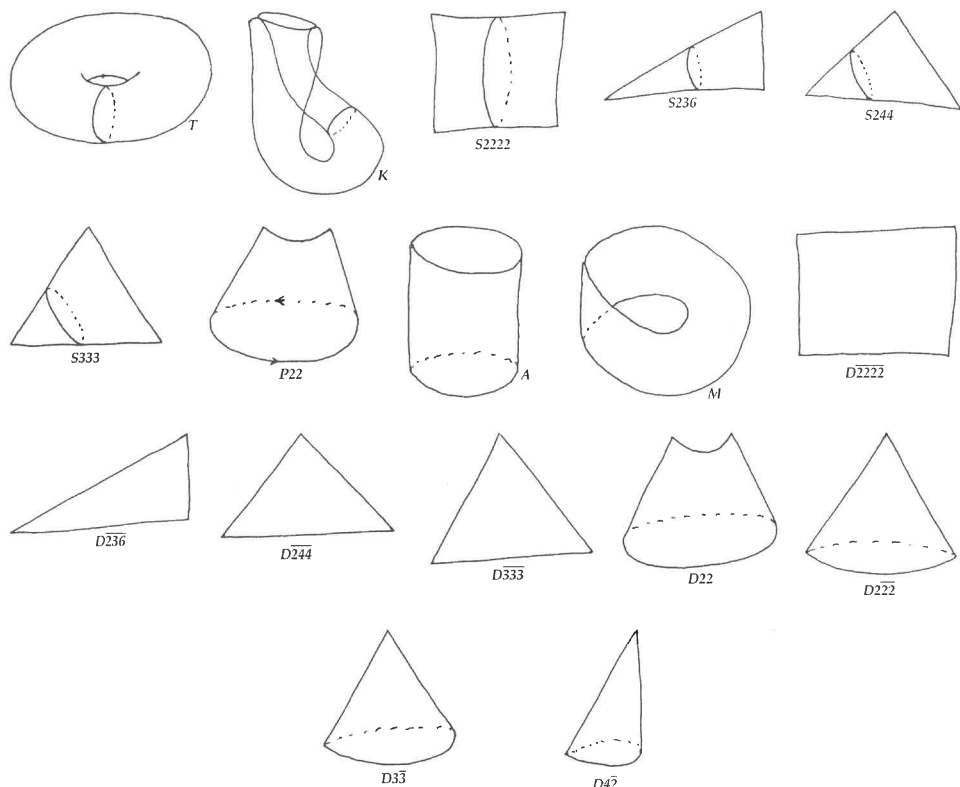
(ii) $k=0, l=3$

V tem primeru je $\chi(G) = 1 - \frac{3}{2} + \sum_{j=1}^3 \frac{1}{2n_j}$ ali

$$\sum_{j=1}^3 \frac{1}{n_j} = 1. \quad (2)$$

Prav gotovo lahko privzamemo, da je $n_1 \leq n_2 \leq n_3$. Če je $n_1 = 2$, potem je $\sum_{j=2}^3 \frac{1}{n_j} = \frac{1}{2}$. Hitro vidimo, da imamo za (n_2, n_3) možnosti $(3, 6)$ in $(4, 4)$. Dobimo torej dva diska s tremi konicami: $D\overline{236}$ in $D\overline{244}$. Če pa je $n_1 = 3$, potem je $\sum_{j=2}^3 \frac{1}{n_j} = \frac{2}{3}$. Ker sta n_2 in n_3 vsaj 3, vidimo, da morata biti enaka 3. To nam da kot rešitev še disk $D\overline{333}$.

Treba si je zapomniti, da so rešitve enačbe (2) do permutacije komponent naslednje: $(2, 3, 6)$, $(2, 4, 4)$ in $(3, 3, 3)$.



Slika 4

(iii) $k=1, l=2$

V tem primeru je $\chi(G) = 1 - 2 + \frac{1}{m_1} + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2n_j}$ ali $\frac{1}{m_1} + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2n_j} = 1$. Te rešitve ustrezajo tistim rešitvam enačbe (2), ki imajo zadnji dve komponenti sodi in večji od ena. Tako dobimo za rešitev samo trojko (2, 2, 2), ki ustreza disku $D2\bar{2}2$.

(iv) $k=1, l=1$

V tem primeru je $\chi(G) = 1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{2n_1}$ ali $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{2n_1} = \frac{1}{2}$. Rešitvi sta dve: (3, 3) in (4, 2). Ustrezni orbiterosti sta $D3\bar{3}$ in $D4\bar{2}$.

(v) $k=2, l=0$

V tem primeru je $\chi(G) = 1 - 2 + \sum_{j=1}^2 \frac{1}{m_j}$ ali $\sum_{j=1}^2 \frac{1}{m_j} = 1$. Rešitev je očitno samo ena: (2, 2). Ustrezna orbiterost je $D22$.

