

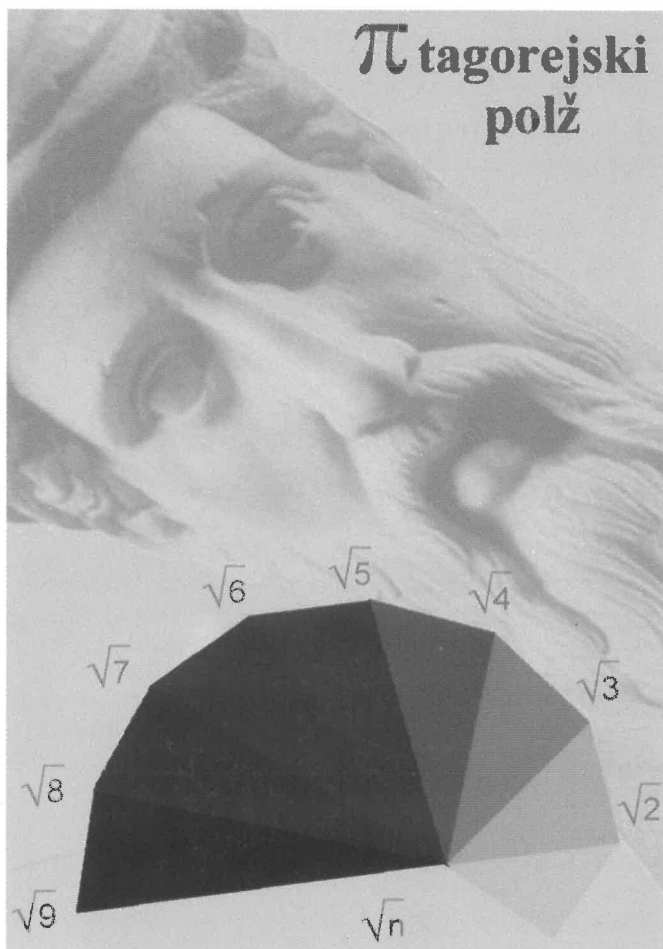
ODPISANO

2001

Letnik 48

1

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 2001

letnik 48, številka 1, strani 1–32

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, telefon (01) 476-65-53, telefaks (01) 251-72-81, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d. d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 042961, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Martin Juvan (glavni urednik), Roman Drnovšek (odgovorni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko), Marko Zgonik (urednik za fiziko).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljčič.

Naročnina za člane društva je všteta v celoletno članarino, ki znaša 3600 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6600 SIT, za študente 1800 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 720 SIT, stare številke 480 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov. Revijo sofinancira Ministrstvo za šolstvo, znanost in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2001 DMFA Slovenije – 1446 Poština plačana na pošti 1102 Ljubljana

2-144 (01-1
KONFERENCA EKONOMSKA
LJUBLJANA
Juv.: 100000142

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

Linearna urejenost in intervalska topologija — Linear order and interval topology (Boris Lavrič)	1–12
Številске vrste in integrali — Series and integrals (Roman Drnovšek)	13–18
O gravitacijski konstanti — On the Newtonian gravitational constant (Janez Strnad)	19–25

Vesti — News

Strokovno srečanje in 52. občni zbor DMFA Slovenije (Nada Razpet)	26–28
Nagrade in priznanja DMFA Slovenije za leto 2000 (Maja Manohin, Mitja Rosina, Darjo Felda in Nada Razpet)	28–IV
Na ovitku: <i>Pitagorejski polž</i> , Gregorij in Dragica Kurillo, 2000, plakat, izdelan na osnovi razpisa DMFA ob svetovnem letu matematike.	

LINEARNA UREJENOST IN INTERVALSKA TOPOLOGIJA

BORIS LAVRIČ

Math. Subj. Class. (2000): 06A05

Članek obravnava osnovne lastnosti intervalske topologije linearno urejene množice, pri čemer podrobneje obdela predvsem zveze med urejenostnimi in topološkimi lastnostmi.

LINEAR ORDER AND INTERVAL TOPOLOGY

In this note basic properties of the interval topology of a linearly ordered set are studied, the main focus of attention are connections between order and topological properties.

Standardna topologija realne osi je dana z bazo odprtih intervalov, torej je določena z naravno urejenostjo te osi. Zato so topološke lastnosti realne osi tesno povezane z urejenostnimi. Pri obravnavi realnih števil se ta zveza pogosto po nepotrebnem izgubi. Neposredna povezanost med topologijo in urejenostjo se zelo jasno pokaže v splošnejšem okolju, in sicer v linearno urejenih množicah, opremljenih z intervalsko topologijo. V članku bomo obravnavali osnovne lastnosti intervalske topologije linearno urejenih množic in izpeljali nekaj pomembnejših zvez med urejenostjo in topologijo.

1. Linearna urejenost

V uvodnem razdelku ponovimo osnovne definicije iz teorije linearne urejenosti in obravnavamo nekaj lastnosti linearno urejenih množic, ki jih potrebujemo v nadaljevanju.

Binarno relacijo $\leq$ (manjše ali enako) imenujemo relacija *linearne urejenosti*, kadar je antisimetrična, tranzitivna in strogo sovisna ter zato tudi refleksivna. *Linearno urejena* množica je neprazna množica, opremljena z dano relacijo linearne urejenosti. Za poljubna elementa x in y linearno urejene množice X velja natanko ena od možnosti $x < y$, $y < x$ in $x = y$, kjer zapis $u < v$ pomeni, da je $u \leq v$ in hkrati $u \neq v$.

Vrsto pojmov in oznak, ki so običajni za naravno urejenost na realni osi, uporabljamo za vsako linearno urejeno množico X . Kadar je $x \leq y$, imenujemo množici

$$(x, y) = \{z \in X : x < z < y\}, \quad [x, y] = \{z \in X : x \leq z \leq y\}$$

odprti oziroma zaprti interval s krajiščema x in y . Pod pojmom *interval* razumemo tudi podobno definirani množici $(x, y]$ in $[x, y)$, vso množico X ,

množici

$$(x, \rightarrow) = \{z \in X : x < z\}, \quad [x, \rightarrow) = \{z \in X : x \leq z\}$$

ter podobno definirani množici $(\leftarrow, x)$, $(\leftarrow, x]$, $x \in X$. Pri tem intervale oblike $(x, \rightarrow)$ in $(\leftarrow, x)$ imenujemo odprti intervali, intervale oblike $[x, \rightarrow)$ in $(\leftarrow, x]$ zaprti intervali, X pa je hkrati odprt in zaprt interval.

Kadar je $x < y$, interval $[x, y]$ vsebuje vsaj dva elementa, x in y , interval (x, y) pa je lahko prazen. To se zgodi npr. v standardno urejeni množici naravnih števil, kadar sta x in y zaporedni naravni števili. Če je $x < y$ in $(x, y) = \emptyset$, pravimo, da je y neposredni naslednik elementa x in da je x neposredni predhodnik elementa y . Ta odnos zapišemo v obliki $x \prec y$.

Tudi pojme prvi ali najmanjši element, zadnji ali največji element, spodnja in zgornja meja ter infimum in supremum opredelimo v splošnih linearno urejenih množicah podobno kot na realni osi. V nadaljevanju se bomo srečali tudi s pojmom urejenostna gostost. Naj bosta Y in Z neprazni podmnožici linearno urejene množice X . Potem je Y urejenostno gosta ali gosta v Z , kadar za vsak par $z_1, z_2 \in Z$, $z_1 < z_2$, obstaja tak $y \in Y$, da je $z_1 < y < z_2$. Tako je npr. podmnožica $\mathbb{Q}$ standardno urejene realne osi $\mathbb{R}$ v sebi gosta in gosta v $\mathbb{R}$, podmnožica $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ pa ni niti v sebi gosta.

Neprazna podmnožica Y linearno urejene množice X na naraven način podeduje urejenost iz X . Podedovano linearno urejenost imenujemo *inducirana* urejenost. Interval podmnožice $Y \subseteq X$, opremljene z inducirano urejenostjo, ni nujno interval v X , kadar pa je, lahko pride do nesporazuma v zapisu. Zato bomo intervale v podmnožici Y , kadar bo potrebno, opremili z indeksom Y . Za $y_1, y_2 \in Y$ tako npr. velja $(y_1, y_2)_Y = (y_1, y_2) \cap Y$. Podmnožica $Y \subseteq X$ je *konveksna* (v X), kadar hkrati z elementoma $u, v \in Y$ vsebuje ves interval s krajiščema u, v . Podmnožica Y je torej konveksna, kadar iz pogojev $u < x < v$, $u, v \in Y$, $x \in X$ sledi $x \in Y$. Presek vseh konveksnih podmnožic v X , ki vsebujejo Y , je najmanjša konveksna podmnožica v X , ki vsebuje Y . Imenujemo jo *konveksna ogrinjača* množice Y in jo zaznamujemo s $\text{co}(Y)$. Konveksna ogrinjača $\text{co}(Y)$ je unija vseh zaprtih intervalov s krajiščema v Y . Kadar je podmnožica $Z \subseteq Y$ konveksna v X in ni prava podmnožica nobene druge konveksne podmnožice, vsebovane v Y , pravimo, da je Z *maksimalna konveksna podmnožica* (v Y).

Trditev 1. Vsaka podmnožica Y linearno urejene množice X je unija paroma disjunktnih maksimalnih konveksnih podmnožic v Y . Te podmnožice imenujemo konveksne komponente podmnožice $Y \subseteq X$.

Dokaz. Uvedimo v Y binarno relacijo $\sim$, tako da za $u, v \in Y$ postavimo $u \sim v$, kadar Y vsebuje interval s krajiščema u in v . Relacija $\sim$ je očitno ekvivalenčna, zato razdeli Y na paroma disjunktno ekvivalenčne razrede. Dokažimo, da so ti razredi maksimalne konveksne podmnožice v Y . Naj

bo $[y]$ ekvivalenčni razred elementa $y \in Y$. Neposredno iz definicije relacije $\sim$ je razvidno, da je množica $[y]$ konveksna. Naj bo podmnožica $Z \subseteq Y$ konveksna v X in naj vsebuje $[y]$. Potem za vsak $z \in Z$ interval s krajiščema y, z leži v Z in tedaj tudi v Y . Torej za vsak $z \in Z$ velja $z \sim y$, od tod pa že sledi enakost $Z = [y]$. Ekvivalenčni razred $[y]$ je torej maksimalna konveksna podmnožica v Y . ■

Vsak interval linearno urejene množice je konveksen, konveksna množica pa ni nujno interval. Tako je na primer podmnožica racionalne osi, ki jo sestavljajo vsa števila, katerih kvadrati so manjši od 2, konveksna v $\mathbb{Q}$, vendar ni interval. Na realni osi bi tak primer iskali zaman. Zakaj? Bistvena urejenostna lastnost, ki realno os loči od racionalne, je Dedekindova polnost. V splošnem primeru ta pojem opredelimo prav tako, kot za realno os. Linearno urejena množica X je *Dedekindovo polna*, kadar ima vsaka njena neprazna navzgor omejena podmnožica supremum v X . Ker ima v Dedekindovo polni množici vsaka neprazna navzdol omejena podmnožica infimum (vabimo bralca, da to dokaže), nekateri to lastnost privzamejo v definicijo. Poglejmo, kako je s konveksnimi podmnožicami v splošni Dedekindovo polni linearno urejeni množici.

Trditev 2. *Za linearno urejeno množico X sta ekvivalentni izjavi:*

- (a) *X je Dedekindovo polna.*
- (b) *Intervali so edine konveksne podmnožice v X .*

Dokaz. (a) $\implies$ (b): Naj bo X Dedekindovo polna, $Y \subseteq X$ pa konveksna. Obravnavajmo le primer, da je Y navzdol omejena, navzgor pa ne. Podobno namreč lahko uženemo tudi druge primere. Očitno velja $Y \subseteq [x, \rightarrow)$, kjer je $x = \inf Y$. Dokažimo, da velja tudi $(x, \rightarrow) \subseteq Y$. Če $z \in X$ ni spodnja meja množice Y , obstaja tak $y_1 \in Y$, da je $y_1 < z$. Ker Y ni navzgor omejena, obstaja tak $y_2 \in Y$, da je $y_2 > z$. Zaradi konveksnosti množice Y potem $z \in Y$. Od tod vidimo, da iz $z \notin Y$ sledi, da je z spodnja meja množice Y in tedaj $z \leq x$. Torej je res $(x, \rightarrow) \subseteq Y$. Iz dokazanega vidimo, da je Y eden od intervalov $(x, \rightarrow)$, $[x, \rightarrow)$.

(b) $\implies$ (a): Naj velja (b), Y pa naj bo poljubna neprazna in navzgor omejena podmnožica v X . Množica Z vseh zgornjih mej množice Y je konveksna, zato je interval. Ker iz relacij $z \in Z$ in $z \leq x \in X$ sledi $x \in Z$, je $Z = [x, \rightarrow)$ ali $Z = (x, \rightarrow)$, $x \in X$. V prvem primeru je očitno x najmanjši element množice Z , torej je $x = \sup Y$. V drugem primeru $x \notin Z$, zato x ni zgornja meja množice Y . Potem pa obstaja tak $y \in Y$, da je $y > x$ in tedaj $y \in Z$. Od tod sledi, da je $Z = [y, \rightarrow)$ (in $x < y$), torej je v tem primeru $y = \sup Y$. ■

Če je Dedekindovo polna linearno urejena množica X omejena, ima najmanjši in največji element, vsaka njena podmnožica pa ima supremum in infimum (supremum prazne množice je najmanjši element množice X ,

njen infimum pa največji element množice X). Kadar ima linearno urejena množica to lastnost, pravimo, da je *polna*. Neomejeno Dedekindovo polno linearno urejeno množico lahko dopolnimo do polne linearno urejene množice tako, da ji dodamo najmanjši element, če ni navzdol omejena, in največjega, če ni navzgor omejena.

