

177/00-5

MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

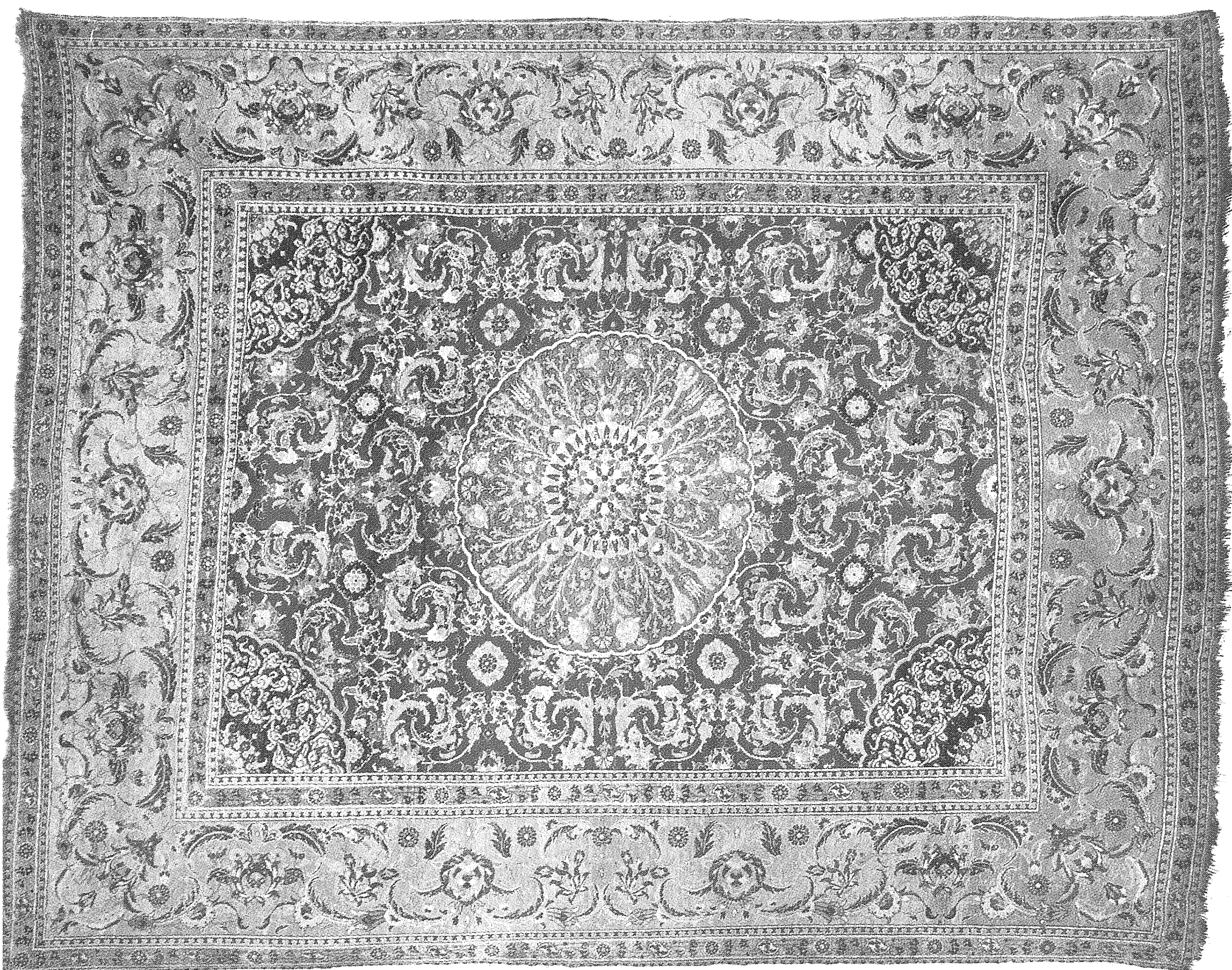
ODPISANO

2000

Letnik 47

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 2000

letnik 47, številka 5, strani 161–192

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (01) 47-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Martin Juvan (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.300 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.600 SIT, za študente 1.650 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 660 SIT, stare številke 440 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2000 DMFA Slovenije – 1439

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

Končne projektivne ravnine — Finite projective planes (György Kiss in Aleksander Malnič)	161–169
Sprejemnost tuljave — Coil sensitivity (Aleš Mohorič)	170–176
Osnovne fizikalne konstante 1998 — Fundamental physical constants 1998 (Janez Strnad)	177–179

Nove knjige — New books

(Janez Žerovnik)	187–188
----------------------------	---------

Vesti — News

DMFA Slovenije – Strokovno srečanje in 52. občni zbor (Nada Razpet)	176
Sedmo mednarodno tekmovanje študentov matematike (Marjan Jerman)	179–181
O začetkih pouka fizike na ljubljanski univerzi (Anton Suhadolc)	182–184
Zasedanje sveta Evropske matematične zveze v Barceloni (Peter Legiša)	184–186
Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1999 (Janez Krušič)	188–IV

Na ovitku: *Otomanska dvorna preproga*, Istanbul, 17. stoletje.

KONČNE PROJEKTIVNE RAVNINE

GYÖRGY KISS* IN ALEKSANDER MALNIČ

Math. Subj. Class. (2000) 05B25, 51E15

Prikazane so nekatere osnovne lastnosti končnih projektivnih ravnin in podane konstrukcije takih ravnin majhnega reda.

FINITE PROJECTIVE PLANES

Some basic properties of finite projective planes are discussed, and constructions of such planes of small order are presented.

1. Uvod

Klasična projektivna ravnina je razširitev pojma evklidske ravnine. Poleg ,navadnih' točk in premic evklidske ravnine premore še *idealne točke*, ki jih imenujemo tudi *točke v neskončnosti*, ter *idealno premico*, ki ji pravimo tudi *premica v neskončnosti*. Vsaka idealna točka je natanko določena z množico vzporednih ,navadnih' premic, ki v klasični projektivni ravnini tvorijo šop premic skozi prirejeno idealno točko. Idealna premica pa je definirana kot množica vseh idealnih točk.

Do klasične projektivne ravnine lahko pridemo tudi po drugi poti. Premice v $\mathbb{R}^3$ skozi izhodišče razglasimo za točke, ravnine v $\mathbb{R}^3$ skozi izhodišče pa za premice. Ta pot je nemara bolj homogena od tiste, ki smo jo zastavili zgoraj, saj obravnava vse točke in vse premice enako, a je hkrati matematično zahtevnejša, zato jo v nadaljevanju puščamo ob strani. Bralec si več o tem lahko prebere v Vidavovi knjigi [13], v učbeniku Koširja in Magajne [7] ali v Pucljevi knjigi [10].

Za začetek si oglejmo incidenčne lastnosti točk in premic v taki razširjeni ravnini. *Incidenca* je relacija med množico točk in množico premic, ki pove, katere točke ,pripadajo' katerim premicam. V navadi je, da se v slovenskem jeziku izražamo bolj opisno. Tako na primer pravimo, da točka ,leži' na premici, da premica ,gre skozi' točko, oziroma da jo ,vsebuje'. Pravimo tudi, da se različni premici v točki ,sekata', da dve različni točki premico ,določata' in podobno.

V klasični projektivni ravnini veljajo enostavnejše lastnosti incidence kot v evklidski ravnini. Vzporednih premic namreč v klasični projektivni ravnini ni. Neposredno iz definicije sledita tile dve lastnosti:

PR1. Vsaki dve različni točki določata natanko eno premico.

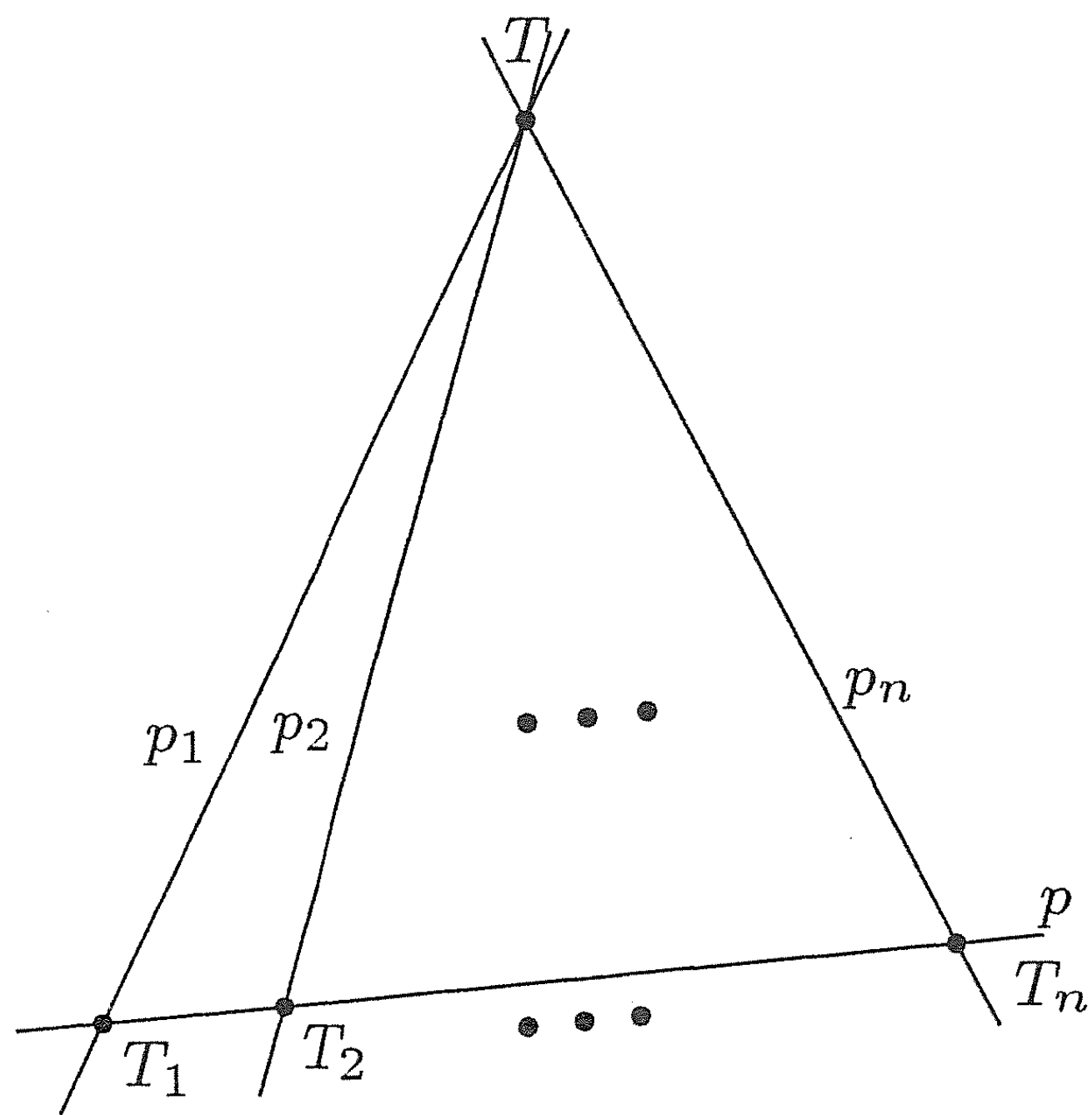
PR2. Vsaki dve različni premici se sekata v natanko eni točki.

* Univerza Eötvös Loránd, Budimpešta.

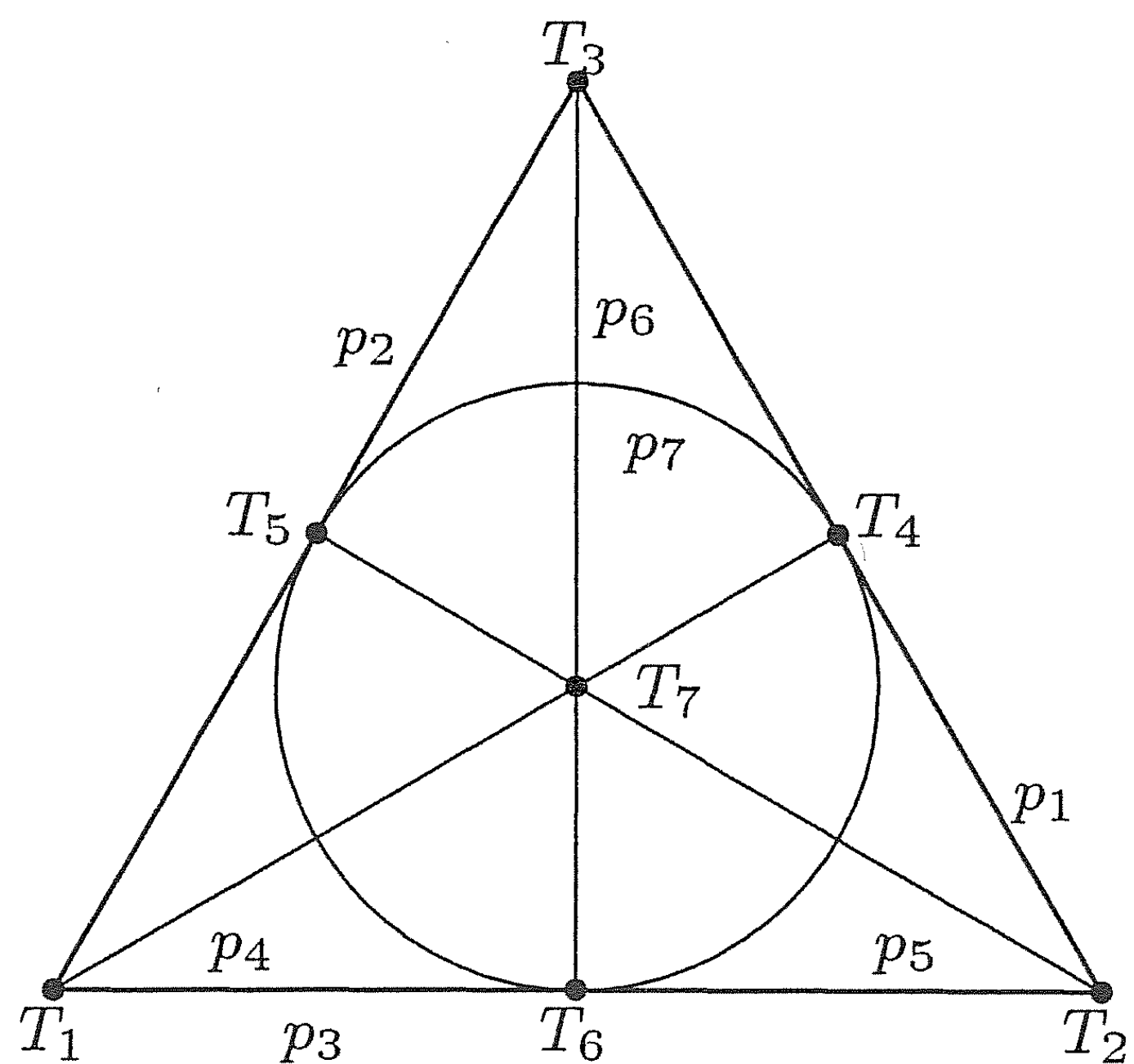
Pa vzemimo lastnosti PR1 in PR2 za aksioma. Brž se lahko prepričamo, da klasična projektivna ravnina ni edini model, v katerem sta ta dva aksioma izpolnjena.

Prvi tak primer, *skoraj šop*, je prikazan na sliki 1. V evklidski ravnini vzemimo $n \geq 2$ različnih točk $T_1, T_2, \dots, T_n$ na neki premici p in še neko točko T zunaj premice p . Imenujmo te točke 'izbrane točke'. Za 'izbrane premice' vzemimo premico p ter premice $p_1, p_2, \dots, p_n$, ki gredo skozi skupno točko T in posamezne točke $T_1, T_2, \dots, T_n$ zaporedoma. Za 'izbrane točke', 'izbrane premice' ter relacijo incidence, ki jo razumemo v običajnem smislu, aksioma PR1 in PR2 očitno veljata.

Še en model je prikazan na sliki 2. V njem je sedem 'izbranih točk' $T_1, T_2, \dots, T_7$: tri oglišča in tri razpolovišča stranic enakostraničnega trikotnika ter središče trikotniku včrtane krožnice. Tudi 'izbranih premic' je sedem: tri stranice in tri težiščnice enakostraničnega trikotnika ter trikotniku včrtana krožnica. Incidenco že spet razumemo v običajnem smislu. Bralec lahko enostavno preveri, da sta tudi v tem primeru aksioma PR1 in PR2 izpolnjena.



Slika 1. Trivialni primer – skoraj šop, ki zadošča aksiomoma PR1 in PR2.



Slika 2. Fanova ravnina.