S tem smo očitno izčrpali vse možnosti. Slika 4 kaže vseh 17 orbiterosti, ki imajo Eulerjevo karakteristiko enako nič. Izkaže se, da je vsaka teh orbiterosti v resnici generator nekega kristalografskega vzorca (glej na primer [1], str. 80–82). Iz redov stožčastih točk in konic se vidi, da so edine rotacije, ki morejo nastopati kot simetrije ravninskih vzorcev, rotacije za kot 60, 90, 120 ali 180 stopinj.

Naj omenimo, da se dá klasifikacija narediti s pomočjo orbiterosti tudi za hiperbolične in sferične vzorce, le da se v teh primerih orbiterosti prilegajo ali hiperbolični ravnini ali pa sferi.

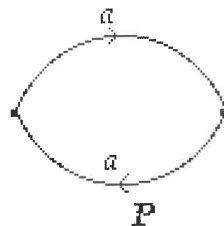
Dodatek: Eulerjeva karakteristika in Gauss-Bonnetova formula za orbiterosti

Kot smo obljubili, bomo tukaj na kratko opisali Eulerjevo karakteristiko in dokazali Gauss-Bonnetovo formulo za orbiterosti.

Pri običajnih ploskvah je znano, da so kompaktne sklenjene ploskve klasificirane s podatkom o orientabilnosti in z Eulerjevo karakteristiko. Eulerjevo karakteristiko ploskve je najlažje izračunati s pomočjo celične dekompozicije ploskve. Če ima ploskev a celic dimenzije nič, b enodimenzionalnih in c dvodimenzionalnih celic, potem je njena Eulerjeva karakteristika enaka $a - b + c$.

Na primer, sfera ima celično dekompozicijo na eno 0-dimenzionalno in eno 2-dimenzionalno celico (saj jo dobimo tako, da prilepimo rob diska na eno točko). Zato je njena Eulerjeva karakteristika enaka $1 - 0 + 1 = 2$. Če predstavimo torus kot štirikotnik z identificiranimi nasprotnimi stranicami, potem ima celično dekompozicijo na eno 0-dimenzionalno, dve 1-dimenzionalni (za vsak par identificiranih stranic v robu eno) in eno 2-dimenzionalno celico (ta ustreza notranjosti štirikotnika). Zato je njegova Eulerjeva karakteristika enaka $1 - 2 + 1 = 0$. Vse druge orientabilne sklenjene ploskve so povezane vsote n torusov, $n > 2$, in imajo eno celico dimenzije nič, eno 2-dimenzionalno celico ter $2n$ enodimenzionalnih celic in zato Eulerjevo karakteristiko $1 - 2n + 1 < 0$.

Med neorientabilnimi ploskvami igra osnovno vlogo projektivna ravnina P , ki jo dobimo z identifikacijo nasprotnih stranic v 'dvokotniku' (slika 5). P ima eno celico dimenzije nič, eno enodimenzionalno in eno dvodimenzionalno celico. Zato je $\chi(P) = 1 - 1 + 1 = 1$. Preostale neorientabilne sklenjene ploskve so povezane vsote projektivnih ravnin. Na primer, Kleinova steklenica je povezana vsota dveh projektivnih ravnin in ima Eulerjevo karakteristiko 0, vse druge pa imajo negativne Eulerjeve karakteristike.

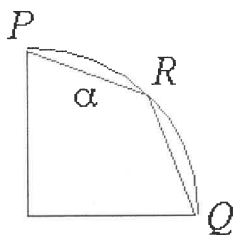


Slika 5

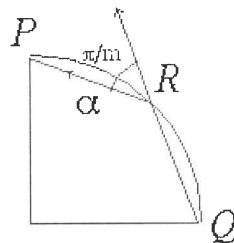
Recimo, da je F nesklenjena ploskev s k robnimi komponentami. Njeno celično dekompozicijo dobimo tako, da vzdolž vsake komponente roba (ki je enostavna sklenjena krivulja) prilepimo po en disk in dobimo sklenjeno ploskev $\hat{F}$. Celično dekompozicijo dobljene sklenjene ploskve lahko konstruiramo tako, da vsaka robna komponenta sestoji iz ene nič- in ene enodimenzionalne celice, in tako, da je vsak prilepljen disk dvodimenzionalna celica. Potem je jasno, imata $\hat{F}$ in F isto število celic dimenzij 0 in 1 in da ima F k manj dvodimenzionalnih celic kot $\hat{F}$. Zato je $\chi(F) = \chi(\hat{F}) - k$. Kot zgled izračunajmo Eulerjevo karakteristiko diska D . V tem primeru je ustrezna sklenjena ploskev dvodimenzionalna sfera, zato je $\chi(D) = \chi(S) - 1 = 2 - 1 = 1$.

Za bolj podrobno obravnavo Eulerjeve karakteristike in ploskev naj si bralec prebere [4].