Naj bosta X in X' linearno urejeni množici. Preslikava $f : X \longrightarrow X'$ je *naraščajoča* oziroma *strogo naraščajoča*, kadar za vsak $x, y \in X$ velja

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \text{ oziroma } x < y \implies f(x) < f(y).$$

Ker je relacija linearne urejenosti strogo sovisna, je strogo naraščajoča preslikava injektivna. Preslikava $f : X \longrightarrow X'$ je *urejenostni izomorfizem* ali *izomorfizem*, kadar je naraščajoča, bijektivna in je tudi njena inverzna preslikava f^{-1} naraščajoča. Brž se lahko prepričamo, da je izomorfizem strogo naraščajoča preslikava in da je vsaka strogo naraščajoča surjekcija izomorfizem. Kadar med linearno urejenima množicama X in X' obstaja izomorfizem, pravimo, da sta množici X in X' *izomorfni* in to zaznamujemo z $X \approx X'$. Strogo naraščajoča preslikava določa izomorfizem med njeno domeno in zalogo, opremljeno z inducirano urejenostjo kodomene, zato tako preslikavo imenujemo *urejenostna vložitev* ali *vložitev*. Izomorfizem ohranja urejenostne lastnosti: interval preslika na interval iste vrste, omejeno množico na omejeno, supremum podmnožice (kadar obstaja) v supremum slike te množice, podobno preslika infimum, itd.

2. Intervalska topologija

Naj bo X linearno urejena množica in $\mathcal{B}(X)$ družina vseh njenih odprtih intervalov, definiranih v prvem razdelku. Ker je presek dveh odprtih intervalov odprti interval in ker je X odprti interval, $\mathcal{B}(X)$ ustreza pogojem za bazo topologije na X . Topologijo z bazo $\mathcal{B}(X)$ imenujemo *intervalska topologija* na linearno urejeni množici X in jo zaznamujemo s $\mathcal{T}(X)$. Neprazna podmnožica $Y \subseteq X$ torej pripada $\mathcal{T}(X)$ natanko takrat, kadar za vsak $y \in Y$ obstaja tak odprti interval I v X , da velja $y \in I \subseteq Y$. Ni težko videti, da je interval, definiran v prvem razdelku, odprta (oziroma zaprta) množica v intervalski topologiji natanko takrat, kadar je odprti interval (oziroma zaprti interval) v smislu definicije iz prvega razdelka.

Podmnožica Y linearno urejene množice X je v inducirani urejenosti linearno urejena, torej na njej obstaja intervalska topologija $\mathcal{T}(Y)$. Je morda ta topologija inducirana z intervalsko topologijo $\mathcal{T}(X)$? Oglejmo si naslednji primer. Za X vzemimo realno os z naravno urejenostjo, za Y pa podmnožico $Y = \{x \in \mathbb{R} : x = 0 \text{ ali } |x| > 1\}$. Potem je $\{0\}$ odprta množica v inducirani topologiji na Y , ni pa odprta v intervalski topologiji $\mathcal{T}(Y)$. Odgovor na gornje vprašanje je torej nikalen, vendar pa je v nekaterih pomembnih posebnih primerih situacija drugačna.

Trditev 3. Naj bo Y neprazna podmnožica linearno urejene množice X . Potem je topologija $\mathcal{T}$, ki jo na Y inducira intervalska topologija $\mathcal{T}(X)$, krepkejša od intervalske topologije $\mathcal{T}(Y)$. Topologiji $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}(Y)$ se ujemata, kadar je izpolnjen kakšen od naslednjih pogojev:

- (a) Y je konveksna;
- (b) Y je gosta v svoji konveksni ogrinjači $\text{co}(Y)$.

Dokaz. Za dokaz prvega dela trditve zadošča utemeljiti inkluzijo $\mathcal{B}(Y) \subseteq \mathcal{T}$, ki pa očitno sledi iz enakosti $(y_1, y_2)_Y = (y_1, y_2) \cap Y$, $y_1, y_2 \in Y$, $(y, \rightarrow)_Y = (y, \rightarrow) \cap Y$ in $(\leftarrow, y)_Y = (\leftarrow, y) \cap Y$, $y \in Y$. Od tod sledi, da se topologiji $\mathcal{T}$ in $\mathcal{T}(Y)$ ujemata natanko takrat, kadar za vsak odprti interval $I \in \mathcal{B}(X)$ velja $I \cap Y \in \mathcal{T}(Y)$.

(a). Naj bo Y konveksna in $I = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Če $x_1 \in Y$ in $x_2 \in Y$, potem zaradi konveksnosti Y velja $I \cap Y = (x_1, x_2)_Y \in \mathcal{B}(Y)$. Če $x_1 \in Y$ in $x_2 \notin Y$, potem zaradi konveksnosti Y velja $I \cap Y = (x_1, \rightarrow)_Y \in \mathcal{B}(Y)$. Podobno sklepamo v primeru $x_1 \notin Y$, $x_2 \in Y$. Kadar pa $x_1 \notin Y$ in $x_2 \notin Y$, ločimo naslednje možnosti. Če sta x_1 in x_2 spodnji meji ali zgornji meji podmnožice $Y \subseteq X$, je $I \cap Y = \emptyset$, če pa je x_1 spodnja meja, x_2 pa zgornja meja podmnožice $Y \subseteq X$, velja $I \cap Y = Y$. Podobno sklepamo tudi v primerih $I = (x, \rightarrow)$ in $I = (\leftarrow, x)$, $x \in X$.

(b). Naj bo Y gosta v $\text{co}(Y)$ in $I = (x_1, x_2)$, $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Če presek $I \cap Y$ ni prazen, vzemimo poljuben $y \in I \cap Y$. Če y ni niti prvi niti zadnji element množice Y , izberimo taka elementa $y_1, y_2 \in Y$, da je $y_1 < y < y_2$. Ker velja (b), smemo privzeti, da velja $x_1 < y_1 < y < y_2 < x_2$. Od tod že sledi $y \in (y_1, y_2)_Y \subseteq I$, torej je $I \cap Y$ odprta v topologiji $\mathcal{T}(Y)$. Če je y prvi element v Y in je $y < y_2$, $y_2 \in Y$, potem smemo zaradi (b) privzeti, da velja $y_2 < x_2$. Od tod dobimo $y \in (\leftarrow, y_2)_Y \subseteq I$, torej je tudi v tem primeru $I \cap Y$ odprta v $\mathcal{T}(Y)$. Podobno sklepamo, če je y zadnji element množice Y . Obravnavo primerov $I = (x, \rightarrow)$ in $I = (\leftarrow, x)$, $x \in X$, prepuščamo bralcem. ■

Intervalna topologija ima ugodne separacijske lastnosti. Prav lahko je videti, da je Hausdorffova, pri dokazu normalnosti pa si bomo pomagali z rezultatom o separaciji točk diskretne množice. Ponovimo, da je podmnožica Y topološkega prostora X *diskretna* (v tem prostoru), kadar za vsako točko iz Y obstaja okolica, ki ne vsebuje nobene druge točke iz Y .

Trditev 4. Naj bo Z diskretna podmnožica linearno urejene množice X z intervalsko topologijo. Potem obstaja družina paroma disjunktnih odprtih okolice O_z elementov $z \in Z$.

Dokaz. Najprej za vsak $z \in Z$ izberimo tak odprti interval $I_z = (u(z), v(z))$, da velja $I_z \cap Z = \{z\}$. Denimo, da za elementa $z_1, z_2 \in Z$ velja $z_1 < z_2$ in $I_{z_1} \cap I_{z_2} \neq \emptyset$. Če za $z \in Z$ velja $z_1 < z < z_2$, je $v(z_1) \leq z$ in

potem zaradi $I_{z_1} \cap I_{z_2} \neq \emptyset$ tudi $z \in I_{z_2}$. Ker to ni mogoče, na intervalu (z_1, z_2) ni nobenega elementa iz Z . Zato bomo v tem primeru elementa z_1 in z_2 imenovali *soseda*, pri čemer bo z_1 levi sosed, z_2 pa desni. Vsak element iz Z ima največ enega levega in največ enega desnega soseda. Za vsak par sosedov z_1, z_2 izberimo element $w(z_1, z_2)$, ki leži v preseku $I_{z_1} \cap I_{z_2}$. Zdaj sestavimo družino okolic $O_z, z \in Z$. Če z nima nobenega soseda, naj bo $O_z = I_z$, če ima z le levega soseda z' , postavimo $O_z = (w(z', z), v(z))$, če ima le desnega soseda z'' , postavimo $O_z = (u(z), w(z, z''))$, če pa ima levega soseda z' in desnega soseda z'' , naj bo $O_z = (w(z', z), w(z, z''))$. Zlahka se prepričamo, da so člani družine $\{O_z : z \in Z\}$ paroma disjunktni. ■

Izrek 5. *Linearno urejena množica X z intervalsko topologijo je normalen Hausdorffov topološki prostor.*

Dokaz. Naj bo $x_0, y_0 \in X$ in $x_0 < y_0$. Če obstaja $z \in (x_0, y_0)$, sta intervala $(\leftarrow, z)$ in $(z, \rightarrow)$ disjunktni okolici točk x_0 in y_0 , če pa je $(x_0, y_0) = \emptyset$, sta taki okolici intervala $(\leftarrow, y_0)$ in $(x_0, \rightarrow)$. Prostor $(X, \mathcal{T}(X))$ je torej Hausdorffov.

Naj bosta zdaj Z_1 in Z_2 neprazni disjunktni zaprti podmnožici v prostoru X . Poiskali bomo taki disjunktni množici V_1 in V_2 , da bo $Z_1 \subseteq V_1$ in $Z_2 \subseteq V_2$. Najprej postavimo

$$W_1 = \bigcup \{(x, y) : x, y \in Z_1, (x, y) \cap Z_2 = \emptyset\},$$

$$W_2 = \bigcup \{(x, y) : x, y \in Z_2, (x, y) \cap Z_1 = \emptyset\}.$$

Množici W_1 in W_2 sta očitno odprti. Dokažimo, da sta disjunktni in da velja

$$\overline{W_1} \cap Z_2 = \emptyset \quad \text{in} \quad \overline{W_2} \cap Z_1 = \emptyset.$$

Denimo, da $z \in W_1 \cap W_2$. Potem obstajajo taki elementi $x_1, y_1 \in Z_1$, $x_2, y_2 \in Z_2$, da velja

$$z \in (x_1, y_1) \cap (x_2, y_2), \quad (x_1, y_1) \cap Z_2 = \emptyset \quad \text{in} \quad (x_2, y_2) \cap Z_1 = \emptyset.$$

Od tod sledi, da je $x_1 < y_2$, $x_1 \notin (x_2, y_2)$ in zato $x_1 \leq x_2$, ter $x_2 < y_1$, $x_2 \notin (x_1, y_1)$ in zato $x_2 \leq x_1$. Seveda je tedaj $x_1 = x_2 \in Z_1 \cap Z_2$. To pa nasprotuje disjunktnosti množic Z_1 in Z_2 , torej je res $W_1 \cap W_2 = \emptyset$.

Vzemimo zdaj poljuben $z_2 \in Z_2$, upoštevajmo, da je Z_1 zaprta in ne seka Z_2 ter poiščimo tak odprti interval I , da velja $z_2 \in I$ in $I \cap Z_1 = \emptyset$. Dokazali bomo, da I ne seka W_1 , in s tem potrdili enakost $\overline{W_1} \cap Z_2 = \emptyset$. Predpostavimo, da W_1 ni prazna, vzemimo $w \in W_1$ in poiščimo taka elementa $u, v \in Z_1$, da $w \in (u, v)$ in da je $(u, v) \cap Z_2 = \emptyset$. Ker $u \notin I$ in $v \notin I$, od tod sledi, da sta u in v bodisi oba spodnji meji I bodisi oba zgornji

meji I . Zato interval (u, v) ne more vsebovati elementov iz I , torej $w \notin I$ in tedaj $I \cap W_1 = \emptyset$. Podobno dokažemo tudi enakost $\overline{W_2} \cap Z_1 = \emptyset$.

Dokažimo zdaj, da je množica

$$Z = (Z_1 \setminus W_1) \cup (Z_2 \setminus W_2)$$

diskretna. Ker sta Z_1 in Z_2 disjunktni, $Z_1 \setminus W_1$ in $Z_2 \setminus W_2$ pa zaprti, zadošča za vsak x iz $Z_1 \setminus W_1$ (oziroma iz $Z_2 \setminus W_2$) najti okolico, ki ne vsebuje nobene druge točke iz $Z_1 \setminus W_1$ (oziroma iz $Z_2 \setminus W_2$). Izberimo odprti interval J , ki vsebuje element $x \in Z_1 \setminus W_1$ in ne seka Z_2 . Če sta v J dva elementa iz $Z_1 \setminus W_1$, potem vsak element med njima leži v W_1 . Torej J ne more vsebovati več kot dveh elementov iz $Z_1 \setminus W_1$. Če je $J \cap (Z_1 \setminus W_1) = \{x\}$, je iskana okolica kar J , če pa je v J še $y \neq x$, $y \in Z_1 \setminus W_1$, je iskana okolica elementa x presek $J \cap (\leftarrow, y)$, kadar je $x < y$, oziroma presek $J \cap (y, \rightarrow)$, kadar je $y < x$. Množica $Z_1 \setminus W_1$ je torej diskretna. Ker je taka tudi množica $Z_2 \setminus W_2$, je Z res diskretna.

Po trditvi 4 obstajajo paroma disjunktni okolice O_z , $z \in Z$. Postavimo

$$U_1 = \bigcup_{z \in Z_1 \setminus W_1} O_z \quad \text{in} \quad U_2 = \bigcup_{z \in Z_2 \setminus W_2} O_z.$$

Množici U_1 in U_2 sta očitno odprti in se ne sekata. Potem sta odprti tudi množici

$$V_1 = (U_1 \setminus \overline{W_2}) \cup W_1 \quad \text{in} \quad V_2 = (U_2 \setminus \overline{W_1}) \cup W_2.$$

Ker je $Z_1 \subseteq (Z_1 \setminus W_1) \cup W_1 \subseteq U_1 \cup W_1$ in poleg tega $Z_1 \cap \overline{W_2} = \emptyset$, velja $Z_1 \subseteq (U_1 \cup W_1) \setminus \overline{W_2} \subseteq V_1$. Podobno ugotovimo, da je $Z_2 \subseteq V_2$. Ker sta disjunktni tudi množici W_1 in W_2 , velja še $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ■

Dokaz izreka 5 je nastal na osnovi nasveta k nalogi 1.7.4 iz knjige [2], osnovne poteze nekoliko drugačnega dokaza normalnosti intervalske topologije pa najdemo v knjigi [1].

