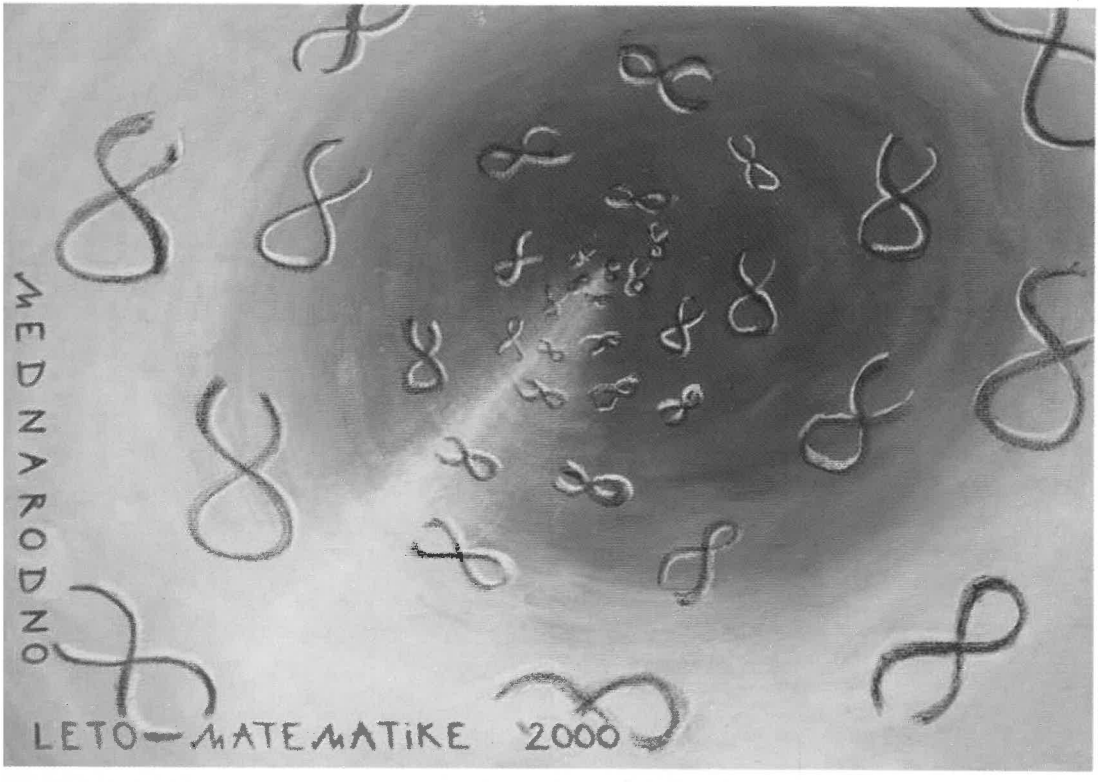
ZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

SSN 0473-7466

ODPISANO

2001
Letnik 48
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAREC 2001

letnik 48, številka 2, strani 33–64

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, telefon (01) 476-65-53, telefaks (01) 251-72-81, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d. d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 042961, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Martin Juvan (glavni urednik), Roman Drnovšek (odgovorni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko), Marko Zgonik (urednik za fiziko).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Naročnina za člane društva je všteta v celoletno članarino, ki znaša 3600 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6600 SIT, za študente 1800 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 720 SIT, stare številke 480 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov. Revijo sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2001 DMFA Slovenije – 1448 Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

---

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

O prostorskih kotih — On solid angles (Anton Cedilnik) 33–42

Nelinearna optika ob površinah — Nonlinear optics on surfaces (Irena Drevenšek Olenik) 43–50

Kako približati učencu pojma funkcije in njenega grafa — Introducing the notions of a function and its graph to students (Peter Šemrl) 51–55

Vesti — News

Ob šestdesetletnici prof. dr. Jožeta Vrabca (Neža Mramor) 58–59

Prof. dr. Peter Legiša, dobitnik nagrade Republike Slovenije na področju šolstva za leto 2000 (Milan Hladnik, Boris Lavrič) 59–62

Prof. dr. Sandi Klavžar je prejel Zoisovo priznanje za leto 2000 (Bojan Mohar) 62–63

Vabilo na 53. občni zbor (Martin Čopič) IV

Nove knjige — New books

(Roman Drnovšek, Vlado Malačič) 55–57, 63–III

Na ovitku: *Neskončnost*, Ian Koštomaj, 2000, plakat, izdelan na osnovi razpisa DMFA ob svetovnem letu matematike.

O PROSTORSKIH KOTIH

ANTON CEDILNIK

Math. Subj. Class. (2000): 51M20, 90B60

V sestavku obravnavamo problem maksimalnega prostorskega zornega kota in v povezavi s tem še problem optimalne oblike reklamne table.

ON SOLID ANGLES

In the article we consider the problem of the maximal solid visual angle and its connection with the problem of the optimal shape of an advertising board.

1. Definicija prostorskega kota

Spomnimo se najprej ravninskih kotov. Njihovih definicij je kar precej, le da nekatere niso primerne za trirazsežno analogijo. Najboljša za naš namen je naslednja: *ravninski kot α z vrhom $V \in \mathbb{R}^2$ je unija neke družine poltrakov, ki izhajajo iz točke V*. Varianta te definicije: *kot α z vrhom V in bazo $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ ($V \notin \mathcal{B}$) je unija poltrakov, katerih vsak ima V za začetno točko in gre skozi vsaj eno točko baze $\mathcal{B}$*. Tako je na primer pri običajnih oznakah v trikotniku kot α unija vseh poltrakov iz oglišča A skozi točke stranice a; A je torej vrh, a pa baza kota α.

Narišimo krog $\mathcal{K}_2(V, r)$ s polmerom $r > 0$ in s središčem v V. Če je $\mathcal{K}_2 \cap \alpha$ merljiva množica, pravimo, da je α merljiv kot. Seveda tu mislimo na običajno Lebesgueovo mero, ki nosi prijazno domače ime *ploščina* in jo običajno označujemo s p. Mera merljivega kota α je potem definirana takole:

$$\frac{p(\mathcal{K}_2 \cap \alpha)}{\pi r^2} = \frac{\text{mera } \alpha}{2\pi}.$$

Imenovalec 2π na desni je dodan zato, da je enota kota *radian* 1^{rd} tisti konveksni kot, ki mu pripada na krožnici diska $\mathcal{K}_2$ lok z dolžino r. Če namesto 2π vstavimo 360, 400 ali 6400, je kot merjen s tremi drugimi, „praktičnimi" enotami.

Za mero kota nimamo posebnega znaka, saj se iz uporabe simbola α – imena kota – jasno vidi, kdaj imamo v mislih kot in kdaj njegovo mero. Vendarle pa moramo biti ob tej nedoslednosti previdni; tako je na primer implikacija $\alpha = \emptyset \Rightarrow \alpha = 0$ korektna, obratna implikacija pa ne.

Definicija 1. Naj bo $\mathbb{R}^3$ običajen evklidski prostor, $V \in \mathbb{R}^3$ neka točka in $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ poljubna (lahko tudi prazna) množica točk, $V \notin \mathcal{B}$. *Prostorski kot* je unija družine poltrakov s skupnim začetkom V, ki gredo skozi kako točko množice $\mathcal{B}$. V je *vrh* tega kota, $\mathcal{B}$ pa je njegova *baza*.

Domenimo se, da bomo prostorske kote označevali z velikimi grškimi črkami.

Lebesgueova mera v $\mathbb{R}^3$, ki ji recimo kar *volumen* in jo označujmo z v, definira mero prostorskega kota.

Definicija 2. Naj bo Ω prostorski kot z vrhom V in $\mathcal{K}_3(V,r)$ krogla s središčem V in polmerom $r > 0$. Če je $\mathcal{K}_3 \cap \Omega$ merljiva množica, je mera kota Ω definirana z enačbo:

$$\frac{v(\mathcal{K}_3 \cap \Omega)}{4\pi r^3/3} = \frac{\text{mera } \Omega}{4\pi}. \tag{1}$$

Volumen inducira površinsko mero na sferi in ni težko odkriti, da je enota tisti kot, imenovan **steradian** (1^{sr}), ki izreže na sferi $\mathcal{S}_2(V,r)$ ploskev s površino r^2.

Spet se domenimo, da bomo mero kota Ω označevali kar z istim simbolom Ω. Pa še tole imejmo ves čas v mislih: ker je volumen invarianten za vsa gibanja, je taka tudi mera kota.

Po svoje je nenavadno, da prostorske kote bolj uporabljajo fiziki kot matematiki. V knjigah o geometriji je ta pojem komaj kje omenjen. V fiziki pa se pojavi že v srednjih šolah, recimo pri optiki: svetilnost I je svetlobni tok P na prostorski kot (bolj natančno: $I = dP/d\Omega$, [1, str. 275]). Morda še metodološka iskrica: v matematiki je navada, da mere kotov, izražene v radianih oziroma steradianih, pišemo brez označbe enote; izrecno odsvetujem to navado v fiziki, kjer je pisanje enot v računih bistveno, vsaj na srednješolski ravni.

Ko smo že dregnili v fiziko, še pripomba o „fizikalni" definiciji ravninskega kota. V kinematiki vrtenja nastopa količina zasuk, ki je ekvivalent kota, njegova mera pa je poljubno realno število. Razumljivo je, da skušamo še med prostorskimi gibanji odkriti kaj podobnega. A če pri zasuku vzamemo kot bistveno to, da ni nobene negibne točke na tiru kroženja (celo več, da se vse točke na krožnici premaknejo za enake loke), je možno odkriti, da nič analognega ne obstaja pri trirazsežnih gibanjih ([6, str. 15–18]).

Razlogi za zanemarjanje prostorskih kotov v šolah in v strokovni literaturi so precej jasni. Po eni strani je delo z njimi – kot bomo v nadaljevanju videli – precej zahtevno. Po drugi strani pa žal večina izrekov o ravninskih kotih v trirazsežni analogiji ne velja več.

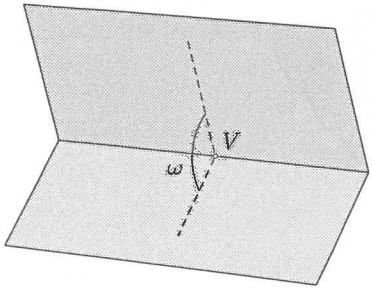
Prvi primer. Vsota notranjih kotov je v vseh trikotnikih ista. Vsota notranjih prostorskih kotov tetraedra pa lahko zavzame katero koli vrednost na intervalu $(0, 2\pi)$ ([3, str. 23–25]).

Drugi primer. Obodni kot nad premerom kroga je, kot vemo, vedno enak $\pi/2$. Prenesimo to trditev v trirazsežen kontekst. Včrtajmo (poševni) stožec v polkroglo tako, da ima vrh nekje na sferi, pravzaprav poluti, osnovna ploskev pa je kar ravni del polkrogle; prostorski kot pri vrhu stožca je nekakšen obodni kot nad središčnim presekom sfere. Bralec naj skuša s pomočjo formule (7) v nadaljevanju potrditi ali ovreči hipotezo, da so vsi taki obodni koti med seboj enaki.

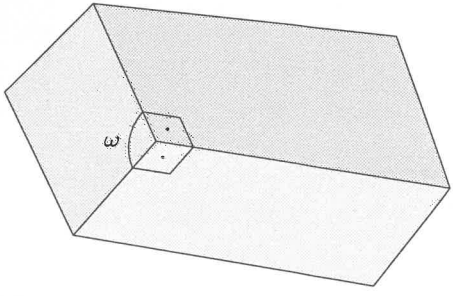
2. Računanje prostorskih kotov

Iz (1) sledi, da je cel prostor prostorski kot 4π steradianov. Polprostor potem meri 2π. Oktant meri $\pi/2$; vsak od osmih kotov sobe torej meri okoli poldrugi steradian. Mimogrede, oktant je prostorska analogija kvadranta v ravnini in zdi se docela razumno, da merita enako, namreč $\pi/2$. Pa v resnici ni. Eno so radiani, drugo so steradiani, zato primerjava sploh ni na mestu; štiridimenzionalna analogija kvadranta oziroma oktanta pa dokončno podre podobo, saj meri $\pi^2/8$ ustreznih enot.

Klin (slika 1) z odprtino $\omega \in [0, 2\pi]$ meri 2ω. „Sobni" kot (slika 2) z dvema pravima kotoma in enim poljubnim kotom ($\omega \in [0, 2\pi]$) med robovi sten meri kar ω.



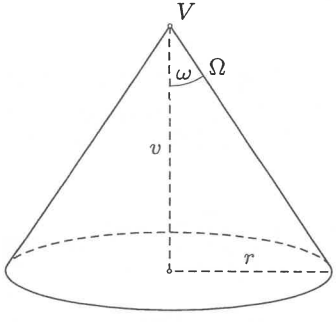
Slika 1.



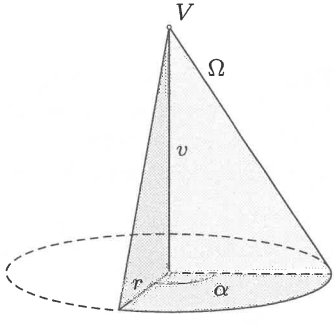
Slika 2.

Prostorski kot v vrhu V pokončnega krožnega stožca s kotnim polmerom $\omega \in [0, \pi)$ (slika 3):

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos\omega)\,. \tag{2}$$



Slika 3.



Slika 4.

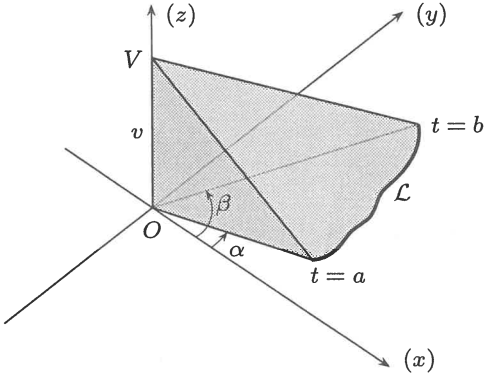
Ta formula sledi iz formule za ploščino krogelne kapice, ki jo lahko v četrtem letniku gimnazije brez problemov izpeljemo z integralom ([3, str. 13]).