Zdaj pa si oglejmo dokaz Gauss-Bonnetove formule za orbiterosti. Naj bo G orientabilna orbiterost (kar pomeni, da je G_T orientabilna). Pokazali bomo, da je integral $\int_G \mathcal{K}$ Gaussove ukrivljenosti $\mathcal{K}$ po ploskvi $G \setminus \{\text{izjemne točke}\}$ enak $\tilde{\chi}(G)$. Naj bo N epsilonska okolica stožčaste točke s , ki ima red m . N dobimo, če zlepimo ravni strani krožnega izseka K radija ϵ , ki tvori kot $2\pi/m$. Označimo s q naravno projekcijo $K \rightarrow N$. Naj bosta P in Q oglišči krožnega loka na tem izseku in naj bo R točka v sredini tega loka. Naj bo α kosoma linearna pot, ki gre od P do Q skozi R (slika 6).



Slika 6



Slika 7

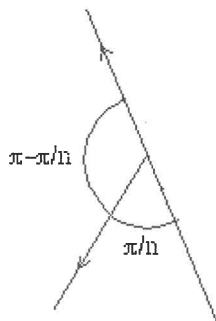
Označimo s $\tilde{K}$ del krožnega izseka K , ki je omejen z α , in naj bo $\tilde{N}$ njegova praslika $q^{-1}(\tilde{K})$. $\tilde{N}$ bomo imenovali prirezani epsilonski stožec

z vrhom s . Pot $\tilde{\alpha} = q^{-1}(\alpha)$ je kosoma geodetska krivulja na G , ki je neodvedljiva v točkah $\tilde{R} = q^{-1}(R)$ in $\tilde{P} = q^{-1}(P) = q^{-1}(Q)$. Zunanji kot, torej kot, ki ga tvorita levi in desni tangentni vektor krivulje $\tilde{\alpha}$ v teh dveh točkah, je enak π/m (slika 7).

Naj bodo $s_1, \dots, s_k$ stožčaste točke redov $m_1, \dots, m_k$ ter naj bodo $v_1, \dots, v_l$ vogali redov $n_1, \dots, n_l$, pri čemer sta seveda k in l lahko nič. Naj bo G_ϵ ploskev, ki jo dobimo, če iz G odstranimo odprte epsilonske prirezane stožce z vrhovi $s_1, \dots, s_k$. Potem nam Gauss-Bonnetova formula (glej [2], str. 387) pove, da je

$$\int_{G_\epsilon} \mathcal{K} = 2\pi\chi(G_\epsilon) - \sum \beta, \quad (3)$$

pri čemer zadnja vsota teče po vseh zunanjih kotih roba ploskve G_ϵ . Kot smo videli, stožčasta točka s_j prispeva dva enaka zunanja kota, ki skupaj merita $-\frac{2\pi}{m_j}$ (negativni znak je zato, ker je pozitivna smer vzdolž roba glede na ploskev negativna smer glede na prirezani stožec), vogal v_j pa ima zunanji kot enak $\pi(1 - \frac{1}{n_j})$ (slika 8).



Slika 8

Zato je vsota zunanjih kotov enaka

$$\sum \beta = 2\pi \left(\sum_{j=1}^k \left(-\frac{1}{m_j}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \right).$$

Iz (3) potem dobimo enakost

$$\int_G \mathcal{K} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{G_\epsilon} \mathcal{K} = 2\pi \left((\chi(G) - k) - \sum_{j=1}^k \left(-\frac{1}{m_j}\right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \left(1 - \frac{1}{n_j}\right) \right) = 2\pi\tilde{\chi}(G),$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\chi(G_\epsilon) = \chi(G) - k$, ker dobimo G_ϵ iz G tako, da izrežemo k topoloških diskov.

LITERATURA

- [1] José M. Montesinos, *Classical Tessellations and Three-Manifolds*, Springer-Verlag, 1987.
- [2] Barret O'Neill, *Elementary Differential Geometry*, Academic Press, 1966.
- [3] William P. Thurston, *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*, University of Minnesota Geometry Center, 1979.
- [4] Jože Vrabec, *Ploskve*, Obzornik mat. fiz. **23** (1976), 27–48.

MED DVEMA OGNJEMA?

JANEZ STRNAD

PACS 06.20.Fn

Nekateri poskušajo presajati v slovenščino angleška imena za količine, drugi zahtevajo, naj pišemo enote, kot jih izgovarjamo. Nasprotujoči si težnji lahko pripeljeta do dodatnih težav pri poučevanju fizike.

BETWEEN TWO FIRES?

Some propose that Slovenian names for physical quantities should be based on their English counterparts whereas some demand that units should be written phonetically. The opposing tendencies may lead to additional difficulties in the teaching of physics.