3. Topološko goste podmnožice

Podmnožica Y linearno urejene množice X je *topološko gosta* (v X), kadar je gosta v intervalski topologiji prostora X , torej takrat, kadar v vsakem nepraznem odprtem intervalu $I \subseteq X$ leži vsaj ena točka iz Y . Primerjajmo topološko gostost z (urejenostno) gostostjo, definirano v prvem razdelku. Ker je vsaka linearno urejena množica topološko v sebi gosta, ni pa nujno v sebi gosta, se pojma ne ujemata. Njun medsebojni odnos opisuje naslednji rezultat:

Trditev 6. Naj bo X linearno urejena množica, ki ima vsaj dva elementa.

- (a) Vsaka gosta podmnožica v X je topološko gosta.
- (b) Goste podmnožice v X se ujemajo s topološko gostimi natanko takrat, kadar je X v sebi gosta.

Dokaz. (a): Naj bo Y gosta v X . V vsakem odprtem intervalu (x_1, x_2) , $x_1 < x_2$, prav gotovo najdemo točke iz Y , neprazen odprti interval oblike $(x, \rightarrow)$ ali $(\leftarrow, x)$ pa očitno vsebuje odprti interval oblike (x_1, x_2) , $x_1 < x_2$. Od tod že sledi, da je množica Y topološko gosta v X .

(b): Denimo, da je vsaka topološko gosta podmnožica gosta v X . Ker je X topološko v sebi gosta, je tedaj v sebi gosta. Za dokaz nasprotnne implikacije predpostavimo, da je X v sebi gosta in Y njena topološko gosta podmnožica. Vzemimo poljubna $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Ker je X v sebi gosta, interval (x_1, x_2) ni prazen, ker pa je Y topološko gosta v X , presek $Y \cap (x_1, x_2)$ ni prazen. Torej obstaja tak $y \in Y$, da je $x_1 < y < x_2$. Množica Y je tedaj gosta v X . Če upoštevamo še (a), vidimo, da velja (b). ■

Naj bo X linearno urejena množica. Če v X obstaja kaka gosta podmnožica, je X v sebi gosta, zato za množice, ki niso v sebi goste, pojem goste podmnožice ni uporaben. Nadomestimo ga s podobnim, a nekoliko šibkejšim pojmom. Pravimo, da je podmnožica $Y \subseteq X$ *šibko gosta* v X , kadar za vsaka dva elementa $x_1, x_2 \in X \setminus Y$, ki ustrezata pogoju $x_1 < x_2$, obstaja tak $y \in Y$, da je $x_1 < y < x_2$. Vsaka gosta podmnožica je seveda tudi šibko gosta, obratno pa ne velja. Množica X je namreč v sebi šibko gosta, ni pa nujno v sebi gosta. Brez težav se lahko prepričamo, da se goste podmnožice ujemajo s šibko gostimi natanko takrat, kadar je X v sebi gosta. Kdaj pa se šibko goste podmnožice ujemajo s topološko gostimi?

Trditev 7. Naj bo X linearno urejena množica, ki ima vsaj dva elementa.

- (a) Vsaka šibko gosta podmnožica v X je topološko gosta natanko takrat, kadar X v intervalski topologiji nima izoliranih točk.
- (b) Šibko goste podmnožice v X se ujemajo s topološko gostimi natanko takrat, kadar je X v sebi gosta.

Dokaz. (a): Če je x izolirana točka v X , je množica $X \setminus \{x\}$ šibko gosta v X , ni pa topološko gosta. Za dokaz nasprotnne implikacije predpostavimo, da X nima izoliranih točk. Naj bo Y poljubna šibko gosta podmnožica v X . Vzemimo neprazen odprti interval (x_1, x_2) in točko u v njem. Ker ta ni izolirana, v intervalu (x_1, x_2) leži še kaka točka $v \neq u$. Če niti u niti v ne pripadata Y , zaradi šibke gostosti Y med njima leži točka iz Y . Torej v vsakem primeru (x_1, x_2) vsebuje vsaj en element iz Y . Podobno sklepamo, da tudi neprazni odprti intervali oblike $(x, \rightarrow)$ ali $(\leftarrow, x)$ vsebujejo točke iz Y , zato je Y topološko gosta v X .

(b): Če je X v sebi gosta, se šibko goste množice v njej ujemajo z gostimi, zato se po trditvi 6 ujemajo tudi s topološko gostimi. Za dokaz nasprotno implikacije predpostavimo, da sta družini šibko gostih in topološko gostih podmnožic v X identični. Denimo, da X ni v sebi gosta. Potem obstajata taka elementa $x_1, x_2 \in X$, da je $x_1 \prec x_2$. Ker po točki (a) X nima izoliranih točk, x_1 ni prvi element in nima neposrednega predhodnika, x_2 pa ni zadnji element in nima neposrednega naslednika. Od tod sledi, da je množica $X \setminus \{x_1, x_2\}$ topološko gosta, vendar ni šibko gosta v X . ■

Linearno urejeno množico je mogoče vložiti v realno os natanko takrat, kadar vsebuje števno šibko gsto podmnožico [3, izrek 6]. Zanimivo je, da separabilnost intervalske topologije $\mathcal{T}(X)$ ne zadostuje za vložitev X v $\mathbb{R}$. Oglejmo si ustrezen primer. Naj bo X leksikografski produkt $\mathbb{R} \circ \{1, 2\}$, torej leksikografsko urejen kartezični produkt $X = \mathbb{R} \times \{1, 2\}$. Zlahka se prepričamo, da je števna podmnožica $\mathbb{Q} \times \{1, 2\}$ topološko gosta v X , torej je X separabilna v intervalski topologiji. Denimo, da je $Y \subseteq X$ šibko gosta v X . Potem za vsak $r \in \mathbb{R}$ vsaj eden od elementov $(r, 1), (r, 2) \in X$ leži v Y , zato Y ni števna. Po izreku 6 iz [3] torej X ni mogoče vložiti v $\mathbb{R}$. Z vložitvijo v sebi gostih linearno urejenih množic je drugače, saj velja naslednji rezultat:

Trditev 8. *V sebi gsto linearno urejeno množico, ki je separabilna v intervalski topologiji, lahko urejenostno in homeomorfno vložimo v realno os.*

Dokaz. Naj bo linearno urejena množica X v sebi gosta, Y pa njena števna topološko gosta podmnožica. Po trditvi 6 je Y gosta v X , po posledici 5 iz [3] pa je izomorfna enemu od štirih racionalnih intervalov s krajiščema 0 in 1. Zaznamujmo z $f_0 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ustrežno vložitev in jo razširimo (tako kot v dokazu izreka 6 iz [3]) do vložitve $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Ker velja $(0, 1) \cap \mathbb{Q} \subseteq f_0(Y) \subseteq [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, je zaloga $f(X)$ gosta v svoji konveksni ogrinjači. Po trditvi 4 se intervalska topologija zaloge $f(X)$ ujema s topologijo, ki jo na njej inducira $\mathbb{R}$, zato je f homeomorfna vložitev. ■

4. Kompaktnost in povezanost

Znameniti Heine-Borelov izrek pravi, da je podmnožica realne osi kompaktna natanko takrat, kadar je zaprta in omejena. Iz posplošitve tega rezultata na linearno urejene množice z intervalsko topologijo bomo razbrali, da je za to preprosto in uporabno karakterizacijo kompaktnosti odločilna ena sama temeljna lastnost realne osi, to je Dedekindova polnost.

Izrek 9. *Za linearno urejeno množico X z intervalsko topologijo so ekvivalentne naslednje izjave:*

- (a) X je Dedekindovo polna.
 (b) Vsak omejen zaprti interval v X je kompakten.
 (c) Vsaka omejena zaprta podmnožica $Y \subseteq X$ je kompaktna.

Dokaz. (a) $\implies$ (b): Naj velja (a) in naj bo $\mathcal{U}$ odprto pokritje intervala $[x, y]$, $x < y$. Zaznamujmo z Z množico vseh takih elementov $z \in [x, y]$, da že kako končno podpokritje pokritja $\mathcal{U}$ pokriva $[x, z]$. Množica Z ni prazna, saj očitno $x \in Z$. Ker je Z navzgor omejena in je X Dedekindovo polna, obstaja $z_0 = \sup Z$.

Dokažimo najprej, da $z_0 \in Z$. Pri tem brez škode predpostavimo, da je $z_0 > x$. Vzemimo člen $U \in \mathcal{U}$, ki pokriva z_0 , in poiščimo v njem interval (u, v) ali $(u, \rightarrow)$, ki vsebuje z_0 . Če je $u \leq x$, potem U pokriva $[x, z_0]$, torej $z_0 \in Z$. Če je $u > x$, potem je zaradi $z_0 = \sup Z$ interval $[x, u]$ pokrit s končnim podpokritjem pokritja $\mathcal{U}$ (v nasprotnem primeru je namreč u zgornja meja množice Z). Tedaj temu podpokritju dodamo U in dobimo končno podpokritje, ki pokriva $[x, z_0]$. Torej $z_0 \in Z$.

Dokažimo zdaj, da je $z_0 = y$. Denimo, da je $z_0 < y$ in $U \in \mathcal{U}$ člen, ki vsebuje z_0 . Izberimo tak interval $I = (u, v)$ ali $I = (\leftarrow, v)$, da velja $z_0 \in I \subseteq U$. Ker $z_0 \in Z$, obstaja končno podpokritje $\mathcal{U}_0$ pokritja $\mathcal{U}$, ki pokriva $[x, z_0]$. Če mu dodamo še U , dobimo končno pokritje intervala $[x, v)$, zato vse točke iz preseka $[x, v) \cap [x, y]$ ležijo v Z . Od tod zaradi $\sup Z = z_0 \in Z$ dobimo $v \leq y$ in $z_0 < v$. Če podpokritju $\mathcal{U}_0$ dodamo člen $V \in \mathcal{U}$, ki vsebuje v , dobimo končno podpokritje pokritja $\mathcal{U}$, ki pokriva $[x, v]$. Torej $v \in Z$, kar pa zaradi $z_0 = \sup Z$ ni mogoče. Potemtakem je res $z_0 = y$.

(b) $\implies$ (c): Naj bo $Y \subseteq X$ omejena in zaprta. Potem je seveda Y vsebovana v zaprtem intervalu $[x, y]$. Če velja (b), je interval $[x, y]$ kompakten, zato je taka tudi njegova zaprta podmnožica Y .

(c) $\implies$ (a): Naj velja (c) in naj bo podmnožica $Y \subseteq X$ neprazna in navzgor omejena. Dokazati je treba, da ima množica Z , sestavljena iz vseh zgornjih mej množice Y , najmanjši element. Če $u \in X \setminus Z$, potem obstaja tak $v \in Y$, da je $v > u$. Od tod sledi, da $u \in (\leftarrow, v)$ in $(\leftarrow, v) \cap Z = \emptyset$, torej je množica Z zaprta. Vzemimo poljuben $y \in Y$ in $z \in Z$. Ker je Z zaprta in velja (c), je množica $W = [y, z] \cap Z$ kompaktna. Denimo, da Z nima najmanjšega elementa. Potem je družina intervalov $(w, \rightarrow)$, $w \in W$, odprto pokritje množice W . Naj bo $\{(w_i, \rightarrow) : i = 1, \dots, k\}$ njegovo končno podpokritje in $w_j = \min\{w_i : 1 \leq i \leq k\}$. Potem $(w_j, \rightarrow)$ vsebuje W , kar pa zaradi $w_j \in W \setminus (w_j, \rightarrow)$ ni mogoče. Torej ima množica Z res najmanjši element, Y pa supremum. ■

Posledica 10. Naj bo X linearno urejena množica z intervalsko topologijo.

- (a) Če je X Dedekindovo polna, je lokalno kompaktna.
 (b) X je kompaktna natanko takrat, kadar je polna.

Dokaz. (a): Vsaka točka $z \in X$ ima okolico oblike $[x, y]$. Če je X Dedekindovo polna, je interval $[x, y]$ po izreku 9 kompakten, torej je X lokalno kompaktna.

(b): Če je množica X polna, je $X = [u, v]$, kjer je u njen najmanjši, v pa njen največji element, zato je po izreku 9 množica X kompaktna. Za dokaz nasprotne implikacije predpostavimo, da je X kompaktna. Potem je tudi vsaka njena zaprta podmnožica kompaktna, zato je X po izreku 9 Dedekindovo polna. Torej zadošča dokazati, da je X omejena. Denimo, da X nima najmanjšega elementa. Potem je družina $\{(x, \rightarrow) : x \in X\}$ odprto pokritje množice X . Podobno kot v zadnjem delu dokaza izreka 9 lahko ugotovimo, da to nasprotuje kompaktnosti X , torej je X navzdol omejena. Podobno vidimo, da je X navzgor omejena. ■

Naj bo $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, opremljena z urejenostjo, ki jo inducira na X realna os. Potem je X lokalno kompaktna v intervalski topologiji, vendar ni Dedekindovo polna.

Tudi topološka povezanost realne osi temelji na urejenostnih lastnostih realne osi. Dedekindova polnost je potreben pogoj, ni pa zadosten. Spet bomo zadevo videli jasneje v splošnejših okvirih. Pri dokazu ene od karakterizacij povezanosti si bomo pomagali z naslednjim rezultatom:

Lema 11. *Naj bo X linearno urejena množica z intervalsko topologijo.*

- (a) *Vsaka povezana podmnožica $Y \subseteq X$ je konveksna.*
- (b) *Če je X Dedekindovo polna, je vsaka njena povezana podmnožica interval.*

Dokaz. (a): Če podmnožica $Y \subseteq X$ ni konveksna, vsebuje taka elementa $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 < y_2$, da obstaja $x \in (y_1, y_2) \setminus Y$. Potem sta množici $Y_1 = (\leftarrow, x) \cap Y$ in $Y_2 = (x, \rightarrow) \cap Y$ odprti v Y ter disjunktni. Ker je poleg tega $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ in $Y = Y_1 \cup Y_2$, množica Y ni povezana.