Stožec z višino $v = 14$ enot in s premerom osnovne ploskve $2r = 18$ enot (tak je na sliki 3) ima ob vrhu prostorski kot skoraj natanko 1^{sr} (napaka $-0{,}2$ %).

Iz (2) sledi mera prostorskega kota na sliki 4:

$$\Omega = \alpha \left(1 - \frac{v}{\sqrt{v^2 + r^2}}\right) . \tag{3}$$

Od tod pa je za vsakogar, ki obvlada tvorbo integrala iz integralskih vsot, le še korak do naslednjega izreka.



Slika 5.

Izrek 3. *Naj bo $\mathcal{L}$ enostavna krivulja z enačbo $\vec{r} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, pri čemer sta x in y zvezni in odsekoma zvezno odvedljivi funkciji parametra $t \in [a, b]$; $\mathcal{L}$ naj ne gre skozi izhodišče. Potem je v skladu s sliko 5:*

$$\Omega = \beta - \alpha - v \int_a^b \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)dt}{(x^2 + y^2)\sqrt{v^2 + x^2 + y^2}} . \tag{4}$$

Resnici na ljubo, omenjeni korak do izreka 3 je precej dolg, saj je ugotavljanje konvergence integralskih vsot kar zahtevno. Najprej razrežemo interval $[a, b]$ na podintervale z nekimi delilnimi točkami t_k. S tem razrežemo tudi kot od α do β na majhne delčke

$$\delta_k = \arctan \frac{y(t_k)}{x(t_k)} - \arctan \frac{y(t_{k-1})}{x(t_{k-1})} = \frac{x(\tau_k)\dot{y}(\tau_k) - \dot{x}(\tau_k)y(\tau_k)}{x(\tau_k)^2 + y(\tau_k)^2} \Delta t_k,$$

kjer je $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ v skladu z Lagrangeovim izrekom. Potem je po formuli (3)

$$\Delta\Omega_k \approx \delta_k \left(1 - \frac{v}{\sqrt{v^2 + x(\tau_k)^2 + y(\tau_k)^2}}\right)$$

in nadaljnje delo je v grobih obrisih začrtano.

Formula (4) je posebej enostavna, če x in y izrazimo v polarnih koordinatah:

$$\Omega = \beta - \alpha - v \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\varphi}{\sqrt{v^2 + \rho(\varphi)^2}} . \tag{5}$$

To pa ne pomaga, da ne bi bil integral v (4) ali (5) v večini primerov hudo neelementaren.

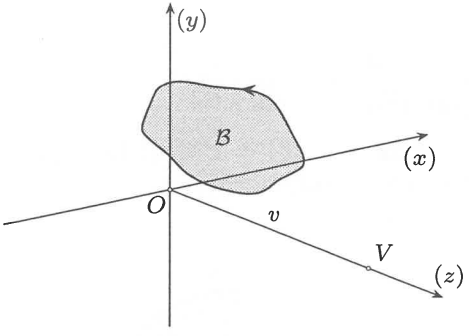
Posledica 4. *Naj bo krivulja $\mathcal{L}$ iz izreka 3 enostavno sklenjena, da omejuje lik $\mathcal{B}$ v ravnini (x, y). Prostorski kot Ω z vrhom $V(0, 0, v)$ in bazo $\mathcal{B}$ je potem*

$$\Omega = v \int_{a}^{b} \frac{(\dot{x}y - x\dot{y})dt}{(x^2 + y^2)\sqrt{v^2 + x^2 + y^2}} , \tag{6}$$

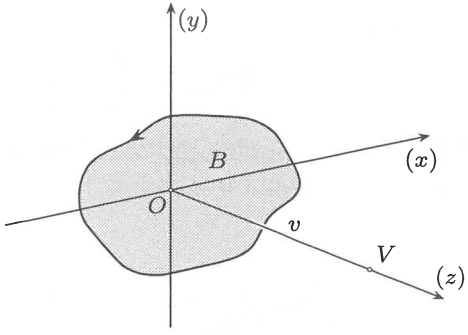
če je koordinatno izhodišče zunaj lika $\mathcal{B}$ (slika 6), in

$$\Omega = 2\pi - v \int_{a}^{b} \frac{(x\dot{y} - \dot{x}y)dt}{(x^2 + y^2)\sqrt{v^2 + x^2 + y^2}} , \tag{7}$$

če je koordinatno izhodišče znotraj lika $\mathcal{B}$ (slika 7).



Slika 6.



Slika 7.

Dve opozorili! Krivulja $\mathcal{L}$ mora biti pravilno orientirana in nikakor ne sme iti prek izhodišča. Če pa že je $0 \in \mathcal{L}$, je treba integral v (4) računati počasi in previdno, ker je pač nepravi.

Nekaj konkretnih primerov. Prostorski kot z vrhom V na sliki 8 je za $r > 0$ in $0 < p \leq q$ po formuli (5):

$$\Omega = 2 \arctan \frac{\sqrt{(q^2 - p^2)(q^2 + r^2)}}{pr} - 2 \arctan \frac{\sqrt{q^2 - p^2}}{p} . \tag{8}$$

Formula (8) se da precej enostavneje izpeljati s pomočjo sferne trigonometrije.

Če je baza $\mathcal{B}$ na slikah 6 in 7 krog s središčem $S(0,s,0)$ in polmerom r, je za $s > r \geq 0$ po formuli (6):

$$\Omega = \frac{2v(s-r)}{(s+r)\sqrt{v^2+(s+r)^2}}\,\Pi\left(-\frac{4sr}{(s+r)^2}\,,\ \sqrt{\frac{4sr}{v^2+(s+r)^2}}\right) - \\ -\frac{2v}{\sqrt{v^2+(s+r)^2}}\,K\left(\sqrt{\frac{4sr}{v^2+(s+r)^2}}\right), \tag{9}$$

za $r > s \geq 0$ pa je po formuli (7):

$$\Omega = 2\pi - \frac{2v(r-s)}{(r+s)\sqrt{v^2+(r+s)^2}}\,\Pi\left(-\frac{4rs}{(r+s)^2}\,,\ \sqrt{\frac{4rs}{v^2+(r+s)^2}}\right) - \\ -\frac{2v}{\sqrt{v^2+(r+s)^2}}\,K\left(\sqrt{\frac{4rs}{v^2+(r+s)^2}}\right). \tag{10}$$

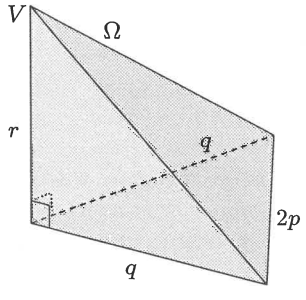
Mejni primer $r = s > 0$ lahko dobimo z limito (9) ali (10):

$$\Omega = \pi - \frac{2v}{\sqrt{v^2+4r^2}}\,K\left(\frac{2r}{\sqrt{v^2+4r^2}}\right). \tag{11}$$

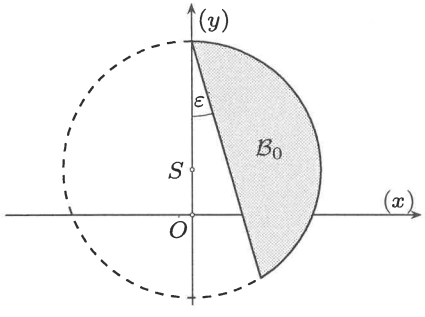
Pri tem je

$$\Pi(p,q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1+p(\sin t)^2)\sqrt{1-q^2(\sin t)^2}}$$

Legendrov popolni eliptični integral 3. vrste in $K(q) = \Pi(0,q)$ Legendrov popolni eliptični integral 1. vrste. Več o teh funkcijah v [5].



Slika 8.



Slika 9.

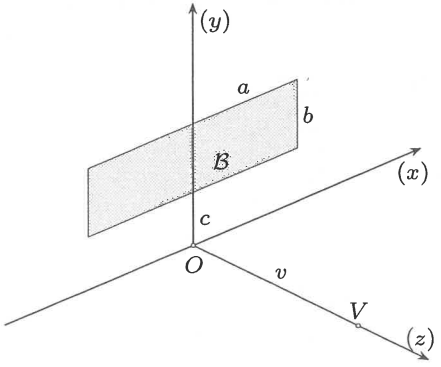
No, v resnici lahko formule (9)–(11) izpeljemo z enim samim računom s formulo (6) tako, da po sliki 9 izračunamo prostorski kot Ω_0 nad bazo $\mathcal{B}_0$ in je potem $\Omega = 2 \lim_{\varepsilon \searrow 0} \Omega_0$. Formula (8) da že z golim seštevanjem in

odštevanjem prostorski kot Ω z vrhom $V(0,0,v)$ in bazo $\mathcal{B}$, ki je na sliki 10 pravokotnik s stranicama $2a$ in b (kot recimo slika na steni, projekcijsko platno, ...):

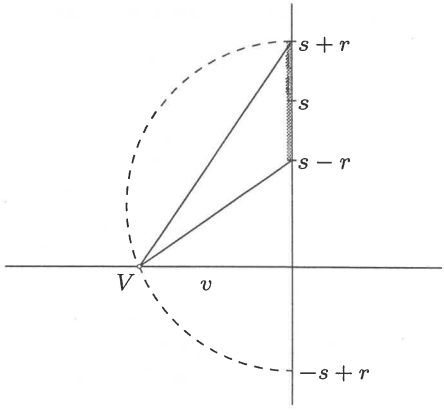
$$\Omega = 2\arctan\left(\frac{a}{b+c}\cdot\frac{\sqrt{a^2+(b+c)^2+v^2}}{v}\right) + 2\arctan\left(\frac{b+c}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2+(b+c)^2+v^2}}{v}\right) -$$
$$-2\arctan\left(\frac{a}{c}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2+v^2}}{v}\right) - 2\arctan\left(\frac{c}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2+v^2}}{v}\right). \tag{12}$$

3. Maksimalni zorni kot

Splošno znana je naloga o maksimalnem zornem kotu (slika 11): Na kateri razdalji od stene mora stati opazovalec, da vidi sliko na steni pod maksimalnim zornim kotom ω? Na sliki 11 je že tudi grafična rešitev problema, ki je $v_{\text{opt.}} = \sqrt{s^2 - r^2}$, pri čemer je s višina sredine slike in $2r$ širina slike.



Slika 10.



Slika 11.

Naloga je v osnovi zgrešena, saj je zorni kot v resnici prostorski kot. Morali bi uporabiti formulo (12) za $c = s - r$ in $b = 2r$, pa še dolžino slike $2a$ bi morali imeti podano. V načelu ni problem nastaviti enačbo $d\Omega/dv = 0$, le veliko dela je z njeno ureditvijo, ki da enačbo 4. stopnje z „grdimi" rešitvami.

Hujši problem pa je, če je opazovana slika bolj splošne oblike. Formulirajmo nalogo čisto splošno. Imamo situacijo na sliki 6; kakšna naj bo razdalja v, da bo prostorski zorni kot Ω z vrhom V in bazo $\mathcal{B}$ maksimalen?

Eksistenca rešitve ni problematična. Če je v zelo majhen ali pa zelo velik, je Ω poljubno blizu 0. Ker pa je Ω po formuli (6) očitno odvedljiva

funkcija spremenljivke v, je iskana rešitev problema ena od rešitev enačbe

$$\frac{d\Omega}{dv} = \int_a^b \frac{(\dot{x}y - x\dot{y})dt}{(v^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} = 0\,. \tag{13}$$

Seveda nam ta enačba nič ne pomaga, saj je integral v njej v netrivialnih primerih zelo trd oreh.

Poglejmo si rešitev problema, če gre za krog. S formulo (9) si ne moremo kaj dosti pomagati, saj je reševanje enačbe, ki vsebuje eliptične integrale in njihove odvode, čisti brezup. Raje uporabimo numerično integracijo in iz tabele za vrednosti Ω pri različnih razmerjih r/s poiščimo maksimalno. Tako nastane tabela 1, v kateri je r/s neodvisna spremenljivka, odvisna je optimalna razdalja $v_{\text{opt.}}$ (točneje njeno razmerje z s), poleg je pa še ustrezen maksimalni zorni kot $\Omega_{\max}$. Zadnja kolona je uporaben približek, ki ga dobimo z zelo preprosto formulo

$$v_{\text{opt.}} \approx s\sqrt{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi r}{2s}\right)}\,. \tag{14}$$

Ta formula nima kakega globljega ozadja in je dobljena povsem eksperimentalno.

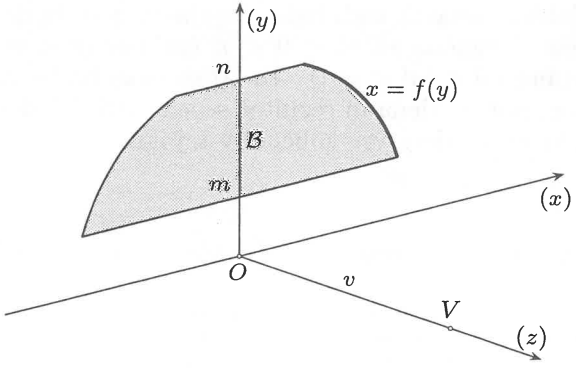
r/s	$v_{\text{opt.}}/s$	$\Omega_{\max}$	$\sqrt{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi r}{2s}\right)}$
$\searrow 0$	$\nearrow \sqrt{1/2}$	$\searrow 0$	$\nearrow \sqrt{1/2}$
0.1	0.7030	0.0121	0.7027
0.2	0.6905	0.0490	0.6896
0.3	0.6692	0.1123	0.6675
0.4	0.6387	0.2048	0.6360
0.5	0.5978	0.3316	0.5946
0.6	0.5448	0.5010	0.5421
0.7	0.4771	0.7279	0.4764
0.8	0.3891	1.0424	0.3931
0.9	0.2678	1.5254	0.2797
$\nearrow 1$	$\searrow 0$	$\nearrow \pi$	$\searrow 0$

Tabela 1

Za ilustracijo naj bralec obdela naslednji problem: Iz katere razdalje vidi voznik okrogel prometni znak ob cesti pod največjim prostorskim zornim kotom? Razmerje r/s bo v tem primeru zelo majhno in zato ocena (14) zelo dobra.