Velika večina fizikov misli, da razpravljanje o izrazih in enotah ni poldno, ker dogovorov ni mogoče preskusiti na način, ki je značilen za naravoslovje. Vse zapise te vrste v Obzorniku lahko preštejemo na prste ene roke. Zadevajo Giorgijev sistem enot [1] in SI [2] ter nekaj pripomb na strokovno slovenščino [3],[4]. Fiziki so se morali ukvarjati z novimi pojmi, ki jih je prinesel razvoj, in so vpeljali le nekaj novih izrazov za stare pojme, na primer: navor, tlak, kapljevina, trdnina.

Malo novih predlogov za stare izraze je mogoče pojasniti s tem, da so naši fiziki dobro premislili, preden so se odločili za nov predlog. Kot zgled vzemimo trdnino. Ali je novi izraz potreben? V vrsti plin, kapljevina (tekočina), trdna snov je zaželeno imeti tudi na tretjem mestu eno besedo. Ali obstaja uporabna slovenska beseda? *Slovensko-nemški slovar* Maksa Pleteršnika iz let 1894 in 1895 vsebuje besedo trdnina v pomenu celina, kopno. V tem pomenu besede danes ne uporabljamo več in jo je mogoče uporabiti v novem pomenu. Podoben premislek in posvetovanja s slovenisti je spremljal tudi navor, tlak, kapljevino. Količino pa so fiziki uporabljali od nekdaj. Mimogrede omenimo, da se danes morda „trdna snov“ vrača zaradi „mehke snovi“, ki se začenja uveljavljati kot skupno ime za vrsto zanimivih snovi: tekočih kristalov, koloidov, polimerov, liposomov ... (ni verjetno, da bi kdo uvedel „mehčino“). Tako utegne z leti razlog za vpeljavo nove besede tudi oslabeti.

Kljub temu je I. Kuščer vzel nove predloge za dvojnice, „ki se zdijo jezikovno enakovredne,” in na koncu spravljivo pristavil: „Z dekreti ali z zbiranjem glasov pri teh izrazih ne bomo dosegli poenotenja, ampak lahko le upamo na naravno selekcijo pri pouku in pisanju.” [3]. Podobno je menil za količino in veličino. F. Avčin je sprejel to „bratsko razprtijo”, čeprav nad neenotnostjo ni bil navdušen [4]. Samo leta 1978 se je oglasilo tudi društvo: „Člani društva matematikov, fizikov in astronomov, zbrani na 30. občnem zboru, prosimo in pozivamo vse tiste, ki pri svojem delu uporabljajo strokovne izraze iz matematike, fizike in astronomije, da ne kujejo novih izrazov, ampak uporabljajo ustaljene. Če menijo, da so potrebni novi izrazi, naj se posvetujejo z zastopniki društva.” [5]

Medtem ko se je razvil s F. Avčinom koristen dialog, je na splošno mogoče ugotoviti, da so tehniki bolj nagnjeni k naglici in k sklicevanju na

oblast pri uvajanju novih izrazov kot fiziki. To zaradi njihovega načina dela, v katerem imajo pomembno vlogo norme, pravzaprav ni presenetljivo.

Vprašanje o poimenovanju se je v zadnjem času odprlo ob poročilu o natančnejših vrednostih osnovnih konstant [6]. Dopisovanje, ki je temu sledilo, je nakazalo širino razhajanj. Po predlaganih nenavadnih izrazih je mogoče sklepati, da so jih skovali ali prevzeli ljudje, ki jim je način dela v fiziki tuj. Med značilnejše novosti je mogoče prišteti: *lastno napetost* za gonilno napetost, *kapacitanco* za kapaciteto, *permutivnost* za dielektričnost (kot nadrejeno dvojnico), *induktanco* za induktivnost, *elektromagnetni moment* za magnetni moment (kot podrejeno dvojnico), *magnetenje* za magnetizacijo, *kotno frekvenco* za krožno frekvenco, *električni prevod* za električno prevodnost kot obratno vrednost električnega upora [7]². To niso vsi sporni predlogi. Od drugih navedimo še *ionizirno sevanje*, ki ga vsiljujejo namesto ionizirajočega sevanja.

Pri dajanju imen tuji fiziki, ki so kaj odkrili ali prvič obravnavali, niso veliko premišljevali o besedah. Njihove misli so bile usmerjene k pojavom. Nekateri od izrazov, ki so jih uporabljali, se danes zdijo prav nenavadni. M. Faraday je naredil prve poskuse, pri katerih je kondenzatorje izpolnil s snovjo in primerjal njihove kapacitete. V tej zvezi je pisal o induktivni kapaciteti snovi. V magnetnem polju je ustrezno količino, ki je merila odziv snovi, imenoval magnetna induktivna kapaciteta. J. C. Maxwell je za našo kapaciteto uporabljal elektrostatično kapaciteto kondenzatorja in za našo induktivnost koeficient lastne indukcije ali elektromagnetno kapaciteto lastne indukcije tuljave. Faradayevi količini je imenoval dielektrična konstanta, ker je Faraday v tej zvezi uvedel za izolatorje ime dielektriki, in magnetna permeabilnost ali koeficient magnetne permeabilnosti [8].