(b): Po trditvi 2 je konveksna podmnožica Dedekindovo polne množice interval, torej (b) sledi iz (a). ■

Izrek 12. *Za linearno urejeno množico X z intervalsko topologijo so ekvivalentne naslednje izjave:*

- (a) *X je Dedekindovo polna in v sebi gosta.*
- (b) *Edine povezane podmnožice v X so intervali.*
- (c) *Intervali v X so povezani.*
- (d) *X je povezana.*

Dokaz. (a) $\implies$ (b): Naj bo X Dedekindovo polna, $Y \subseteq X$ pa interval, ki ni povezan. Potem je Y unija nepraznih disjunktnih relativno odprtih množic Y_1, Y_2 . Vzemimo $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ in brez škode za splošnost dokaza

predpostavimo, da je $y_1 < y_2$. Ker je X Dedekindovo polna, obstaja $y = \sup(Y_1 \cap [y_1, y_2])$. Očitno $y \in Y$. Denimo, da $y \in Y_1$. Potem je $y < y_2$, zaradi relativne odprtosti Y_1 pa obstaja tak odprti interval $I = (u, v)$ ali $I = (\leftarrow, v)$, da $y \in I \cap Y \subseteq Y_1$. Privzeti smemo, da je $v \leq y_2$. Od tod dobimo $(y, v) \subseteq Y_1$. Ker velja $y = \sup(Y_1 \cap [y_1, y_2])$, je tedaj $(y, v) = \emptyset$, torej X ni v sebi gosta. Če $y \notin Y_1$, potem $y \in Y_2$. Tedaj je $y > y_1$, zaradi relativne odprtosti množice Y_2 pa obstaja tak odprti interval $J = (u, v)$ ali $J = (u, \rightarrow)$, da velja $y \in J \cap Y \subseteq Y_2$. Privzeti smemo, da je $u \geq y_1$. Ker je tedaj vsak element iz $(u, y) \subseteq Y_2$ zgornja meja množice $Y_1 \cap [y_1, y_2]$ s supremumom y , velja $(u, y) = \emptyset$. Torej množica X tudi v tem primeru ni v sebi gosta. Iz (a) potemtakem sledi, da so vsi intervali v X povezani.

Brž ko je X Dedekindovo polna, je po lemi 11 vsaka njena povezana podmnožica interval, torej res iz (a) sledi (b).

Implikaciji (b) $\implies$ (c) in (c) $\implies$ (d) sta očitni.

(d) $\implies$ (a): Naj bo podmnožica $Y \subseteq X$ neprazna in navzgor omejena, Z pa množica vseh njenih zgornjih mej. Iz dokaza implikacije (c) $\implies$ (a) izreka 9 zvemo, da je Z zaprta. Če Z nima najmanjšega elementa, je Z tudi odprta, ker je unija odprtih intervalov $(z, \rightarrow)$, $z \in Z$. Poleg tega je Z neprazna in različna od X , zato X ni povezana. Torej iz (d) sledi, da ima Z najmanjši element, X pa je tedaj Dedekindovo polna. Vzemimo zdaj $x_1, x_2 \in X$, $x_1 < x_2$. Unija odprtih intervalov $(\leftarrow, x_2)$ in $(x_1, \rightarrow)$ je X . Zato iz povezanosti X sledi, da je presek $(\leftarrow, x_2) \cap (x_1, \rightarrow)$ neprazen. Ker je ta presek vsebovan v intervalu (x_1, x_2) , je X v sebi gosta. ■

Če upoštevamo še trditev 1, lahko brez težav dokažemo naslednji rezultat. Podrobnosti prepuščamo bralcem.

Trditev 13. *Odprta podmnožica Y Dedekindovo polne linearno urejene množice X z intervalsko topologijo je unija paroma disjunktih odprtih intervalov. Če je X povezana, je razčlenitev odprte podmnožice na odprte intervale ena sama.*

S pomočjo izreka 12 in rezultatov iz [3] ni težko videti, da veljata naslednji karakterizaciji realne osi oziroma njenih intervalov.

Izrek 14. *Linearno urejena množica, ki je separabilna in povezana v intervalski topologiji, je izomorfna intervalu realne osi. Linearno urejena množica je izomorfna $\mathbb{R}$ natanko takrat, kadar je separabilna in povezana v intervalski topologiji ter nima ne prvega ne zadnjega elementa.*

Tudi dokaz tega izreka prepuščamo bralcem.

LITERATURA

- [1] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Providence, Rhode Island 1967.
- [2] R. Engelking, *General topology*, PWN, Warszawa 1985.
- [3] B. Lavrič, *Linearna urejenost in realna os*, Obzornik mat. fiz. **47**, (2000), 9–19.

ŠTEVILSKES VRSTE IN INTEGRALI

ROMAN DRNOVŠEK

Math. Subj. Class. (2000): 26A42, 40A05, 40A25

Z uporabo integralov izračunamo vsote nekaterih vrst. Za poljubno naravno število $k \geq 2$ predstavimo vrsto, katere vsota je enaka $\ln k$.

SERIES AND INTEGRALS

Using integrals we compute the sums of some series. In particular, we obtain a series expansion for $\ln k$, where $k \geq 2$ is a positive integer.

Eden prvih primerov številskih vrst, ki ga običajno srečamo na predavanjih iz analize, je vrsta

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots \quad (1)$$

S pomočjo enakosti

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

ki velja za vsa naravna števila k , izračunamo n -to delno vsoto vrste

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Zato je (po definiciji) vsota vrste (1) enaka 1. Pri podobni številski vrsti

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} + \dots$$

z uporabo iste enakosti ugotovimo, da je n -ta delna vsota vrste enaka

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}.$$

Limito zaporedja $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ izračunajmo z integralom. Če znano enakost

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots + x^{2n-2} - x^{2n-1} = \frac{1 - x^{2n}}{1 + x}$$

integriramo od 0 do 1, dobimo

$$s_n = \int_0^1 \frac{1 - x^{2n}}{1 + x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x} dx - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x} dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x} dx.$$

Torej velja ocena

$$0 \leq \ln 2 - s_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x} dx < \int_0^1 x^{2n} dx = \frac{1}{2n+1}.$$

Tako smo dokazali naslednjo trditev:

Trditev 1. Število $\ln 2$ je vsota vrst

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} + \dots \quad (2)$$

in

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \dots \quad (3)$$

Zelo pozoren bralec je opazil, da smo pri vrsti (3) dokazali le to, da zaporedje delnih vsot s sodim številom členov konvergira proti $\ln 2$. Vendar ni težko videti, da to velja tudi za delne vsote z lihim številom členov. V nekoliko splošnejši obliki bomo to dokazali tudi v trditvi 3.

Če imamo vsaj nekaj izkušenj z integriranjem, opazimo, da je n -ti člen vrste (2) enak dvakratnemu integralu

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} = \int_0^1 dx \int_0^x y^{2n-2} dy.$$

Z zamenjavo vrstnega reda integriranja dobimo

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} = \int_0^1 y^{2n-2} (1-y) dy = \int_0^1 (y^{2n-2} - y^{2n-1}) dy,$$

kar smo pravzaprav uporabili zgoraj.

S to metodo, predstavljeno v [1], dokažimo še naslednjo trditev:

Trditev 2.

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8 \cdot 9} + \dots = \frac{\pi\sqrt{3} - 3 \ln 3}{12}. \quad (4)$$

Dokaz. Zapišimo n -ti člen vrste kot trikratni integral

$$\frac{1}{(3n-2) \cdot (3n-1) \cdot 3n} = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y z^{3n-3} dz.$$

Če ta integral obravnavamo kot Lebesgueov integral, potem po Fubinijevem izreku smemo zamenjati vrstni red integriranja, saj je integrand nenegativna funkcija. Tako dobimo

$$\begin{aligned} \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n-1) \cdot 3n} &= \int_0^1 z^{3n-3} dz \int_z^1 dy \int_y^1 dx = \\ &= \int_0^1 z^{3n-3} dz \int_z^1 (1-y) dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 z^{3n-3} \cdot (1-y)^2 \Big|_{y=z}^{y=1} dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 z^{3n-3} \cdot (1-z)^2 dz. \end{aligned}$$

Torej je n -ta delna vsota vrste (4) enaka

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1+z^3+z^6+\dots+z^{3n-3})(1-z)^2 dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-z^{3n})(1-z)^2}{1-z^3} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-z^{3n})(1-z)}{1+z+z^2} dz. \end{aligned}$$

Z uporabo Lebesgueovega izreka o monotoni konvergenci (glej [2]) dobimo za vsoto vrste (4) integral racionalne funkcije

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-z}{1+z+z^2} dz = \frac{\pi\sqrt{3} - 3\ln 3}{12}.$$

Tako je trditev dokazana. ■

Vsoto klasične vrste (3) običajno izračunamo iz Taylorjeve vrste za naravni logaritem

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots, \quad (5)$$

če vstavimo $x = 1$. Seveda moramo predtem utemeljiti, da (5) velja za vse $x \in (-1, 1]$. V drugem delu članka, podobno kot v [3], za vsak $k = 2, 3, 4, \dots$ izpeljimo številsko vrsto z vsoto enako $\ln k$.

Trditev 3. *Naj bo $k \geq 2$ naravno število. Potem je*

$$\ln k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - ka_n}{n},$$

kjer je

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ je deljivo s } k \\ 0, & \text{sicer} \end{cases}.$$

Očitno pri $k = 2$ dobimo vrsto (3). Pri $k = 3$ pa imamo

$$\ln 3 = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n}\right) + \dots$$

Dokaz trditve 3 temelji na naslednji lemi, v kateri ocenimo razliko med določenim integralom funkcije in neko njeno Riemannovo vsoto.

Lema 4. Naj bo f realna zvezno odvedljiva funkcija na omejenem intervalu $[a, b]$ in n naravno število. Potem za število

$$R_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n f(a + (b-a) \cdot i/n)$$

velja ocena

$$\left| \int_a^b f(x) dx - R_n \right| \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

Dokaz. Naj bo $x_i = a + (b-a) \cdot i/n$ za $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Po izreku o povprečni vrednosti (glej [4]) za vsak $i = 1, 2, 3, \dots, n$ obstaja tako število $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, da je

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{b-a}{n} \cdot f(t_i).$$

Zato imamo

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - R_n \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx - R_n \right| = \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot f(t_i) - \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} \cdot f(x_i) \right| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(x_i)|, \end{aligned}$$

kjer smo uporabili trikotniško neenakost. Po Lagrangeovem izreku (glej [4]) za vsak $i = 1, 2, 3, \dots, n$ obstaja tako število $s_i \in [t_i, x_i] \subseteq [x_{i-1}, x_i]$, da je

$$f(x_i) - f(t_i) = f'(s_i) \cdot (x_i - t_i).$$

Če to upoštevamo zgoraj, dobimo

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - R_n \right| &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n |f'(s_i)| \cdot (x_i - t_i) \leq \\ &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n |f'(s_i)| \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{(b-a)^2}{n} \cdot \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|, \end{aligned}$$

kar smo želeli dokazati. ■

Dokaz trditve 3. Naj bo m poljubno naravno število. Prejšnjo lemo uporabimo za $f(x) = 1/x$, $a = m$, $b = mk$ in $n = m(k-1)$. Tedaj je

$$\int_m^{mk} \frac{dx}{x} = \ln k$$

in

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{mk} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}\right) + \left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \dots + \frac{1}{mk}\right) - \\ &\quad - k \cdot \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \dots + \frac{1}{mk}\right) = \sum_{i=1}^{mk} \frac{1 - ka_i}{i}. \end{aligned}$$

Če torej zaporedje delnih vsot vrste v trditvi označimo s $\{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, potem smo ugotovili, da je $R_n = s_{mk}$. Ker je

$$\max_{m \leq x \leq mk} |f'(x)| = \frac{1}{m^2},$$

je po lemi potem

$$|\ln k - s_{mk}| = |\ln k - R_n| \leq \frac{(m(k-1))^2}{m(k-1)} \cdot \frac{1}{m^2} = \frac{k-1}{m}.$$

To pomeni, da podzaporedje $\{s_{mk}\}_{m \in \mathbb{N}}$ zaporedja delnih vsot konvergira proti številu $\ln k$. Dokažimo, da je tedaj tudi zaporedje $\{s_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ konvergentno. Vzemimo poljuben $\varepsilon > 0$. Potem obstaja tako naravno število m_0 , da za vse $m \geq m_0$ velja

$$|s_{mk} - \ln k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

in

$$\frac{k-1}{mk+1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Naj bo sedaj $j \geq m_0 k$ poljubno naravno število. Potem obstaja natanko določeno naravno število $m \geq m_0$, za katero velja $mk \leq j < (m+1)k$. Tedaj velja ocena

$$\begin{aligned} |s_j - \ln k| &\leq |s_j - s_{mk}| + |s_{mk} - \ln k| = \\ &= \sum_{i=mk+1}^j \frac{1}{i} + |s_{mk} - \ln k| < \frac{k-1}{mk+1} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Našli smo torej tako število $j_0 := m_0 k$, da za vsa naravna števila $j \geq j_0$ velja $|s_j - \ln k| < \varepsilon$. Tako je dokaz končan. ■

Vse vrste v trditvi 3 so pogojno konvergentne, to pomeni, da niso absolutno konvergentne. Ker za vsako naravno število n velja ocena

$$\left| \frac{1 - ka_n}{n} \right| \geq \frac{1}{n}$$

in ker harmonična vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, nas o tem prepriča primerjalni kriterij. Za pogojno konvergentne vrste je značilno, da je njihova vsota odvisna od vrstnega reda členov. V našem primeru je zanimivo, da so vse vrste v trditvi 3 dobljene iz vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n} \right),$$

če primerno izberemo vrstni red členov. Denimo pri $k = 3$ je

$$\ln 3 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 1 \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \right) + \dots$$

Za konec vabimo bralca, da reši naslednji nalogi:

1. Podobno kot za vrsto (2) dokaži, da je

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \dots = \frac{\pi}{8}.$$

2. Dokaži enakost (4) brez uporabe Lebesgueovega izreka o monotoni konvergenici, tj. neposredno dokaži, da zaporedje $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1-z}{1+z+z^2} dz.$$

LITERATURA

- [1] F. Burk, *Summing Series via Integrals*, College Mathematics Journal **31** (2000), 178–181.
- [2] M. Dobovišek, *Riemannov in Lebesgueov integral v $\mathbb{R}^n$* , Ljubljana, DMFA, 1997.
- [3] C. Kicey, S. Goel, *A Series for $\ln k$* , American Mathematical Monthly **105** (1998), 552–554.
- [4] I. Vidav, *Višja matematika I*, Ljubljana, DMFA, 1968.