Prvi od obeh primerov ni posebno zanimiv in je v nekem smislu trivialen. Bistvena razlika med obema je ta, da v drugem modelu obstaja 'neizrojen štirikotnik', v prvem pa ne. Da se izognemo trivialnim primerom, dodajmo še en aksiom. Zahtevo po neizrojenem štirikotniku moremo izraziti tudi takole:

PR3. Na vsaki premici so vsaj tri točke in skozi vsako točko gredo vsaj tri premice.

2. Abstraktna projektivna ravnina

Definirajmo: *Abstraktna projektivna ravnina* je urejena trojica $\mathcal{S} = (\mathcal{T}, \mathcal{P}, \mathcal{I})$, kjer je $\mathcal{T}$ neprazna množica elementov, ki jim pravimo *točke*, in $\mathcal{P}$ neprazna množica elementov, ki jim pravimo *premice*, $\mathcal{I}$ pa relacija *incidence* med množicama $\mathcal{T}$ in $\mathcal{P}$, ki zadošča aksiomom PR1, PR2 in PR3.

V tem prispevku si bomo ogledali *končne* projektivne ravnine, to je take, ki premorejo le končno mnogo točk in premic. Primer je na sliki 2. Imenuje se *Fanova ravnina*.¹ Ima nekaj zanimivih kombinatoričnih lastnosti: na vsaki premici so $3 = 2 + 1$ točke in v vsaki točki se sekajo $3 = 2 + 1$ premice. Tudi točk in premic je enako mnogo, namreč $7 = 2^2 + 2 + 1$. To ni naključje. Prvi izrek, ki ga navajamo, je posplošitev teh dejstev.

Izrek 2.1. *Če v končni projektivni ravnini $\mathcal{S}$ obstaja premica, ki ima natanko $n + 1$ točk, potem velja:*

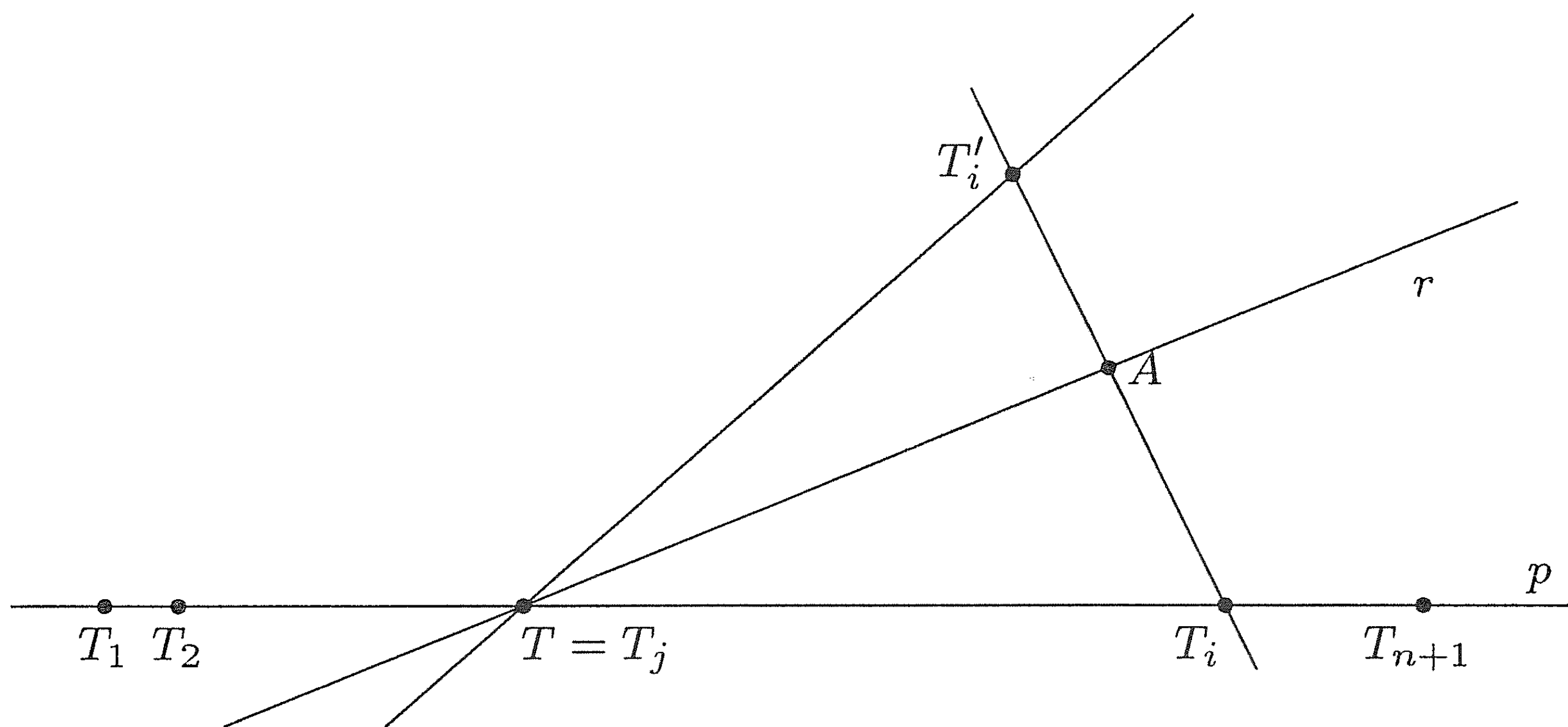
- (a) *Vsaka premica ravnine $\mathcal{S}$ ima natanko $n + 1$ točk.*
- (b) *V vsaki točki ravnine $\mathcal{S}$ se seka natanko $n + 1$ premic.*
- (c) *Ravnina $\mathcal{S}$ ima natanko $n^2 + n + 1$ točk.*
- (d) *Ravnina $\mathcal{S}$ ima natanko $n^2 + n + 1$ premic.*

Dokaz. Premico, ki ima po predpostavki natanko $n + 1$ točk, označimo s $\wp$, točke na njej pa s $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$. Naj bo q poljubna premica, ki je različna od $\wp$. Po aksiomu PR2 se premici q in $\wp$ sekata v natanko eni točki, na primer $T = T_j$. Po aksiomu PR3 obstaja skozi točko T tretja premica r , ki je različna od $\wp$ in tudi od q , na premici r pa neka točka A , ki je različna od T . Po aksiomu PR1 točka A ne pripada niti premici $\wp$ niti premici q . Za vsako točko T_i na premici $\wp$ obstaja, po aksiomih PR1 in PR2, neka točka T'_i na premici q , ki je presek premice q s premico $p(A, T_i)$. Glej sliko 3. Iz aksiomov PR1 in PR2 tudi sledi, da nam predpis $T_i \mapsto T'_i$ definira povratno enolično preslikavo med množico točk na premici $\wp$ in množico točk na premici q . Trditev (a) je dokazana.

Dokažimo trditev (b). Naj bo B poljubna točka, ki ne pripada premici $\wp$. Vsaka premica skozi točko B seka premico $\wp$, po aksiomu PR2, v eni od točk $T_1, T_2, \dots, T_{n+1}$. Premic, ki se sekajo v točki B , je torej po aksiomu PR1 največ $n + 1$. Toda po istem aksiomu je takih premic vsaj $n + 1$, namreč premic $p(B, T_i)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Iz obojega sledi, da se v točki B seka natanko $n + 1$ premic. S tem smo že dokazali, da trditev (b) velja za tiste točke, ki ne ležijo na premici $\wp$.

¹ Gino Fano (1871–1952), italijanski matematik.

Pa bodi C poljubna točka ravnine. Bralec se bo sam prepričal, da obstaja taka premica s , ki točke C ne vsebuje. Po (a) je na premici s natanko $n + 1$ točk. Ponovimo dokaz kot prej, s tem da prevzame točka C vlogo točke B in premica s vlogo premice ρ . Tako dobimo, da gre skozi točko C natanko $n + 1$ premic. Točka (b) je dokazana.



Slika 3. Na vsaki premici je enako mnogo točk.

Naj bo C poljubna točka. Po (b) gre skozi točko C natanko $n + 1$ premic. Ker določata dve različni točki natanko eno premico, leži vsaka točka, ki je različna od C , na natanko eni od premic skozi C . Po (a) ima vsaka od teh premic natanko n točk, različnih od točke C . Skupno število točk v ravnini je torej $1 + (n + 1)n = n^2 + n + 1$.

Preostane le še, da določimo skupno število premic. Bodi q poljubna premica. Po (a) ima premica q natanko $n + 1$ točk. Vsaka premica, ki je različna od q , seka premico q v natanko eni od teh točk. Po (b) se v vsaki od teh točk seka natanko n premic, ki so različne od q . Skupno število premic je tedaj $1 + n(n + 1) = n^2 + n + 1$. Izrek je dokazan. ■

Dokaz zadnjih dveh točk v izreku 2.1 ponazarja pomembno lastnost projektivnih ravnin. To je:

Načelo dualnosti. Če v poljubnem izreku, ki velja za projektivne ravnine, dosledno zamenjamo vlogi besed 'točka' in 'premica', dobimo veljaven izrek o projektivnih ravninah.

Veljavnost tega načela sledi iz dejstva, da aksioma PR1 in PR2 pri omenjeni zamenjavi preideta drug v drugega, aksiom PR3 pa se ohranja. To najbolj prepričljivo uvidimo, če aksiome prepišemo tako, da opisne izraze, kot so 'definira', 'leži' in 'gre', nadomestimo z besedico 'incidenca' in njenimi izpeljankami.

3. Primeri

Za končno projektivno ravnino pravimo, da ima *red* n ($n \geq 2$), če vsaka premica te ravnine premore natanko $n + 1$ točk. Takoj povejmo, da problem eksistence projektivnih ravnin danega reda v splošnem še ni rešen. Še več, vse doslej poznane ravnine so zelo posebnih redov, namreč redov, ki so potence praštevil. Najmanjše naravno število, ki ni tako, je 6. Znano je, da projektivne ravnine reda 6 ni [2]. Leta 1989 je bilo z uporabo računalnika dokazano, da ne obstaja projektivna ravnina reda 10 [8]. Ni pa znano, ali obstaja projektivna ravnina reda 12.

Dve projektivni ravnini sta *izomorfni*, če obstajata taki povratno enolični preslikavi med množicama točk in med množicama premic, ki ohranjata incidenco. Dokazano je, da so projektivne ravnine reda $n \leq 8$ določene do izomorfizma natanko. To je dovolj enostavno preveriti za $n \leq 5$. Za $n = 7$ in $n = 8$ pa je dokaz precej težji [9,4]. Znano je tudi, da so med projektivnimi ravninami reda 9 natanko štiri paroma neizomorfne [11]. Vendar je samo eno od njih mogoče konstruirati s tu opisanimi metodami [5].

Oglejmo si torej nekaj primerov končnih projektivnih ravnin majhnega reda. Na konkretnih zgledih bomo predstavili dve splošni metodi konstrukcij, tretjo metodo, ki nam da neki poseben, a zelo pomemben razred ravnin, pa si prihranimo za zadnji razdelek.

Red $n = 2$. Ravnino reda 2 smo že srečali v uvodnem razdelku. Bralec se bo za vajo sam prepričal, da je vsaka projektivna ravnina reda 2 izomorfna Fanovi ravnini na sliki 2. Po metodah, ki jih bomo predstavili v nadaljevanju, bo tudi poiskal še kakšen drug model zanjo.

Red $n = 3$. Po izreku 2.1 ima taka ravnina 13 točk in 13 premic. Ravnino ponazorimo s kvadratno tablico 13×13 . Vrstice naj predstavljajo premice, stolpci točke, incidenco pa nakažemo s krogcem $\bullet$ na mestu, kjer se ustrezni stolpec in vrstica križata. Da bo taka kvadratna tablica res model za projektivno ravnino, mora veljati naslednje:

- Za vsaka dva različna stolpca obstaja natanko ena vrstica, ki ima na mestih preseka s tema stolpcema znak $\bullet$ (aksiom PR1).
- Za vsaki dve različni vrstici obstaja natanko ena stolpec, ki ima na mestih križanja s tema vrsticama znak $\bullet$ (aksiom PR2).
- V vsaki vrstici so natanko štirje znaki $\bullet$ (izrek 2.1(a)).
- V vsakem stolpcu so natanko štirje znaki $\bullet$ (izrek 2.1(b)).

Aksiom PR3 in druge trditve iz izreka 2.1 so tedaj očitno izpolnjeni. Z nekaj truda lahko sestavimo tablico kot v preglednici 1. Tablic je seveda več, vse pa v našem konkretnem primeru predstavljajo, kot smo že omenili, v bistvu isto ravnino. V zadnjem razdelku bomo spoznali še neko drugo, algebrsko metodo, ki bo enostavnejša.

Če v tablici iz preglednice 1 zamenjamo znak $\bullet$ z 1 in prazna polja z 0, dobimo *incidenčno matriko* ravnine. Vsaka končna projektivna ravnina premore incidenčno matriko. Za vajo bo bralec sam poiskal kako matriko,

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	T_{13}
p_1	•	•	•	•									
p_2	•				•	•	•						
p_3	•							•	•	•			
p_4	•										•	•	•
p_5		•			•			•			•		
p_6		•					•			•			•
p_7		•				•			•			•	
p_8			•		•				•				•
p_9			•				•	•				•	
p_{10}			•			•				•	•		
p_{11}				•	•					•		•	
p_{12}				•			•		•		•		
p_{13}				•		•		•					•

Preglednica 1. Projektivna ravnina reda 3.

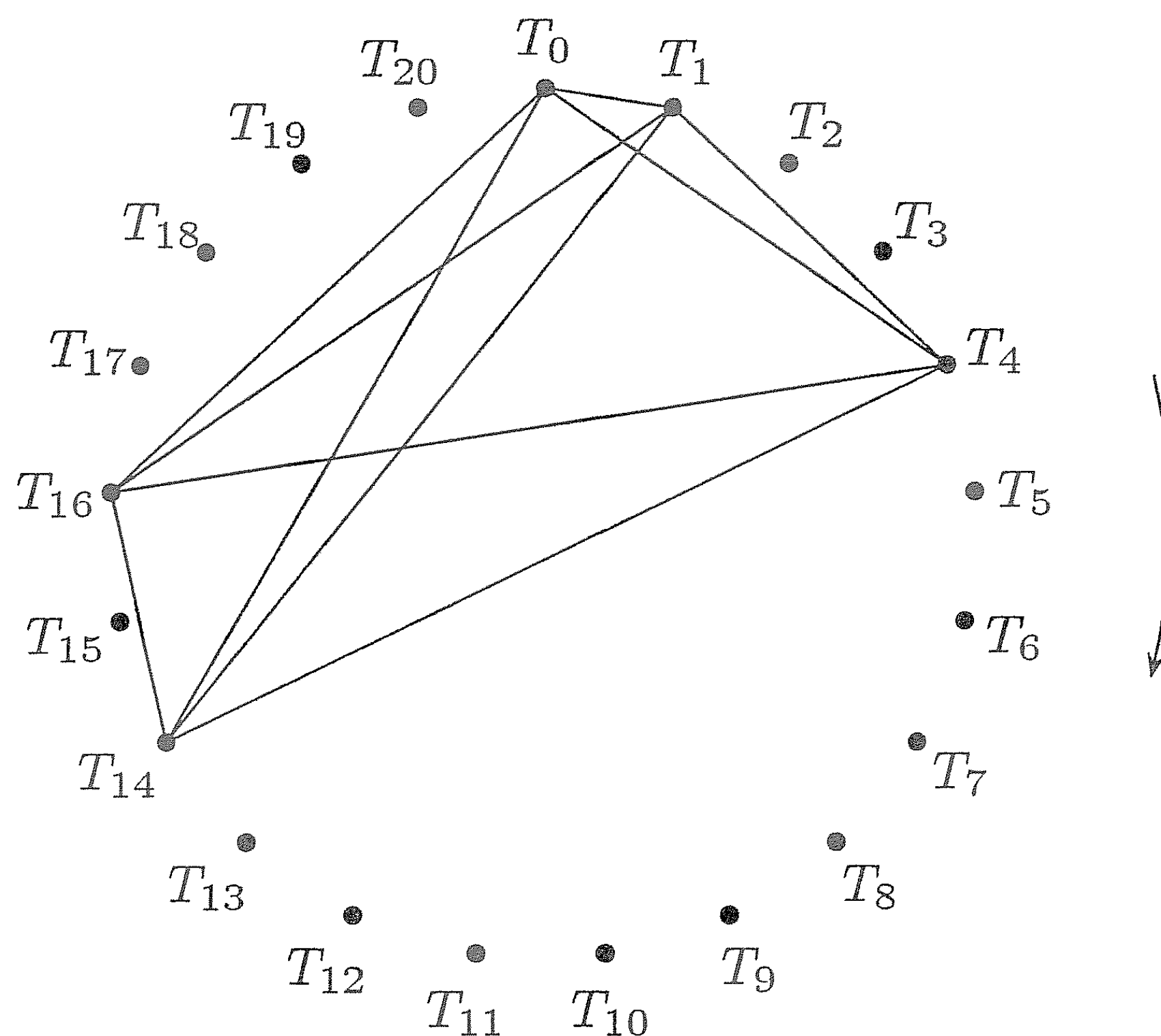
ki ustreza Fanovi ravnini. Incidenčne matrike končnih projektivnih ravnin so zelo pomembne v teoriji kodiranja [3].