Težnje po poenotenju so prišle pozneje. Večinoma so izhajale iz potreb pri poučevanju. Toda doslednosti najbrž zaradi prejšnje raznoličnosti pri poimenovanju ni bilo mogoče doseči. Leta 1872 je lord Kelvin po podobnosti enačb za tok tekočine, toplote ter električnega in magnetnega polja predlagal, da bi vse koeficiente imenovali permeabilnost s pripravnim prilastkom. Nasprotno pa je Oliver Heaviside leta 1887 predlagal permutivnost v zvezi z „zmožnostjo, da prepušča električni premik“ in induktivnost v zvezi z „zmožnostjo, da podpira magnetno indukcijo“. Čas je v angleščini odločil za Heavisideov predlog pri električnem in Kelvinov predlog pri magnetnem polju. Do tega je prišlo, ne da bi kdo angleške fizike silil k prvi ali drugi možnosti. Podobno so se slovenski fiziki odločili, najbrž po nemškem zgledu, za dielektričnost in permeabilnost. Angleški izraz induktanca je prišel pozneje, v letih med 1885 in 1890. Nasploh so v mednarodnih fizikalnih revijah, posebno v ameriških, uredniki tolerantni in se ne mešajo v rabo dvojnic, vrh tega dopuščajo celo enote zunaj SI.

Zaradi stališča fizikov do izrazov in enot, ki smo ga omenili na začetku, se ob predlogih nenavadnih izrazov ne kaže preveč jeziti. Morda bi predlagatelje kazalo le opozoriti na to, da s prevelikim številom preveč nenavadnih novosti sami manjšajo možnost, da bi se predlog prijel. Precej drugače pa

² Glej tudi predzadnjo stran v tej številki (opomba urednika).

kaže uvajanje novih izrazov presoјati pri poučevanju fizike. V šoli utegnejo novosti povzročiti resne težave. Zaradi tega se zdi smiselno člane Društva matematikov, fizikov in astronomov, predvsem učitelje fizike, obvestiti o dogodkih. Učence, ki imajo težave že z razumevanjem fizikalnega ozadja, bodo številni novi izrazi zagotovo spravili v zadrego. Zaradi novih in starih izrazov lahko pride do prave zmešnjave. Ali bo treba zaradi tega na novo napisati učbenike? Kaj sodijo o tem na Zavodu za šolstvo in šport?

Vendar prispevajo tisti, ki po vsej sili stavijo na angleške izraze, samo del težav. Drugi del težav izvira od nekaterih jezikoslovcev [10]. Ti nasprotno zahtevajo, da naj bi pisali enote in splošne izraze fonetično. Na primer: za enoto newton je tako v igri več predlogov „njutn“, „njuton“, „njuten“, za devetindevetdeseti element pa predlagajo ime „ajnštajnij“. (Ali v tem duhu na radiu in televiziji pogosto že slišimo Jožef Stefan, kakor je zapisano?) V navedenih in številnih drugih zgledih so vendar sprejeli izraze v spomin na Newtona, Einsteina in druge zaslužne fizike, katerih imena pišemo v izvirni obliki. Grozijo: „Ne more vsaka stroka zase spreminjati njegovih načel in pravil. Pravopis je – kakor slovenski knjižni jezik sploh – vsenarodna zadeva, narodotvorna in narodopredstavitvena, po svoje zavezujoča za slovensko državo.“ [10]

Zagovorniki brezpogojnega angleškega poimenovanja seveda nasprotujejo zagovornikom gesla „piši (v nekaterih primerih), kot govoriš“. Pravzaprav bi bilo spor zabavno opazovati, če ne bi bilo žalostno, kako se eni in drugi niti malo ne ozirajo na ustaljene strokovne izraze. Pozabljajo, da so se ti izrazi dolgo razvijali in sestavljajo občutljivo tvorbo, katere deli so med seboj povezani. Če spremenite majhen del, izzove to lahko druge, večje spremembe.

Kaj menijo o tem člani Društva?

LITERATURA

- [1] F. Avčin, *O vpeljavi Giorgijevega merskega sistema*, Obzornik mat. fiz. **2** (1953) 50. – Profesor Avčin je o tem predaval v DMFA pred petdesetimi leti, 12. in 19. decembra 1951.
- [2] J. Strnad, *Količine in enote v fiziki*, Obzornik mat. fiz. **26** (1979) 89.
- [3] I. Kušcer, *Prispevek k strokovni slovenščini*, Obzornik mat. fiz. **26** (1979) 52.
- [4] F. Avčin, *K pojmom veličina, količina, vrednota*, Obzornik mat. fiz. **27** (1980) 61.
- [5] J. Lorger, *30. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov*, Obzornik mat. fiz. **26** (1979) 17.
- [6] J. Strnad, *Osnovne fizikalne konstante*, Obzornik mat. fiz. **47** (2000) 177.
- [7] P. Glavič, *Sistem, ki mu sledi ISO 31, je jasnejši in zato enostavnejši*, Delo, 6. septembra 2000; SIST ISO 31-5: 2000; P. Glavič, *Zbliževanje pri poimenovanju enot?*, Delo, 9. maja 2001.
- [8] J. V. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover, New York 1954, nespremenjen ponatis tretje izdaje iz 1891.
- [9] A. Sihvola, *Answer to question #75. „Permittivity“ and „permeability“ – Where do the names come from?*, Am. J. Phys. **68** (2000) 691; S. T. Ratliff, *Answer to question #75. „Permittivity“ and „permeability“ – Where do the names come from?*, Am. J. Phys. **68** (2000) 692.
- [10] J. Dular, *Izjava Upravnega odbora komisije za slovarski del Slovenskega pravopisa o problematiki pisanja enot in veličin*.