O GRAVITACIJSKI KONSTANTI

JANEZ STRNAD

PACS 04.80.-y

Med osnovnimi konstantami je gravitacijska najbolj negotova. Še več, v novi preglednici CODATA se je edino pri njej relativna negotovost zvečala. V zadnjem času se je nekaj raziskovalnih skupin lotilo ponovnega merjenja te konstante. Nekatere so uporabile torzijsko nihalo, čeprav niso merile zasuka v ravnovesju, druge pa so poiskale nove prijeme. Na kratko se zdi vredno opisati pet značilnih merenj.

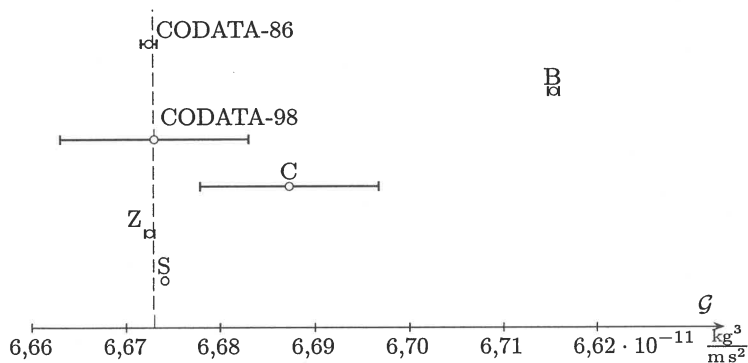
ON THE NEWTONIAN GRAVITATIONAL CONSTANT

Among the fundamental constants the Newtonian gravitational constant is the most uncertain. Moreover, in the new CODATA list the relative uncertainty of only this constant increased. Recently some groups have remeasured it. A few have used the torsional pendulum, although not in a static mode, but other ones have found new approaches. It appears worthwhile to describe briefly five characteristic measurements.

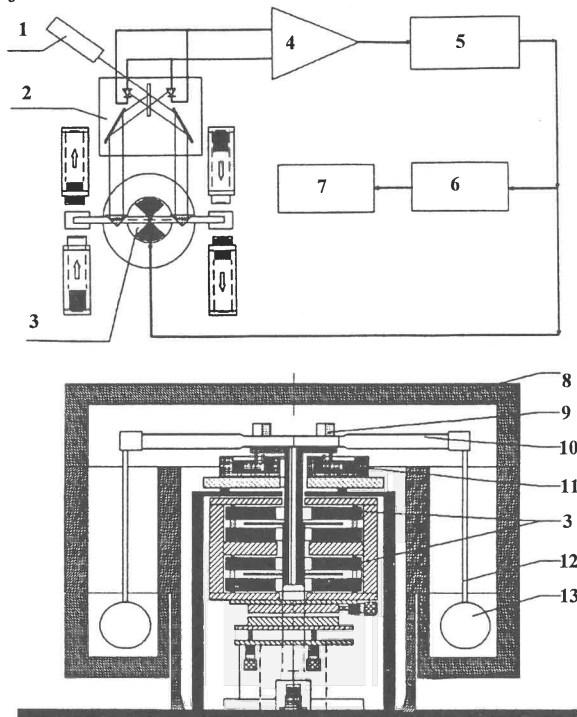
V novi preglednici osnovnih konstant je največja relativna negotovost gravitacijske konstante, 10^{-3} . Gravitacije doslej v teoriji ni uspelo združiti s kako drugo interakcijo, tako da ni enačb, ki bi to konstanto povezovale z drugimi osnovnimi konstantami v količino, iz katere bi jo bilo mogoče izluščiti z dovolj majhno negotovostjo. Pri opazovanju gibanja umetnih satelitov, na primer, sicer dokaj natančno določijo produkt $m_Z G$, a kaj, ko mase Zemlje m_Z ne poznamo dovolj natančno. Gravitacijska konstanta se pojavi na primer tudi v Planckovi masi $(\hbar c/G)^{1/2}$, a ta količina in podobne količine niso dostopne merjenju. Tako je gravitacijsko konstanto treba meriti neposredno. To merjenje je dokaj zahtevno. Ena od zgodb pripoveduje, da se je pri nekem merjenju vsako jutro pojavila motnja. Dolgo so si zaman razbijali glavo o njenem vzroku, potem pa je sodelavec, ki je prišel pozneje, opazil, da se ob tistem času samodejno vključi naprava za zalivanje trave na inštitutskem vrtu. Voda, ki je s površja pronicala v tla, je vplivala na merjenje s tem, da je spremenila porazdelitev mase v bližini. Zato večino merenj izvajajo v bolj odročnih krajih. Ena od skupin meri na primer v opuščenem podzemnem izstrelišču za rakete.

Preglednice CODATA so v letih 1973, 1986 in 1998 za gravitacijsko konstanto po vrsti vsebovale podatke $6,6720 \pm 0,0041$, $6,67259 \pm 0,00085$ in $(6,673 \pm 0,010) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ z relativnimi negotovostmi $6,1 \cdot 10^{-4}$ in $1,3 \cdot 10^{-4}$ ter $15 \cdot 10^{-4}$. Pri drugih konstantah se je od leta 1986 do leta 1998 relativna negotovost zmanjšala od 5 do 12-krat, pri gravitacijski konstanti pa se je 12-krat povečala [1]. Do tega je prišlo zaradi izidov pri merjenjih do leta 1998, ki so se znatno razlikovali od vrednosti v preglednici iz leta 1986 (sl. 1).

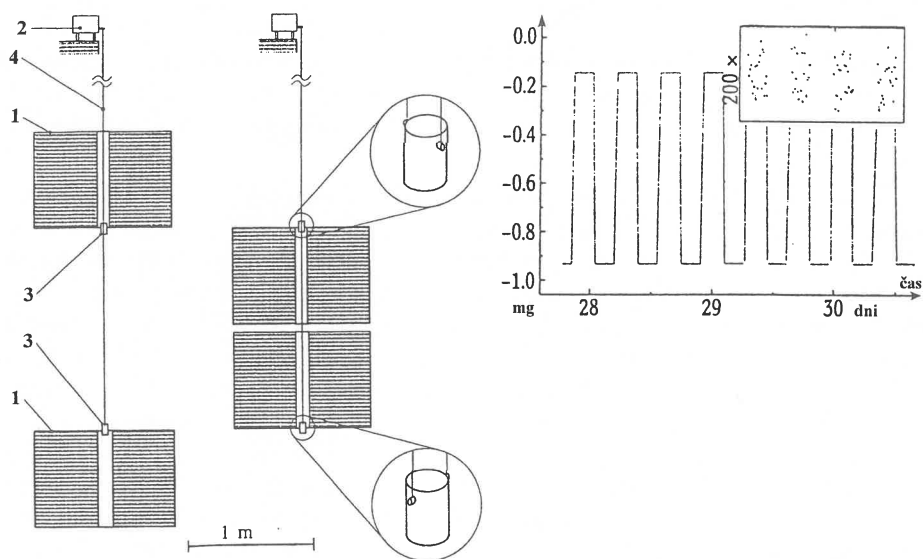
Gravitacijske konstante ni težko meriti z relativno negotovostjo do 0,1 ali nekaj manj, ki zadostuje za demonstracijske poskuse [2]. Težave se



Slika 1. Podatka CODATA z negotovostma in izidi merenj gravitacijske konstante z efektivnimi odmiki. Upoštevali smo samo raziskovalne skupine, ki smo jih omenili: Braunschweig B, Zürich Z, Colorado C, Seattle S. V času si podatki sledijo od zgoraj navzdol. Raziskovalna skupina iz Züricha je najprej objavila preliminarni izid in pozneje končnega. V zadnjih štirinajstih letih je bilo objavljenih kakih dvajset izidov natančnega merjenja gravitacijske konstante.



Slika 2. Poenostavljeni tloris (zgoraj) in stranski presek (spodaj) merilne naprave raziskovalne skupine iz Braunschweiga: laser 1, interferometer 2, kvadrantni elektrometer 3, predojačevalnik 4, kontrolna enota 5, filter 6, obdelava in shranjevanje podatkov 7, vakuumsko posoda 8, prizma interferometra 9, prečka 10, živosrebrni ležaj 11, steklena palica 12, masi na prečki 13 [6].



Slika 3. Poenostavljena risba merilne naprave raziskovalne skupine iz Züricha: posodi z vodo ali živim srebrom 1 v razmaknjeni legi (levo) in staknjeni legi (sredina), tehnica 2, uteži 3 (povečani na sredini), volframova žička 4. Izmerjena ustrežna razlika mas v odvisnosti od časa (desno) [7].

začnejo pri natančnejših merjenjih [3]. Podatek za gravitacijsko konstanto leta 1986 je CODATA oprla predvsem na merjenje G. Luthra in W. Towlerja iz leta 1982 [4]. Drobno volframovo prečko, dolgo 2,85 cm z utežema v obliki valjev na krajiščih sta obesila v vakuumsko posodo na kremenovo nitko s premerom 0,01 mm. Skupna masa prečke in nitke je bila 7 g. Merila sta nihajni čas prečke, ki je dosegel okoli 6 minut. Lego prečke sta zasledovala tako, da sta posvetila z laserjem na zrcalo, ki je bilo pritrjeno na nitki. Posebej sta poskrbela, da se med merjenjem ni spreminjala temperatura. Nato sta ob prečko postavila volframovi kroglji z maso po 10,5 kg v razmiku središč 14 cm in merjenje ponovila. V nizu merenj, ki je trajal od 50 do 75 ur, si je sledilo več 6 do 12 ur trajajočih merenj brez krogel in z njima. Z izmerjeno razliko kvadratov krožnih frekvenc brez krogel in z njima sta za gravitacijsko konstanto dobila $(6,6726 \pm 0,0005) \cdot 10^{-11} \text{ kg}^3/\text{ms}^2$.

Poznejše izkušnje so pokazale, da tak način merjenja ne ustreza. V zvezi s prizadevanji, da bi zaznali gravitacijsko valovanje, so podrobno raziskali prožnost teles pri nihanju z zelo nizko frekvenco. K. Kuroda je obravnaval nihanje torzijskega nihala in upošteval lastnosti nitke in ležaja, v katerem je vpeta. Ugotovil je, da nihanje najbolje opišemo z imaginarnim členom $i\phi$ v konstanti nitke, neodvisnim od krožne frekvence [5]. Iz tega pa izhaja, da je realni del konstante odvisen od krožne frekvence ω , in sicer sorazmeren z $\omega^{2\phi/\pi}$. Ta *Kurodov pojav* opazijo pri sobni temperaturi. Zaradi njega je gravitacijska konstanta prevelika za del, ki je sorazmeren s ϕ/π ali z $1/\pi Q$, če je Q dobrota nihala. Zares so pri merjenjih z žarjeno

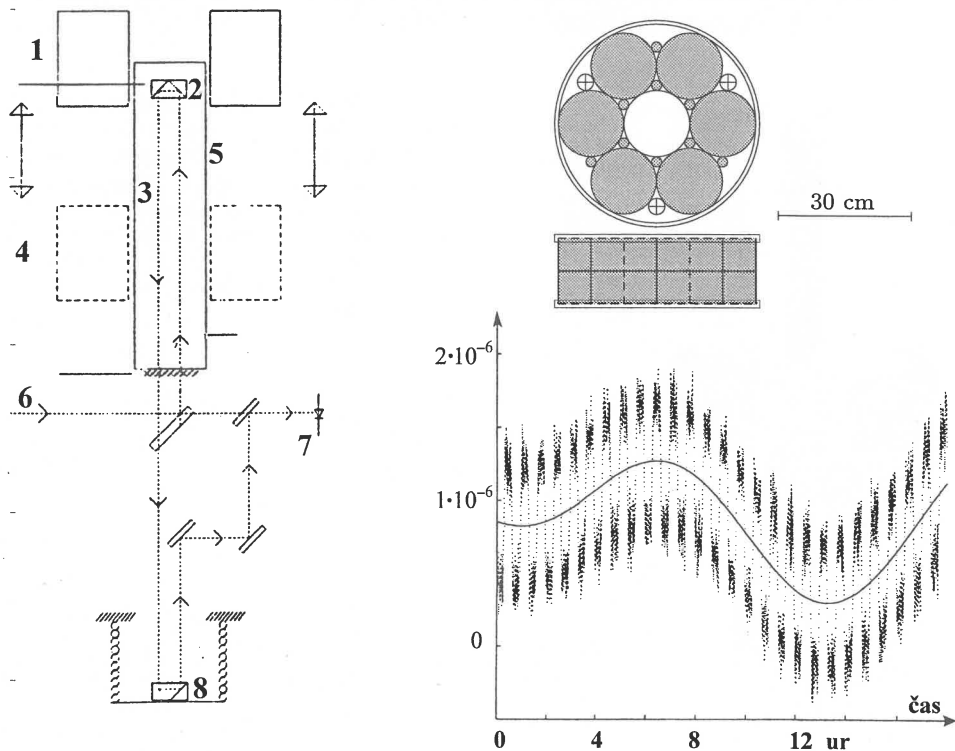
volframovo žičko, kremenovo nitko in s hladno vlečeno volframovo nitko – v tem vrstnem redu pojema dobrota – dobili vse večjo gravitacijsko konstanto. Odtlej gravitacijske konstante ne merijo več s torzijskim nihalom pri sobni temperaturi.