Red $n = 4$. Projektivna ravnina reda 4 ima $4^2 + 4 + 1 = 21$ točk in prav toliko premic. Točke $T_0, T_1, \dots, T_{20}$ predstavimo z oglišči pravilnega 21-kotnika. Ker je vsaka od daljic $T_i T_j$ kongruentna eni od daljic $T_0 T_1, T_0 T_2, \dots, T_0 T_{10}$, jih glede na dolžino lahko razvrstimo v 10 razredov. Pet oglišč določa $5 \cdot 4/2 = 10$ različnih daljic, oglišča T_0, T_1, T_4, T_{14} in T_{16} pa se odlikujejo po tem, da so pripadajoče daljice paroma različne tudi po dolžini. Glej sliko 4.

Petkotnik z oglišči T_0, T_1, T_4, T_{14} in T_{16} označimo s Π_0 . S Π_k ($0 \leq k \leq 20$) pa označimo petkotnik z oglišči $T_k, T_{1+k}, T_{4+k}, T_{14+k}$ in T_{16+k} , kjer indekse seštevamo po modulu 21. Petkotnik Π_k je torej slika petkotnika Π_0 pri vrtežu za kot $2k\pi/21$ v smeri urinega kazalca. Za premice projektivne ravnine vzemimo petkotnike Π_k ($0 \leq k \leq 20$), incidenca pa naj bo vsebovanost v smislu teorije množic.

Pokažimo, da ta model zadošča aksiomom PR1, PR2 in PR3. Vzemimo dve poljubni oglišči T_i in T_j . V petkotniku Π_0 obstaja natanko ena daljica z dolžino, ki je enaka dolžini daljice $T_i T_j$. Obstaja natanko en vrtež v smeri urinega kazalca za kot, manjši od 2π , ki to daljico petkotnika Π_0 preslika v daljico $T_i T_j$. Iz tega sledi, da pripadata oglišči T_i in T_j natanko enemu od petkotnikov Π_k ($0 \leq k \leq 20$). Aksiom PR1 je izpolnjen.

Vzemimo sedaj dva različna petkotnika Π_i in Π_j . Potem obstaja natanko en vrtež za kot $\varphi < 2\pi$ v smeri urinega kazalca, ki preslika petkotnik Π_i v petkotnik Π_j . Petkotnik Π_i premore natanko eno daljico, ki ustreza



Slika 4. Projektivna ravnina reda $n = 4$.

kotu φ (bolj natanko: če jo gledamo kot tetivo 21-kotniku očrtanega kroga, ji pripada središčni kot bodisi φ bodisi $2\pi - \varphi$). Vrtež v smeri urinega kazalca za kot φ preslika eno od njenih krajišč v drugo. Toda to drugo krajišče je hkrati tudi oglišče petkotnika Π_j , saj je Π_j slika petkotnika Π_i pri tem vrtežu. Tako vidimo, da imata dva različna petkotnika vsaj eno skupno oglišče. Dokaz, da je tako oglišče eno samo, pa prepuščamo bralcu za vajo. V našem modelu je torej aksiom PR2 izpolnjen. Aksiom PR3 pa seveda očitno tudi velja.

Konstrukcija, ki smo jo predstavili, je poseben primer splošne metode. Po tej metodi bi lahko konstruirali projektivno ravnino poljubnega reda $n \geq 2$, če bi le znali poiskati takih $n + 1$ oglišč v pravilnem $(n^2 + n + 1)$ -kotniku, katerih razdalje med njimi so paroma različne. Zelo enostavno gre to za $n = 2$ in $n = 3$. Bralec bo sam konstruiral projektivno ravnino reda 5 in morda tudi reda 7. Za $n = 5$ je že nekaj več dela. Po najpreprostejši metodi, namreč s poskušanjem, je prvi od avtorjev za to potreboval približno 30 minut. Toda z naraščajočim n se število primerov, ki jih je treba pregledati, naglo večja, prenašlo, da bi bila lahko ta metoda uporabna. Obstaja sicer algebrska metoda, kako take 'dobre' poligone poiskati v primeru, ko je n potenca praštevila [1], ravnina, ki jo na ta način dobimo, pa je izomorfna neki prav posebni projektivni ravnini, ki jo označujemo s $PG(2, n)$. Alternativno konstrukcijo ravnin $PG(2, n)$ bomo opisali v zadnjem razdelku.

4. Projektivne ravnine $PG(2, n)$

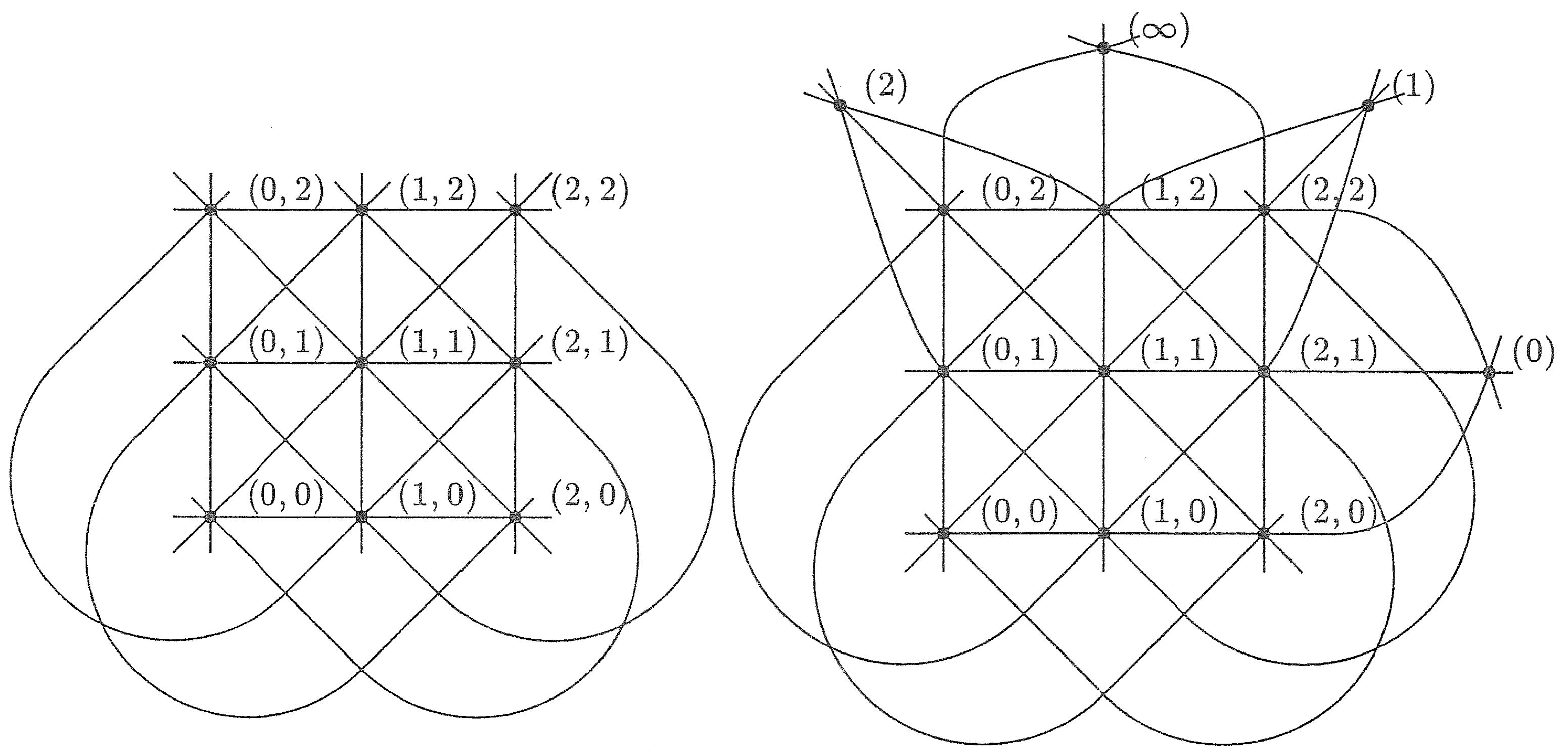
Klasično projektivno ravnino je mogoče koordinatizirati z elementi polja realnih števil [13]. Tudi med paroma neizomornimi projektivnimi ravninami reda n , kjer je n potenca praštevila, je ena, ki se odlikuje po tem, da jo je mogoče koordinatizirati z elementi nekega polja. (Polje v tem primeru

je seveda končno polje $GF(n)$, ki ima n elementov, in prav to je razlog, da mora biti n potenca praštevila, saj vemo, da končno polje obstaja le za take n .) To ravnino označujemo s $PG(2, n)$. Gre za analogno konstrukcijo kot pri klasični projektivni ravnini, ki smo jo opisali na začetku prispevka. Metodo bomo predstavili za $n = 3$. V splošnem ni dosti drugače, le računati v poljubnem končnem polju je nekoliko bolj zapleteno od aritmetike po modulu 3.

Imeli bomo $n^2 = 9$ navadnih točk in $n + 1 = 4$ idealne točke. Navadne točke opišemo z urejenim parom elementov iz $GF(n) = \mathbb{Z}_3$, torej (x, y) ($0 \leq x, y \leq n - 1 = 2$), in jih predstavimo kot vozlišča kvadratne mreže $n \times n = 3 \times 3$ v evklidski ravnini. Še drugače, to so točke preseka premic $x = i$ ($0 \leq i \leq n - 1 = 2$) s premicami $y = j$ ($0 \leq j \leq n - 1 = 2$). Hkrati je s temi evklidskimi premicami že določenih $2n = 6$ projektivnih premic naše končne ravnine. To so pač premice $x = i$ ($0 \leq i \leq n - 1 = 2$) in $y = j$ ($0 \leq j \leq n - 1 = 2$), pri čemer je enačaja treba razumeti kot enakost v polju $GF(n) = \mathbb{Z}_3$, torej kot kongruenco po modulu 3. Preostalih $n^2 - n + 1 = 7$ projektivnih premic pa ne moremo ponazoriti na tak način.

Pa si oglejmo evklidske premice $y = mx + b$, ($1 \leq m \leq n - 1 = 2$, $0 \leq b \leq n - 1 = 2$). Takih premic je $(n - 1)n = 6$. Rekli bomo, da leži točka (r, s) izbrane kvadratne mreže na projektivni premici $y = mx + b$ natanko takrat, ko velja $s = mr + b$, pri čemer moramo enačaja ter vse operacije v izrazu na desni vzeti po modulu 3.

V našem trenutnem modelu obstaja $n^2 = 9$ točk ter $2n + (n - 1)n = 12$ ‚navadnih‘ projektivnih premic in je predstavljen na sliki 5(a).



Slika 5. Še ena konstrukcija projektivne ravnine reda $n = 3$.

To seveda še ni model za projektivno ravnino. Aksiom PR1 je resda izpolnjen, aksiom PR2 pa ni. Obstajajo ‚vzporedne‘ premice. Na primer, premica $y = x + 1$ in premica $y = x + 2$ nimata skupne točke v izbrani

kvadratni mreži. Dodati moramo še $n + 1 = 4$ idealne točke in idealno premico. Idealne točke označimo s simboli (0) , (1) , (2) in (∞) . Točka (0) naj predstavlja skupni presek premic $y = i$ ($0 \leq i \leq n - 1 = 2$), točka (∞) pa skupni presek premic $x = i$ ($0 \leq i \leq n - 1 = 2$). Točka (1) naj predstavlja skupni presek premic $y = x + i$ ($0 \leq i \leq n - 1 = 2$), točka (2) pa skupni presek premic $y = 2x + i$ ($0 \leq i \leq n - 1 = 2$). Vsaka premica je tako razširjena z natanko eno idealno točko, in sicer tako, da so ‚vzporedne‘ premice razširjene z isto idealno točko. Idealna premica pa je seveda premica, ki vsebuje natanko vse idealne točke. Glej sliko 5(b). Aksiom PR2 je tako izpolnjen, aksiom PR3 pa seveda tudi. Bralca vabiva, da poišče kak konkreten izomorfizem med tem modelom projektivne ravnine reda $n = 3$ in modelom, ki smo ga opisali poprej.

Model, predstavljen v tem razdelku, je zelo uporaben, ker omogoča analitično obravnavo. Podobno kot v evklidski ravnini je tudi tu mogoče analitično vpeljati nekatere krivulje – na primer stožnice. V evklidski ravnini imajo neizrojene stožnice nekaj skupnih lastnosti. Analitično gre za krivulje drugega reda, ki se opišejo s pomočjo nerazcepnih kvadratnih enačb. Njihova skupna kombinatorična lastnost je, da vsako od njih vsaka premica seka v največ dveh točkah.

V drugem prispevku [6] si bomo podrobneje ogledali tiste podmnožice točk v poljubni abstraktni končni projektivni ravnini, ki jih družijo prav ta kombinatorična lastnost.

LITERATURA

- [1] L. D. Baumert, *Cyclic difference sets*, Lecture Notes in Mathematics vol. **182**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [2] A. Bichara, *An elementary proof of the nonexistence of a projective plane of order six*, Mitt. Math. Sem. Giessen **192** (1989), 89–93.
- [3] P. J. Cameron, J. H. Van Lint, *Designs, graphs, codes and their links*, London Mathematical Society Student Texts vol **22**, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [4] M. Hall, J. D. Swift, R. J. Walker, *Uniqueness of the projective plane of order eight*, Math. Tables Aids Comput. **10** (1956), 186–194.
- [5] F. Kárteszi, *Introduction to finite geometries*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1976.
- [6] Gy. Kiss, A. Malnič, *Ovali v končnih projektivnih ravninah*, Obzornik mat. fiz., sprejeto v objavo.
- [7] T. Košir, B. Magajna, *Transformacije v geometriji*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1997.
- [8] C. W. H. Lam, L. H. Thiel, *The nonexistence of finite projective planes of order 10*, Canad. J. Math. **41** (1989), 1117–1123.
- [9] G. Pickert, *Projektive Ebenen*, Springer-Verlag, Berlin, 1955.
- [10] I. Pucelj, *Neevklidične geometrije*, Knjižnica Sigma 18, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1969.
- [11] T. G. Room, P. B. Kirkpatrick, *Miniquaternion geometry*, Cambridge Univ. Press, 1971.
- [12] B. Segre, *Ovals in a finite projective plane*, Canad. J. Math. **7** (1955), 414–416.
- [13] I. Vidav, *Afina in projektivna geometrija*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1981.

SPREJEMNOST TULJAVE

ALEŠ MOHORIČ

PACS 87.64 Hd, 76.60 Pc, 84.32 Hh

Sprejemnost tuljave je definirana funkcija kraja, ki pove, kolikšen signal inducira v tuljavi magnetni dipol, ki precesira okoli neke osi na nekem mestu. Tu je pokazan račun za tuljavo, ki ima obliko krožne zanke. Izračunan je tudi signal, ki ga v taki zanki inducira neskončno dolg valjast vzorec istega premera, kot je premer zanke.

COIL SENSITIVITY

The sensitivity of the coil is a function of position given as a normalized signal induced by a magnetic dipole precessing in a given position round a certain axis. Here, the sensitivity of a circular loop is presented. The signal, induced by an infinite uniformly magnetized cylindrical rod, with the same diameter as the loop, is calculated as an example of the use of sensitivity.

Poznavanje sprejemnosti tuljav je pomembno pri poskusih z jedrsko magnetno resonanco, še posebej pri slikanju s tako imenovanimi površinskimi tuljavami. Pri poskusih z jedrsko magnetno resonanco vzorec ponavadi obdamo s tuljavo, ki detektira signal. Včasih je ugodno, da za detekcijo signala uporabimo tuljavo, položeno na vzorec. Signal inducirajo jedrski magnetni dipolni momenti, ki precesirajo okoli osi, ki jo določimo s homogenim zunanjim poljem. Kakšen signal (amplituda in faza) inducira posmezen dipol, je odvisno od geometrije tuljave in lege dipola v njej. To krajevno odvisnost velikosti in faze inducirane signala pri dani geometriji tuljave in smeri homogenega zunanjega polja opišemo s sprejemnostjo. Dipoli na mestu, kjer je sprejemnost večja, inducirajo večji signal kot dipoli na mestu z manjšo sprejemnostjo. Pri slikanju z jedrsko magnetno resonanco ([1]) bi bil del slike s področja, kjer je sprejemnost večja, relativno svetlejši kot preostali del. Pravilna osvetljenost slike je pomembna pri medicinski diagnostiki ali pri meritvah porazdelitve difuzijske konstante ([2]). S pravilnim uteževanjem signala iz različnih delov prostora lahko izboljšamo sliko vzorca.