4. Optimalna oblika oglasne deske

Še en problem v zvezi z maksimalnim zornim kotom rešimo. Tokrat naj bo dana razdalja v na sliki 6, naloga pa je najti obliko baze $\mathcal{B}$, da bo prostorski kot z vrhom V maksimalen. Da ne bo odgovor kar „$\mathcal{B}$ naj bo cela ravnina $((x),(y))$", bomo predpisali ploščino $S = p(\mathcal{B})$. In da ne bo odgovor „$\mathcal{B}$ naj bo krog predpisane ploščine s središčem v izhodišču O", bomo zahtevali, da imajo točke baze $\mathcal{B}$ ordinate med spodnjo mejo $y = m$ in zgornjo mejo $y = n > m$, kot je to na sliki 12. Lahko si mislimo, da je os (z) cesta, nad katero je reklamna tabla. Preprost premislek pove, da je zorni kot največji, če je tabla simetrična glede na os (y). Ta zorni kot izračunamo po formuli (6):



Slika 12.

$$\Omega(f) = 2\left(\arctan\frac{vf(m)}{m\sqrt{v^2+m^2+f(m)^2}} - \arctan\frac{vf(n)}{n\sqrt{v^2+n^2+f(n)^2}} - \right.$$
$$\left. -v\int_m^n \frac{(f(y)-yf'(y))dy}{(y^2+f(y)^2)\sqrt{v^2+y^2+f(y)^2}}\right) = 2v\int_m^n \frac{f(y)dy}{(v^2+y^2)\sqrt{v^2+y^2+f(y)^2}} \qquad (15)$$

Zgornjo enakost dokažemo npr. tako, da razliko $\arctan(\ldots) - \arctan(\ldots)$ zapišemo z ustreznim integralom $\int_m^n \ldots$ in nato izraz poenostavimo.

Zdaj pa natančno formulirajmo nalogo. Iščemo tako zvezno odvedljivo funkcijo $x = f(y)$ na območju $0 < m \leq y \leq n$, da je

$$S = 2\int_m^n f(y)dy$$

predpisano število, da je

$$\forall y \in [m,n] \ : \ f(y) \geq 0$$

in da je ob tem še funkcional $\Omega(f)$ v (15) maksimalen pri danem $v > 0$.

Naloga je očitno izoperimetrični variacijski problem (za osvežitev spomina: [4, str. 414 in dalje]). Če zanj zapišemo Eulerjevo enačbo, doživimo prijetno presenečenje: ta enačba, ki je v splošnem diferencialna enačba 2. reda, v tem primeru ni niti diferencialna. Po ureditvi zgleda takole:

$$f(y)^2 + y^2 = r^2\,, \tag{16}$$

kjer je r neka konstanta.

Rezultat je torej eleganten in če dobro premislimo, niti ni zelo presenetljiv: krivulja $x = f(y)$ je del krožnice s središčem v izhodišču. Posebej pomembno je tudi, da je rešitev neodvisna od razdalje v.

Nalogo bi lahko zastavili tudi brez pogoja $m > 0$, le da bi bila potem izpeljava nekoliko drugačna za $m < 0 < n$ (primer $m < n < 0$ je seveda ekvivalenten primeru $0 < |n| < |m|$). To lahko stori bralec sam; vse orodje je že pripravljeno, pot uhojena in rezultat seveda isti. Mi dodajmo samo še končni formuli, ki povezujeta vse količine v tej igri.

Če je $-r \le m \le n \le r$, je:

$$S = r^2\left(\arccos\frac{m}{r} - \arccos\frac{n}{r}\right) - \left(m\sqrt{r^2-m^2} - n\sqrt{r^2-n^2}\right), \tag{17}$$

$$\Omega = 2\left(\arccos\frac{m\sqrt{r^2+v^2}}{r\sqrt{m^2+v^2}} - \arccos\frac{n\sqrt{r^2+v^2}}{r\sqrt{n^2+v^2}}\right) - \\ - \frac{2v}{\sqrt{r^2+v^2}}\left(\arccos\frac{m}{r} - \arccos\frac{n}{r}\right). \tag{18}$$

Tudi v tem primeru je aktualno vprašanje, za katero razdaljo v je Ω maksimalen, seveda le pri smiselni omejitvi $0 < m < n \le r$. Ker pa se Ω izraža s precej preprosto formulo (18), je naloga elementarna in jo prepuščamo bralcu.

LITERATURA

[1] H. Breuer, R. Breuer (prir. J. Strnad): *Atlas klasične in moderne fizike*, DZS, Ljubljana 1993.

[2] A. Cedilnik: *On solid visual angles*, Proceedings of The 5th International Symposium on Operational Research in Slovenia, Preddvor 1999.

[3] E. Cedilnik: *Vsota notranjih kotov tetraedra*, Raziskovalna naloga, Gimnazija Šentvid 1990.

[4] F. Križanič: *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana 1974.

[5] J. Spanier, K. B. Oldham: *Atlas of Functions*, Hemisphere Publishing Corporation, Springer–Verlag, New York 1987.

[6] J. Vrabec: *Ovojno število in nekaj primerov njegove uporabe*, Postdiplomski seminar iz matematike 3/4, Univerza v Ljubljani, Ljubljana 1973.

NELINEARNA OPTIKA OB POVRŠINAH

IRENA DREVENŠEK OLENIK

PACS 42.65.K, 68.43.-h, 42.70.Df

V članku so razloženi osnovni principi pojava površinskega podvajanja optične frekvence. Opisan je primer uporabe tega pojava za raziskave površinskih lastnosti polimernih orientacijskih slojev za tekoče kristale.

NONLINEAR OPTICS ON SURFACES

The phenomenon of surface optical second-harmonic generation is disscused and its use for investigation of surface properties of polymeric alignment layers for liquid crystals is presented.

Površinske lastnosti snovi so odločilne pri različnih naravnih pojavih, obenem pa postajajo površine vedno bolj pomembne tudi v sodobnih tehnoloških postopkih in napravah. Med aktualne probleme spadajo denimo pojavi, povezani z adhezijo, mazanjem in omakanjem površin ter elektrokemične spremembe na površinah elektrod. Široko zanimanje za površine je v zadnjih desetletjih spodbudilo razvoj številnih novih tehnik za njihovo raziskavo.

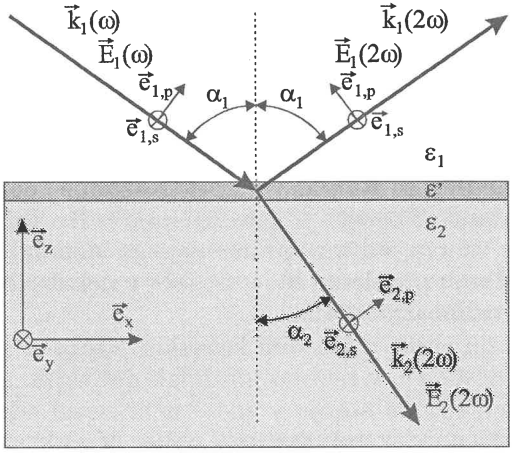
Zelo velik kvalitativni napredek opazovanja površin sta prinesli denimo tunelska mikroskopija (STM) in mikroskopija na atomsko silo (AFM). Pomembno mesto pri raziskavah površin pa zavzemajo tudi optične tehnike, saj so le-te v glavnem nedestruktivne in z njimi lahko preučujemo praktično vsako površino, ki jo je mogoče doseči s svetlobnimi žarki. Vendar pa standardnim linearnim optičnim tehnikam, kot so optična mikroskopija, elipsometrija ter infrardeča in Ramanova spektroskopija, primanjkuje izrazita površinska specifičnost. Pogosto je zato izjemno težko ločiti šibek signal, ki prihaja s površine vzorca, od mnogo močnejšega signala, ki izvira iz notranjosti materiala. Temu problemu se je mogoče v nekaterih primerih izogniti z uporabo tehnik nelinearne optike.

Pri osvetljevanju snovi z močnim laserskim snopom (tipične vrednosti, ki jih trenutno uporabljajo v raziskovalnih laboratorijih, so v območju 10^9–10^{13} W/m^2) se elektronska stanja v snovi nelinearno odzovejo na motnje, ki jih povzroča optično elektromagnetno polje. V elektromagnetnem valovanju, ki izhaja iz vzorca, se zato pojavijo dodatne spektralne komponente glede na vpadno valovanje. Eden najbolj znanih pojavov te vrste je podvajanje optične frekvence (SHG), pri katerem opazimo delno pretvorbo monokromatskega optičnega snopa s krožno frekvenco ω v snop z dvakrat večjo frekvenco 2ω. V električnem dipolnem približku omenjeni pojav opišemo s kvadratnim členom v razvoju inducirane električne polarizacije $\vec{P}$ po komponentah optičnega električnega polja $\vec{E}(\omega)$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \underline{\chi}^{(1)} \vec{E}(\omega) + \varepsilon_0 \underline{\underline{\chi}}^{(2)} : \vec{E}^2(\omega) + \ldots = \vec{P}(0) + \vec{P}(\omega) + \vec{P}(2\omega) + \ldots \quad (1)$$

Polarizacija $\vec{P}(2\omega)$, ki niha z dvakrat večjo frekvenco kot vpadno optično polje, s sevanjem oddaja frekvenčno podvojeno optično valovanje. Sorazmernostna konstanta $\chi^{(1)}$ v enačbi (1) je običajna linearna optična susceptibilnost, $\underline{\underline{\chi}}^{(2)}$ pa imenujemo nelinearna optična susceptibilnost drugega reda. $\underline{\underline{\chi}}^{(2)}$ je tenzor tretjega ranga, ki je odvisen od lastnosti materiala ter ima lahko največ 18 neodvisnih komponent. Prisotnost simetrije v zgradbi materiala število neodvisnih komponent znatno zniža. Pri tem igra posebno vlogo simetrija inverzije, v sklopu katere so vsi snovni tenzorji tretjega ranga enaki nič, tako da pojav podvajanja optične frekvence v centrosimetričnih materialih v opisanem približku ni možen.

Simetrija inverzije je vedno porušena ob površini materiala ter na stiku dveh različnih materialov. Lastnosti prostora na eni in na drugi strani meje so različne in na stikih ob prehodu svetlobe vedno nastaja frekvenčno podvojeno valovanje. V centrosimetričnih snoveh je ustrezni površinski prispevek močno prevladujoč. Pojav podvajanja optične frekvence zato lahko izkoristimo za raziskave površinskih lastnosti centrosimetričnih vzorcev. Z njim je mogoče raziskovati kemično čiste površine, prav tako pa tudi površine z adsorbiranimi tankimi sloji drugih snovi. Pri tem opazujemo procese, kot sta denimo površinska rekonstrukcija na ploskvah monokristalov ter spreminjanje površinske strukture materiala zaradi oksidacije ali pri elektrolizi.



Slika 1. Potek optičnih žarkov pri pojavu površinskega podvajanja optične frekvence. Na mejno plast med dvema sredstvoma vpada ravno monokromatsko optično valovanje s poljem $\vec{E}_1(\omega)$, katerega valovni vektor $\vec{k}_1(\omega)$ je nagnjen pod kotom α_1 glede na normalo. Iz mejne plasti izhajata dve frekvenčno podvojeni ravni valovanji s poljema $\vec{E}_1(2\omega)$ in $\vec{E}_2(2\omega)$, katerih valovna vektorja $\vec{k}_1(2\omega)$ in $\vec{k}_2(2\omega)$ sta orientirana v smeri odboja in približno v smeri naprej glede na vpadno valovanje.

Inducirano površinsko električno polarizacijo, to je površinsko gostoto dipolov $\vec{P}_s(2\omega)$, ki nastane pri prehodu optičnega valovanja skozi mejo dveh

snovi, opišemo s podobno zvezo kot v neomejenem sredstvu:

$$\vec{P}_s(2\omega) = \varepsilon_0 \underline{\underline{\chi}}^{(2)}_s : \vec{E}^2_s(\omega)\,, \tag{2}$$

pri čemer $\underline{\underline{\chi}}^{(2)}_s$ (z enoto m^2/V) označuje površinsko nelinearno optično susceptibilnost in $\vec{E}_s(\omega)$ električno polje osnovnega valovanja v mejni plasti. Pri računski obravnavi pojava si mejno plast zamišljamo kot infinitezimalno tanko ploščo, ki jo z obeh strani obdaja polprostor iz centrosimetričnih snovi (slika 1). Izpeljava je najenostavnejša, kadar imamo v obeh primerih opraviti z optično izotropnima sredstvoma. Pri izračunu intenzitete frekvenčno podvojenega optičnega polja poleg zveze (2) uporabimo še Maxwellove enačbe oz. robne pogoje za transformacijo elektromagnetnega valovanja na meji dveh sredstev. Privzamemo, da na mejno plast vpada ravno monokromatsko optično valovanje s poljem $\vec{E}_1(\omega)$. Vpadno valovanje v mejni plasti inducira nastanek nelinearne polarizacije $\vec{P}_s(2\omega)$. Polarizirana plast koherentno seva in s tem ustvarja dve frekvenčno podvojeni ravni valovanji s poljema $\vec{E}_1(2\omega)$ in $\vec{E}_2(2\omega)$, ki se širita v obdajajoči sredstvi (slika 1). Intenziteta valovanja, ki se razširja v sredstvu i ($i = 1, 2$) in je polarizirano v smeri $\vec{e}_{i,j}$ ($i = 1, 2$; $j = s, p$), je podana z izrazom [1]:

$$\begin{aligned} I_i(2\omega) &= \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 c\sqrt{\varepsilon_i(2\omega)}\, E_i^2(2\omega) = \frac{\omega^2}{2c^3\varepsilon_0\varepsilon_i(\omega)\sqrt{\varepsilon_i(2\omega)}\cos^2\alpha_i} \left|\underline{\underline{\chi}}^{(2)}_{ef}\right|^2 I_1^2(\omega) \\ \underline{\underline{\chi}}^{(2)}_{ef} &= \underline{L}(2\omega)\vec{e}_{i,j}(2\omega)\underline{\underline{\chi}}^{(2)}_s : \underline{L}(\omega)\vec{e}_{i,j}(\omega)\underline{L}(\omega)\vec{e}_{i,j}(\omega) \end{aligned} \tag{3}$$

v katerem sta $\varepsilon_i(\omega)$ in $\varepsilon_i(2\omega)$ optični dielektrični konstanti pri osnovni in pri drugi harmonični frekvenci, $I_1(\omega)$ intenziteta vpadnega valovanja in $\underline{L}$ Fresnelova transformacijska matrika. Fresnelova matrika je definirana z izrazom $\vec{E}_s(\omega) = \underline{L}(\omega)\vec{E}_i(\omega)$, ki pri izbrani frekvenci podaja zvezo med optičnim električnim poljem v mejni plasti $\vec{E}_s$ in poljem $\vec{E}_1$ oz. $\vec{E}_2$. Njene komponente izpeljemo na osnovi Fresnelovih enačb za lom in odboj optičnih žarkov na mejah [1, 2].