Raziskovalna skupina na nemški Fizikalni-tehniški zvezni ustanovi v Braunschweigu je leta 1994 objavila dvomljiv izid, ki je bil 0,6 % večji od priporočene vrednosti iz leta 1986 [6]. Niso uporabili torzijske nitke, ampak je prečka plavala na gladini živega srebra in jo je v ravnovesje vračal kvadrantni elektrometer¹ (sl. 2). Zaradi tega so lahko uporabili nekoliko večji uteži na krajših prečke. Uteži iz posebne zlitine sta imeli maso po 120 g. „Veliki“ uteži sta bili iz te zlitine z maso po 118 g ali iz volframa z maso po 900 g. Živo srebro so skrbno očistili in na gladini dodali tanko plast žveplove kisline, da se je prečka gibala brez zatikanja. Najprej so manjši uteži približali večjo na eni strani in drugi manjši uteži drugo večjo na drugi strani. Nato so večji uteži oddaljili. Določali so odklon prečke v ravnovesni legi tako, da so zasuk prečke merili z interferometrom. Zanimivo je, da so leta 1987 pri preliminarne računanju za gravitacijsko konstanto dobili $(6,667 \pm 0,005) \cdot 10^{-11} \text{ kg}^3/\text{ms}^2$. Sedem let zatem so v želji, da bi zmanjšali negotovost, upoštevali nekaj popravkov in z večjima utežema iz volframa dobili precej večjo vrednost $(6,71540 \pm 0,00056) \cdot 10^{-11} \text{ kg}^3/\text{ms}^2$. Do zdaj tega niso mogli pojasniti. Večina misli, da se je vtihotapila huda napaka in nekateri celo predlagajo, da bi se na izid sploh ne ozirali.

Skupina z univerze v Zürichu je v laboratorij prenesla način merjenja, ki ga je razvila, ko je iskala morebitna majhna odstopanja od Newtonovega gravitacijskega zakona. Tedaj je merila razliko efektivnih tež telesa ob vrhu dolinske pregrade in telesa ob njenem dnu 104 m niže v odvisnosti od višine vodne gladine. Že tedaj so določili tudi gravitacijsko konstanto, vendar je bila negotovost precejšnja, ker ni bilo natančnih podatkov o obliki vode za jezom. Zato so prenesli merjenje v laboratorij. V njem so primerjali efektivni teži dveh uteži, a so namesto vode za jezom uporabili posodi s prostornino po 500 l, ki so ju napolnili z vodo ali pozneje z živim srebrom [7]. V obe posodi je šlo 999,635 kg vode ali 13 520,633 kg živega srebra. Posodi so polnili z vodo dva tedna, z živim srebrom pa tri mesece, ker med polnjenjem niso smeli nastajati mehurčki. V prvi legi so posodi namestili med zgornjo in spodnjo utežjo, v drugi pa nad zgornjo utežjo in pod spodnjo (sl. 3). S tehtnico so izmenoma natančno merili efektivno težo ene in druge uteži. Pri tem je efektivna teža rezultanta gravitacije Zemlje in gravitacije kapljevine v posodah. Uporabili so pozlačeni uteži iz bakra, da so se izognili magnetnim učinkom, z maso po 1 kg, in nekoliko izpopolnjeno tehtnico na

¹ Kvadrantni elektrometer je nekaj rabil kot statični voltmeter. Plosko valjasto posodico iz tanke pločevine si mislimo razrezano na štiri kvadrante, od katerih sta dva in dva navzkriž v stiku. V notranjosti nastalih elektrod se na koncentrični osi giblje paličasta ali ploščata peta elektroda. Na to elektrodo deluje navor proti ravnovesni legi, ko na elektrode priključijo primerne napetosti.

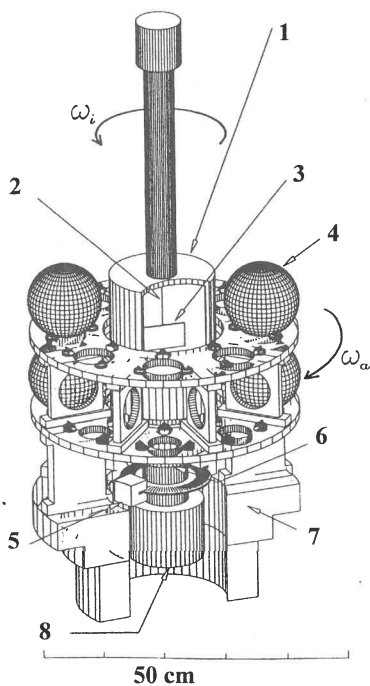
vzvod, s kakršnimi so ponavadi v merilnih laboratorijih primerjali standarde za maso. V drugi legi je bila zaradi gravitacije posod efektivna teža zgornje uteži manjša, efektivna teža spodnje pa večja. Pri delu z vodo se je pokazala razlika efektivnih tež, ki ji je ustrezala razlika mas $(0,110 \pm 0,0009)$ mg. S primerjanjem izidov pri praznih posodah in pri polnih posodah v obeh legah so dobili za gravitacijsko konstanto $(6,6754 \pm 0,0015) \cdot 10^{-11} \text{ kg}^3/\text{ms}^2$. Pri živem srebru je bila razlika mas precej večja, 0,785 mg, a pri prvih merjenjih se je pojavila relativna razlika $\pm 80 \cdot 10^{-6}$, ki je niso mogli pojasniti.



Slika 4. Poenostavljena risba merilne naprave raziskovalne skupine iz Colorada: zgornja lega obroča 1, retroreflektor kot padajoče telo v kraku interferometra 2, območje padanja 3, spodnja lega obroča 4, vakuumsko posoda 5, laserski curek 6, fotodioda 7, retroreflektor v drugem kraku interferometra 8 (levo) in presek obroča iz volframove zlitine (desno zgoraj). Izmerjeni pospešek padajočega retroreflektorja v enotah 10^{-6} m/s^2 v odvisnosti od časa (desno spodaj). Konstantni zemeljski težni pospešek so odšteli. O tem, kako natančno so merili, priča sklenjena krivulja s periodo približno 2 dan⁻¹, ki jo je dal superprevodni gravimeter in ki je ustrezala plimskemu pospešku [8].

Skupina s koloradske univerze in Državnega inštituta za standarde in tehnologijo v Bouldru je uporabila napravo za merjenje težnega pospeška [8]. V njej so opazovali ponavljajoče se prosto padanje telesa v vakuumski posodi v obliki pokončnega valja iz aluminijeve pločevine. Natančno so merili lego

v odvisnosti od časa. V ta namen so uporabili Michelsonov interferometer, v katerem je bilo padajoče telo retroreflektor v enem od krakov. Na padajočem telesu se je odbijal curek laserske svetlobe (sl. 4). Telo je padlo stokrat v 20 minutah in med padanjem na 20 cm dolgi poti so sedemstokrat določili čas, to je na vsakih tisoč interferenčnih prog, čemur je ustrezala višinska razlika 0,32 mm. Helij-neonski laser je bil stabiliziran z jodovo paro. Najprej so postavili petstokilogramsko telo v obliki obroča iz volframove zlitine ob zgornji del vakuumske posode in izmerili pospešek. Nato so telo premaknili ob spodnji del vakuumske posode in merjenje ponovili. Nazadnje so navedli za gravitacijsko konstanto $(6,6873 \pm 0,0094) \cdot 10^{-11} \text{ kg}^3/\text{ms}^2$.



Slika 5. Poenostavljena risba merilne naprave raziskovalne skupine iz Seattla: vakuumska posoda 1, volframova žička 2, ploščica iz stekla pireks 3, krogla 4, merilnik zasuka 5, zračni ležaj 6, zunanja vrtilna mizica 7, kratkostični motor 8. Notranja mizica se vrti s kotno hitrostjo ω_i , zunanja pa s kotno hitrostjo ω_a v nasprotni smeri [9].

J. Gundlach in S. Merkowitz z univerze Washington v Seattlu sta pridobila prve izkušnje pri natančnih merjenjih, pri katerih sta preskusila načelo o ekvivalentnosti težke in vztrajne mase. Uporabila sta torzijsko nihalo, na katero sta obesila tanko ploščico namesto prečke z drobnima utežema. S tem sta dosegla, da je bil kotni pospešek skoraj neodvisen od podrobne porazdelitve mase, ki jo je bilo pri prejšnjih merjenjih težavno natančno določiti. Torzijsko nihalo sta pritrdila na notranjo vrtilno mizico in po dve in dve krogli iz nerjavečega jekla z maso po 8,14 kg na zunanjo mizico, vrtljivo okoli iste osi (sl. 5) [9]. Notranjo mizico sta vrtela s konstantno kotno hitrostjo. Med vsakim vrtljajem notranje mizice bi gravitacija krogel dvakrat pospešila in dvakrat zavrla gibanje prečke, če bi zunanja mizica

mirovala. Vendar je elektronski krmilni sistem uravnaval gibanje notranje mizice tako, da se nitka nihala ni deformirala. To pomeni, da je elektronski sistem med vsakim vrtljajem dvakrat zavrl in dvakrat pospešil gibanje notranje mizice. S tem sta dosegla, da značilnosti torzijskega nihala niso vplivale na izid merjenja in se izognila Kurodovemu pojavu.

Pri takem načinu merjenja bi na kotni pospešek vplivala še gravitacija teles iz okolice. Temu sta se izognila tako, da sta v nasprotni smeri vrtela zunanjo mizico s krogli. Razlika kotnih hitrosti notranje in zunanje mizice je bila konstantna. V povprečju čez en vrtljaj zunanje mizice so se izravnali gravitacijski učinki teles iz okolice. S podatkom o delovanju elektronskega krmilnega sistema in o porazdelitvi mase krogel in zunanje mizice sta izračunala gravitacijsko konstanto: $(6,674215 \pm 0,000092) \cdot 10^{-11} \text{ kg}^3/\text{ms}^2$. Z njo sta po gibanju umetnih satelitov iz produkta $m_Z \mathcal{G}$ določila maso Zemlje $m_Z = (5,972245 \pm 0,000082) \cdot 10^{24} \text{ kg}$ in po gibanju planetov iz produkta $m_S \mathcal{G}$ še maso Sonca $m_S = (1,988435 \pm 0,000027) \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Po relativnem efektivnem odkliku $1,4 \cdot 10^{-5}$ teh podatkov se je mogoče nadejati, da je uspelo zmanjšati negotovost, s katero je določena gravitacijska konstanta. Tako pričakovane spodbujajo tudi druga merjenja po letu 1998, ki jih CODATA ni mogla več upoštevati (sl. 1). Po vsem tem je mogoče sklepati, da se za preglednico osnovnih konstant ne skrivajo samo dogovori in določitev negotovosti, ampak tudi veliko za fizika zanimivih zadev.

LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Osnovne fizikalne konstante 1998*, Obzornik mat. fiz. **47** (2000) 177–179.
- [2] S. Pahor, J. Strnad, R. Korbar, *Meritev gravitacijske konstante kot demonstracijski poskus*, Obzornik mat. fiz. **7** (1960) 138.
- [3] P. Prelovšek, *Nov način za merjenje gravitacijske konstante*, Obzornik mat. fiz. **17** (1970) 20.
- [4] G. G. Luther, W. R. Towler, *Redetermination of the Newtonian gravitational constant $\mathcal{G}$* , Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 121.
- [5] K. Kuroda, *Does the time-of-swing method give a correct value of the Newtonian gravitational constant*, Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2796.
- [6] G. T. Gillies, *The Newtonian gravitational constant: recent measurements and related studies*, Rep. Prog. Phys. **60** (1997) 151.
- [7] J. Schurr, F. Nolting, W. Kündig, *Gravitational constant measured by means of a beam balance*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998) 1142; F. Nolting, J. Schurr, S. Schlamminger, W. Kündig, *Die Gravitationskonstante – eine Herausforderung an die Messtechnik*, Phys. Bl. **55** (1999) 51 (4).
- [8] J. P. Schwarz, D. S. Robertson, T. M. Niebauer, J. E. Faller, *A free-fall determination of the Newtonian constant of gravity*, Science **282** (1998) 2230; D. Kestenbaum, *Gravity measurement close in on big $\mathcal{G}$* , Science **282** (1998) 2180.
- [9] J. H. Gundlach, S. M. Merkowitz, *Measurement of Newton's constant using a torsion balance with angular acceleration feedback*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 2869.
- [10] T. Quinn, *Measuring big $\mathcal{G}$* , Nature **408** (2000), 19.

STROKOVNO SREČANJE IN 52. OBČNI ZBOR DMFA SLOVENIJE

Lansko strokovno srečanje matematikov, fizikov in astronomov, 52. občni zbor DMFA Slovenije ter 2. nacionalna konferenca fizikov v osnovnih raziskavah so potekali od 9. do 11. novembra v Zrečah. Videti je, da so toplice za taka srečanja primerne, saj je bila udeležba dobra, pa tudi vreme nam je bilo naklonjeno, saj se je po dolgem deževnem obdobju prikazalo sonce.

V četrtek so se fiziki pridružili predavanjem na 2. nacionalni konferenci fizikov v osnovnih raziskavah (podrobnosti o konferenci so bile v Obzorniku že objavljene). Odločitev, da srečanja združimo, se je izkazala kot zelo dobra, saj so lahko mladi raziskovalci predstavili svoje delo širši publiki. Sodelovali so: Dragan Mihailović, Matej Komelj, Matej Praprotnik, Bojan Božič, Igor Poberaj, Klemen Kočev, Mojca Čepič, Anamarija Borštnik in Andreja Šarlah. Verjetno bi bilo dobro kaj takega narediti v prihodnjih letih tudi za matematike. Tudi plakati, ki smo si jih lahko ogledovali na poti v predavalnice, so pritegnili pozornost vseh udeležencev srečanja.