Poleg sprejemne tuljave pa je pomemben sklop naprave za poskuse z jedrsko magnetno resonanco tudi tuljava, s katero vzbujamo spine iz ravnovesnega stanja. V ravnovesnem stanju so spini postavljeni vzdolž zunanjega homogenega polja ter ne precesirajo in ne inducirajo signala. Spine vzbujamo s spremenljivim magnetnim poljem, ki niha s precesijsko frekvenco dipolov in traja določen čas. S tuljavo vzbudimo samo spine, za katere velja pogoj ([4]), v katerem nastopa amplituda nihajočega polja, le-ta pa je sorazmerna sprejemnosti. Za vzbujevalno tuljavo ponavadi uporabimo kar sprejemno tuljavo.

Sprejemnost dolgih valjastih tuljav je dokaj konstantna, sprejemnost površinskih tuljav pa ne. Površinske tuljave imajo ponavadi obliko krožne zanke in se uporabljajo za slikanje manjših delov velikih vzorcev, ker tako dosežemo boljše razmerje signala in šuma. Če poznamo sprejemnost krožne zanke, lahko izračunamo tudi sprejemnost valjaste tuljave.

Sprejemnost je odvisna od geometrije tuljave in je na izbranem mestu sorazmerna velikosti magnetnega polja, ki bi ga na tem mestu povzročil enotski tok v sprejemni tuljavi. Vzemimo magnetni dipol $\mathbf{p}_m$ na mestu $\mathbf{r}$ in tuljavo, ki je opisana s krivuljo $\mathbf{r}'$. Magnetni dipol naj se vrti okoli osi, ki je v praksi določena s smerjo zunanjega magnetnega polja. Zaradi vrtenja magnetnega dipola se spreminja magnetni pretok ϕ_m skozi ovoje tuljave in v njih se inducira napetost s (signal proste precesije):

$$s = \frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \mathbf{B}_{dip} \cdot d\mathbf{S} = \frac{d}{dt} \oint_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{A}_{dip} \cdot d\mathbf{r}'. \quad (1)$$

S $\mathcal{P}$ je označena ploskev, ki jo obroblja tokovna zanka $\mathbf{r}'$, $\partial\mathcal{P}$ je rob te ploskve in $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am je induksijska konstanta. S Stokesovo formulo smo integral magnetnega polja dipola $\mathbf{B}_{dip} = \nabla \times \mathbf{A}_{dip}$ po ploskvi $\mathcal{P}$ prevedli v integral vektorskega potenciala $\mathbf{A}_{dip}$ po robu ploskve $\partial\mathcal{P}$ – tokovni zanki. Vektorski potencial magnetnega dipola je v razdalji l od dipola enak $\mathbf{A}_{dip}(\mathbf{l}) = \frac{\mu_0(\mathbf{p}_m \times \mathbf{l})}{4\pi l^3}$. To lahko preverimo (operator $\nabla = \partial/\partial\mathbf{l}$ deluje v prostoru $\mathbf{l}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{dip} &= \nabla \times \mathbf{A}_{dip} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\left(\frac{1}{l^3} \cdot \nabla \right) \mathbf{p}_m - (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \frac{1}{l^3} + \mathbf{p}_m \left(\nabla \cdot \frac{1}{l^3} \right) - \frac{1}{l^3} (\nabla \cdot \mathbf{p}_m) \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-\mathbf{l} (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \frac{1}{l^3} - \frac{1}{l^3} (\mathbf{p}_m \cdot \nabla) \mathbf{l} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{p}_m \cdot \mathbf{l})\mathbf{l}}{l^5} - \frac{\mathbf{p}_m}{l^3} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

V rezultatu prepoznamo izraz za polje magnetnega dipola. V prvem koraku smo upoštevali vektorsko identiteto $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{u})$, v drugem $(\mathbf{u} \cdot \nabla)f\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{u} \cdot \nabla f) + f(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ in v tretjem $(\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{l} = \mathbf{c}$. Podčrtani deli so enaki nič. Prvi in četrti člen zato, ker je $\mathbf{p}_m$ konstanten vektor, tretji člen pa zato, ker je

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \frac{1}{l^3} &= \frac{1}{l^3} \nabla \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l} \cdot \nabla \frac{1}{l^3} = \\ &= \frac{3}{l^3} + \mathbf{l} \cdot \left(-\frac{3}{l^4} \frac{\mathbf{l}}{l} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Tu smo upoštevali: $\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = f\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla f$, $\nabla \cdot \mathbf{l} = 3$ in $\nabla f(l) = f'(l)\frac{\mathbf{l}}{l}$. Ko upoštevamo $\mathbf{l} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$, zapišemo (1) kot

$$s = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \oint_{\partial\mathcal{P}} \frac{\mathbf{p}_m \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \cdot d\mathbf{r}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{p}_m}{dt} \cdot \oint_{\partial\mathcal{P}} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}. \quad (4)$$

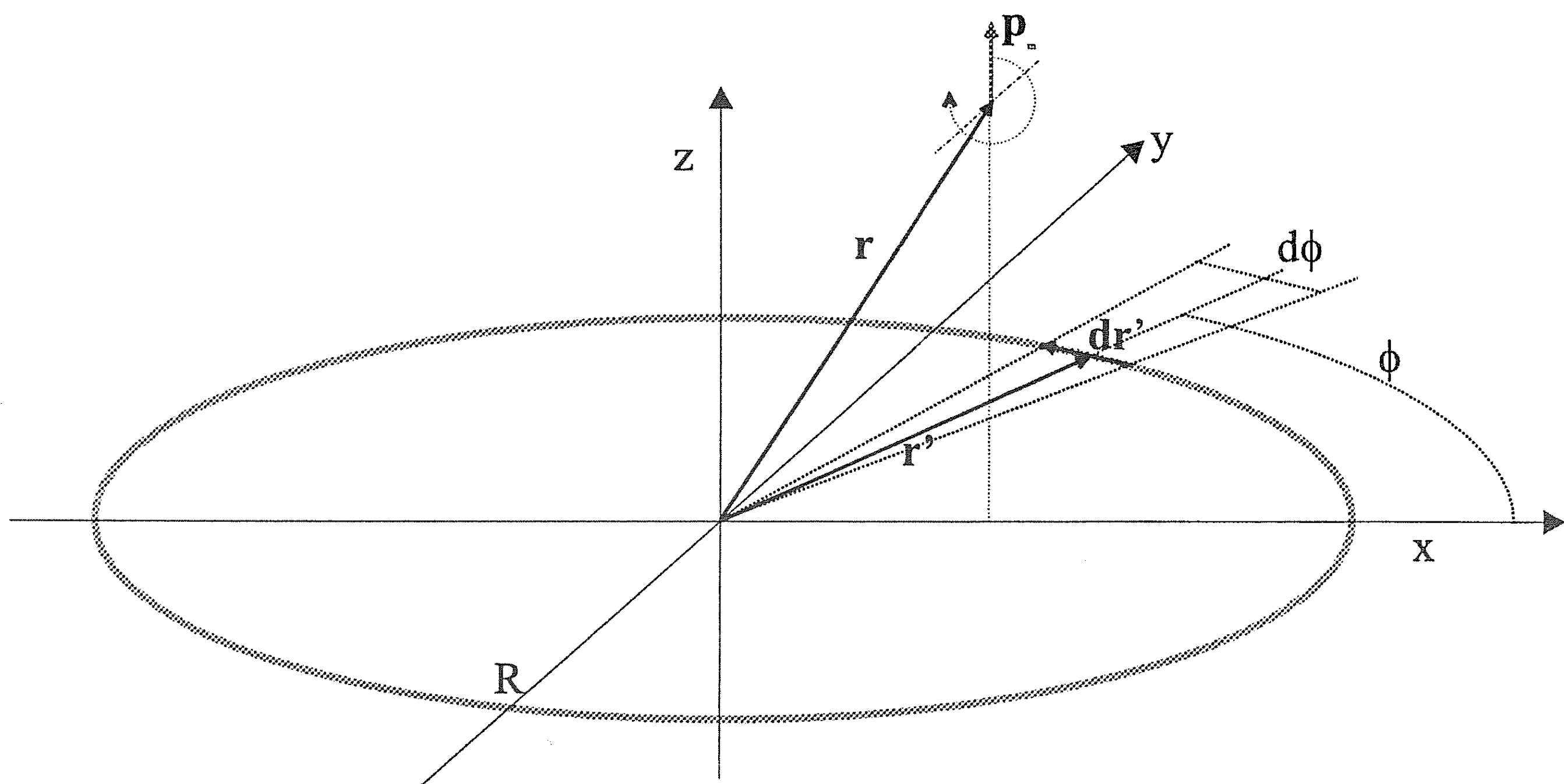
Upoštevali smo enakost $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ in tako ločili časovno odvisni del enačbe $d\mathbf{p}_m/dt$ od preostalega dela, v katerem lahko prepoznamo del Biot-Savartove formule. Z Biot-Savartovo formulo izračunamo magnetno polje tokovne zanke na mestu $\mathbf{r}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{P}} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3}. \quad (5)$$

V enačbi je I tok, ki teče po zanki, $\mathbf{r}'$ pa kaže na zanko. Integral v izrazu (4) lahko izrazimo z magnetnim poljem, normiranim na enoto toka $\mathbf{B}_I = \mathbf{B}/I$ iz (5), in dobimo

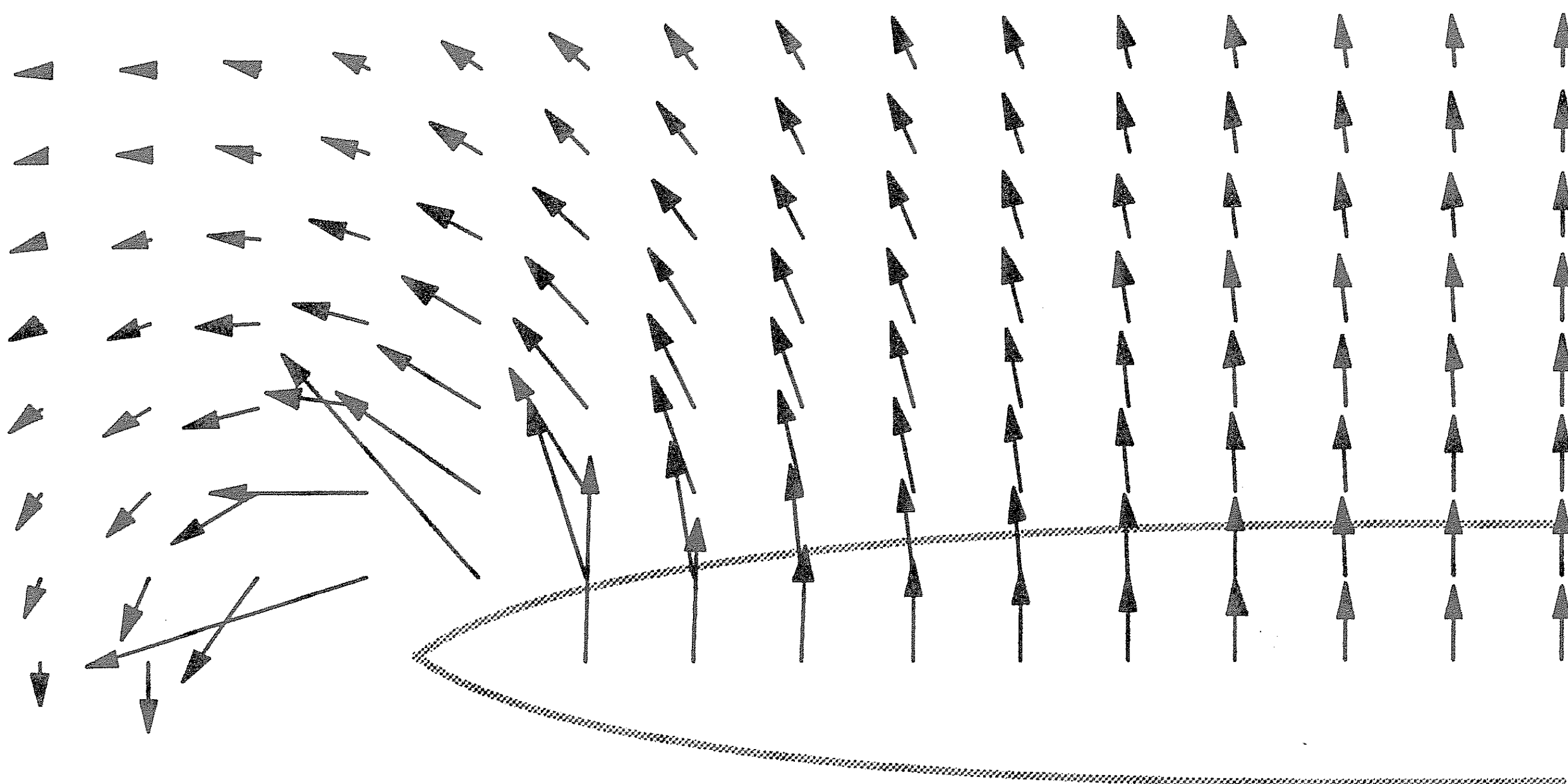
$$s = \frac{d\mathbf{p}_m}{dt} \cdot \mathbf{B}_I(\mathbf{r}). \quad (6)$$

Da izračunamo signal, ki ga v tuljavi inducira dipol, je torej dovolj, da poznamo prostorsko odvisnost magnetnega polja, ki ga ustvari tok v tuljavi. Vendar pa lahko magnetno polje analitično določimo le za zelo preproste modele.



Slika 1. Krožna zanka premera $2R$ v ravnini $z = 0$. Zanko opišemo s krivuljo $\mathbf{r}'$, podano s parametrom ϕ . Magnetni dipol je na mestu $\mathbf{r}$ v ravnini $y = 0$ in precesira okoli osi, vzporedne osi y , s krožno frekvenco ω .

Izračunajmo magnetno polje in sprejemnost krožne zanke s polmerom R (slika 1). Izhodišče koordinatnega sistema postavimo v središče zanke in ga obrnemo tako, da leži zanka v ravnini $z = 0$, dipol pa v ravnini $y = 0$. Zanko $\mathbf{r}'$ lahko opišemo s parametrom ϕ : $\mathbf{r}' = R(\cos \phi, \sin \phi, 0)$, položaj dipola je



Slika 2. Magnetno polje krožne zanke v ravnini $y = 0$.

$\mathbf{r} = (x, 0, z)$ in del krožne zanke $d\mathbf{r}' = R d\phi (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$. Normirano magnetno polje krožne zanke na mestu dipola se tako zapiše kot

$$\mathbf{B}_I(x, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{R(z \cos \phi, z \sin \phi, R - x \cos \phi) d\phi}{(R^2 + x^2 + z^2 - 2Rx \cos \phi)^{3/2}}. \quad (7)$$

Ta integral je izračunljiv (glej [4]). Integracijo lahko izvedemo tudi s programom Mathematica, ki nekoliko drugače definira popolne eliptične integrale kot recimo Abramowitz [3]. Rezultat zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{Ix}(x', z') &= \frac{\mu_0 2z'}{4\pi R x' \sqrt{(1-x')^2 + z'^2}} \left(\frac{1+x'^2 + z'^2}{(1+x')^2 + z'^2} E(k) - K(k) \right), \\ \mathbf{B}_{Iy}(x', z') &= 0, \\ \mathbf{B}_{Iz}(x', z') &= \frac{-2\mu_0}{4\pi R \sqrt{(1-x')^2 + z'^2}} \left(\frac{-1+x'^2 + z'^2}{(1+x')^2 + z'^2} E(k) - K(k) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

kjer sta normirani koordinati $x' = \frac{x}{R}$ in $z' = \frac{z}{R}$, $K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k \sin^2 \vartheta}}$ je popolni eliptični integral prve vrste, $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k \sin^2 \vartheta} d\vartheta$ popolni eliptični integral druge vrste in $k = -\frac{4x'}{(1-x')^2 + z'^2}$. Magnetno polje je osno simetrično tako, da ga lahko v poljubni točki prostora izrazimo v cilindričnih koordinatah: x komponenta polja, izračunanega v ravnini $y = 0$, je radialna komponenta magnetnega polja, B_z je komponenta v smeri osi z , komponenta v smeri polarnega kota pa je enaka nič, kar že na pogled sledi iz simetrije. V parametru k zamenjamo še x' z $r = \rho/R$. Znan je rezultat za magnetno polje na osi zanke:

$$\mathbf{B}(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I}{2R(1+z'^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z. \quad (9)$$

Osni prerez polja je prikazan na sliki 2.