Optične lastnosti mejne plasti med dvema izotropnima sredstvoma ostanejo nespremenjene pri poljubnem zasuku vzorca okoli normale na mejo in pri zrcaljenju prek ploskev, pravokotnih na mejo, kar ustreza simetrijskim lastnostim točkovne grupe $C_{\infty v}$. V sklopu te simetrije ima tenzor $\underline{\underline{\chi}}^{(2)}_s$ le 3 od nič različne neodvisne komponente, ki so χ_{zzz}, $\chi_{zxx} = \chi_{zyy}$ ter $\chi_{xzx} = \chi_{xxz} = \chi_{yzy} = \chi_{yyz}$. Podvajanja optične frekvence na taki plasti opazimo pri vpadnem kotu $\alpha_1 \neq 0$, in to samo v polarizacijskih kombinacijah, ko ima vsaj eno od sodelujočih valovanj komponento polja v smeri osi z. Taki kombinaciji sta p-p in s-p (prvi indeks označuje polarizacijo osnovnega, drugi pa polarizacijo frekvenčno podvojenega valovanja).

Naslednji korak pri obravnavi pojava je iskanje zveze med tenzorjem površinske nelinearne optične susceptibilnosti $\underline{\underline{\chi}}_s^{(2)}$ in mikroskopskimi polarizacijskimi lastnostmi površinskega sloja. Velikost $\underline{\underline{\chi}}_s^{(2)}$ določajo površinska elektronska stanja vzorca v globini okoli 1 nm. V kovinskih materialih so ta stanja močno delokalizirana in njihov odziv na optično polje je relativno velik ($\chi_{s,ijk}^{(2)} \sim 10^{-18}$ m^2/V). V anorganskih dielektričnih snoveh pa so elektroni močno vezani na atome, spremembe elektronskih stanj zaradi prisotnosti optičnega polja so majhne in temu ustrezno je inducirana površinska nelinearna polarizacija precej šibka $\chi_{s,ijk}^{(2)} \leq 10^{-21}$ m^2/V. Pri vpadnem snopu z intenziteto 10^{10} W/m^2 je tako delež pretvorbe v frekvenčno podvojeno svetlobo na površini dielektrika, kot je na primer kvarčno steklo, le reda velikosti $I(2\omega)/I(\omega) \sim 10^{-17}$.

Pri adsorpciji tankega sloja dodatne snovi na površino sredstva preide površinska susceptibilnost mejne plasti $\underline{\underline{\chi}}_s^{(2)}$ v

$$\underline{\underline{\chi}}_s'^{(2)} = \underline{\underline{\chi}}_s^{(2)} + \underline{\underline{\chi}}_{s,i}^{(2)} + \underline{\underline{\chi}}_{s,a}^{(2)} \tag{4}$$

kjer $\underline{\underline{\chi}}_{s,i}^{(2)}$ opisuje spremembo površinske susceptibilnosti materiala zaradi interakcije z adsorbatom, $\underline{\underline{\chi}}_{s,a}^{(2)}$ pa intrinzično susceptibilnost adsorbiranega sloja. Za uspešno proučevanje lastnosti adsorbiranih slojev je pomembno, da je prispevek $\underline{\underline{\chi}}_{s,a}^{(2)}$ v zvezi (4) največji ali vsaj enakega velikostnega reda kot preostala dva člena. Ob taki situaciji je s sprotnim opazovanjem sprememb v intenziteti frekvenčno podvojene svetlobe $I(2\omega)$ možno raziskovati kinetiko pojavov, povezanih z izgradnjo monomolekularnih in celo submonomolekularnih slojev različnih snovi na izbranem substratu.

Pri adsorpciji organskih materialov na steklo in podobne podlage člen $\underline{\underline{\chi}}_{s,a}^{(2)}$ v enačbi (4) po navadi celo znatno prevladuje. Organski materiali namreč vsebujejo veliko konjugiranih kemičnih vezi, v katerih sodelujejo π molekularne elektronske orbitale, za katere je ob nesimetrični konformaciji (elektronsko donorska kemična skupina na eni in akceptorska skupina na drugi strani konjugirane verige) značilna relativno velika nelinearna optična hiperpolarizabilnost $\underline{\underline{\beta}}$. Hiperpolarizabilnost $\underline{\underline{\beta}}$ je merilo za intrinzični nelinearni optični odziv posamične molekule in je definirana kot:

$$\vec{p}(2\omega) = \varepsilon_0 \underline{\underline{\beta}} : \vec{F}_s^2(\omega), \tag{5}$$

pri čemer $\vec{p}(2\omega)$ označuje inducirani dipolni moment molekule pri frekvenci 2ω, $\vec{F}_s(\omega)$ pa lokalno optično polje na mestu izbrane molekule. Polje $\vec{F}_s(\omega)$ je odvisno od optičnega polja osnovnega žarka $\vec{E}_s(\omega)$ in od polja, ki ga

povzročajo dipolni momenti drugih molekul. Ker pa je slednji prispevek običajno majhen in ga je težko določiti, ga v praksi pogosto kar zanemarimo. Če poleg tega zanemarimo še prispevka $\underline{\underline{\chi}}_s^{(2)}$ in $\underline{\underline{\chi}}_{s,i}^{(2)}$, lahko zvezo med komponentami tenzorjev $\underline{\underline{\chi}}_s'^{(2)}$ in $\underline{\underline{\beta}}$ zapišemo z izrazom:

$$\chi'^{(2)}_{sijk} = N_s \int R_{ii'}(\Omega)\, R_{jj'}(\Omega)\, R_{kk'}(\Omega)\, f(\Omega)\, \beta_{i'j'k'}\, d\Omega \tag{6}$$

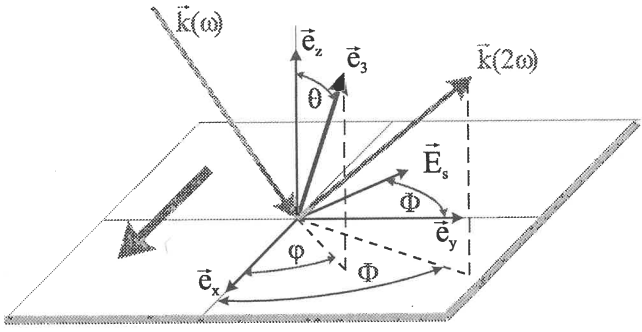
v katerem je N_s površinska gostota adsorbiranih molekul, $R(\Omega)$ transformacijska matrika za prehod iz molekularnega $(i', j', k' = 1, 2, 3)$ v laboratorijski koordinatni sistem $(i, j, k = x, y, z)$ in $f(\Omega)$ kotna orientacijska porazdelitvena funkcija molekul. Iz zveze (6) razberemo, da nam meritve površinskega optičnega frekvenčnega podvajanja poleg informacije o gostoti adsorbiranih molekul prinašajo tudi informacijo o njihovi relativni orientaciji glede na podlago. To pa je podatek, ki ga je s topografskimi površinskimi tehnikami, kot sta STM in AFM, dosti težje ugotoviti.

Kot primer si oglejmo problem adsorpcije podolgovatih organskih molekul na polimerno podlago. Ta problem v praksi srečamo na stiku orientacijskega sloja in tekočega kristala v tekočekristalnih zaslonih. Orientacijski sloj, ki je običajno izdelan iz mehansko podrgnjenega poliimida, s površinskimi silami zagotavlja optično homogenost tekočega kristala znotraj enote zaslona. Zanima nas orientacijska porazdelitev molekul tekočega kristala tik ob polimerni površini, saj le-ta določa urejenost strukture v celotni globini tekočekristalne plasti.

Monosloj tekočekristalnih molekul nanesemo na polimerno podlago z naparevanjem iz taline ali z adsorpcijo iz močno razredčene raztopine. Intenziteta frekvenčno podvojene svetlobe, ki prihaja s površine poliimidnega substrata, je zanemarljivo majhna. K površinski nelinearni optični susceptibilnosti nastalega vzorca torej prispevajo v glavnem le tekočekristalne molekule. Zaradi njihove podolgovate oblike je molekularna hiperpolarizabilnost vzdolž dolge osi molekule $\vec{e}_3$ veliko večja od polarizabilnosti v drugih smereh. Zato lahko v prvem približku pri izračunih upoštevamo le komponento β_{333}, druge komponente pa zanemarimo. Laboratorijski koordinatni sistem izberemo tako, da je os $\vec{e}_z$ pravokotna na površino sloja, os $\vec{e}_x$ pa kaže v smeri mehanskega drgnjenja (slika 2). Struktura vzorca je potem zrcalno simetrična glede na ravnino xz. Neničelne komponente površinske nelinearne optične susceptibilnosti $\underline{\underline{\chi}}_s'^{(2)}$ se izražajo kot [2]:

$$\begin{aligned}
\chi'_{zzz} &= N_s \langle \cos^3\theta \rangle \beta_{333} \\
\chi'_{xxx} &= -N_s \langle \sin^3\theta \cos^3\varphi \rangle \beta_{333} \\
\chi'_{zyy} &= \chi'_{yzy} = \chi'_{yyz} = N_s \langle \cos\theta \sin^2\theta \sin^2\varphi \rangle \beta_{333} \\
\chi'_{zxx} &= \chi'_{xzx} = \chi'_{xxz} = N_s \langle \cos\theta \sin^2\theta \cos^2\varphi \rangle \beta_{333} \\
\chi'_{zxz} &= \chi'_{zzx} = \chi'_{xzz} = -N_s \langle \cos^2\theta \sin\theta \cos\varphi \rangle \beta_{333} \\
\chi'_{xyy} &= \chi'_{yxy} = \chi'_{yyx} = -N_s \langle \sin^3\theta \cos\varphi \sin^2\varphi \rangle \beta_{333},
\end{aligned} \tag{7}$$

pri čemer θ in φ podajata orientacijo dolge osi molekul $\vec{e}_3$ v laboratorijskem sistemu (slika 2).



Slika 2. Orientacija koordinatnih osi in potek optičnih žarkov pri meritvah frekvenčnega podvajanja na sloju tekočega kristala, adsorbiranega na poliimidno podlago. Puščica na levi strani slike označuje smer mehanskega drgnjenja podlage.

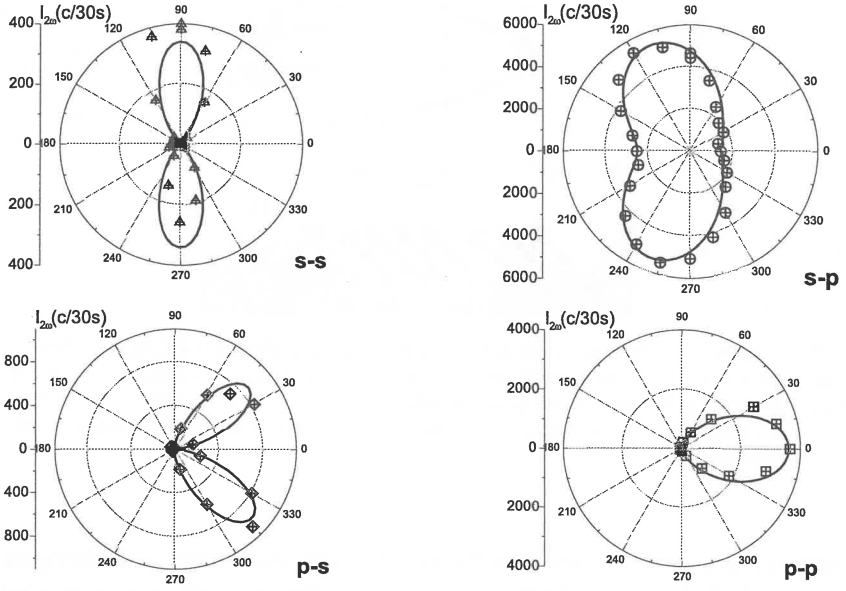
Vseh šest zgoraj zapisanih neodvisnih komponent tenzorja $\underline{\underline{\chi}}_s'^{(2)}$ eksperimentalno določimo tako, da merimo intenzitete frekvenčno podvojene svetlobe pri različnih kombinacijah polarizacije osnovnega in frekvenčno podvojenega valovanja. Pri izbrani kombinaciji polarizacij vzorec vrtimo okoli normale na površino $\vec{e}_z$ in izmerimo azimutalne odvisnosti od zasuka vzorca Φ. Za primer, ko sta osnovno in frekvenčno podvojeno valovanje polarizirani pravokotno na ravnino optičnih žarkov (s-s polarizacijska kombinacija), izpeljemo na osnovi enačbe (3) za azimutalno odvisnost $I(2\omega, \Phi)$ izraz [2]

$$I(2\omega, \Phi) \propto \{L_{yy}(2\omega) L_{yy}^2(\omega) [\chi_{xxx} \sin^3 \Phi + 3\chi_{xyy} \cos^2 \Phi \sin \Phi]\}^2 I^2(\omega), \quad (8)$$

v katerem Φ označuje zasuk osi $\vec{e}_x$ glede na ravnino optičnih žarkov, to je na ravnino, ki jo določata vektorja $\vec{k}(\omega)$ in $\vec{k}(2\omega)$ (slika 2). Podobne, vendar nekoliko bolj zapletene zveze za $I(2\omega, \Phi)$ dobimo tudi za druge polarizacijske kombinacije.