ALI JE POT SKOZI ŽIVLJENJE NAKLJUČNO GIBANJE?³

Ivan Kuščer

Gospa rektorica, gospod predsednik, profesorji, diplomiranci in gostje.

Dovolite mi, da povem, kako zelo sem počaščen ob visokem priznanju, ki mi ga je naklonila vaša univerza, in kako me veseli priložnost, da spregovorim temu izbranemu občinstvu. Posebej bi rad tistim iz mlajše generacije posvetil razmislek o vlogi naključja v našem življenju. Vprašanje je, ali je mogoče človekovo življenje primerjati s statističnim tavanjem, z Brownovim gibanjem?

Primerjava ni čisto brez soli, ker je tudi v življenju veliko nepredvidljivih dogodkov. Ob spočetju vsi začnemo z enako verjetnostjo kot deček ali deklica. Med odraščanjem se pogosto zavemo loterije ob selitvah in srečanjih z novimi ljudmi. Dan za dnem doživljamo naključnost vremena in našega zdravja ter od časa do časa druge nepredvidene žalostne in srečne zgrade. Vendarle na nekaj odločilnih dogodkov lahko vplivamo z lastno voljo. Ali smo v šoli uspešni ali ne, ni stvar sreče, ampak predvsem naše izbire študijske smeri in zmožnosti za trdo delo, resno razmišljanje, vztrajnost in navdušenje – kakor ste doslej že sami ugotovili. Naključje je nemara vpleteno, ko izbiramo prijatelje ali se zaljubimo, vendar je tudi tu veliko odvisno od naše presoje in našega vedenja. Pomembni dogodki, kakršen je današnji, ponujajo priložnost, da razmislimo, ali smo se v preteklosti odločili prav, ali nam je za kaj žal in kakšni naj bi bili naši naslednji koraki.

Starejše ljudi dostikrat vprašajo, kako bi se odločili, ko bi se znova znašli na začetku poti. Zase bi na to kar pri priči odgovoril in verjamem, da boste mnogi med vami po letih prišli do podobnih sklepov: znova bi krenil na pot z enakimi hotenji in nagnjenji in bi poskušal podobno krmariti okoli neizbežnih naključnih dogodkov, četudi bi tvegat, da bi še enkrat zagrešil iste napake. Lepo bi bilo, ko bi znova lahko imel tako sijajne prijatelje in družino. Pri zunanjih okoliščinah pa bi se prav rad izognil temu, da bi se ponovila zgodovina, ki me je pričakala z dvema svetovnima vojnama in spodobnim številom državnih voditeljev. Vrsto je začel cesar Karl II v stari Avstriji in končal Tito in njegovi nasledniki v Jugoslaviji, dokler ta nesrečna država ni razpadla. Eden od njenih delov – Slovenija – je zdaj moj dom. V ponovljeni življenjski zgodbi bi zopet začel študirati kemijo in po nekaj razočaranjih prešel na fiziko, pozneje pa bi lahko ugotovil, kako je imenitna sinteza zabrisala mejo med njima. Kot prvič bi tudi drugič poskušal kar

³ Govor profesorja Ivana Kuščerja na svečanosti, na kateri mu je Univerza Waterloo v Kanadi 26. oktobra 1996 podelila naslov častnega doktorja. S tem prispevkom želi Društvo matematikov, fizikov in astronomov počastiti spomin svojega častnega člana. Obzornik za matematiko in fiziko se lepo zahvaljuje gospe Martini Kuščer, da je dovolila objavo. Prispevek sta prevedla Alojz Kodre in Janez Strnad.

najbolj uživati življenje v krogu prijateljev, družine, dela in tudi konjičkov, kot sta raziskovanje sveta pod morjem in hoja po hribih.