Matematiki so prisluhnili Jožetu Pavloviču, ki je predstavil diplomsko delo, v katerem je obravnaval nekatere rezultate, povezane z Eulerjevo funkcijo φ . Petra Žigert je govorila o lastnostih grafov in kemijskih indeksih, Irena Bržan pa o Pickovem izreku. Po odmoru je prepogibala papirje in govorila o origamiju Alenka Klokočevnik. Popoldan je končala Špela Drstvenšek z motivacijsko učno uro iz poglavja o krivuljah II. reda.

Večer nam je popestrila direktorica Term Zreče s kratko predstavitevijo dejavnosti. Sami pa smo se sprostili ob večernih pogovorih, glasbi in kopanju.

Petkovo dopoldne smo pričeli s predavanjem Antona Suhadolca o povezavah med prvimi profesorji matematike in fizike na ljubljanski univerzi, preostali del pa smo ob svetovnem letu matematike posvetili članom društva, ki so izdali svoja dela v tujini. Svoja dela so predstavili Sandi Klavžar (Standardni grafovski produkti) in Marko Petkovšek (Avtomatično dokazovanje identitet) dopoldan, Dušan Repovš (O teoriji in uporabi zveznih selekcij večličnih preslikav) pa popoldan. Fizike je s skodelico čaja in zanimivimi poskusi razveselil Karel Šmigoc, Janez Strnad pa je pripovedoval o natančnostih pri meritvah fizikalnih konstant, predvsem pa o merjenju gravitacijske konstante.

Dopoldne smo končali s spomini na Jurija Vego. Marko Razpet je govoril o Juriju Vego in koledarju, Mitja Rosina pa o Juriju Vego kot fiziku.

Popoldne smo se razdelili v tri skupine.

Pedagogi so prisluhnili Amaliji Žakelj in rezultatom tretje mednarodne raziskave matematike in naravoslovja Timss 1995 oziroma analize za 4. razrede gimnazije v Sloveniji. Nada Razpet je govorila o daljicah, obrobah in okvirih ter uporabi konstrukcijskih zbirk pri pouku geometrije. Franc Savnik je govoril o medsebojni legi elipse in krožnice, Milena Strnad o mednarodnem kongresu o poučevanju v Tokiu. Predavanja so se sklenila z okroglo mizo o osnovnošolskih učbenikih matematike, ki jo je vodil Zlatan Magajna. Peter Prelog je prinesel računalniški program *Vrzimo kovanec*, ki so ga nekateri udeleženci tudi preizkusili.

Uporabni matematiki so na začetku prisluhnili že omenjenemu Dušanu Repovšu, Janez Žerovnik je govoril o mravljah in kombinatorični optimizaciji, Mihael Perman o testiranju generatorjev slučajnih števil, Aleksandar Jurišić pa o kriptografiji. Bojan Uran je prikazal primere uporabe valčkov v seizmografiji. Že iz naslovov je razvidno, da so (bi lahko) bila predavanja zanimiva tudi za profesorje matematike.

Fiziki so prisluhnili astronomu Marijanu Prosénu, ki je govoril o Luni. Peter Prelog je prikazal računalniški program za merjenja pri počasnem gibanju, Ana Gostinčar Blagotinšek je govorila o barvi kot indikatorju dvolomnosti kristalov. Poskusi, ki jih je pokazala, so bili dober uvod za naslednjo temo, saj smo se ob koncu popoldneva igrali s fizikalnimi igračami, ki sta jih prinesla Goran Iskrič in Nada Razpet, in z Gorazdom Planinšičem odkrivali, koliko fizike se skriva v svetu okrog nas.

V soboto smo imeli občni zbor. Uvodni del smo posvetili umrlemu častnemu članu društva, profesorju Ivanu Kuščerju. O njegovem delu je govoril Janez Strnad, plakat z objavljenimi članki v tujih revijah v spomin preminulemu profesorju pa sta izdelala Jože Peternelj in Tomaž Kranjc. Kratke slovesnosti se je udeležila tudi Martina Kuščer.

Udeležence občnega zbora so pozdravili Jožef Košir (župan občine Zreče), Andrej Likar (v imenu Oddelka za fiziko), Peter Legiša (v imenu Oddelka za matematiko in mehaniko) ter Karel Šmigoc v imenu organizatorjev, celjske podružnice DMFA Slovenije. V imenu predsednika Tomaža Pisanskega je udeležence pozdravila podpredsednica Nada Razpet. V delovno predsedstvo so bili izvoljeni: predsednik Sandi Klavžar, člana Marjeta Košak in Mitja Rosina ter zapisnikar Janez Krušič.

Nova častna člana društva sta postala Martina Koman in Franc Cvelbar. Priznanje za delo z mladimi sta dobila Jože Berk in Gabrijela Selevšek, pohvaljeni pa sta bili Osnovna šola Ob Dravinji iz Slovenskih Konjic ter Osnovna šola Toneta Čufarja iz Ljubljane.

Čestitali smo Petru Legiši za državno nagrado na področju vzgoje in izobraževanja, se zahvalili Danici Jereb za sodelovanje v UO in razdelili nagrade za najboljše plakate ob svetovnem letu matematike. Nagrajeni plakati so dela Vladimirja Grubelnika, Boštjana Kuzmana, Dragice in Grego-

rija Kurillo. Danijel Bezek in Lea Cebe pa sta prejela nagrado za kolekcijo izdelkov njihovih učencev. Vse plakate smo tudi razstavili.

Poročilo Nacionalnega komiteja za fiziko (NKF) je dopolnil Mitja Rosina. Posebej je poudaril pomen konferenc, ki jih ob strokovnem srečanju organizira NKF, in priporočil uporabo Plemljeve hiše na Bledu. Poročila o delu so bila sprejeta brez razprave. Francka Vencelj Urbanija je predlagala, da bi bili občni zbori med strokovnim srečanjem, kar pa ne bi bilo najbolje, saj na šolah profesorjem ne bi dovolili odsotnosti za udeležbo na občnem zboru. Tomaž Cokan je opozoril na izbiro datumov, saj je ob istem času potekalo tekmovanje iz logike. Sklenili smo, da bomo spremenili pravilnik o podeljevanju nagrad in priznanj, tako da bodo lahko priznanja prejeli tudi člani, ki ne delajo v šolstvu.

Novi predsednik DMFA Slovenije je postal profesor Martin Čopič. Pravilniki o tekmovanjih so objavljeni na spletnih straneh društva na naslovu: <http://www.dmfa.si>.

Srečanje smo sklenili z izletom v Slovenske Konjice in Žičko kartuzijo.

Ob svetovnem letu matematike je DMFA Slovenije izdalo tudi lonček s številom π na tisoč decimalk.

Za pomoč pri izvedbi strokovnega srečanja in občnega zbora ter izleta se posebej zahvaljujemo vsem, ki so pri tem sodelovali. Prav tako se zahvaljujem vsem, ki so sodelovali na strokovnem delu srečanja s svojimi prispevki. Upam, da se vidimo na naslednjem srečanju.

Nada Razpet

NAGRADE IN PRIZNANJA DMFA SLOVENIJE ZA LETO 2000

Častna člana DMFA Slovenije sta postala Martina Koman in Franc Cvelbar.

Martina Koman je svojo poklicno pot začela na *Gimnaziji Ptuj* tik pred diplomo leta 1954 ter jo nadaljevala na *Osnovni šoli Prežihovega Voranca* na Jesenicah in na *Gimnaziji Jesenice*. Septembra 1968 se je zaposlila na *Gimnaziji Postojna*, kjer je ostala do upokojitve junija 1988. Zaradi pomanjkanja kadra za pouk fizike se je leta 1989 ponovno zaposlila in na *Gimnaziji Postojna* poučevala fiziko še eno šolsko leto ter se v tem času odpovedala pokojnini.

Profesorica Komanova je opravljala tudi dolžnost pomočnice ravnatelja najprej na *Osnovni šoli Prežihovega Voranca* na Jesenicah in nato prav v reformnih letih 1976 do 1984 na *Gimnaziji Postojna*, ko se je le-ta preoblikovala v *Srednjo šolo Postojna*. Na šoli, ki je tedaj združevala gimnazijo, ekonomsko, strojno in lesarsko šolo, je bilo prek 1100 dijakov.

Svoj poklic je profesorica Komanova jemala kot poslanstvo in ga opravljala z njej značilno tankočutnostjo. Matematiko in fiziko je znala približati vsakemu učencu in dijaku, nikoli ni obupala niti nad tistimi, ki jim je učenje teh predmetov delalo težave. Zlasti njen odnos do matematike se je kazal v načinu pouka. Svojo ljubezen do tega predmeta je prenašala na dijake, zato se je nadpovprečno veliko dijakov, ki jih je s svojim preprostim in vedrim nastopom popeljala v spoznavanje lepote matematičnega sveta, odločilo za študij matematike, fizike in tehniških ved. Veliko njenih dijakov se je udeleževalo matematičnih tekmovanj srednješolcev Slovenije, kjer so posegali po najvišjih mestih in se uvrščali na zvezna (jugoslovanska) tekmovanja.

Marljivost in prizadevnost profesorice Martine Koman je odsevala tudi med kolegi in kolegicami na šoli, saj je bila duša in gibalo matematičnega in fizikalnega ustvarjanja. Tudi ko ni bila vodja aktivna učiteljev matematike in fizike, je s svojim izvirnim optimističnim načinom razmišljanja osveževala delo kolegov učiteljev matematike in fizike. Poskrbela je, da je marsikatera knjiga s področja matematike oziroma fizike takoj prišla v roke kolegov, posebno skrb pa je namenjala vzgoji začetnikov. Kolegom, ki so prihajali na šolo, je stala ob strani kot mentorica.

Prispevek, ki ga je profesorica Martina Koman podarila *Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije*, je neizmerljiv, saj je bila skoraj 30 let eden izmed najbolj dejavnih članov *DMFA Slovenije*. Jeseni leta 1971 je postala članica *Komisije za pedagoško dejavnost*. Dve leti kasneje je prevzela mesto sekretarke te komisije in s tem postala članica upravnega odbora *DMFA Slovenije* ter v tej funkciji vodila in usklajevala delo *Komisije za pedagoško dejavnost* naslednjih 10 let. V tem obdobju so bili poleg letnih dvodnevni seminarjev organizirani tudi krajši seminarji s področja matematike, fizike in astronomije skoraj vsak mesec, zato je težko prešteti vse ure, ki jih je profesorica Komanova porabila za organizacijo in izvedbo le-teh. Njena poročila o seminarjih ter posvetovanjih o pouku matematike in fizike, vabila na seminarje in razpise za društvena priznanja prizadevnim učiteljem matematike in fizike so bila objavljena v *Obzorniku za matematiko in fiziko*.

V času od 35. do 36. občnega zbora je bila predsednica *DMFA Slovenije*, takoj nato pa od jeseni leta 1984 do jeseni 1991 podpredsednica. Nemogoče je zapisati, kaj vse je kolegica Martina Koman v tem času morala opraviti. Veliko dela je vložila v organizacije strokovnih srečanj in občnih zborov, pomagala je pri izvedbi seminarjev, urejevala biltene občnih zborov in sestavljala letne finančne in delovne načrte društva. Vsakodnevno so se pojavljala na videz drobna opravila, ki jih je bilo treba opraviti. Zvezda stalnica so bile finančne težave, zaradi katerih se je profesorica Komanova večkrat napotila do ustreznih ustanov in potrkala na prenekatera vrata, da bi težave vsaj nekoliko ublažila. Brez oklevanja je prevzela dela, za katera

je menila, da so za delovanje društva potrebna in koristna. Bila je tudi članica posebne komisije, ki je v osemdesetih letih iskala rešitve za ureditev Plemljeve hiše.

Veliko energije, truda in prostega časa je kolegica Martina Koman vložila v organizacijo 32. in 48. občnega zbora, ki sta bila v Postojni. Z enako vnemo in ob pomoči kolegov z *Gimnazije Postojna* je organizirala republiško tekmovanje srednješolcev v znanju matematike leta 1975 in 1985, leta 1986 pa privabila v Postojno še mlade matematike iz vse tedanje Jugoslavije na 27. zvezno tekmovanje srednješolcev v znanju matematike.

V *Obzorniku za matematiko in fiziko* je objavila poročila o vsaj 15 občnih zborih. V zadnjih letih je kot sekretarka *Komisije za informiranje* zbiralala in objavljala podatke o novih članih društva ter o diplomantih in doktorandih iz matematike in fizike. Zadnja tri leta dela v upravnem odboru je poleg funkcije sekretarke *Komisije za informiranje* prevzela še funkcijo tajnice *Komisije za častne člane*. Z neusahljivim optimizmom in vedno dobre volje ter polna energije je v upravnem odboru društva sodelovala do jeseni leta 1999.

O svojem delu nerada govori. Vse, kar je naredila za učence, dijake, šolo in društvo, se ji zdi "nekaj samo po sebi umevnega in nič posebnega". Zaradi svoje skromnosti ostane profesorica Komanova skoraj neopažena. Gotovo se ji je za njeno dolgoletno prizadevno delo težko oddolžiti in priznanja, ki jih je prejela, še zdaleč ne odsevajo veličine prispevka, ki ga je skozi desetletja podarjala družbi. Že leta 1970 je za svoje pedagoško delo prejela občinsko priznanje *Temeljne izobraževalne skupnosti*. Ob tridesetletnici *DMFA Slovenije* je leta 1978 prejela posebno društveno priznanje za dolgoletno delo v društvu. Na 40. občnem zboru *DMFA Slovenije* je leta 1988 prejela jubilejno priznanje za delo sekretarke *Komisije za pedagoško dejavnost* in za delo podpredsednice društva.

Franč Cvelbar se je izkazal tako v osnovnih kot v aplikativnih raziskavah v fiziki in kot izredno ploden mentor.