Uporabimo zapis polja v cilindričnih koordinatah in v (6) upoštevamo, da se magnetni dipol vrtil (za os vrtenja izberemo os, vzporedno osi y) s krožno frekvenco ω in je podan s $\mathbf{p} = p_0(\sin \omega t, 0, \cos \omega t)$, kjer je p_0 velikost magnetnega dipola. Da smo izbrali tako gibanje dipola, ni naključno, saj se tako obnaša magnetni dipolni moment v zunanjem magnetnem polju, pravokotnem na ravnino vrtenja (precesije). Os tuljave x leži v precesijski ravnini $y = 0$ zato, da je inducirani signal čim večji. Če tak magnetni dipol precesira na mestu $\mathbf{r} = \rho \mathbf{e}_\rho(\varphi) + z \mathbf{e}_z$, je signal podan z izrazom:

$$s = \frac{2\mu_0 p_0 \omega}{4\pi R \sqrt{(1-r)^2 + z'^2}} \cdot \left\{ \cos \omega t \cos \phi \frac{z'}{r} \left(\frac{1+r^2+z'^2}{(1+r)^2+z'^2} E(k) - K(k) \right) + \right. \quad (10)$$

$$\left. + \sin \omega t \left(\frac{-1+r^2+z'^2}{(1+r)^2+z'^2} E(k) - K(k) \right) \right\},$$

kar lahko zapišemo skrajšano v obliki

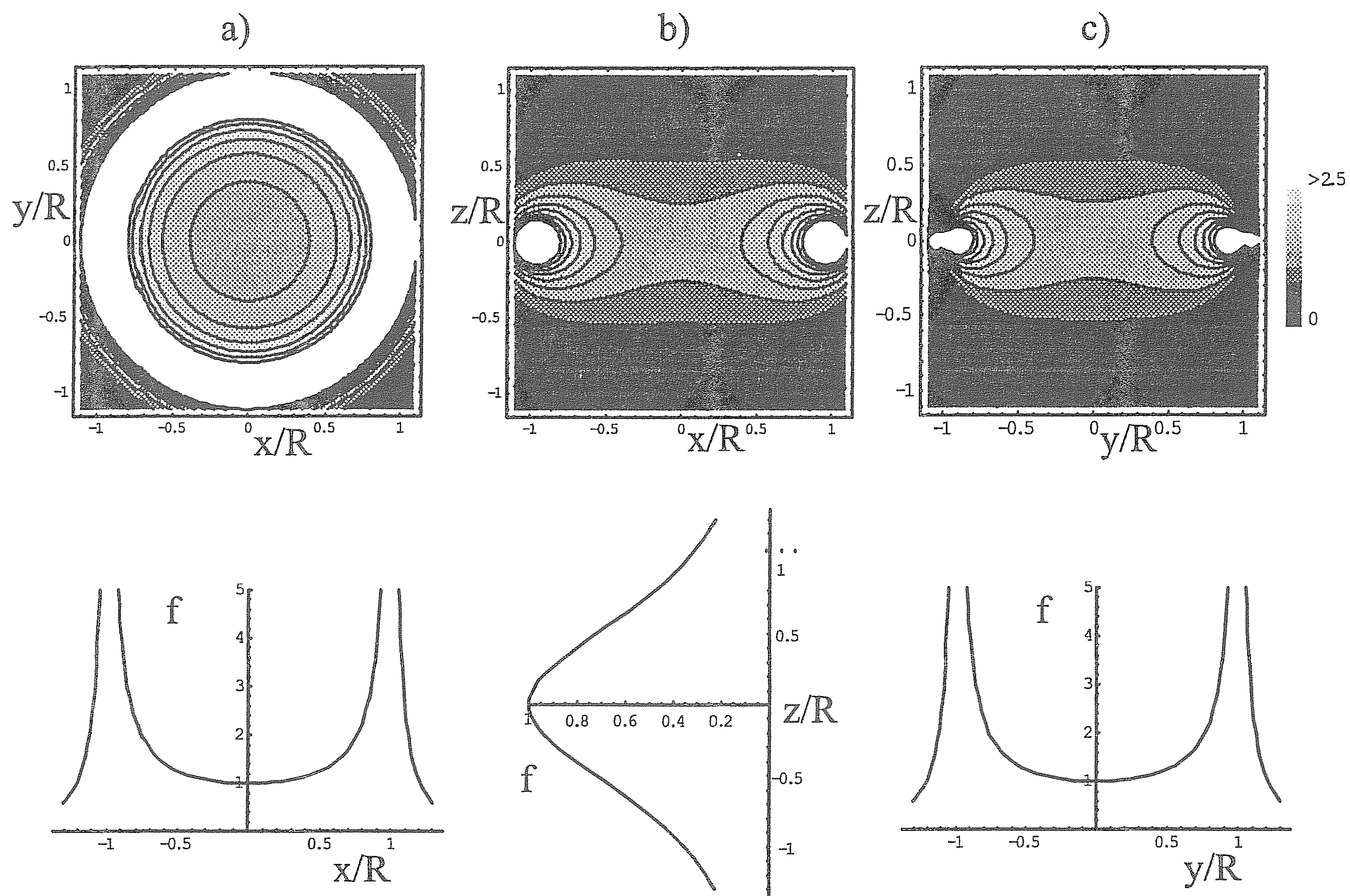
$$s = a \cos \omega t + b \sin \omega t. \quad (11)$$

Velikost signala ni kar sorazmerna z velikostjo normiranega magnetnega polja zanke B_I , ampak je odvisna od velikosti projekcije tega polja na ravnino, po kateri precesira dipol. Komponenta projiciranega polja v smeri osi z je enaka, komponenta v smeri osi x pa je enaka radialni komponenti magnetnega polja na izbranem mestu, pomnoženi s $\cos \phi$. Signal dipolov na različnih mestih ima različno velikost in fazo, četudi vsi dipoli precesirajo v fazi. Amplituda signala je $\sqrt{a^2 + b^2}$. Faza je kot med smerjo dipola ob času 0 (smer osi z) in smerjo projekcije magnetnega polja tokovne zanke na ravnino precesije dipola: $\arctg \frac{b}{a}$.

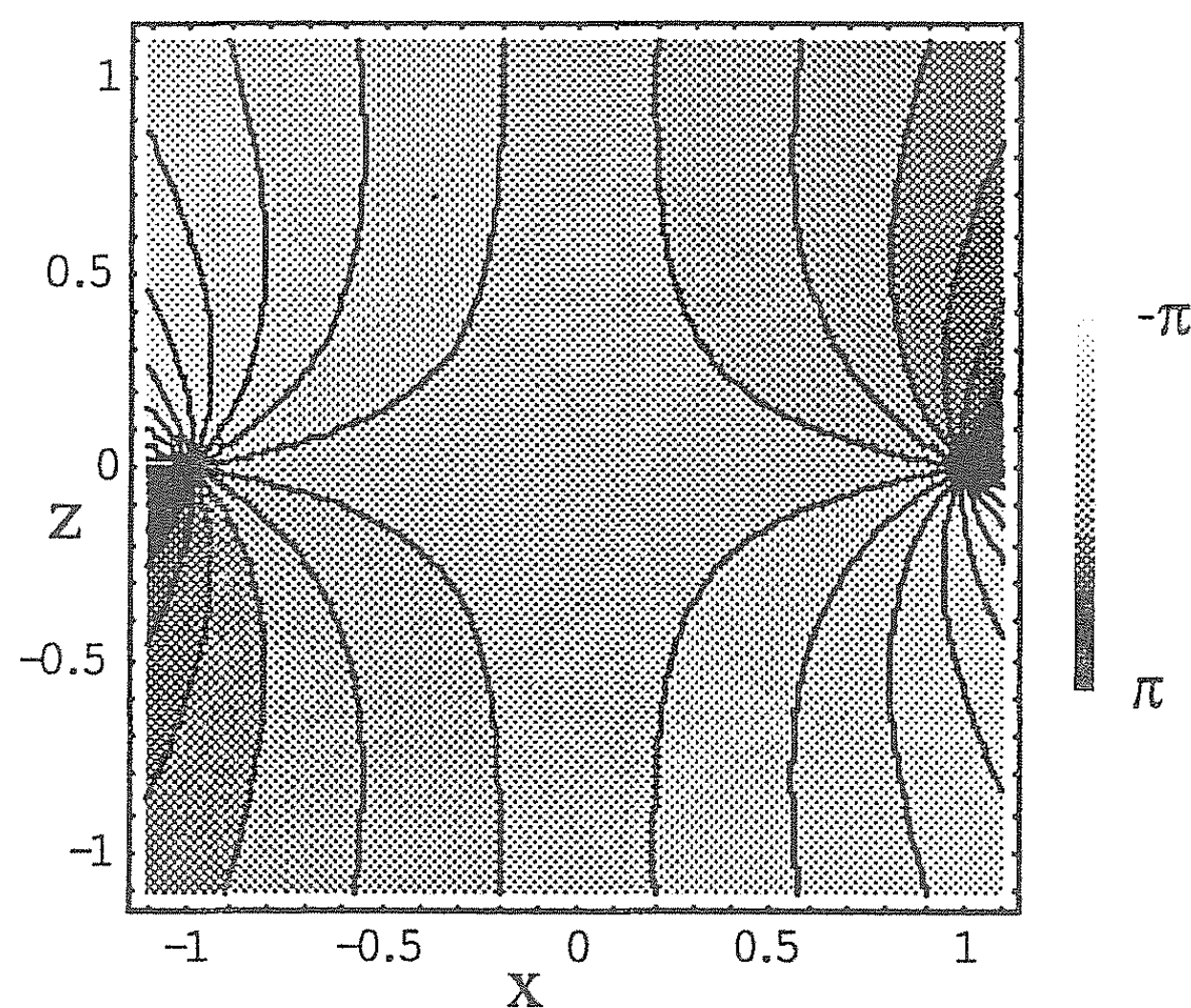
Sprejemnost f za izbrano mesto definiramo kot kompleksno število, katerega velikost je kvocient amplitude signala na izbranem mestu in amplitude signala v središču zanke $s(0,0,0) = \frac{\mu_0 \omega p_0}{2R}$, argument sprejemnosti pa je enak fazi, za katero zaostaja signal za precesijo dipola na izbranem mestu. Sprejemnost na osi zanke je realna:

$$f(0,0,z) = \frac{1}{(1+z'^2)^{3/2}} \quad (12)$$

in je prikazana na sliki 3b) spodaj. Sprejemnost za dipole, ki ležijo v ravninah $z = 0$, $y = 0$ in $x = 0$, je prikazana na sliki 3. Argument sprejemnosti je prikazan na sliki 4 za ravnino $y = 0$. Sprejemnost za dipole v ravninah $x = 0$ in $z = 0$ je realna in njen argument je enak nič. Velikost



Slika 3. Velikost signala, inducirane v zanki, položeni v ravnino $z = 0$, kot funkcija položaja magnetnega dipola. Magnetni moment precesira okoli osi, ki je vzporedna osi y . Prikazani so trije preseki in pod njimi velikost na osi: a) ravnina $z = 0$, os x , b) ravnina $y = 0$, os z in c) ravnina $x = 0$, os y .



Slika 4. Argument sprejemnosti, ki je enak fazi, za katero zaostaja signal za precesijo magnetnega momenta. Prikazan je argument v ravnini $y = 0$.

sprejemnosti je na desetino natančno enaka 1 v območju valja polmera in višine $R/2$.

Izračunajmo še signal, ki ga ustvari enakomerno magnetiziran neskončno dolg valj, ki ravno napolni zanko. Magnetizacija M naj precesira s frekvenco ω . V (10) moramo dipol zamenjati z MdV in integrirati po volumnu valja:

$$s = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^1 r dr \frac{\mu_0 M R^2 \omega \sin \omega t}{2\pi \sqrt{(1-r)^2 + z'^2}} \left(\frac{-1 + r^2 + z'^2}{(1+r)^2 + z'^2} E(k) - K(k) \right). \quad (13)$$

Rezultat je:

$$s = \mu_0 M \pi R^2 \omega \sin \omega t = BS \omega \sin \omega t. \quad (14)$$

Do enakega rezultata bi prišli na mnogo bolj enostaven način. Pri zelo dolgem valju, to je pri paličastem magnetu, je gostota magnetnega polja enaka kot v polju dolge tuljave. V notranjosti valja je $B = \mu_0 M$ in jakost magnetnega polja $H = 0$. Magnetni pretok je kar $\phi_m = BS = \mu_0 M \pi R^2$. Če to upoštevamo v (1), dobimo gornji izraz. Kadar pa valj ni neskončno dolg, je $H \neq 0$ in rezultat ni tako preprost (glej [5], str. 400).

LITERATURA

- [1] J. Stepišnik, Obzornik mat. fiz. **34** (1987) 9–17.
- [2] J. Stepišnik, Z. Phys. Chem. **190** (1995) 51–62.
- [3] M. Abramowitz, *Handbook of mathematical functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards, Washington, 1972.
- [4] I. Serša, *Prostorsko selektivna jedrska magnetna resonanca s pomočjo površinskih tuljav*, diplomsko delo, Ljubljana, 1991.
- [5] J. Strnad, *Fizika, 2. del, Električna, optika*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1978.

VESTI

DMFA Slovenije – Strokovno srečanje in 52. občni zbor

Strokovno srečanje matematikov, fizikov in astronomov, 52. občni zbor DMFA Slovenije ter 2. nacionalno konferenco fizikov v osnovnih raziskavah smo imeli letos od 9. do 11. novembra v Zrečah. Prvi dan so se člani društva lahko udeležili predavanj in predstavitev v okviru nacionalne konference ali pa so prisluhnili svojim kolegom, profesorjem matematike. Drugi dan, v petek, smo dali poseben poudarek mednarodnemu letu matematike. Sandi Klavžar, Marko Petkovšek in Dušan Repovš so predstavili svoja dela, ki so bila izdana v tujini. Na razpis je prispelo tudi precej matematičnih plakatov. Strokovnega dela se je udeležilo 145 članov društva, občnega zbora pa 71 članov. Vsi udeleženci so prejeli bilten s poročili in povzetki predavanj, lahko pa so kupili tudi lončke z logotipom društva in številom π na tisoč decimalnih mest.

Za pomoč pri organizaciji strokovnega srečanja in sobotnega izleta se posebej zahvaljujemo kolektivu Term Zreče ter Gospodarsko interesnemu združenju Dravinjske doline.

Nada Razpet

OSNOVNE FIZIKALNE KONSTANTE 1998

JANEZ STRNAD

PACS 06.20.Jr

Pred kratkim so objavili preglednico osnovnih konstant z novimi podatki in jih priporočili za rabo v fiziki in kemiji.

FUNDAMENTAL PHYSICAL CONSTANTS 1998

Recently a list of new values of the fundamental constants was published and recommended for use in physics and chemistry.

Mednarodni svet za znanost, nekdanji Mednarodni svet znanstvenih združenj, je leta 1966 osnoval Odbor za podatke za znanost in tehnologijo, CODATA, ki je tri leta pozneje sestavil Posebno skupino za osnovne konstante. Ta skupina je v letih 1973 in 1986 izdala preglednico osnovnih konstant za rabo v fiziki in kemiji. Pod nadzorstvom skupine, ki jo zdaj sestavlja trinajst članov iz devetih držav, je izšla tudi nova preglednica [1], ki so jo že povzele nekatere fizikalne revije [2]. Morda je prav, da v Obzorniku na kratko poročamo o novi preglednici. Obzornik je to storil, ko je začel izhajati [3], potem osnovnim konstantam ni posvečal veliko pozornosti.

V novi preglednici so upoštevali vse podatke, ki so bili na voljo do konca leta 1998. Daljši članek je izšel konec leta 1999 v Journal of Physical and Chemical Reference Data in na začetku leta 2000 v Reviews of Modern Physics [1] (preglednica 1). Navedbe v preglednici so negotove na zadnjem in predzadnjem mestu, ne samo na zadnjem, kakor je sicer v navadi. Pri tem uvedejo *negotovost* (angl. uncertainty, nem. Unsicherheit) kot ocenjeni efektivni odmik in *relativno negotovost* kot ocenjeni relativni efektivni odmik. V preglednici številki v oklepaju zaznamujeta negotovost na zadnjih dveh mestih, na primer 6,6720(41) pomeni $6,6720 \pm 0,0041$.