Na sliki 3 so prikazani rezultati meritev na vzorcu tekočega kristala 4′-n-oktil-4-cianobifenila (8CB), ki je bil naparjen na komercialni orientacijski polimerni sloj za tekočekristalne zaslone. Osnovno valovanje $\vec{E}(\omega)$ je na vzorec padalo pod kotom $\alpha_1 = 45°$. Na treh izmed štirih polarnih diagramov $I(2\omega, \Phi)$ je razvidna zelo izrazita razlika v intenziteti signala na območju $0° < \Phi < 90°$ oz. $270° < \Phi < 360°$ ter na območju $90° < \Phi < 270°$. Ta asimetrija nakazuje preferenčno orientacijo molekul 8CB v smeri drgnjenja polimerne podlage, to je v smeri $\Phi = 0°$.

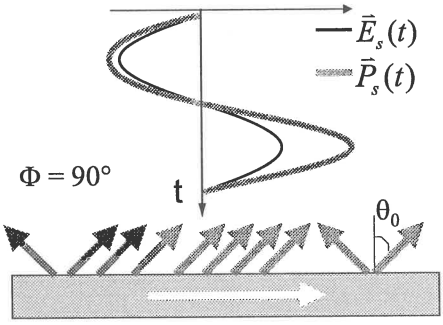
Azimutalno odvisnost $I(2\omega, \Phi)$ lahko najbolj nazorno pojasnimo pri polarizacijski kombinaciji s-s, za katero smo predhodno zapisali tudi teoretično zvezo (enačba 8). Molekule 8CB, ki so nagnjene pod kotom $\theta_0 \sim 60°$ glede



Slika 3. Azimutalne odvisnosti intenzitete frekvenčno podvojenega valovanja, ki izvira iz monosloja molekul 8CB, nanesenih na enosmerno podrgnjeno poliimidno podlago. Smer drgnjenja polimera je v ravnini pri $\Phi = 0°$. Pari simbolov v spodnjem desnem vogalu posameznega diagrama označujejo polarizacijsko kombinacijo, v kateri je potekala meritev. Pri tem prvi simbol pomeni polarizacijo osnovnega valovanja, drugi pa polarizacijo frekvenčno podvojenega valovanja. Enota na skali $I(2\omega)$ je število sunkov, ki smo jih zaznali na fotopomnoževalki v času 30 sekund. Polne črte označujejo krivulje, ki smo jih dobili s prilagajanjem meritev teoretično pričakovanim odvisnostim.

na normalo, so večinoma obrnjene vzdolž smeri drgnjenja polimera (slika 4). To pomeni, da ima njihova kotna porazdelitvena funkcija $f(\Omega) \sim \delta(\theta - \theta_0) \cdot$ $\cdot\, g(\varphi)$ izrazit maksimum pri $\varphi = 0°$, hkrati pa mora zaradi simetrije zanjo veljati zveza $g(\varphi) = g(2\pi - \varphi)$. V polarizacijski kombinaciji s-s so vsa optična polja vzporedna s podlago. Pri orientaciji vzorca v smeri $\Phi = 0°$ je vpadno polje orientirano vzdolž osi $\vec{e}_y$, se pravi pravokotno na zrcalno ravnino sistema (slika 2), zato se inducirana nelinearna polarizacija izniči. Ko vzorec zasučemo v lego $\Phi = 90°$, pa je inducirana polarizacija relativno povečana v smeri, v katero je obrnjenih večina molekul, zato se v odbitem valovanju pojavi frekvenčno podvojena svetloba (slika 4). Intenziteta ustreznega frekvenčno podvojenega valovanja je odvisna izključno od lihih momentov funkcije $g(\varphi)$ (glej enačbo (7)) in torej predstavlja neposredno merilo za stopnjo zloma simetrije sistema vzdolž smeri drgnjenja polimera. Signal $I_{s\text{-}s}(2\omega, \Phi)$ je zato po navadi najšibkejši v primerjavi z drugimi polarizacijskimi kombinacijami.

Iz izmerjenih diagramov $I(2\omega, \Phi)$ lahko v splošnem izračunamo kar nekaj nižjih momentov kotne porazdelitvene funkcije $f(\Omega)$ za molekule tekočega kristala v adsorbiranem monosloju. Ti podatki nam rabijo kot



Slika 4. Nelinearni odziv molekul tekočega kristala v polarizacijski kombinaciji *s-s* pri orientaciji $\Phi = 90°$. Puščica v podlagi označuje smer drgnjenja polimera, puščice na njej pa smer največje polarizabilnosti posamičnih molekul. Ker je večina molekul obrnjena vzdolž smeri drgnjenja, je skupna inducirana polarizacija v smeri drgnjenja večja kot v nasprotni smeri.

osnovni kazalci kvalitete oz. ureditvenega vpliva izbranega polimernega substrata na tekoče kristale. Pri polimerih, ki v primeri s poliimidi v svoji strukturi vsebujejo tudi nenasičene kemične skupine, je intenziteta frekvenčno podvojene svetlobe znatna že tudi na čistem substratu. V tem primeru je s podvajanjem optične frekvence možno določiti tudi orientacijsko porazdelitev posameznih kemijskih skupin v polimerni podlagi [3,4]. S kombinacijo meritev pred adsorbcijo tekočekristalnega sloja in po njej lahko dobimo informacijo o prenosu orientacijske anizotropije med različnimi segmenti polimernih verig in molekulami tekočega kristala ter tako izluščimo osnovne mehanizme, ki vodijo do sidranja tekočih kristalov na površini polimernih slojev [5].

LITERATURA

[1] T. F. Heinz, *Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena*, ured. H. E. Ponath in G. I. Stegeman, North Holland, Amsterdam 1991, str. 353–417.

[2] M. B. Feller, W. Chen, in Y. R. Shen, *Investigation of surface-induced alignment of liquid-crystal molecules by optical second-harmonic generation*, Phys. Rev. A **43** (1991), 6778–6791.

[3] I. Drevenšek Olenik, M. W. Kim, A. Rastegar in Th. Rasing, *Characterization of unidirectional photopolymerization in poly(vinyl cinnamate) by surface optical second--harmonic generation*, Phys. Rev. E **60** (1999), 3120–3128.

[4] X. Wei, X. Zhuang, S. C. Hong, T. Goto in Y. R. Shen, *Sum-frequency vibrational spectroscopic study of a rubbed polymer surface*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999), 4256–4259.

[5] I. Drevenšek Olenik, M. W. Kim, A. Rastegar in Th. Rasing, *Alignment of liquid crystals on a photosensitive substrate studied by surface optical second-harmonic generation*, Phys. Rev. E **61**, (2000), 3310–3313.

KAKO PRIBLIŽATI UČENCU POJMA FUNKCIJE IN NJENEGA GRAFA

PETER ŠEMRL

Math. Subj. Class. 00A35.

Kako dopovedati dijaku ali študentu, da sta pojma funkcije in njenega grafa pomembna, in to ne samo v matematiki? Kako razložiti ta zahtevna pojma? Članek poda nekaj razmišljanj, ki naj pomagajo učitelju pri iskanju lastnih odgovorov.

INTRODUCING THE NOTIONS OF A FUNCTION AND ITS GRAPH TO STUDENTS

How to tell a student that the notion of a function and its graph is important in mathematics as well as in other sciences? How to explain these difficult concepts? Some ideas are presented which might help a teacher to find her or his own answers.

V tuji strokovni literaturi pogosto zasledim članke, v katerih avtorji učitelji matematike razlagajo svoje poglede na matematične koncepte, ki so težki za njihove učence. Njihove nasvete in tehnike poučevanja včasih neposredno uporabim pri svojem delu. Kdaj drugič pa me ti članki zgolj spodbudijo k premišljevanju o mojem pedagoškem delu in k iskanju lastnih rešitev.

Ponavadi so naša predavanja zasnovana s pomočjo učbenikov. Delo v razredu pa ima svoje specifičnosti. Povprečen učbenik matematike za študente tehnike ali naravoslovja bi na glas prebral v kakih desetih do dvajsetih urah. Za predavanja pa imam na voljo 60, 90 ali celo 120 ur. Torej imamo pri predavanjih več svobode, ki jo seveda želimo dobro izkoristiti. Zato pri predavanjih pogosto začnemo z zgledi, ki naj bi učenca motivirali, da bi sam zaslutil potrebo po abstraktnem matematičnem konceptu. Potem koncept vpeljemo, dodamo še nekaj zgledov in šele nato začnemo preučevati lastnosti matematičnih objektov, ki smo jih definirali. Prvi korak je pri takem postopku najpomembnejši, a ga je najtežje dobro izpeljati.

Za zgled si vzemimo pojem funkcije in njenega grafa. Kako v razredu vpeljati ta dva pojma? V roke vzamemo učbenik in začnemo brati poglavje o funkcijah. Pogosto se poglavje začne kar z definicijo. (Naj na tem mestu še enkrat prosim bralca za pravilno razumevanje tega zapisa, ki nima namena govoriti o matematičnih učbenikih in še manj kritizirati jih. Lahko ugotovim le, da je pri nas veliko kvalitetnih učbenikov. Namen članka pa je govoriti o predavanjih „v živo", ki so po svoji naravi pač drugačna od poučevanja s pisano besedo.) Omejimo se na primer, ko pisca zanimajo zgolj realne funkcije realne spremenljivke in ne bolj splošne preslikave med abstraktnimi množicami. Potem je ponavadi funkcija f na intervalu I definirana kot predpis, ki vsakemu realnemu številu x iz intervala I priredi natanko določeno vrednost $f(x) \in \mathbb{R}$. Tej definiciji sledijo zgledi: ploščina

kvadrata kot funkcija dolžine osnovnice kvadrata, podobni geometrijski zgledi, predpisi, podani s formulo kot $f(x) = x^2 - 3x + 7$, nato pa še zgledi iz fizike (npr. hitrost točkastega telesa pri prostem padu kot funkcija časa, pritisk v tekočini kot funkcija globine ...). Vsekakor dovolj, da dijak ali študent, ki ga matematika zanima, začuti pomen tega „novega" koncepta (narekovaje sem postavil, ker že osnovnošolci poznajo linearno funkcijo, a seveda to še ne pomeni nujno, da razumejo pojem funkcije). Kaj pa učenci, ki jih matematika ne zanima? Ali se je celo bojijo? Pri vsakem novem pojmu se sprašujejo: čemu še to? Geometrijski zgledi ali zgledi iz fizike so takemu učencu ravno tako tuji in abstraktni kot nov pojem, ki ga vpeljujemo. In potem mora učenec dojeti še pojem grafa funkcije. Po toliko letih druženja z matematiko, ko mi je pojem grafa postal tako domač, kot je večini ljudi štetje, se pač težko spomnim težav, ki sem jih imel, preden sem ta pojem zares osvojil. Pri svojem delu pa opažam, da so učenci po koncu srednje šole kar spretni pri risanju grafov funkcij, tudi kadar te funkcije niso preproste, a le redki med njimi vedo, kaj sploh počnejo.

Strinjam se z mnenjem, da je vpeljavo zahtevnih matematičnih pojmov dobro vnaprej motivirati, pri čemer naj bi bili zgledi izbrani z "nematematičnih" področij: družboslovje, ekonomija, biologija ... Tako lahko učencem pred vpeljavo pojma funkcije ponudimo dva zgleda iz ekonomije in biologije. Denimo, da biolog v idealnih pogojih goji kulturo bakterij. Vsako jutro ob osmih zjutraj izmeri maso kulture in pri tem vsakič opazi, da je bakterij za 5% več kot jutro poprej. Nekaj podobnega se dogaja ekonomistu, ki živi v državi s konstantno inflacijo. Ob začetku vsakega leta opazi, da so se cene v povprečju dvignile za 5%. V obeh primerih imamo opravka z neko količino, ki se s časom spreminja. V prvem primeru je ta količina masa bakterij, v drugem primeru pa cena tistih izdelkov, ki se dražijo v skladu z inflacijsko stopnjo. Če si v prvem primeru izberemo za časovno enoto en dan in v drugem primeru eno leto, potem bo večina učencev ugotovila, da sta rast kulture bakterij in rast cen pojava, ki ju vodi ista "zakonitost". Tako biolog kot ekonomist si lahko zastavita različna vprašanja. Biolog se lahko vpraša, kako velika bo kultura bakterij čez en teden. Ni težko uganiti, da temu vprašanju ustreza ekonomistovo vprašanje, kakšne cene lahko pričakujemo čez sedem let. Ali pa biologa zanima, koliko bakterij bi nameril ob osmih zvečer, kar je seveda isto, kot če bi se ekonomist vprašal, kakšne bi bile pričakovane cene v začetku julija. Seveda lahko biolog sam razvije teorijo rasti kulture bakterij, ki mu daje odgovore na gornja in podobna vprašanja. In seveda lahko ekonomist neodvisno od njega sam pojasni zakonitost rasti cen ob konstantni inflaciji. To je seveda nesmiselno, še posebej ker na podobne pojave naletimo marsikje v družboslovju in naravoslovju. Smiselno se zdi pozabiti na konkretne pojavne oblike zgoraj opisanih dogajanj in izluščiti skupno zakonitost.