Tistim, ki vstopate v poklicno življenje, bi rad namignil, kaj se zdi najpomembnejše za uspeh v življenju. Bistveno je kajpak trdo delo. Zaradi težav nikoli ne obupajte nad kakim tehniškim ali raziskovalnim delom. Vedno je vredno poskusiti znova s podvojeno močjo. Če se vam zazdi, da ste zašli v slepo ulico ali se znašli na razpotju, se ne obotavljajte vprašati za nasvet. Ne verjemite ljudem, ki pravijo, da se brihtnežu ali tistemu, ki se zna delati brihtnega, vsaka stvar posreči, ko tleskne s prsti. To ni res. Ne verjemite, da je Newtonu uspelo veliko odkritje, ko je samo poležaval pod drevesom in razmišljal o padcu jabolka. Četudi mu je pogled na jabolko nemara pomagal, je porabil dvajset let, preden je končal svojo razpravo. Tudi če je res, da se nove zamisli dostikrat rodijo med sanjarjenjem, je treba do končnega uspeha prelitati še veliko potu.

Laže je, če ne delate sami, zlasti na začetku. Poiščite si koga bolj izkušenega, ki mu zaupate in ki bo rad sodeloval in pomagal. Nihče ni varen pred napakami in nobeno znanje ni popolno, zato ne zavračajte kritike. Odkrita kritika je nedvomno boljša od zadržanih in meglenih pripomb. Ne poznam boljšega zgleda, kot je bilo sodelovanje s profesorjem Fredom McCourtom z waterlooskega oddelka za kemijo, ko sva skupaj pisala knjigo. Neusmiljeno sva raztrgala sleherno besedo, sleherni stavek in sleherno enačbo, ki se je zdela sumljiva ali nejasna. Iz dneva v dan sva si izmenjavala dele rokopisa z opombami na robu, rdečimi, ki so veljale kot dokončne, in zelenimi, ki so bile ponujene v premislek. Čeprav drug z drugim nisva bila nežna, sva oba uživala in sva se veliko presmejala. Nekje, kjer se mi je Fredova izpeljava zdela predolga, sem tako tudi zapisal (rdeče) in dodal (zeleno), da takšnih knjig navadno ne kupim. Naslednje jutro sem prejel Fredov ugovor v shakespearskem slogu: "Mislim, da se ti, Ivan, prehudo repenčiš ...". Dodal je še: "Ne bom jokal, če ne maraš knjige, te bom pa prosil odpušcanja, ko se snideva v peklu."

Še en nasvet: težave, na katere naletite pri delu, delite s kolegi in tudi z življenjskim tovarišem. Ona ali on lahko postane, kot sem sam spoznal, najboljši in najobjektivnejši kritik. Ne pozabite pogledati drugam: sprašujte kolege in iščite po literaturi. Ni nas treba biti sram, če se učimo vse življenje.

Ko se postarate, se smer izmenjavanja pogosto obrne: naleteli boste na sodelavce, ki bi se radi učili od vas. Vseeno pa učenje še vedno teče v obe smeri. Nemara pa je še pomembneje, da delo z mlajšimi sodelavci obnavlja ogenj, ki vas žene še daleč v leta, ko bi se sami že sprijaznili s počitkom.

Dobro delo zahteva neomahljivo navdušenje. Ne bojte se ga, četudi včasih povzroči nespečne noči in pospeši utrip. Malo napetosti tu in tam ne škodi, dodatni napor pa lahko prinese veliko zadovoljstva. Ta občutja so podobna kot v srečni ljubezni, in so prav tako bistvena za človekovo izpolnitev. Brez njih bi bilo težko doseči kaj omembe vrednega.

Maloprijetno se obotavljam s svarilom pred pastjo: naj vas navdušenje ne zapelje v obsedenost z delom. V izpolnjenem življenju so še druge stvari:

prijateljstvo, ljubezen, družina, dom, konjički in druge izkušnje. Vselej si najdete dovolj časa za te strani življenja, kdaj pa kdaj pa tudi za popoln oddih, tako da na primer uživate konce tedna in počitnice v naravi. Čeprav ni lahko najti pravega razmerja med obema ciljema, se je vredno potruditi. Srčno vam vsem želim srečo in uspeh v teh iskanjih. Zapomnite si, da tek življenja le ni povsem naključen, veliko odločitev je v vaših rokah.

PISMO UREDNIŠTVU

Prof. dr. Janez Strnad je v lanski 5. številki *Obzornika* („Osnovne fizikalne konstante 1998”) pisal o magnetni in električni konstanti in pri tem omenil tudi „neko slovensko komisijo”. Gre za Komisijo za izdelavo Splošnega tehniškega slovarja Sekcije za terminološke slovarje Inštituta za slovenski jezik „Frana Ramovša” pri ZRC SAZU. Njena posebna podkomisija v sodelovanju s Tehničnim odborom za tehnično risanje, veličine, enote, simbole in grafične simbole pri *Urdu za standardizacijo* res pripravlja prevod mednarodnega standarda ISO 31 o veličinah in enotah. V komisiji sodelujejo različni strokovnjaki, med njimi je tudi predstavnik fizikov prof. dr. Andrej Čadež. Podkomisija je vesela vsake pobude in jo bo resno obravnavala.