Prve tri konstante so gotove. Hitrost svetlobe c je določena z dogovorom o metru, induksijska konstanta μ_0 z dogovorom o amperu in influenčna konstanta ε_0 z enačbo za hitrost svetlobe v praznem prostoru $c = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$. Nekaterih drugih osnovnih konstant iz preglednice ne merijo naravnost, ampak merijo konstante, v katerih se v okviru kake teorije pojavijo osnovne konstante. Tako na primer natančno izmerijo kvant magnetnega pretoka $h/2e_0$ pri Josephsonovem pojavu ali Klitzingovo konstanto h/e_0^2 pri kvantnem Hallovem pojavu. Osnovni naboj e_0 se skupaj z drugimi osnovnimi konstantami pojavi tudi v konstanti fine strukture, v Rydbergovi konstanti in še v nekaterih drugih konstantah. Nazadnje iz večjega števila podatkov z metodo najmanjših kvadratov določijo najboljši niz osnovnih konstant. Pri tem upoštevajo tiste z manjšo negotovostjo z večjo utežjo. Najmanjša je relativna negotovost $8 \cdot 10^{-12}$ Rydbergove konstante za vodikov atom z neskončno maso R_∞ . Relativna negotovost večine drugih konstant je manjša od 10^{-7} . Od leta 1950 so se spremenile vrednosti konstant in

precej zmanjšale relativne negotovosti. Zanimivo je primerjati podatke za Planckovo konstanto, osnovni naboj in maso elektrona za zadnjih petdeset let iz preglednic iz leta 1950 [4] (po tej je posneta pregledica [3]), 1973 [5], 1986 [6] in 1998 [1] (preglednica 2). Lepo je mogoče zasledovati, kako se je zmanjševala negotovost. Poleg tega lahko tudi presodimo pomen negotovosti, ki so jih vsakokrat določili.

Preglednica 1. Osnovne fizikalne konstante [1]

Ime	podatek	relativna negotovost
hitrost svetlobe c	$2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}$	0
indukcijska konstanta μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/Am}$	0
influenčna konstanta ε_0	$8.854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$	0
gravitacijska konstanta $\mathcal{G}$	$6,673(10) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kgs}^2$	$1,5 \cdot 10^{-3}$
Planckova konstanta h	$6,626\,086\,76(52) \cdot 10^{-34} \text{ Js}$	$7,8 \cdot 10^{-8}$
kvant magnetnega pretoka $\phi_0 = h/2e$	$2,067\,833\,636(81) \cdot 10^{-15} \text{ Vs}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$
kvant prevodnosti $2e_0^2/h$	$7,748\,091\,696(28) \cdot 10^{-5} \text{ }\Omega^{-1}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$
osnovni naboj e_0	$1,602\,176\,462(63) \cdot 10^{-19} \text{ As}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$
masa elektrona m_e	$9,109\,381\,88(72) \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$
masa protona m_p	$1,672\,621\,58(13) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$
masa nevtrona m_n	$1,674\,927\,16(13) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$
konstanta fine strukture α	$7,297\,352\,533(27) \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-9}$
Rydbergova konstanta R_∞	$10\,973\,731,568\,549(83) \text{ m}^{-1}$	$7,6 \cdot 10^{-12}$
Avogadrovo število N_A	$6,022\,141\,99(47) \cdot 10^{23} \text{ (mol)}^{-1}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$
Faradayev naboj e_F	$96,485\,341\,5(39) \cdot 10^3 \text{ As/mol}$	$4,0 \cdot 10^{-8}$
plinska konstanta R	$8.314\,472(15) \text{ J/K}^*\text{mol}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Boltzmannova konstanta k_B	$1,389\,650\,3(24) \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$
Stefanova konstanta σ	$5,670\,400(40) \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$	$7,0 \cdot 10^{-6}$
elektronvolt eV	$1,602\,176\,462(63) \cdot 10^{-19} \text{ J}$	$3,9 \cdot 10^{-8}$
atomska enota mase $u = \frac{1}{12}m(^{12}\text{C})$	$1,660\,538\,73(13) \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$7,9 \cdot 10^{-8}$

V preglednici in v novejših učbenikih Angleži imenujejo indukcijsko konstanto μ_0 *magnetna konstanta* in influenčno konstanto ε_0 *električna konstanta*, Nemci pa *konstanta magnetnega polja* in *konstanta električnega polja*. Novi imeni se zdita utemeljeni, ker se konstanti pojavita v številnih zvezah in ju ne zasledimo samo pri pojavih, ki sta jima dala prvotni imeni. V preglednici sta navedeni stari imeni, ker bo trajalo nekaj časa, preden se bosta morda uveljavili novi.

Majhna anketa med člani Oddelka za fiziko je dala naslednji izid: od 40 vprašanih se jih je enajst ogrelo za magnetno in električno konstanto, štirje so stavili na stari imeni, trije so se odločili za konstanto magnetnega polja in konstanto električnega polja, eden se ni mogel odločiti med zadnjima možnostma in dva med starima imenoma in električno in magnetno konstanto. Nekdo je pripomnil, da je neka slovenska komisija itak že izbrala

imeni *permeabilnost vakuumu* za μ_0 in *permitivnost vakuumu* za ϵ_0 . Preglednica osnovnih konstant iz leta 1998 navaja, kot rečeno, magnetno in električno konstanto, v prejšnjih pa zares najdemo nenavadni imeni, ki naj bi ju sprejela domača komisija. O teh neposrečenih in zapoznelih imenih ne kaže izgubljati besed.

Preglednica 2. Primerjava nekaterih osnovnih fizikalnih konstant

Leto	$h \cdot 10^{34} \text{ (Js)}^{-1}$	$e_0 \cdot 10^{19} \text{ (As)}^{-1}$	$m_e \cdot 10^{31} \text{ (kg)}^{-1}$
1950 [4]	6,62377(18)	1,600 743(23)	9,107 21(25)
1973 [5]	6,626 167(38)	1,602 187 6(50)	9,109 533(47)
1986 [6]	6,626 075 5(40)	1,602 177 33(49)	9,109 389 7(54)
1998 [1]	6,626 086 76(52)	1,602 176 462(63)	9,109 381 88(72)

LITERATURA

[1] P. J. Mohr, B. N. Taylor, *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998*, Revs. Mod. Phys. **72** (2000) 351.
 [2] D. Leibfried, *CODATA empfiehlt "neue" Fundamentalkonstanten*, Phys. Bl. **56** (2000) 13 (3).
 [3] I. Kuščer, *Osnovne konstante*, Obzornik mat. fiz. **1** (1951) 132.
 [4] J. W. H. DuMond, E. R. Cohen, *Least-squares adjusted values of the atomic constants as of December, 1950*, Phys. Rev. **82** (1951) 555.
 [5] E. R. Cohen, B. N. Taylor, *The 1973 least-squares adjustment of the fundamental constants*, J. Phys. Chem. Ref. Data **2** (1973) 663.
 [6] E. R. Cohen, B. N. Taylor, *The 1986 adjustment of the fundamental physical constants*, Revs. Mod. Phys. **59** (1987) 1121.

VESTI

SEDMO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Letos je mednarodno tekmovanje študentov matematike potekalo v Londonu od 26. do 31. julija. Vsakoletno povečanje števila sodelujočih držav (letos so poleg evropskih univerz sodelovale tudi ekipe uglednih univerz iz Severne ter Južne Amerike in Irana) kaže, da tekmovanje počasi postaja naravno nadaljevanje že priznanih srednješolskih matematičnih olimpijad. Da matematika postaja čedalje bolj komercialno zanimiva, kaže tudi dejstvo, da je letos večji del stroškov tekmovanja pokrila ena največjih svetovnih bank Citibank, ki je vsem tekmovalcem vnaprej ponudila zelo dobro plačane službe. Citibank je financirala tudi prvo nagrado – enoletno šolanje v Veliki Britaniji, vključno z vsemi stroški, v vrednosti približno 25,000 britanskih funtov.

Slovenijo so zastopali: Matjaž Konvalinka ter Andrej Vodopivec iz tretjega letnika in Igor Klep ter Jernej Tonejc iz četrtega letnika.

Tekmovalci so dva dni, vsak dan po pet ur, reševali po šest nalog. Vsaka pravilno rešena naloga je prinesla po 20 točk.

Zelo zanimiv je tudi način popravljanja nalog, ki zagotavlja največjo možno mero korektnosti. Vsako nalogo (označeno le z naključno šifro tekmovalca) neodvisno ocenita po dva člana žirije iz različnih držav. Ko ocenita vse tekmovalce, se morata pri vsakem uskladiti glede števila doseženih točk. Po objavi rezultatov so možne pritožbe. Če vodja ekipe ne doseže soglasja glede ocene z obema popravljavcema, lahko iz skupine vnaprej določenih sodnikov iz petih različnih držav (ki niso popravljali nalog) izbere tri, ki dokončno odločijo o oceni.

I.1. Ali velja katera od naslednjih trditev: Če je funkcija $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$
 (a) monotonno naraščajoča,
 (b) monotonno padajoča,
 potem obstaja tak $x \in [0, 1]$, da je $f(x) = x$.

I.2. Naj bo $p(x) := x^5 + x$ in $q(x) := x^5 + x^2$. Poišči vse pare različnih kompleksnih števil (w, z) , za katere je hkrati $p(w) = p(z)$ in $q(w) = q(z)$.

I.3. A in B sta kvadratni kompleksni matriki enake velikosti, za kateri velja da je rang matrike $AB - BA$ enak 1. Pokaži, da je $(AB - BA)^2 = 0$.

I.4. Pokaži:

(a) Če je $(x_i)_i$ padajoče zaporedje pozitivnih števil, potem je

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{i}},$$

(b) Obstaja konstanta C , za katero velja: če je $(x_i)_i$ padajoče zaporedje pozitivnih števil, potem je

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\sum_{i=m}^{\infty} x_i^2 \right)^{1/2} \leq C \sum_{i=1}^{\infty} x_i,$$

I.5. Naj bo R (ne nujno komutativni) kolobar s karakteristiko 0, e, f in g pa idempotenti iz R , za katere velja $e + f + g = 0$. Pokaži, da je $e = f = g = 0$.

I.6. Naj bo $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ naraščajoča odvedljiva funkcija, ki ima omejen odvod f' in gre v neskončnosti prek vseh meja. Naj bo še $F(x) := \int_0^x f(t) dt$. Zaporedje $(a_n)_n$ je definirano rekurzivno s formulo

$$a_0 := 1, \quad a_{n+1} := a_n + \frac{1}{f(a_n)},$$

zaporedje $(b_n)_n$ pa s pravilom $b_n := F^{-1}(n)$. Pokaži, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$.

- II.1.** (a) Pokaži, da se da enotski kvadrat razrezati na n manjših (ne nujno enako velikih) kvadratkov, če je le n dovolj veliko naravno število.
 (b) Naj bo $d \geq 2$. Pokaži, da obstaja konstanta $N(d)$, za katero velja: če je $n \geq N(d)$, se da d -razsežna enotska kocka razdeliti v n manjših (ne nujno enako velikih) kock.
- II.2.** Naj bo $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna funkcija, ki ni nikjer monotona na intervalu $[0, 1]$. Pokaži, da je množica točk, v katerih f doseže lokalni minimum, gosta v intervalu $[0, 1]$. (Funkcija *ni nikjer monotona*, če ni monotona na nobenem podintervalu.)
- II.3.** Naj bo p polinom stopnje n s kompleksnimi koeficienti. Pokaži, da obstaja vsaj $n + 1$ kompleksnih števil, v katerih je vrednost polinoma 0 ali 1.
- II.4.** Graf polinoma stopnje šest ima tangento, ki se ga dotika v točkah A_1 , A_2 in A_3 , pri čemer točka A_2 leži med točkama A_1 in A_3 .
 (a) Pokaži: če sta dolžini daljic A_1A_2 in A_2A_3 enaki, sta enaki tudi ploščini območij, ki ju omejujeta ti dve daljici in graf polinoma.
 (b) Naj bo $k = \frac{A_2A_3}{A_1A_2}$ in K razmerje ploščin ustreznih območij. Pokaži, da velja neenakost:

$$\frac{2}{7}k^5 < K < \frac{7}{2}k^5,$$

- II.5.** Naj $\mathbb{R}^+$ pomeni množico vseh pozitivnih realnih števil. Poišči vse funkcije $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, za katere za vse $x, y \in \mathbb{R}^+$ velja enakost

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y),$$

- II.6.** Za kvadratno realno matriko A definirajmo $e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ (izkaže se, da ta vrsta konvergira za vsako matriko A). Dokaži ali ovrzi: za vsak realni polinom p in kvadratni realni matriki A in B je $p(e^{AB})$ nilpotentna matrika natanko tedaj, ko je nilpotentna matrika $p(e^{BA})$.

Nagrade se podelijo v podobnem razmerju kot na srednješolskih matematičnih olimpijadah. Naši tekmovalci so se izvrstno odrezali. Igor Klep je dobil prvo, Matjaž Konvalinka in Jernej Tonejc drugo, Andrej Vodopivec pa tretjo nagrado. Zanimivo je, da je Igor Klep prehitel vse udeležence iz držav bivše Jugoslavije (sodelovale so še univerze iz Zagreba, Beograda in Niša).

Nasploh se še vedno kaže prevlada univerz iz vzhodne Evrope. Tako se je za prvouvrščenim Madžarom uvrstila kar vsa ekipa štirih tekmovalcev iz Kijeva.

Najverjetneje bodo tekmovanje naslednje leto pripravili v Pragi.

Marjan Jerman

O začetkih pouka fizike na ljubljanski univerzi

O zgodovini fizikalnih znanosti na ljubljanski univerzi v prvih letih po njeni ustanovitvi leta 1919 ni kaj dosti napisanega. Članom našega društva ta snov gotovo ni poznana, zato sem se odločil, da podam kratko poročilo o razvoju fizike od leta 1919 do leta 1945. Spis je nastal ob mojih raziskovanjih dela in življenja matematika in drugega rektorja ljubljanske univerze prof. Riharda Zupančiča.

Še preden je bila leta 1919 ustanovljena ljubljanska univerza, se je začel na pobudo inž. Milana Šukljeta tako imenovani Začasni visokošolsko-tehniški tečaj za študente, ki so nameravali študirati tehniko. Predavanja so se začela marca 1919 in so trajala do novembra 1919. Po ustanovitvi univerze je tečaj štel za dva semestra študija tehnike. Tečaja se je udeležil med drugimi tudi prof. Anton Vakselj kot študent strojne smeri. Matematiko je honorarno predaval prof. dr. Rihard Zupančič. Ko se je decembra 1919 začel redni pouk na Tehniški fakulteti, je matematiko predaval prof. Zupančič, fiziko pa honorarno dr. Valentin Kušar. Ta je bil rojen leta 1873 v Retečah pri Škofji Loki, študiral na filozofski fakulteti na Dunaju skupaj s prof. Plemeljem in tam leta 1897 tudi doktoriral. Leta 1919 je bil prof. Kušar redno zaposlen kot učitelj matematike in fizike na 1. državni gimnaziji in na realki v Ljubljani. Tega leta je bil krajši čas na ministrstvu za uk in bogočastje v Beogradu, kjer naj bi pomagal pri organizaciji šolstva. Na univerzo ga je zelo verjetno povabil prof. Plemelj. Ni pa izključeno, da se je nanj spomnil prof. Zupančič, s katerim sta se tudi poznala, kot je razvidno npr. iz pisem prof. Rubinowicza Plemlju. Dr. Kušar je bil honorarni učitelj tudi na Filozofski fakulteti od leta 1921 naprej.

Ob ustanovitvi univerze med rednimi profesorji ni bilo učitelja fizike. Tu se je angažiral prof. Plemelj in začel vabiti v Ljubljano prof. dr. Adalberta Rubinowicza, ki ga je verjetno poznal še iz časov, ko je bil profesor v Černovicah v Bukovini. Tam je imel oče prof. Rubinowicza lekarno. Plemljeva študentka je bila tudi poznejša Rubinowiczeva soproga, dr. Ilse Norst. Dokumentirani pa so strokovni stiki v pisemh Rubinowicza Plemlju iz let 1916 in 1917. V zapuščini prof. Plemlja je kakšnih 15 pisem in kartic iz leta 1920, iz katerih je razvidno, da je pogajanja o nastavitvi vodil prof. Plemelj. Adalbert Rubinowicz (v Ljubljani je uporabljal ime Vojteh) je bil imenovan za rednega profesorja teoretične fizike na filozofski fakulteti 24. 7. 1920. Žal je ostal v Ljubljani le nepolni dve leti, 23. 3. 1922 je odpovedal službo in odšel za profesorja v Lvov. S Plemljem je imel občasne stike vse do leta 1964.

Seveda so predavatelje fizike potrebovali tudi na tehniški in medicinski fakulteti. V letu 1920/21 je honorarno predaval fiziko na medicinski fakulteti dr. Josip Reisner, od leta 1921/22 naprej pa dr. Julij Nardin. Ta je od leta 1927 predaval honorarno tudi na tehniški fakulteti.