Taki in podobni primeri naj bi učence prepričali, da je treba opisane pojave analizirati na abstrakten način. Sedaj pa lahko začnemo skupaj z

učenci iskati primerno abstraktno ozadje opisanih pojavov. V obeh primerih imamo neko količino, ki je odvisna od časa. To količino merimo v prvem primeru v miligramih, v drugem pa v tolarjih. A ugotovili smo že, da gre v bistvu za isto zakonitost in je zato pametno pozabiti na enote. Torej imamo v obeh primerih številski podatek, ki se s časom spreminja. Čas pa merimo v dnevih ali v letih. Če nas zanima splošna zakonitost, ki opisuje oba pojava, potem je ponovno pametno pozabiti na konkretne časovne enote. Denimo, da biolog spremlja kulturo bakterij 20 dni in da ekonomista zanima, kaj se bo dogajalo s cenami v naslednjih 20 letih. Torej imamo v obeh primerih številski podatek (ta podatek predstavlja maso bakterij oziroma ceno izdelka, ki se draži v skladu z inflacijo), ki je odvisen od nekega drugega števila (to število predstavlja čas) iz intervala $[0, 20]$. Povedano drugače, imamo predpis, ki vsakemu številu iz intervala $[0, 20]$ priredi natanko določeno realno število. Če smo bili pri razlagi dovolj počasni in potrpežljivi (posamezne korake je treba večkrat ponoviti, da se učencem zares vtisnejo v zavest) in nam je uspelo učence pritegniti k sodelovanju, potem bo večina ugotovila, da je ta predpis v obeh zgornjih primerih enak. Torej je smiselno analizirati ta predpis ter potem dobljene rezultate uporabiti na zgornjih konkretnih primerih in še mnogih drugih pojavih, ki sledijo isti zakonitosti.

S tem pa smo se že približali pojmu funkcije. Še enkrat ponovimo: imamo predpis, ki vsakemu številu iz intervala $[0, 20]$ priredi natančno določeno realno število. Seveda bi si lahko izbrali tudi drugačen časovni interval. V splošnem si bomo torej izbrali neki interval I. Potem pa nas bo zanimal predpis, ki vsakemu številu iz tega intervala I priredi natanko določeno realno število. Takim predpisom rečemo funkcije. Naloga matematike je, med drugim, študirati lastnosti funkcij. V drugih strokah pa je mogoče marsikateri pojav opisati s funkcijo. Kakor hitro uspe predstavnikom drugih strok kak pojav opisati s funkcijo, lahko uporabijo matematična spoznanja za odgovore na mnoga konkretna vprašanja o danem pojavu.

Po tej razlagi, ki v razredu zahteva kar precej časa, lahko zapišemo definicijo realne funkcije, definirane na intervalu I. Seveda moramo tu pojasniti še pojem neodvisne spremenljivke in funkcijske vrednosti ter povedati, kako ju zapišemo. Odvisno od časa, ki ga imamo na voljo, lahko dodamo še nekaj „nematematičnih" zgledov, potem pa moramo seveda dodati še matematične zglede.

Ko je pojem funkcije dovolj domač, moramo vpeljati še pojem grafa realne funkcije, definirane na intervalu I. Ta zapis bom končal z možnim pristopom k vpeljavi tega zahtevnega pojma. Naj še enkrat ponovim svoje mnenje, da je zlasti pri dijakih in študentih, ki jih matematika ne zanima, zelo pomembno vpeljavo vsakega novega pojma dobro motivirati. V tem primeru lahko začnemo z učbenikom zemljepisa. Odprimo ga na strani s tabelo, ki opisuje preseljevanje ljudi iz Evrope v ZDA med leti 1900 in 1940. Za vsako leto je podano število ljudi, ki so iz Evrope emigrirali v ZDA.

Koliko časa moramo preučevati tako tabelo, da bi pojav emigracije dobro razumeli? Večina ljudi potrebuje kakih 5 do 10 minut, da bi bili sposobni zanesljivo odgovarjati na vprašanja, kot so:

- v katerih letih je bila emigracija največja (najmanjša)?
- v katerih obdobjih je emigracija naraščala (padala)?

Po petih ali desetih minutah preučevanja tabele smo na taka vprašanja sposobni dobro odgovarjati. Kaj pa čez nekaj ur?

Ali je mogoče skrajšati čas, ki ga potrebujemo, da bi razumeli pojav emigracije iz Evrope v ZDA v obdobju 1900–40? In pri tem obdržati razumevanje tega procesa trajneje v našem spominu? Skoraj vsi dijaki in študenti takoj vedo, da je to mogoče. Zato v učbenikih zemljepisa uporabljajo grafikone. In seveda večina dijakov in študentov grafikone dobro razume. S pomočjo grafikona je mogoče pojav emigracije zelo hitro dobro razumeti. Poleg tega nam s pomočjo slike ostane razumevanje tega pojava v spominu dalj časa.

Ta preprosti diskreten zgled motivira vpeljavo pojma grafa funkcije in olajša njegovo razumevanje. Najprej skupaj z učenci ugotovimo, da je tabela, ki opisuje preseljevanje ljudi iz Evrope v ZDA med leti 1900 in 1940, lažje razumljiva kot realna funkcija, definirana na intervalu I. Pri funkciji neodvisna spremenljivka lahko zavzame neskončno vrednosti in ne samo letnice 1900, 1901, ..., 1940. Vendar pa nas zanimajo podobna vprašanja: pri katerih vrednostih neodvisne spremenljivke ima funkcija največjo vrednost (pustimo za zdaj ob strani vprašanje ali funkcija svoj maksimum doseže) in pri katerih vrednostih ima najmanjšo vrednost, kdaj funkcijske vrednosti naraščajo in kdaj padajo ... Če je funkcija podana s formulo, na primer $f(x) = e^{\sin x} \log x$, potem odgovor na ta vprašanja ni očiten. Torej si želimo, podobno kot v primeru „nepregledne" tabele emigracij, pri funkcijah poiskati vizualno sliko, ki nam bo podobno kot grafikon omogočala hitro in trajno razumevanje obnašanja funkcije.

Kako pojavu emigracije (številski tabeli) priredimo grafikon? Pri tem mislimo na stolpičasti grafikon. Na abscisno os nanesemo letnice, višina stolpcev nad vsako letnico pa nam ponazarja število emigracij v tem letu. In potem seveda hitro opazimo, v katerih obdobjih je emigracija naraščala (to so obdobja, ko se višina stolpcev veča) in kdaj je padala. Prav tako hitro opazimo, kdaj je bila emigracija največja (leto z najvišjim stolpcem) in kdaj najmanjša.

Naj bo realna funkcija f definirana na intervalu I. Tako kot se število selitev spreminja z leti, se tudi funkcijska vrednost $f(x)$ spreminja, ko x teče po intervalu I. Nad vsako letnico v grafikonu postavimo stolpec, katerega višina ustreza številu emigracij v danem letu. Pri funkcijah ravnamo podobno. „Nad" vsako točko x iz intervala I na abscisni osi postavimo točko z „višino $f(x)$". Skupaj z učenci uganemo, da smo dobili točko $(x, f(x))$, ki je lahko tudi „pod" točko x na abscisni osi, če je vrednost $f(x)$ negativna.

Grafikon izgotovimo, ko postavimo stolpec, ki ponazarja število selitev v danem letu, nad vsako letnico. Podobno moramo pri funkciji „postaviti točko $(x, f(x))$ nad vsak x" iz intervala I. Pomagamo si s sliko na tabli. Izberimo si končno mnogo realnih števil x iz intervala I. Denimo, da poznamo vrednost $f(x)$ za vsak tak x. Potem lahko v ravnini narišemo končno mnogo točk $(x, f(x))$. Nato pa si izberemo večje število točk iz intervala I, posejanih bolj na gosto. S tem smo naši sliki dodali še nekaj točk. Ko sliko na tak način „gostimo", učenci sami uganejo, da je množica vseh točk oblike $(x, f(x))$ neka krivulja v ravnini, če je le funkcija f dovolj pohlevna (pustimo za zdaj pojem zveznosti ob strani), in da ta krivulja ponazarja lastnosti funkcije, podobno kot grafikon ponazarja proces emigracije. Sedaj pa lahko graf funkcije definiramo kot množico vseh točk $(x, f(x))$, kjer $x \in I$. Da bi pojem grafa bolje osvojili, definiramo ničle funkcije, naraščajoče in padajoče funkcije ... Potem pa na tablo narišemo nekaj primerov grafov in ugotavljamo, kje imajo ustrezne funkcije ničle, na katerih intervalih so te funkcije pozitivne, na katerih intervalih naraščajo in kje padajo ...

Za konec še odgovor na vprašanje, zakaj sem ta prispevek zapisal. Zato, ker bodo morda napotki komu koristili. In ker menim, da bi bilo koristno imeti v Obzorniku več člankov s pedagoško tematiko.

NOVE KNJIGE

Heydar Radjavi, Peter Rosenthal: SIMULTANEOUS TRIANGULARIZATION, Universitext, Springer-Verlag, New York 2000, 318 strani.

Za vsako *linearno transformacijo* (krajše *operator*) na prostoru $\mathbb{C}^n$ obstaja taka baza prostora, v kateri je matrika, ki pripada operatorju, zgornjetrikotna. Jordan je dokazal še več: za matriko lahko zahtevamo, da je bločno diagonalna z bloki oblike

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix},$$

kjer je λ lastna vrednost operatorja. Če imamo družino operatorjev na $\mathbb{C}^n$, potem lahko najdemo tako bazo za vsakega posebej, ni pa nujno, da obstaja taka baza prostora, da bi bile vse pripadajoče matrike zgornjetrikotne. Če taka baza prostora obstaja, potem pravimo, da je družina *trikotljiva* (oziroma *triangularizabilna*).

Prvih pet poglavij knjige, ki so primerna snov za dodiplomski seminar, obravnava potrebne in zadostne pogoje za trikotljivost dane družine operatorjev na $\mathbb{C}^n$. Nekaj potrebnih pogojev je prav lahko dobiti. Če trikotljivo

družino sestavljata samo operatorja A in B, potem sta v neki bazi prostora matriki za A in B zgornjetrikotni. Zato je matrika operatorja $AB - BA$ strogo zgornjetrikotna (zgornjetrikotna z ničlami na diagonali) in tako nilpotentna, tj. $(AB - BA)^n = 0$. Velja še več: če je S poljuben produkt operatorjev A in B, potem je matrika operatorja $S(AB - BA)$ strogo zgornjetrikotna in zato nilpotentna. Nilpotentnost operatorjev $S(AB - BA)$ je torej potreben pogoj za trikotljivost para $\{A, B\}$. Eden od izrekov v knjigi pravi, da je ta pogoj tudi zadosten.

Veliko pozornosti avtorja posvetita družinam operatorjev z dodatno algebrajsko strukturo. Primer so algebre operatorjev ali splošneje polgrupe operatorjev (z operacijo produkt). Dokazano je na primer, da je algebra operatorjev trikotljiva natanko tedaj, ko je operator $AB - BA$ nilpotenten za poljubna operatorja A in B v algebri. Za polgrupe operatorjev naj omenimo naslednji rezultat. Polgrupa operatorjev je trikotljiva natanko takrat, ko imata za poljubne operatorje A, B in C v polgrupi operatorja ABC in BAC enaki sledi. (*Sled* operatorja je vsota vseh njegovih lastnih vrednosti, upoštevajoč njihovo algebraično kratnost. Ta vsota je enaka vsoti diagonalnih elementov matrike, ki pripada operatorju v poljubni bazi prostora.) Pomemben poseben primer tega rezultata je izrek Levitzkega (iz leta 1931), ki pravi, da je vsaka polgrupa nilpotentnih operatorjev trikotljiva. Edina (n-kratna) lastna vrednost nilpotentnega operatorja je namreč 0 in zato je njegova sled enaka 0.

Trikotljivost družine operatorjev je tesno povezana z invariantnimi podprostori družine. Podprostor L prostora $\mathbb{C}^n$ je *invarianten* za operator T, če iz $x \in L$ sledi $Tx \in L$. *Trivialna* podprostora $\{0\}$ in $\mathbb{C}^n$ sta invariantna za vsak operator. Vzemimo trikotljivo družino $\mathcal{D}$ operatorjev na $\mathbb{C}^n$ in z e_1, e_2, ..., e_n označimo bazo prostora, v kateri imajo vsi operatorji zgornjetrikotne matrike. Potem je za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$ podprostor L_k, ki ga napenjajo vektorji e_1, e_2, ..., e_k, invarianten za vse operatorje iz $\mathcal{D}$. Če postavimo še $L_0 = \{0\}$, potem je

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = \mathbb{C}^n$$

veriga invariantnih podprostorov za $\mathcal{D}$, ki je maksimalna kot vegira podprostorov prostora $\mathbb{C}^n$. Ker je namreč za vsak $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ razsežnost podprostora L_k enaka k, med dvema zaporednima členoma verige ne moremo vstaviti še kakšnega. Hitro vidimo, da velja tudi obrat tega opažanja. Če je

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_m = \mathbb{C}^n$$

veriga invariantnih podprostorov za $\mathcal{D}$, ki je maksimalna kot veriga podprostorov, potem je $m = n$ (zaradi maksimalnosti) in $\mathcal{D}$ je trikotljiva. Iskano bazo prostora dobimo tako, da za vsak $k = 1, 2, \ldots, n$ izberemo vektor v L_k, ki ni v L_{k-1}.

Ugotovili smo torej, da je trikotljivost družine operatorjev ekvivalentna obstoju maksimalne verige invariantnih podprostorov. Zato v neskončnorazsežnih Banachovih prostorih, kjer v splošnem nimamo pojma matrike glede na neko bazo, trikotljivost družine $\mathcal{D}$ zveznih operatorjev na Banachovem prostoru X definiramo na naslednji način. Družina $\mathcal{D}$ je *trikotljiva*, če obstaja maksimalna veriga zaprtih podprostorov prostora X, ki je sestavljena iz invariantnih podprostorov za vse operatorje družine $\mathcal{D}$. Taka veriga ni nujno diskretna kot v končnorazsežnem primeru. Najbolj znan primer verige, ki ni diskretna, je podan z

$$L_\lambda = \{f \in L^2[0,1] : f = 0 \text{ skoraj povsod na } [0,\lambda]\}$$

za vsak $\lambda \in [0,1]$. Ni težko videti, da je $\{L_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ maksimalna veriga zaprtih podprostorov Hilbertovega prostora $L^2[0,1]$. Primer zveznega operatorja na $L^2[0,1]$, za katerega so ti podprostori invariantni, je *Volterrov operator* V, definiran s predpisom

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy\,.$$

Torej je množica $\{V\}$ trikotljiva. Zanimivo je, da operator V nima lastnih vrednosti in da so zgornji podprostori edini njegovi invariantni podprostori.