Raziskoval je jedrske reakcije z nevtroni. S sodelavci je prvi sistematično meril spektre žarkov gama iz zajetja hitrih nevtronov z energijo 14 MeV in pokazal, da so nekatere do tedaj objavljene vrednosti presekov, izmerjenih z aktivacijsko metodo, mnogo prevelike. Ključ do uspeha je bil v novem načinu merjenja takojšnjih žarkov gama s teleskopskim scintilacijskim parskim spektrometrom, ki ga je sam zgradil. Metodo merjenja takojšnjih žarkov gama so nato izpopolnili v mnogih tujih laboratorijih, kjer so bili na voljo zmogljivejši pospeševalniki. Prispeval je tudi k razumevanju mehanizma teh reakcij, še posebej pri razjasnitvi vloge jedrske dipolne velerezonance za močno povečano verjetnost za izsev fotonov z energijami nad 20 MeV. Za uspehe je leta 1971 skupaj s sodelavci prejel Kidričevo nagrado.

S sodelavci je objavil 24 znanstvenih člankov, sam pa 10 strokovnih in več poljudnih člankov.

Na področju uporabne fizike je razvijal nevtronsko dozimetrijo z uporabo polprevodniških diod v času, ko je bilo to področje povsem novo. Temeljit pristop k temu problemu je vodil do povsem uporabnega sistema za nadzor nevtronskega obsevanja osebja. Profesor Cvelbar je tudi odličen poznavalec problemov, ki so povezani z dozimetrijo ionizirajočega sevanja. Sodeloval je z mednarodno atomsko agencijo IAEA na Dunaju kot izvedenec za meritve, izračune in vrednotenje presekov pri reakcijah, kjer nastajajo fotoni. Tovrstni podatki so pomembni pri načrtovanjih modernih energijskih izvorov. Posebno za potrebe višjega praktikuma na Oddelku za fiziko je razvil niz vaj, ki so še danes aktualne, na primer vaje iz merjenja sevanja radioaktivnih izotopov, mikrovalovne tehnike in optike in holografije. Diplomantom je pomagal pri razvoju številnih merilnih metod, ki so pomembne v industriji, kot je merjenje vlage v lesu, študij Reedovih kontaktnikov, merjenje na podlagi holografske interferometrije, razvoj termoluminiscentne dozimetrije, študij plazme, tankih plasti Cr-Ta-N, razvoj vakuumskega merilnika na podlagi miniaturne Penningove črpalke in mnogih drugih.

Kot učitelj fizike je predaval fiziko I, največkrat za matematike, in jedrsko fiziko. Večino svojega pedagoškega dela pa je posvetil posodabljanju in vodenju fizikalnega praktikuma III, podiplomskega praktikuma za didaktiko fizike in za nuklearno medicino ter predavanjem fizikalna merjenja II.

Z Zavodom za šolstvo je sodeloval pri pripravi programa za predmet *fizikalna merjenja* v srednji šoli in sodeloval pri pisanju gradiv. Napisal je univerzitetni učbenik *Merjenja ionizirajočega sevanja* in skripta podiplomskih predavanj o ionizirajočem sevanju. Sodeloval je pri dveh zbirkah vaj.

Največji prispevek slovenski fiziki pa je dal prof. Cvelbar s svojim obsežnim in zavzetim *mentorstvom*. Cele generacije fizikov nosijo pečat njegovega vestnega in vztrajnega vodenja pri raziskavah in pri pisanju del. Sprejel je mentorstvo z mnogih področij uporabne fizike s somentorstvom kolegov iz industrije. Tako je omogočil plodno sodelovanje Oddelka za fiziko z industrijo in pomagal vzgajati zainteresirane študente na poti v uporabno fiziko. Pri tem je pokazal izredno širino problematike. Bil je mentor 53 diplomantom, sedmim magistrantom in petim doktorandom.

Tudi profesorjem fizike je s svojo izkušnostjo in znanjem rad priskočil na pomoč z nasveti pri pripravi in izvedbi poskusov ne le z besedo, ampak tudi s pripomočki.

Nepozabno je tudi obdobje, ko je bil *predsednik Društva matematikov, fizikov in astronomov v letih 1992–1994*. Dosežki prvega leta njegovega predsednikovanja so bili, da se je DMFA včlanilo v *Evropsko matematično društvo*, *Mednarodno matematično unijo* in *Evropsko fizikalno društvo*; organiziran je bil seminar za srednješolske učitelje *Ionizirajoče sevanje v oko-*

lju in sodelovanje na razstavi učil – *Dnevi slovenskega izobraževanja*. Drugo leto pa je bilo posvečeno predvsem *Prvemu kongresu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije*. Tudi njegova zasluga je, da je vse teklo tako gladko. Pri pripravi kongresa je sodeloval v dolgih razpravah, ali je tak kongres potreben in kakšen naj bo; sklep je bil, naj seznanijo udeležence o dosedanjih slovenskih dosežkih v luči svetovnih dogajanj. V drugem letu je tudi pomagal utreti pot, da se je Ministrstvo za šolstvo in šport odločilo obnoviti Plemljevo hišo na Bledu, ki je sedaj na voljo za strokovna srečanja, izobraževanje, pa tudi za oddih.

Kot predsednik DMFA je s svojim navdušenjem in človeško toplino mnogo pripomogel k prijetnemu delovnemu ozračju in zagnanosti sodelavcev v raznih sekcijah društva.

Nagradi za delo z mladimi sta prejela Gabrijela Selevšek in Jože Berk.

Gabrijela Selevšek poučuje matematiko na Šolskem centru Celje od 1976. leta. Svoje življenje popolnoma posveča delu z mladimi, spremlja razvoj stroke in v pouk vnaša elemente sodobne pedagoške znanosti. S prizadevnim in natančnim delom je dosegla vrsto vidnih rezultatov na področju pedagoške dejavnosti, njeni dijaki so zelo uspešni na maturi in matematičnih tekmovanjih. Pri pouku si prizadeva za aktivno, samostojno in kritično delo dijakov, kot razredničarka pa pomaga reševati probleme tudi staršem in sodelavcem na šoli.

Bila je glavna pobudnica za nastanek (in soavtorica) *Zbirke nalog iz matematike*, nekaj let je vodila študijsko skupino za matematiko v celjski regiji, zadnja tri leta uspešno vodi strokovni aktiv matematikov in fizikov na Splošni in strokovni gimnaziji Lava v Celju, zadnjih pet let pa sodeluje z Zavodom RS za šolstvo, kjer se aktivno ukvarja s podjetniškim pristopom pri pouku matematike; s tem se je seznanila na študiju v Angliji. Iz tega dela je nastal tudi priročnik za učitelje, v Sloveniji pa je imela o tem tudi referat na državni konferenci. Nekajkrat je o tem predavala slovenskim učiteljem in zanje tudi vodila pedagoške delavnice. V maju 1999. leta je bila glavna organizatorica državnega tekmovanja iz matematike za srednješolce. V začetku letošnjega leta je bila predlagana za izvolitev v naziv svetnica.

Ob tako „uradnem poročilu“ je treba vsekakor dodati, da s svojo vedrostjo, nenavadnimi konjički in veselo naravo prav gotovo podira mit o tem, da so profesorji matematike po naravi resni in nedružabni.

Jože Berk poučuje matematiko in fiziko na OŠ Hudinja od 1986. leta. Ob tem je nekaj let poučeval tudi na Gimnaziji Celje Center in na I. Gimnaziji v Celju, sedaj pa je tudi ravnatelj OŠ Hudinja v Celju. Kljub obsežnemu in zahtevnemu delu ravnatelja je ohranil stik s poučevanjem in sodeluje na ustvarjalnem, inovativnem in raziskovalnem področju matematike, fizike in

tehnike. Odlikuje se po izredno temeljitih in obsežnih pripravah za pouk, učenci in dijaki pa ga cenijo tudi zato, ker jih zna motivirati za aktivno in ustvarjalno delo. Matematika in fizika sta njegovim učencem dva izmed najbolj priljubljenih predmetov. Veliko mladih je navdušil za nadaljevanje študija teh dveh predmetov. Med učenci in dijaki velja za strogega, a doslednega in poštenega ter hkrati zelo priljubljenega profesorja. Vseskozi si prizadeva za posodabljanje pouka naravoslovnih predmetov in spremljanje novosti na tem področju. Posebno skrb posveča delu z nadarjenimi učenci. Vsa leta vodi dodatni pouk matematike in fizike ter še posebej pripravlja učence za tekmovanja. Da je pri tem delu uspešen, kažejo tudi osvojena Vegova in Stefanova priznanja njegovih učencev. Bil je tudi mentor mladim tehnikom, ki so bili med najuspešnejšimi tekmovalci na regijskem in državnem tekmovanju. Profesor Berk od leta 1994 uspešno vodi študijsko skupino za fiziko v celjski regiji. Organiziral in vodil je šolska tekmovanja za matematiko in fiziko ter tri področna tekmovanja iz fizike v celjski regiji ter zagotovil, da so najuspešnejši tekmovalci dobili lepe nagrade. Na področnem tekmovanju je vseskozi vodil tudi delo ocenjevalne komisije. V preteklem šolskem letu je na državni ravni uspešno vodil inovacijski projekt *Naravoslovni dnevi v tretji triadi devetletne osnovne šole* in sodeloval pri projektu *Tehniški dnevi v sedmem razredu devetletne osnovne šole*. Pokazal je prizadevnost in ustvarjalnost tudi na področju raziskovalnega dela mladih. V občini Celje je član ocenjevalne komisije za področje srednješolskih raziskovalnih nalog iz matematike. Bil je mentor 40 mladim raziskovalcem, ki so izdelali 12 odličnih raziskovalnih nalog. Leta 1990 je bila raziskovalna naloga *Merjenje energije Sonca*, ki so jo izdelali mladi raziskovalci pod njegovim mentorstvom, uvrščena na prvo mesto v državi. Nedvomno ima profesor Jože Berk veliko zaslug za popularizacijo matematike, fizike in tehnike med mladimi.

Pohvali sta letos prejeli Osnovna šola Ob Dravinji iz Slovenskih Konjic ter Osnovna šola Toneta Čufarja iz Ljubljane.

Osnovna šola Toneta Čufarja v Ljubljani aktivno sodeluje z DMFA že od leta 1980. Na šoli poučujejo matematiko in fiziko tri učiteljice, ki imajo ustrezno strokovno izobrazbo ter naziv mentorica oziroma svetovalka. Vsako leto organizirajo šolska tekmovanja iz matematike, fizike in logike, ki se jih udeležuje veliko število učencev, ki so obiskovali na šoli organiziran dodatni pouk vseh treh predmetov. Na šoli so potekala občinska in vsa leta tudi državna tekmovanja v znanju matematike. Uspešnost dela dokazujejo dobri rezultati učencev na področnih in državnih tekmovanjih. Učiteljice skrbijo za popularizacijo revije Presek in se redno seznanjajo z novostmi na področju naravoslovja. Skrbijo za svojo strokovno rast, sodelujejo na seminarjih in v različnih projektih (TEMPUS, Ure aktivnosti, Korak za korakom, Dobra šola itd.). Učiteljice vodijo učence na matematične in naravoslovne tabore (matematični v Zgornjih Gorjah, biološko-astronomski na

R 177/01



100000142,1

COS

Blokah, astronomski na Ilovi Gori), na strokovne dneve, obiske muzejev (Tehnični muzej Bistra in mentorov), zgradb (Observatorij na Golovcu, na Šu pri Ptuj), da bi se seznanili z delovanjem različnih dobljeno znanje uporabiti. Z učenci pripravljajo tudi prte za javnost (dnevi odprtih vrat – s temami *Potres v Ljubljani*, *Prehrambena industrija v Ljubljani*, *Svet barv*, *Alternativni viri energije*). Šola ima sodobno opremljene prostore za pouk fizike, matematike in računalništva.

Vse tri učiteljice so bile mentorice številnim študentom fizike in matematike s Pedagoške fakultete v Ljubljani. Omogočile so jim hospitacijo, nastope in pedagoško prakso. Poleg tega so bile mentorice tudi pripravnikom, ki so opravljali strokovni izpit. Do leta 1999 so potekali strokovni izpiti tudi na razredni in predmetni stopnji. Med učiteljicami matematike in fizike je še posebej aktivna Sonja Koželj, ki preizkuša nove vsebine matematike za devetletno OŠ in svoje izkušnje kot izvajalka projekta posreduje učiteljem na strokovnih aktivih po vsej Sloveniji. Hkrati 4 leta uspešno vodi strokovni aktiv naravoslovja in je organizatorica ter voditeljica strokovnega aktiva matematikov treh nekdanjih ljubljanskih občin.

Na **Osnovni šoli Ob Dravinji** poučujejo matematiko in fiziko učiteljice in učitelji s predpisano izobrazbo. Svoje znanje izpopolnjujejo na seminarjih za matematiko, fiziko, računalništvo in logiko, kakor tudi na seminarjih splošnih pedagoških tem. V zadnjih treh letih je bilo nekaj seminarjev izpeljanih tudi na šoli sami. Učitelji se redno udeležujejo strokovnih srečanj ob občnih zborih DMFA. Na šoli so učilnice za pouk matematike in fizike zelo dobro opremljene z učili in učnimi pripomočki. Na opremljenost vpliva zlasti dejstvo, da je ravnateljica šole učiteljica matematike in fizike ter da študijsko skupino učiteljev fizike in matematike za širše področje vodi učitelj te šole. Na šoli so med prvimi začeli uporabljati računalnike, o posodobitvi opreme poročajo že v šolskem letu 1988/89, fakultativni pouk računalništva pa je bil vpeljan za učence od 3. razreda naprej že pred tem. Poučevali so učitelji in učiteljice, ki so se izobraževali na seminarjih in tečajih, svoje znanje pa so posredovali tudi kolegicam in kolegom. Učenci te šole so vsa leta, odkar so se tekmovanja začela, tekmovali na različnih stopnjah v matematiki, fiziki, logiki in računalništvu. Učitelji matematike in fizike pri dodatnem pouku in pri delu v krožkih učence stalno in sistematično pripravljajo na tekmovanja. Učenci so zato na tekmovanjih uspešni.

V zadnjih letih so na šoli dvakrat organizirali področno tekmovanje za srebrno Vegovo priznanje, enkrat za srebrno Stefanovo priznanje, organizirali pa so tudi področno tekmovanje iz logike.

Maja Manohin, Mitja Rosina, Darjo Felda in Nada Razpet