Vse do leta 1924 univerza ni imela rednega učitelja fizike. Šele 1. 9. 1924 je bil imenovan za izrednega profesorja na tehniški fakulteti dr. Valentin Kušar. Lepo strokovno mnenje mu je napisal prof. Zupančič. Vendar tudi ta rešitev ni bila uspešna: prof. Kušar je bil namreč zaradi slabega vida – ekstremne kratkovidnosti, krvavitev v očesih itd. več časa na bolniški kot na predavanjih, zato je univerzitetni svet dne 24. 1. 1927 „zaradi bolehnosti in pogoste odsotnosti prof. Kušarja” predlagal, da se namesto njega nastavi dr. Hugo Sirk. Profesorja Plemelj in Zupančič sta glasovala proti predlogu, a sta bila preglasovana. Eden od očitkov je bil tudi, da je Sirk Nemec. Od aprila 1928 je bil dr. Hugo Sirk kontraktualni (pogodbeni) profesor eksperimentalne fizike na tehniški fakulteti.

Ker se po zakonskih predpisih prof. Kušarju ni moglo več odobravati bolniškega dopusta, je marca 1931 predlagal dekan tehniške fakultete prof. Hinterlechner, naj Kušar zaprosi za upokožitev. Postopek je stekel in 31. 10. 1932 je rektor prof. Slavič Kušarja razrešil službe. Poslal mu je tudi naslednje sporočilo: *Ob tej priliki se Vam v imenu univerze zahvaljujem za Vaše delo, ki ste ga na naši univerzi vzlic svojim zdravstvenim tegobam, dokler ste le mogli, tako vestno in smotrno opravljali ...*

Zanimiva je tudi zgodba o poskusu nastavitve dr. Stjepana Mohorovičiča za rednega profesorja teoretične fizike na filozofski fakulteti. V komisijo za strokovno mnenje sta bila imenovana profesorja Plemelj in Zupančič. O tem dogodku obstaja 13 dokumentov v Zupančičevi zapuščini iz let 1930 in 1931. Zupančič je od znanih evropskih fizikov pridobil 5 različnih mnenj o kandidatu, vsa so bila negativna. Prof. Plemelj je iz komisije izstopil, ker je Zupančič pridobil mnenja brez njegove vednosti. Nato je tudi Zupančič vrnil mandat, kar je razvidno iz njegovega pisma univerzitetnemu svetu. Tako je tudi ta poskus pridobiti kvalificiranega profesorja fizike propadel. Zelo verjetno se je odtujevanje profesorjev Plemelja in Zupančiča začelo ob tej epizodi, če pa je obstajalo že prej, pa se je še poglobilo.

Slaba zasedenost z učitelji fizike je trajala vse do druge svetovne vojne. To se je pokazalo tudi v številu diplomantov fizike: poleg Miroslava Adlešiča je diplomiral do druge svetovne vojne samo še en kandidat. Poznejši učitelji fizike na ljubljanski univerzi, kot npr. prof. Peterlin, Moljk in Kuščer, so diplomirali iz matematike. Šele leta 1930 sta postala Anton Peterlin in Anton Kuhelj pomožna asistenta na tehniški fakulteti. Peterlin je bil asistent za fiziko do leta 1939, kljub temu pa je predaval eksperimentalno fiziko na Tehniški fakulteti od leta 1936 naprej. Ko se je leta 1939 Peterlin vrnil s študijskega dopusta v Nemčiji, je bil izvoljen za docenta. Istega leta je prešel s Tehniške fakultete na Filozofsko fakulteto.

Leta 1938 je bil prof. Kuhelj izvoljen za izrednega profesorja. Po nepreverjenih podatkih je nekaj časa tudi prof. Kuhelj predaval fiziko, verjetno je nadomeščal Peterlina, ki je bil na študijskem dopustu. Univerzitetni senat je leta 1939 sklenil, naj se nastavi kot honorarni predavatelj za eksperimentalno fiziko na filozofski fakulteti dr. Rihard Klemen, docent na tehniški fa-

kulteti.¹ Leta 1940 je univerzitetni senat imenoval Antona Moljka za asistenta na Zavodu za fiziko, docenta dr. Peterlina pa za honorarnega predavatelja fizike na tehniški fakulteti. Kot zanimivost naj omenim še, da je leta 1941 Ivan Kuščer prejel svetosavsko nagrado za temo „Fizikalna svojstva obmorskih vrelcev“. Univerzitetni senat je predlagal leta 1943 napredovanje doc. Peterlina v izrednega profesorja, vendar okupacijska oblast napredovanja ni potrdila.

Zaradi pomanjkanja rednih učiteljev fizike je bil predstojnik fizikalnega inštituta pogosto matematik prof. Zupančič, dokler ni leta 1945 emigriral v Avstrijo. Po vojni so se razmere na fiziki začele urejevati. Docent Peterlin je bil decembra 1945 predlagan za rednega profesorja, leta 1946 je postal Ivan Kuščer asistent za fiziko, dr. Anton Moljk pa docent za fiziko. Za študij fizike se je odločalo čedalje več študentov, posebno še, ko so na fiziki uvedli smer tehnična fizika. Kljub trenju med osebjem na fiziki in političnim intervencijam, ki so imele med drugim za posledico odhod prof. Peterlina z ljubljanske univerze, se je fizikalna stroka ob pomoči Nuklearnega inštituta (nastopal je pod različnimi imeni) zelo hitro razvila in ljubljanska fizikalna šola je postala in ostala znana po svetu kot kvalitetna šola. Sistematično znanstveno-raziskovalno delo in redno poučevanje fizike se je začelo šele po letu 1945. Razvoj fizike po letu 1945 je zelo dobro obdelan in znan, zato naj s tem kratkim zgodovinskim pregledom razvoja fizike na ljubljanski univerzi končam.

LITERATURA

- [1] Zgodovina slovenske univerze v Ljubljani do leta 1929. Rektorat univerze kralja Aleksandra I. v Ljubljani. Ljubljana (verjetno 1930).
- [2] Zapisniki sej Univerzitetnega sveta, Univerzitetne uprave in Univerzitetnega senata Univerze v Ljubljani od let 1919 do 1950.
- [3] Personalna mapa dr. Valentina Kušarja v univerzitetnem arhivu.
- [4] Pisma prof. Rubinowicza Plemlju, arhiv oddelka za matematiko in mehaniko.

Anton Suhadolc

Zasedanje sveta Evropske matematične zveze v Barceloni

V začetku julija 2000 sem se udeležil dvodnevne zasedanja sveta Evropske matematične zveze v Barceloni. Ta organizacija se je v desetih letih svojega obstoja lepo uveljavila, zdaj pa so se pokazali tudi nekateri problemi.

Zasedanje je odprl predsednik zveze Rolf Jeltsch, sicer profesor „uporabne“ matematike na znani švicarski univerzi ETH. Zveza ima 54 skupinskih članov – večinoma državnih in regionalnih matematičnih društev – ter dva tisoč posameznih članov, med katerimi vlada precejšnja fluktuacija. Je finančno zdrava, kar pa ni čudno, saj bolj ali manj sloni na prostovoljnem

¹ O dr. Klemenu nimam nobenih podatkov, njegovo delovanje bo treba še raziskati.

delu. Ima majhen proračun in le eno stalno zaposleno osebo s polovičnim delovnim časom, pa še to plačuje finska vlada.

Med novostmi je uvedba nagrade Felixa Kleina za dosežke pri uporabi matematike v industriji ter raziskovalna revija *Journal of the EMS*, ki se odlikuje z dostopno ceno za manj premožne naročnike. Glasilo društva revija *Newsletter* je z novim urednikom Robinom Wilsonom dobilo privlačnejšo podobo. (Mimogrede, urednik me je zaprosil za članek o našem društvu: o njegovi zgodovini ali sedanjem delu, lahko tudi obojem, in to prošnjo zdaj posredujem našim članom.) Organiziranih je bilo več poletnih šol. Obstajajo problemi z organizacijo takih šol na vzhodu Evrope, saj je zanje težko dobiti denar iz Bruslja.

Zasedanje je potekalo tik pred Evropskim matematičnim kongresom, na katerem je bilo približno 1400 udeležencev. Stroški kongresa so znašali kakih 600 000 evrov, od tega je bilo 10 odstotkov namenjenih za nagrade, 20 odstotkov pa subvencioniranju prevoza za udeležence iz revnejših držav. Vsi stroški so bili pokriti, tudi s podporo države, regije, mesta in računalniških podjetij.

Ker je leto 2000 svetovno leto matematike, so na podzemskih železnicah v Parizu, Londonu, Barceloni in Montrealu razstavili matematične plakate. Odzivi mimoidočih nanje so bili po pripovedovanju kolegov različni – nekateri niso mogli verjeti, da se lahko na takih mestih pojavi tudi matematika. Organizirana je tudi skupna evropsko-arabska matematična konferenca.

Volitve novih članov izvršnega odbora so potekale v kar navijaškem ozračju. Vitali Milman iz Izraelskega matematičnega društva je uspešno predstavil Mino Teicher kot osebo, ki je v kratkem času zbrala 20 000 ameriških dolarjev za podporo Harkovskemu matematičnemu društvu, in sicer tako, da je vsak profesor na njeni univerzi prispeval 50 dolarjev na mesec. Preostala nova člana izvršnega odbora sta iz Španije in Rusije.

Pojavljajo se težave pri financiranju konferenc, saj navodila Evropske unije za prosilce subvencij obsegajo 50 strani. To naj bi, kot je priznal eden od uradnikov EU, odvrčalo kandidate.

Nemški matematik in računalnikar Martin Groetschel je predstavil

<http://www.math-net.de/>,

skladišče matematičnih informacij in povezav. Uporaba je zastonj, saj ta mreža ne išče dobička. Ima svoj statut, ki ga je odobrila Mednarodna matematična zveza. Vsebina naj bi bila razčlenjena prijazna uporabniku ter naj bi omogočala sodelovanje z drugimi podobnimi mrežami (<http://www.phys-net.de/>). Matematična mreža je delo skupin in institucij, ki skrbijo za kakovost in zanesljivost. Vprašal se je: če imamo informacije v elektronski obliki, zakaj jih ne bi delili z drugimi? Povedal je še, da je nekaj matematičnih oddelkov za to mrežo na novo napisalo svoje domače strani, ki so zdaj bolje urejene in lažje dostopne. Seveda gre to na račun oblikovanja. Prejšnje različice teh strani so bile namreč pogosto delo podiplomskih študentov, ki so jih napolnili z nepotrebnimi ozadji in z raznimi utripajočimi, plapolajočimi in vrtečimi se igrači, ki le otežujejo dostop.

Groetschel je povedal nekaj zanimivih podatkov o založništvu. V letih od 1986 do 1999 je cena revij zrasla za 270 %, cena knjig pa za 65 %. Ameriške raziskovalne knjižnice zato kupujejo 60 % manj knjig. Pravega razloga za vsa ta zvišanja menda ni – razen želje po večjem dobičku.

Groetschel je govoril tudi o internetu. Po njegovem naj bi kmalu bilo tako, da tistega, česar ne bo na internetu, praktično ne bo več. Sam se ukvarja tudi s povezavo med matematiko in drugimi disciplinami. Če potrebuje informacije zunaj matematike, jih poišče na medmrežju z orodji, kot so Google, Altavista, Infoseek, saj nima časa, da bi hodil po knjižnicah.

Več udeležencev je opozorilo na naraščajoče stroške udeležbe na matematičnih konferencah. Posebno angleške univerze se obnašajo kot podjetja, zaračunavajo oderuške cene za bivanje v študentskih naseljih in visoke kotizacije. Drugi so opozorili, da so računalniške konference pogosto še mnogo dražje: kotizacija je navadno petkrat višja.

Potem ko je bilo videti, da bomo lahko srečanje predčasno uspešno končali, se je zataknilo pri poročilu o naslednjem Evropskem matematičnem kongresu (2004). Organizator iz Goeteborga je namreč predstavil zelo mračno vmesno poročilo. Za financiranje je zaprosil sedem naslovov in štirje so ga že zavrnil. Počuti se izredno utrujenega in dvomi, da bo vzdržal pri tem delu. Vrsta delegatov je poskušala švedskemu kolegu dobronamerno pomagati z nasveti in optimizmom, vendar je ostal slab občutek. Rezervne lokacije za zdaj ni. Ideja, da bi konferenco pripravili skupaj z bogatim stricem iz Amerike, Ameriškim matematičnim društvom (AMS), pa ni bila sprejeta z navdušenjem.

Poročilo Odbora o ženskah v matematiki je predstavila profesorica Emilia Mezzetti s tržaške univerze. Z anketo nameravajo ugotoviti stanje in okoliščine poklicnega napredovanja matematičark.

Udeleženci so opozorili na bistveno vlogo osnovnih raziskav v vzgoji bodočih generacij matematikov. Poklic matematika bi bilo potrebno napraviti privlačnejši. Mnogi mladi matematiki namreč odhajajo v bančništvo in podobne donosne dejavnosti. Po drugi strani pa je prodor matematike v trgovanje in denarništvo razveseljiva novica.

Na koncu je srečanje pozdravil še predsednik Afriškega matematičnega društva Jan Persens. V prijetnem nagovoru se je zahvalil za podporo iz Evrope in povedal, da je imel tudi sam težave z organiziranjem Afriške matematične konference. Vendar se je na koncu vse uredilo: Južnoafriška republika je odobrila celo več sredstev, kot so pričakovali.

Vzporedno z zasedanjem je potekalo tudi srečanje evropskih matematičark, ki je bilo raziskovalno obarvano. Udeleženske so nas povabile na prijeten večer v enem od atrijev stare univerze v Barceloni.

Peter Legiša

Wilfried Imrich in Sandi Klavžar, Product Graphs: Structure and Recognition, John Wiley & Sons, New York, 2000, 358 str.

Avtorja sta ugledna raziskovalca na področju teorije grafov, zato ni naključje, da je monografijo izdala založba Wiley v elitni zbirki Discrete Mathematics and Optimization, ki jo urejata Ronald Graham in Jan Karel Lenstra. Izid knjige je pomemben dogodek za slovensko matematiko, saj je to po izidu Plemljeve (zanimivo, tudi pri založbi Wiley) [Plemelj: Problems in the sense of Riemann and Klein, New York, London, Sydney : Interscience Publishers : J. Wiley 1964] šele četrta zunaj Slovenije izdana knjiga, katere soavtorji so slovenski matematiki. Soavtorji drugih treh so Marko Petkovšek [Petkovšek, Wilf in Zeilberger: $A = B$. Wellesley (Massachusetts): A. K. Peters, 1996; Prevod: Tokyo: Toppan, 1997.], Dušan Repovš [Repovš in Semenov: Continuous selections of multivalued mappings. London: Kluwer Academic Publishers, 1998] in Milan Miklavčič [Miklavčič: Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations. Singapore: World Scientific 1998].

Produkti grafov so po besedah pisca predgovora, Petra Winklerja, zagotovo eno od najlepših poglavij teorije grafov. Temu podpisani z veseljem pritrdim, knjiga pa bo zagotovo pomagala prepričati še marsikoga, ki tega področja matematike (še) ne pozna.

Ob standardnih štirih produktih, kartezičnem, krepkem, direktnem in leksikografskem, avtorja obravnavata še nekaj pomembnih razredov grafov, kot so Hammingovi grafi, medianski grafi, grafi brez trikotnikov in po točkah tranzitivni grafi. Tipična vprašanja se nanašajo na enoličnost faktorizacije in učinkovitost prepoznavanja obravnavanih razredov. Presenetljivo zanimive so nekatere karakterizacije, v mnogih primerih pa obstajajo učinkoviti, torej polinomski, algoritmi. Matematiki smo pogosto v zadregi, ko moramo pojasnjevati, kaj in zakaj pravzaprav nekaj počnemo. Nam pogosto zadošča, da je teorija dovolj lepa, bogata z rezultati in podobno. Mnogo bolj smo prepričljivi, ko znamo povedati, kje in kako je lepo teorijo mogoče uporabiti. V knjigi nam avtorja ponudita kar nekaj posrečeno izbranih primerov uporabe v kemiji, teoriji kodiranja in teoriji informacije, operacijskih raziskavah in še kje.

Monografija je odličen pregled znanih rezultatov, hkrati pa se zdi napisana berljivo tudi za bralca, ki ni specialist na tem področju. Od prvih Sabidussijevih del pred približno štiridesetimi leti je število člankov s področja produktov grafov naraslo na več sto. Avtorja sta samo s pregledom in izborom znanih rezultatov opravila ogromno delo. Mnoge dokaze in algoritme sta napisala na novo in jih tako približala bralcu. Dodala sta še dobro mero svojih rezultatov, od katerih jih je kar nekaj v knjigi prvič objavljениh. K dobremu pregledu sodi seveda zbirka odprtih problemov, ki tudi tu

ne manjka. Med njimi je nekaj prav zanimivih in izzivalnih. Zanimivih ne nazadnje zato, ker jih je sorazmerno preprosto povedati, hkrati pa so, vsaj nekateri, očitno zelo težki. Lep primer je že od leta 1966 nedokazana Hedetniemijsva domneva, o kateri je nedavno pisal tudi Obzornik [OMF 45, str. 107–117].