ISO 31-5 iz leta 1992 obravnava tudi obe omenjeni konstanti, električno in magnetno. Prav ti imeni sta navedeni kot prvi, na drugem mestu sta napisana izraza permitivnost vakuumu in permeabilnost vakuumu. V prejšnji izdaji istega standarda iz leta 1979 je bil vrstni red obrnjen. Gre za običajen način zamenjave imen – najprej se na prvem mestu piše staro ime, na drugem novo; v sedanji izdaji se je vrstni red zamenjal, staro ime je ostalo na drugem mestu, da bi bilo jasno, za kakšno veličino gre. V naslednji izdaji bo ostalo samo prvo ime – električna oz. magnetna konstanta.

Angleška verzija standarda iz leta 1992 se od leta 1995 uporablja tudi kot slovenski standard (SIST ISO) za simbole veličin, imena in simbole enot. V rokopisu pripravljenega slovenskega prevoda je zapisano enako, torej:

- električna konstanta, permitivnost vakuumu,
- magnetna konstanta, permeabilnost vakuumu.

Javna obravnava prevoda ISO 31-5 bo predvidoma konec letošnjega leta in bo, tako kot vse dosedanje, objavljena tudi v *Delu – Znanje za razvoj*. Takrat bo ponovna možnost za pripombe, ki jih bosta podkomisija in odbor pretehtala in upoštevala pri končni redakciji prevoda.

Prof. dr. Peter Glavič

OPRAVIČILO

Kljub sodobni računalniški opreми tiskarski skrat še ni izumrl. Tako je v prejšnji številki *Obzornika* zamenjal zadnji dve strani.

Bralcem in avtorju „prizadetega” prispevka se zaradi tega iskreno opravičujemo.

Uredništvo

VESTI

R 177/01



100000142,3

Dr. Igor Kukavica je prejel nagrado SI

Igor Kukavica, profesor matematike na University of Southern California v Los Angelesu, ZDA, je bil imenovan za „Alfred P. Sloan Research Fellow 2000–2002“. Nagrada, ki vsebuje tudi dvoletna raziskovalna sredstva v višini 40.000 ameriških dolarjev, se podeljuje najboljšim znanstvenikom, ki delujejo v Združenih državah Amerike, najkasneje 6 let po opravljenem doktoratu.

Raziskovalno delo profesorja Kukavice so parcialne diferencialne enačbe, natančnejše, problemi, povezani z Navier-Stokesovimi enačbami, ki so izjemnega pomena za modeliranje procesov, povezanih s tekočinami. Njihova značilnost je predvsem velika nestabilnost v odvisnosti od začetnih pogojev in kaotično obnašanje rešitev.

Igor Kukavica se je začel zanimati za matematiko že v srednji šoli (I. gimnazija Ljubljana). Tako je leta 1982 postal državni prvak na tekmovanju srednješolcev v matematiki ter zastopal Jugoslavijo na mednarodni matematični olimpiadi v Budimpešti. Študiral je na Oddelku za matematiko in mehaniko FMF Univerze v Ljubljani. Po diplomi, za katero je leta 1986 prejel Prešernovo nagrado, se je kot mladi raziskovalec zaposlil na Inštitutu za matematiko, fiziko in mehaniko Univerze v Ljubljani. Leta 1988 je magistriral in še istega leta odšel na doktorski študij na Indiana University, Bloomington, v ZDA. Po uspešnem študiju je leta 1993 doktoriral iz matematike in hkrati tudi diplomiral iz klasične kitare (Performer Diploma). Nato je odšel na prestižno University of Chicago, kjer je leta 1995 postal „assistant professor“ (docent), tri leta kasneje pa „tenured associate professor“ (stalno zaposlen izredni profesor) na University of Southern California.

Dr. Igor Kukavica je doslej objavil že 23 znanstvenih člankov (od tega 16 samostojnih) v najuglednejših mednarodnih matematičnih revijah (Nonlinearity, Duke Mathematical Journal, Communications in Partial Differential Equations, Journal of Differential Equations, Journal of Functional Analysis, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Physica D, ...) ter imel številna vabljenja predavanj na univerzah in konferencah v ZDA, Franciji, Švici, Nemčiji, Angliji, Čilu in na Kitajskem.

Raziskovalni sklad Alfreda P. Sloana je bil ustanovljen leta 1955 z namenom odkriti in podpreti mlade znanstvenike z izjemnimi raziskovalnimi rezultati in jim hkrati s finančno pomočjo omogočiti, da še več časa posvetijo svojemu raziskovalnemu delu. Vsako leto je podeljenih skupno 100 nagrad na področju fizike, kemije, matematike, medicine, ekonomije in računalništva, od tega 20 na področju matematike. Dodatne informacije o dr. Kukavici in Sloanovem skladu najdete na <http://math.usc.edu/~kukavica/> in <http://www.sloan.org/programs/scitech.fellowships.htm>.

Miran Černe in Aleksandar Jurišić