Drugi del knjige tako obravnava družine operatorjev na neskončnorazsežnih Banachovih prostorih. Izkaže se, da je večino končnorazsežnih rezultatov o trikotljivosti mogoče posplošiti na kompaktne operatorje. Temeljni rezultat je izrek, ki ga je leta 1998 po večletnih naporih precejšnjega števila matematikov dokazal ruski matematik Turovskii. Izrek zagotavlja obstoj netrivialnega invariantnega podprostora za vsako polgrupo kompaktnih kvazinilpotentnih operatorjev. Za družine poljubnih omejenih operatorjev pa je znanih malo pozitivnih rezultatov. To seveda ni presenetljivo, saj še vedno ni znano, ali ima vsak omejen operator na Hilbertovem prostoru netrivialen invarianten podprostor.

Knjiga je napisana lepo, na bralcu prijazen način. Za prvih pet poglavij je potrebno le osnovno znanje linearne algebre, za naslednja poglavja pa je zaželeno znanje osnov funkcionalne analize. Knjiga je zelo zanimiva tudi za eksperte na tem področju. Na koncu naj omenimo pomemben prispevek slovenske matematike. V knjigi so navedena dela sedmih slovenskih matematikov. Naštejmo jih po abecedi: Grega Cigler, Roman Drnovšek, Damjana Kokol-Bukovšek, Tomaž Košir, Matjaž Omladič, Aleksander Simonič in Peter Šemrl.

Roman Drnovšek

VESTI

Ob šestdesetletnici prof. dr. Jožeta Vrabca

V letu 2000, svetovnem letu matematike, je svojo šestdesetletnico praznoval profesor Jože Vrabec. Profesor Vrabec že kar nekaj generacijam ljubljanskih študentov predava celo vrsto predmetov, od algebre do analize, in s svojimi študenti deli svoje široko in poglobljeno znanje matematike. Vendar pa je njegovo ime tesno povezano predvsem s topologijo, saj je večina njegovega pedagoškega in raziskovalnega dela s tega področja. Profesor Vrabec je vpeljal topologijo v študij matematike v Ljubljani, vzgojil celo vrsto topologov in poskrbel, da je topologija danes med najbolj plodnimi področji matematičnega raziskovalnega dela v Ljubljani.

Rojen je bil v Ljubljani, kjer je leta 1959 maturiral na Klasični gimnaziji. Po maturi se je vpisal na študij matematike na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo in leta 1963 diplomiral kot prvi diplomant smeri tehniška matematika (ta smer se je kasneje razdelila na uporabno in teoretično matematiko). Po diplomi je postal asistent za matematiko na takratni Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo. Ker v Ljubljani še ni bilo podiplomskega študija matematike (začel se je leta 1970), je študij nadaljeval v Zagrebu, kjer se je leta 1965 skupaj s še štirimi kolegi iz Slovenije pridružil podiplomskemu seminarju za topologijo, ki ga je vodil (in ga še vedno vodi) prof. Sibe Mardešić.

Jože Vrabec se je v Zagrebu odločil za magistrsko temo iz topologije trirazsežnih mnogoterosti. Magistriral je leta 1969 in še isto leto odšel na doktorski študij v ZDA na University of Wisconsin, Madison, ki je bila takrat na področju matematike znana po živahnem raziskovanju geometrične topologije (kamor sodi tudi preučevanje trirazsežnih mnogoterosti), predvsem po zaslugi slavnega prof. Binga. Doktoriral je leta 1971 z delom o fundamentalni grupi trirazsežnih mnogoterosti. V šolskem letu 1973/74 je bil na enoletnem študijskem izpopolnjevanju na slavnem Institute of Advanced Studies v Princetonu v ZDA.

Takoj po vrnitvi iz Madisona v Ljubljano je na ljubljanskem Oddelku za matematiko poleg rednih predmetov začel predavati izbirne predmete iz topologije in leta 1972 ustanovil topološki seminar, ki se od takrat redno sestaja vsak ponedeljek. Glavno zaslugo za uspeh tega seminarja imajo številna izredno natančna in zanimiva predavanja profesorja Vrabca. Na dodiplomskem študiju matematike je vpeljal dva nova topološka predmeta, poleg osnov splošne topologije je začel predavati še algebraično in geometrično topologijo. Profesor Vrabec je bil (po podatkih, ki so na voljo v bibliografskem sistemu Cobiss) do sedaj mentor dveh doktorskih, 12 magistrskih in 46 diplomskih del, kar je obsežen pedagoški opus. Za matematične probleme svojih študentov in kolegov ima vedno čas (najraje ob zgodnjih jutranjih urah, ko na Oddelku za matematiko na Jadranski ni še nikogar drugega) in ponavadi tudi rešitev ali pa natančno in dobro premišljeno navodilo, kako do nje. Poleg mnogih znanstvenih in strokovnih del je napisal knjigo Metrični prostori, ki je gotovo eden najlepše napisanih univerzitetnih učbenikov matematike pri nas.

Profesor Vrabec je navdušen obiskovalec gora (kamor najraje hodi pozimi, seveda v kratkih rokavih), s seboj pa rad povabi tudi svoje kolege in študente. Leta 1994 je ustanovil Topobavški seminar. Ime tega posebnega seminarja je skovano iz topologije in Bavškega Grintavca, ki je bil „seminarska tema" ustanovitvenega seminarja. Že od začetka seminar ni namenjen le topologom, temveč tudi sorodnikom, prijateljem in kolegom, tako da je to danes daleč najštevilnejši in najbolj pisan seminar na Oddelku za matematiko. Kdo bi si mislil, da so lahko matematični seminarji tako prijetni, zabavni in lepi.

Tako kot je v slovensko matematiko profesor Vrabec prinesel takrat še dokaj neznani področji algebraične in geometrične topologije, tudi v planinah najraje hodi po neznanih in nenavadnih poteh. Pogosto so te poti bolj težko dostopne in zahtevajo vztrajnost, korajžo in kar nekaj spretnosti, vendar si na koncu poplačan z osupljivim razgledom na svet z novega zornega kota.

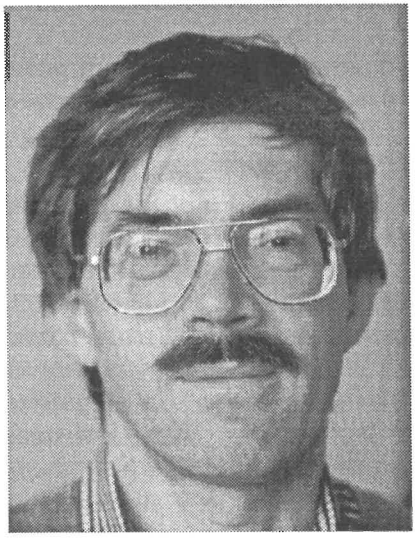
Neža Mramor

Prof. dr. Peter Legiša, dobitnik nagrade Republike Slovenije na področju šolstva za leto 2000

Kot piše v razpisu, se tovrstne nagrade podeljujejo za najvišje dosežke v vzgoji in izobraževanju, predvsem za pomembne prispevke h kakovosti vzgojnoizobraževalne prakse ter razvoju organizacije vzgojnoizobraževalnega procesa. Slovenski matematiki smo veseli, da je v letu 2000 nagrado prejel naš kolega, prof. dr. Peter Legiša, človek, ki je dobršen del svoje poklicne poti namenil prizadevanjem za boljši pouk matematike v srednjih šolah.

Uveljavil se je zlasti kot pisec srednješolskih matematičnih učbenikov in kot prvi predsednik republiške predmetne maturitetne komisije za matematiko, ko je bistveno pripomogel k uspešni uvedbi mature v slovenske srednje šole. Če si je kdo med matematiki zaslužil nagrado, je to gotovo profesor Legiša in prav je, da ob tej priložnosti na kratko predstavimo njegovo delo.

Peter Legiša se je rodil 13. maja 1950 v Ljubljani. Študiral je matematiko na Fakulteti za naravoslovje in tehnologijo v Ljubljani, kjer je diplomiral leta 1972, magistriral 1974 in doktoriral 1977 pri profesorju Vidavu. Od leta 1978 je zaposlen na Univerzi v Ljubljani, najprej kot docent in nato kot izredni profesor za analizo in algebro.



Znanstveno in raziskovalno se je ukvarjal z izometrično strukturo Banachovih prostorov, hermitskimi operatorji in C^*-algebrami ter o tem objavil deset člankov in referatov. Bolj kot znanstvenik pa se je uveljavil kot predavatelj. Na dodiplomskem študiju je predaval matematiko za kemike, tekstilce in montaniste, teorijo mere za matematike, na podiplomskem študiju pa C^*-algebre in linearne topološke prostore za študente matematike. Zdaj že vrsto let stalno predava analizo za fizike, funkcionalno analizo za matematike, vodi podiplomski seminar iz funkcionalne analize in je nosilec predmeta Sodobne metode poučevanja matematike na podiplomski izobraževalni smeri. Študentom je bil doslej skrben mentor pri več kot štiridesetih diplomskih in treh magistrskih delih. Poleg tega je tudi pogost in cenjen predavatelj v okviru stalnega izobraževanja učiteljev matematike in na raznih društvenih strokovnih srečanjih. Je aktiven član Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, predsednik nacionalnega komiteja za matematiko, organizator in voditelj raznih okroglih miz, moderator strokovnih pogovorov in delovni predsednik na občnih zborih društva.

Profesor Legiša je vsestransko razgledan intelektualec in eden redkih slovenskih matematikov, ki tudi javno nastopajo. Tako je npr. za tretji program Radia Slovenije doslej pripravil več poljudnoznanstvenih oddaj o matematiki in njeni uporabi. Prevedel je matematični del enciklopedije o znanosti in sodeloval kot avtor prispevkov pri Enciklopediji Slovenije. Poleg matematike se ljubiteljsko ukvarja tudi s fotografijo in opazovanjem ptic (o obojem je večkrat pisal v strokovnih časopisih), ter je obenem zelo razgledan tudi v drugih vedah, od kemije do zgodovine, jezika in literature. Njegovi

kolegi vemo, kako prijetno in poučno se je z njim pogovarjati o katerikoli zadevi.

Čeprav ga zanimajo različna področja matematike, so ga sčasoma vedno bolj zaposlovala vprašanja kvalitetnega pouka matematike. Začel je proučevati izkušnje drugih narodov na področju pouka. Prebral je številne tuje učbenike in o njih tudi pisal recenzije. Samo v Obzorniku za matematiko in fiziko je objavil skoraj 30 recenzij najrazličnejših matematičnih knjig. Bil je eden od soavtorjev pri Racionalni evalvaciji srednješolskega izobraževanja leta 1990. Za Obzornik je prevedel zanimiva razmišljanja o pouku matematike v ZDA in leta 1995 uredil prispevke na temo Pouk matematike na osnovni in srednji šoli (kar je bila tudi vsebina letnega seminarja DMFAS). Istega leta je na mednarodni konferenci v Catanii kot vabljeni predavatelj predaval o pouku geometrije, na posvetovanju v Portorožu pa je razpravljal o univerzi in visokih strokovnih šolah. V Preseku, Obzorniku in v Naših razgledih je objavil številne strokovne prispevke o pouku matematike nekoč in o starih matematičnih učbenikih ter priložnostne članke o piscih teh učbenikov. Na oddelku za matematiko se je posebej zanimal za izobraževanje bodočih učiteljev matematike in predlagal različne izboljšave. Ko je bil v letih 1991–1993 predstojnik oddelka, je zanje vpeljal dveletni podiplomski program specializacije.

Legiševo najpomembnejše delo na pedagoškem področju so prav gotovo njegovi učbeniki srednješolske matematike. Vse od leta 1981, ko je skupaj s Štalcem in Zakrajškom izdal prve zvezke in gradiva za matematiko v okviru takratnega usmerjenega izobraževanja, pa do današnjih kompletnih in izpopolnjenih učbenikov za vse razrede gimnazij (in drugih srednjih šol), je izšlo prek 15 Legiševih knjig (z različnimi naslovi). Nekatere od njih so doživele tudi več kot 15 izdaj. Seveda jih je avtor, ki je znan po svoji dojemljivosti za upravičene kritike, stalno dopolnjeval in prilagajal novim učnim načrtom in novim potrebam pouka. O uporabi svojih učbenikov pri poučevanju matematike je imel številne javne pogovore in srečanja. Legiševa matematična besedila odlikuje matematično korektna, preprosta in jasna razlaga, ki izhaja iz konkretnih pojmov in zgledov. V njih ni nepotrebne abstraktnosti. S temi učbeniki, iz katerih spoznavajo osnove matematike številne in vedno nove generacije dijakov, nadaljuje Legiša stoletno tradicijo velikih slovenskih piscev srednješolskih matematičnih učbenikov, ki sega od Močnika v drugi polovici 19. stoletja, pa do Križaniča v drugi polovici 20. stoletja.

Ko so se v Sloveniji pričeli pripravljati na ponovno uvedbo mature, je bil leta 1992 izvoljen za predsednika republiške predmetne maturitetne komisije za matematiko. S strokovnimi argumenti, vztrajnostjo in skoraj pregovorno strpnostjo je dosegel primerno vrednotenje matematike kot maturitetnega predmeta in preprečil marsikatero prenagljeno in preveč radikalno predlagano spremembo. Velikokrat je javno nastopil v bran matematike in

razumne maturitetne ureditve, glavnina dela komisije in s tem tudi njegovega dela pa je vsekakor vsebovana v temeljitih in podrobnih pripravah na maturo, skritih očem javnosti. Bistveno je prispeval tudi k izdaji dveh maturitetnih katalogov, ki sta sicer skupinsko delo. Po uspešno izvedenih prvih dveh maturah je predsedstvo maturitetne komisije leta 1997 prepustil drugemu, sam pa je v t.i. kurikularnem svetu še naprej aktivno sodeloval pri prenavljanju srednješolskih programov. Ta tematika ga še vedno zanima.

Kot vidimo, je glavno Legišev delo povezano s posredovanjem matematičnega znanja novim generacijam in s prizadevanji za izboljšanje pouka matematike. Ob zadovoljstvu, da v strokovni javnosti ni bilo spregledano, zaželimo nagrajencu na tem pomembnem področju še mnogo dobrih zamisli, ki naj jih skupaj s sodelavci tudi uresniči v korist šolajoče se mladine, učiteljev in vse slovenske matematične skupnosti.

Milan Hladnik, Boris Lavrič

Prof. dr. Sandi Klavžar je prejel Zoisovo priznanje za leto 2000

Aktivni član DMFA, prof. dr. Sandi Klavžar s Pedagoške fakultete Univerze v Mariboru je v letu 2000 prejel Zoisovo priznanje za pomembne znanstvene dosežke. Dr. Klavžar je zelo plodovit, uspešen, mednarodno priznan matematik, ki raziskuje na področju teorije grafov. Njegovo ožje področje raziskovanja so grafovski produkti, izometrične vložitve in retrakti grafov.

V zadnjih sedmih letih je dr. Klavžar v priznanih mednarodnih revijah sam ali v soavtorstvu objavil 46 znanstvenih člankov. Večina teh publikacij je z ožjega področja teorije grafov, nekatere pa se navezujejo ali imajo aplikacije tudi na drugih področjih, kot sta teoretično računalništvo in matematična kemija. Njegovo delo v tem obdobju pa zaokrožuje monografija *Product Graphs: Structure and Recognition* (v soavtorstvu z W. Imrichom iz Avstrije), ki je v začetku leta 2000 izšla pri ugledni založbi John Wiley & Sons.

Klavžarjev prispevek k znanosti se kaže tudi na drugih področjih. Bil je vabljen predavatelj na nekaterih mednarodnih konferencah, sodeloval je pri organizaciji velikih mednarodnih matematičnih znanstvenih srečanj, bil je gostujoči urednik pri posebnih izdajah revij Discrete Mathematics

(Elsevier, ZDA), Discrete Applied Mathematics (Elsevier, ZDA) in MATCH (Bayreuth, Nemčija).

Ob uspehu, ki se ga veselimo tudi vsi Sandijevi kolegi in sodelavci, mu iskreno čestitamo in želimo, da bi bil še naprej tako poln energije, entuziazma in predan svojemu raziskovalnemu delu.

Bojan Mohar

NOVE KNJIGE

David Acheson: FROM CALCULUS TO CHAOS, An Introduction to Dynamics, Oxford University Press 1997 (ponatisa 1998 in 1999), 269 strani.

Kot je avtor navedel na začetku knjige, je ta namenjena študentom matematike in „znanosti" (naravoslovne in tehnične vede), bralcem, ki se pripravljajo na univerzitetni študij, učiteljem matematike in naravoslovja na srednjih šolah, kot tudi na univerzi, ter „splošnim" bralcem, ki se ne pustijo odvrniti od branja, ko zagledajo nekaj enačb. Gre za privlačno in enostavno pisanje o sodobnih vsebinah, z vajami na koncu vsakega poglavja, rešitvami na koncu knjige in tudi z enostavnimi programi (pisanimi pač v qbasicu), s katerimi lahko bralec opazuje primere nelinearne dinamike z namiznim računalnikom, tudi če nima poprejšnjih tovrstnih izkušenj.

Naj v prid poslednji trditvi dodamo, da knjiga seveda bralca ne poučuje dobrega programiranja. Avtor bralca vodi skozi programiranje natanko toliko, kolikor je to potrebno, da bo razumel smisel kode. Predvsem pa se usmeri v razumevanje fizikalnega ozadja problema, ki ga numerično opazuje. Slednje je pomembno – zgodi se namreč, da pri delu obtičijo celo ekipe raziskovalcev, ki se lotijo osvajanja in celo razvijanja numerične kode za reševanje kompleksnih problemov, ker ne razumejo dobljenih rezultatov. V uvodu dodatka A (Osnovno programiranje v qbasicu) je avtor zapisal nekako takole: „Upam, da bo besedilo dokaj splošno uporabno, je pa mišljeno predvsem za popolne začetnike. Še posebej toplo pozdravljam vsakega bralca, ki ne mara matematičnega programiranja – takšen je bil še pred nekaj leti tudi avtor sam." Dodajmo, da to ne pomeni, da je avtor ‚pravi začetnik', še manj, da je ‚slab fizik'. Prav nasprotno, bralec bo na spletnem naslovu, ki ga avtor navaja v Dodatku B: `http://www.jesus.ox.ac.uk/~dacheson`, ugotovil, za kakšnega strokovnjaka gre.

Pojdimo po vrsti. V uvodnem delu avtor zapiše nekaj misli, ki sta si jih izmenjala Newton in Halley v zvezi z eliptičnim gibanjem planeta okoli Sonca, kjer gravitacijska sila upada s kvadratom oddaljenosti med telesoma. Takoj za tem, v drugem poglavju, avtor na skorajda srednješolski način zapiše nekaj nujnih pravil za odvajanje in integriranje, kar je bila osrednja

tema v 17. in 18. stoletju. Analiza je sicer zapisana na bolj sodoben in preprost način, ki se bo zdel matematikom pomanjkljiv. Hkrati enostavno analitiko popestri s slikami strani del velikanov tistega obdobja ali pa s slikami njihovih portretov (Newton, G. W. Leibniz, Euler). V tretjem poglavju se loti enostavnih diferencialnih enačb prvega in drugega reda, ponovno na poseben in enostaven način. Opozori na možnost divergence rešitve, enostavne oscilacije ali celo slučajne oscilacije omejene rešitve. Ko opravi s primeri linearnih enačb, se loti nelinearnih enačb drugega reda, ki so avtonomne. Za slednje je značilno, da v njih neodvisna spremenljivka eksplicitno ne nastopa. Na preprost način vpelje bralca v fazni prostor in mu na primeru razloži, da je lahko fazni prostor diferencialne enačbe drugega reda, v kateri nastopa neodvisna spremenljivka tudi eksplicitno, tridimenzionalen. V četrtem poglavju se loti numeričnih prijemov, kot sta Eulerjeva metoda in izboljšana Eulerjeva metoda. Bralca poduči o primernosti brezdimenzionalnih oblik enačb, poglavje pa konča z Runge-Kuttovo metodo za reševanje sistema diferencialnih enačb prvega reda.

V petem poglavju se avtor loti oscilacij. Prične s preprostim nihalom in z linearnim vzmetnim nihalom, doda jima dušenje in periodično vsiljevanje. Preide v lastna nihanja sklopljenega vzmetnega nihala; pokaže, kako se je dvojnega in trojnega nihala lotil Daniel Bernoulli (skupaj z Eulerjem). Opiše dinamiko šibko sklopljenega nihala in razloži pojav utripanja. Ko s potrebnimi osnovami, značilnimi za temeljni kurs iz mehanike, opravi, preide na nelinearne oscilacije. Sprva v faznem prostoru obravnava linearni oscilator, nato pa v njem opazuje tudi nihalo z velikimi odkloni.

Šele v šestem poglavju (ne prepozno) se povrne na vprašanje, ki ga je Halley postavil Newtonu v zvezi s potovanjem planetov okoli Sonca. Sprva nekaj pove o elipsi (kar je seveda Newton vedel), pa o gravitacijskem zakonu. Kinematiko masne točke, ki se giblje pod vplivom centralne sile, zapiše v kompleksni obliki, nato še zapiše diferencialni enačbi (drugi Newtonov zakon) za to gibanje v ravnini. Avtor doda fotokopijo Eulerjevega zapisa tega sistema enačb, potem seznani bralca s pravilom o opisovanju enakih površin krajevnega vektorja masne točke (v enakih časih), ki potuje pod vplivom centralne sile. Končno zapiše diferencialno enačbo za orbito telesa, ki je pod vplivom gravitacijske centralne sile in s tem v zvezi pokaže naslovnico Halleyeve knjige o kometih. Pojasni, kako numerično obravnavamo problem, obravnava problem dveh teles, kot tudi problem treh teles.

V sedmem poglavju se na hitro loti valovanja in difuzije, seveda pri tem preide na parcialne diferencialne enačbe in bralca na preprost način z njimi seznani. Zopet nakaže, kako naj bralec tudi te probleme numerično opazuje. V osmem poglavju se loti variacijskega računa, primera z milnico, zapiše Lagrangeve gibalne enačbe in jih uporabi v primeru gibanja telesa pod vplivom centralne sile. V devetem poglavju obravnava gibanje tekočin. Sprva postavi vprašanje o tem, zakaj so rešitve dinamike neviskozne tekočine

VABILO

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi svoje članice in člane k sodelovanju na strokovnem srečanju in 53. občnem zboru, ki bosta od 18. do 20. oktobra 2001 v Kranjski Gori.

Člani društva lahko predstavijo svoje raziskovalno delo, s katerim se ukvarjajo, zanimivosti s tega področja, oziroma nove metode dela in novosti pri pouku matematike, fizike in astronomije (pripomočke, nove vsebine, zanimive eksperimente in posebne prilagoditve).

Predstavitev je možna v treh oblikah:

- s 25- do 30-minutnim prispevkom,
- s posterjem,
- s predstavitvijo učila, pripomočka, gradiva.

Na voljo bodo grafoskop, projekcijsko platno, videoprojektor za prenos slike z računalnika in panoji za posterje. Računalnik s potrebno programsko opremo in druge pripomočke morajo predavatelji prinesti s seboj.

Prijave lahko pošljete pisno ali po elektronski pošti. Obvezno morajo vsebovati:

- naslov prispevka,
- ime in priimek avtorja (ali več avtorjev), naslov ustanove, kjer je avtor zaposlen, oziroma domač naslov,
- kratek povzetek prispevka (pri velikosti črk 12pt naj ne presega ene strani A4).

Prijave sprejemamo do **15. septembra 2001** na naslov:

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Janez Krušič
Jadranska ulica 19
1000 Ljubljana

ali na elektronski naslov: `Janez.Krusic@fmf.uni-lj.si`. Povzetkom, ki jih boste poslali po pošti, dodajte zapis v elektronski obliki (disketo).

Izbor prispevkov bo opravila in razvrstila po sekcijah posebna komisija, ki jo bo imenoval upravni odbor DMFA Slovenije. Povzetki bodo objavljeni v biltenu občnega zbora.

V okviru strokovnega srečanja DMFA Slovenije bo v četrtek, 18. oktobra 2001, tudi **9. slovensko srečanje o uporabi fizike**.

Obvestila o dejavnostih društva objavljamo tudi na internetski domači strani DMFA: `http://www.dmfa.si`

Predsednik DMFA:
Martin Čopič

CENTRALNA EKONOMSKA KNJIŽNICA

R 177/01

100000142,2

COBISS

(Eulerjeve enačbe) napačne pri opisovanju obteka oz. zakaj so daleč od tistih, ki jih dobimo, če tekočino poženemo koeficient viskoznosti proti n tokovnice, nestisljiva tekočina, namišljena „fazna" enačbe za viskozno in za zelo viskozno tekočino. Pri število in nazorno pokaže, da so procesi pri majhnem Reynoldsovem številu skoraj reverzibilni. Pri tekočini z majhno viskoznostjo pa poda odgovor na prejšnje vprašanje: sicer majhna vrednost (koeficienta viskoznosti) je lahko množena z velikim številom, saj členi z viskoznim trenjem vsebujejo najvišji (drugi) odvod hitrosti po prostoru. Ta odvod pa ima veliko vrednost blizu sten, mimo katerih potujejo delci tekočine, saj imajo tik ob steni njeno hitrost. Tako pride do viskozne mejne plasti in z njeno pomočjo razloži sekundaren tok v skodelici čaja, v katerega spustimo nekaj čajnih delcev, ki jih opazujemo, ko tekočino z žlico spravimo v krožno gibanje. (Gre za sekundaren tok pojava „spin-down".)

Deseto poglavje obravnava nestabilnosti in katastrofe, avtor tudi tega prične z ‚zgodovinskim okvirjem' – Reynoldsovim eksperimentom, pri katerem je Reynolds opazil prehod laminarnega gibanja tekočine po cevi v turbulentno gibanje. Avtor nadaljuje s preprosto linearno teorijo stabilnosti, preide na bifurkacije in večkratne rešitve, nagle spremembe stanja sistema, superkritične bifurkacije in na nestabilnost gibanja. V enajstem poglavju pa se avtor dotakne nelinearnih oscilacij in kaosa. Navede van der Polovo enačbo, Poincaré-Bendixonov izrek (kaos se ne more pojaviti v dvodimenzionalnem avtonomnem sistemu), ki ga razloži, obravnava Lorenzov sistem nelinearnih (avtonomnih) enačb, kaotično mešanje in podvajanje period.

V poslednjem, dvanajstem poglavju, opiše kaotična nihala, izrek o invertiranem nihalu in celo pojasni, kako naj bi razložili oz. izpeljali trik z ‚indijsko vrvjo', ki ‚sama' stoji pokonci navkljub sili teže. Gre za trik, ki ga baje izvajajo fakirji. Avtor je realiziral poskus, pri katerem je uporabil žico, ki je imela dolžino daljšo od kritične, kar pomeni, da se pokonci stoječa žica pri majhnih odklonih od vertikale zagotovo povesi navzdol. Žica je stala navpik zato, ker jo je vertikalno oscilatorno vsiljeval s primerno frekvenco. Ali tudi fakirji tako izvajajo poskus z vrvjo, je pa drugo vprašanje ...

Vlado Malačič

OGLAS

Prodam kompletno holografsko opremo za domačo rabo: He-Ne laser, optične komponente, holografsko mizo, filme in holografske plošče ter kemikalije in literaturo. Oprema omogoča snemanje transmisijskih in refleksijskih hologramov. Kontakt: luka.drinovec@guest.arnes.si