Knjiga je primerno študijsko gradivo za nadaljevalni tečaj iz teorije grafov, priporočam pa jo tudi vsem, ki bi se radi seznanili s tem področjem matematike.

Janez Žerovnik

VESTI

Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1999*

Pedagoška fakulteta – Maribor

Univerzitetni študij

Matematika

21. Barber Janja	Rang grafa
22. Bohak-Farič Romana	Bilinearne in kvadratne forme
23. Eger Sonja	Dinamika holomorfnih funkcij ene kompleksne spremenljivke
24. Fošner Maja	Neasociativne strukture v asociativnih kolobarjih
25. Gubenšek Mihaela	Posplošitve barvanja točk grafov
26. Hebar Karmen	Laplaceova enačba
27. Hrastnik Irena	Enostavni ravninski loki s pozitivno ploščino
28. Hrast-Debeljak Branka	Funkcijska enačba $f^{-1} = \frac{1}{f}$ v realnem in kompleksnem
29. Hvala Renata	Kvazinilpotentna ekvivalenca operatorjev
30. Kuster Tjaša	Delovanje grupe na množico
31. Markelc Vida	Izometrije evklidskih prostorov
32. Mertük Valentina	Neodvisnostno število grafa in uporaba v teoriji informacije
33. Petric Jasna	Uporaba Bairovega izreka v analizi
34. Skaza Helena	Medianski grafi
35. Starček Simon	Dominantno in neodvisno število
36. Šamu Simona	Razširitve polj
37. Šimonka Anica	Ortogonalni polinomi

Fizika

2. Flajsinger Dean	Dinamika fazne meje med nematično in izotropno fazo tekočega kristala
3. Grubelnik Vladimir	Preklapljanje površinsko stabiliziranih celic smektičnega-C tekočega kristala z zunanjim električnim poljem
4. Haložan David	Lupine iz polielektrolitov – Donnanovo ravnoesje
5. Jančič Jasmina	Kvazikristali

* Seznam diplomantov iz leta 1998 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. **46** (1999) 5.

- | | |
|------------------------|--|
| 6. Kranjc Borut | Določanje površinske temperature belih pritlikavk z meritvijo fotometričnih barvnih indeksov |
| 7. Križnik Damjan | Avtorski sistem „Finot“ za izdelavo računalniških komunikacijskih testov pri pouku fizike |
| 8. Pungraič Sebastijan | Dvoosna struktura linijskega defekta v nematičnih tekočih kristalih |
| 9. Repnik Robert | Vpliv omejenosti na fazni prehod med nematično in smektično-A fazo |
| 10. Šoster Robert | Meritve potenciala zeta polimernih membran kot pokazatelja kemijske modifikacije površine membrane |

Matematika – fizika

- | | |
|--------------------------|--|
| 88. Aplinc Mateja | Linearno programiranje in teorija iger |
| 89. Jesenek Anja | Katakliksična dvojna zvezda UX UMa |
| 90. Lamprecht Katja | Interpolacija in kubični zlepci |
| 91. Šabeder Romana | Ravninske krivulje tretjega reda |
| 92. Tancer Mladen | Prostori za pouk fizike v osnovni šoli |
| 93. Vogrinec Tadeja | Sturm-Liouvilleov problem |
| 94. Kovše-Žinko Terezija | Avtomorfizmi na kolobarjih |

Angleški jezik – matematika

- | | |
|---------------|---|
| 1. Onič Tomaž | Harold Pinter's The caretaker and its Slovene translation |
|---------------|---|

Kemija – matematika

- | | |
|---------------------|---|
| 6. Štumberger Manja | Neskončni produkti |
| 7. Štunf Doroteja | Topološki indeksi v kemijski teoriji grafov |
| 8. Zorko Alenka | Integralske transformacije |

Biologija – matematika

- | | |
|-----------------|-------------------------|
| 4. Brlič Nataša | Konstrukcije z ravnilom |
|-----------------|-------------------------|

Matematika – proizvodno tehnična vzgoja

- | | |
|-------------------------|---|
| 10. Jurjec Marjanca | Dirichletov princip |
| 11. Konečnik Lidija | Kompleksna števila in geometrija |
| 12. Marčinković Bogomir | Izrek o kvadratni recipročnosti |
| 13. Oder Andreja | O domnevi o skupnem kromatičnem številu |
| 14. Špajzer Andreja | Tehnični in tehnološki predmeti v osnovni šoli – pregled stanja |
| 15. Tolič Lidija | O in o v teoriji števil |

Proizvodno tehnična vzgoja – fizika

- | | |
|--------------------|--|
| 11. Kožuh Vera | Prikaz delovnih operacij in dejavnosti z vidika ergonomske pravilnosti in psihomotoričnih in psihosenzornih zmožnosti učencev 6. razreda pri pouku tehnične vzgoje |
| 12. Puklavec Simon | Strategija in modeli uporabe igrač pri pouku tehnike in tehnologije v teoriji in praksi |
| 13. Šic Danijel | Strategija uporabe računalnika pri pouku tehnične vzgoje |

Računalništvo z matematiko

- | | |
|---------------------|-----------------------------------|
| 5. Magdalenc Simona | Konveksne množice v ravnini |
| 6. Majer Katarina | Problem trgovskega potnika |
| 7. Povalej Petra | Študija podatkovne baze |
| 8. Tisnikar Petra | Stirlingova in Catalanova števila |

- | | |
|--------------------|---|
| 9. Vučina Karolina | Analitične funkcije ene kompleksne spremenljivke in osnovni izrek algebre |
|--------------------|---|

Podiplomski študij

Matematika – področje izobraževanja

- | | |
|--------------------|---------------------------------|
| 4. Mencinger Matej | Diferencialne enačbe in algebra |
| 5. Žigert Petra | Wienerjev indeks |

Doktorati – matematika

- | | |
|------------------|---|
| 2. Petek Tatjana | Ohranjevalci komutativnosti in spektra |
| 3. Zmazek Blaž | Grafovski produkti in prepoznavanje grafovskih svežnjev |

Pedagoška fakulteta – Ljubljana

Univerzitetni študij

Matematika – fizika

- | | |
|----------------------------|---|
| 135. Fritz Polonca | Korak za korakom do grafov |
| 136. Kresnik Klavdija | Burnsideova lema in njena uporaba |
| 137. Tisov Mojca | O trikotniku nivojsko |
| 138. Doria-Peternel Alenka | Matematika starega Egipta |
| 139. Berk Aljoša | Entropija v termodinamiki in teoriji informacije |
| 140. Hafner Tina | Dvojno nihalo |
| 141. Kozole Matej | Razvoj kubičnih iracional v verižne ulomke |
| 142. Štrus Damjan | Zgodovinski razvoj algebre |
| 143. Bončina Jenko Mateja | Zgodovinski razvoj teorije grafov |
| 144. Verbinc Andreja | Razumevanje osnovnih geometrijskih pojmov |
| 145. Kmetec Katja | Analiza pojmovnega kota |
| 146. Drstvenšek Roman | Fizikalni model hidravličnega ovna |
| 147. Žganjar Franc | 1-faktorizacija kubičnih grafov |
| 148. Soderžnik Samo | Reševanje difuzijske enačbe |
| 149. Pušnik Suzana | Temperatura rastlinskega lista |
| 150. Lučić Maja | Merjenje sunkov sile s piezoelektričnim senzorjem |
| 151. Marc Petra | Matematična preiskovanja v osnovni šoli |
| 152. Rednak Barbara | Uporaba kompleksnih števil v geometriji |
| 153. Vidmar Barbka | Spektroskopija in slikanje z magnetno resonanco |
| 154. Bobič Martin | Uporaba video opreme za poskuse pri pouku fizike v OŠ in SS |
| 155. Marušić Nadja | Poučevanje in učenje s problemskim pristopom |
| 156. Balantič Janez | Fibonacci in zlato število |
| 157. Draksler Marjana | Janos Bólyai |

Matematika – tehnika

- | | |
|-----------------------|---|
| 46. Kronovšek Nataša | Kitajska algebra v 13. stoletju |
| 47. Hvalič Aleksandra | Reševanje kubičnih enačb |
| 48. Kobal Doroteja | Invariante Vasiljeva |
| 49. Mate Helena | Enačba pete stopnje |
| 50. Doganoc Eva | Linearno programiranje |
| 51. Kotar Katarina | Möbiusove transformacije |
| 52. Markovič Tanja | Razumevanje premega in obratnega sorazmerja |

53. Čemažar Zdenka	Paul Erdős
54. Kragelj Karmen	Risanje Juliajevih množic
55. Levpušček Agata	Reševanje matematičnih iger z linearnim programiranjem
56. Klančič Denis	Elektroenergetski sistemi Slovenije
57. Kopač Jazbec Saša	Osnove kombinatorične analize
58. Rodica Barbara	Program Miha in dinamična geometrija
59. Hvala Nina	Učne težave pri pouku geometrije
60. Gerdina Simon	Programski jezik java in uporaba pri pouku
61. Iskra Martina	Barvanje grafov
62. Jančar Sinja	Pitagora in zgodovina Pitagorovega izreka

Kemija – fizika

17. Petrica Polonca	Obravnava galvanskega člena pri fiziki in kemiji v srednji šoli
18. Pozderek Nataša	Odnos do fizike pri prehodu iz osnovne v srednjo šolo
19. Valenčič Marjetka	Sinteza 1-fenil-2-bromo-2-(3,5-dimetoksifenil)-2-fluoroetanona
20. Klopčič Suzana	Odnos učencev do kemije v sedmem razredu osnovne šole
21. Podobnik Irena	Polarizacija svetlobe pri poskusih s tekočimi kristali
22. Križman Milko	Kaj lahko pove fizika o velikosti in obliki živih bitij
23. Stare Katarina	Analiza rezultatov maturitetnega preizkusa iz splošne in organske kemije
24. Bandelj Kristjan	Analiza kemijskih nalog odprtega tipa - matura 1998
25. Rigler Ana Nuša	Zvok in zvočila

Fizika – tehnika

21. Antloga Gregor	Maloserijska izdelava šolskih modelov raket in letal
22. Grom Nataša	Primerjava elementov tehnike v obstoječih in prenovljenih programih vrtca in osnovne šole

Fakulteta za matematiko in fiziko

Višješolski študij

Matematika – uporabna smer

322. Obid Barbara	Reševanje bločno tridiagonalnih linearnih sistemov
323. Šušnjar Nadja	Konveksne množice na ravninski mreži
324. Keber Aleš	Igra ravbarji in žandarji in drevesna širina grafov
325. Kramar Branka	Zaokrožitvena napaka pri računanju s polinomi
326. Klep Mihael	

Fizika

239. Peternelj Blaž
240. Matos Gregor

Visokošolski strokovni študij

Praktična matematika

1. Žabkar Jure	Standard STEP in prikaz objektov
----------------	----------------------------------

Univerzitetni študij

Matematika – pedagoška smer

519. Vrtačič Romana	Značilnosti analitičnih funkcij in Picardov izrek
---------------------	---

- | | |
|---------------------|---------------------------------------|
| 520. Ban Jernej | Hopfove algebre |
| 521. Seljak Rudolf | Strukturna teorija Jordanovih algeber |
| 522. Merljak Matjaž | Lastnosti afino pravih večkotnikov |

Matematika – uporabna smer

- | | |
|-----------------------|--|
| 560. Mulej Darko | Boehmejevi prostori |
| 561. Nastran Gregor | Haarova mera |
| 562. Juranji Tatjana | Nekatere lastnosti grafov povezav |
| 563. Maurer Roman | Priprava velikih omrežij |
| 564. Rebec Barbara | Algoritmi za probleme razpostavljanja mnogokotnikov |
| 565. Petrovič Martina | Metode za razcep števil |
| 566. Križnik Katarina | Programski jezik java |
| 567. Vrbnjak Biserka | Grafi in delne urejenosti |
| 568. Basej Marko | Priprava domačih strani na internetu |
| 569. Vrečar Simon | Semidefinitno programiranje |
| 570. Vrčon Erik | SV-razcep matrik in njegova uporaba |
| 571. Jukić Nina | Spektralna reprezentacija stacionarnih časovnih vrst |
| 572. Jaklič Gašper | Bézierove krivulje in ploskve |

Matematika – teoretična smer

- | | |
|----------------------------|--|
| 56. Kukrika Marko | Procesi zlivanja in slučajne particije |
| 57. Malej Matevž | Uporaba matematičnih modelov v ekologiji |
| 58. Cvetko-Rasmussen Karin | Lastnosti notranjih avtomorfizmov polgrup edink |
| 59. Moravec Primož | Komutatorski predpisi na grupah |
| 60. Smrekar Jaka | Eulerjeva karakteristika reda 1 |
| 61. Šmigoc Helena | Obratni spektralni problem za nenegativne matrike |
| 62. Grošelj Petra | Teorija iger |
| 63. Kavkler Iztok | Podobnost enoparametričnih polgrup s polgrupami kontrakcij |
| 64. Ratej Sonja | Komutativnost v Banachovih algebrah |
| 65. Raič Mateja | Epimorfizmi Hausdorffovih topoloških grup |

Matematika – smer računalništvo z matematiko

- | | |
|----------------|-------------------|
| 8. Divjak Alen | Učenje na daljavo |
|----------------|-------------------|

Fizika – pedagoška smer

- | | |
|-------------------|--|
| 144. Obreht Anton | Raziskave pri predmetu projekti iz fizike in tehnike |
|-------------------|--|

Fizika

- | | |
|------------------------|--|
| 746. Kopač Primož | Študij urejenosti tankih plasti konfiniranih nematskih kristalov s kvadrupolno moteno jedrsko magnetno resonanco |
| 747. Florjanič Damjan | Določanje zgorelosti gorivnih elementov in presežne reaktivnosti raziskovalnega reaktorja TRIGA |
| 748. Bertalanič Renato | Diskretna stanja v resonatorjih in Casimirjev pojav |
| 749. Bratina Danijel | Modeliranje germanijevega detektorja tipa N za uporabo pri in-situ meritvah |
| 750. Bučar Klemen | Ionski spektrometer s spremenljivo razdaljo preleta |
| 751. Arsov Zoran | Amperometrična meritev sekrecije hormonov iz posamezne nevroendokrine celice |

752. Žumer Martin	Izdelava visokotemperaturnih superprevodnih mikrovalovnih komponent z metodo laserskega risanja
753. Supej Matej	Spektrometer življenjskega časa pozitronske anihilacije
754. Vesel Alenka	Nizkotlačna megatronska razelektritev
755. Jeromen Andrej	Minihladilnik s pulzno cevjo
756. Hočevar Grega	Vloga mišic pri sonožnem odzivu
757. Zajec Bojan	Študij kinetike sproščanja vodika iz stene vakuumске posode
758. Vencelj Matjaž	Dolgoživa stanja jeder v bližini ^{100}Sn
759. Klanjšek Martin	Raziskovanje ikozaedričnega kvazikristala Al-Pd-Mn z jedrsko magnetno resonanco
760. Hudej Robert	Meritev strukture elektronskih stanj visokotemperaturnega superprevodnika $\text{HgBa}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{8+x}$
761. Katrašnik Tomaž	Bipolaron z majhno efektivno maso
762. Vidrih Simon	Kako šibki so optični kandidati za optične dvojnike nekaterih radijskih pulzarjev?
763. Klopčar Nives	Anizotropija fotopolimera pri različnih pogojih polimerizacije
764. Brajnik Maja	Optika v gravitacijskem polju Schwarzschildove črne luknje
765. Celcer Mateja	Metoda za identifikacijo hadronov z detektorjem Čerenkovih obročev v spektrometru HERA-B
766. Petrič Zoran	Računalniška simulacija nestabilnosti v omejeni plazmi in primerjava z eksperimentom
767. Janc Damjan	Dvomezonske molekule
768. Bakula Sabina	Izboljšanje adhezivnosti površine poliamida s plazemsko obdelavo
769. Mally Mojca	Vgraditev por v membrane fosfolipidnih mehurčkov

Meteorologija

70. Knez Joško	Napovedovanje temperature in meteorološkega stanja cestišča
----------------	---

Podiplomski študij

Matematika – izobraževalna smer

19. Strašek Rok	Jordanski pristop k analizi na stožcih
20. Felda Darjo	Verjetnostni in analitični pristop v umbralnem računu
21. Čampelj Borut	Pisotova in Salemova števila

Matematika – raziskovalna smer

96. Kramar Marjeta	Trikotljivost družine operatorjev
97. Dolžan David	Struktura končnih kolobarjev
98. Fijavž Gašper	Minor-monotone invariante grafov
99. Šenk Katarina	Lokalna končnost za koalgebre
100. Demšar Urška	Popolni grafi in Bergeova domneva
101. Kavkler Alenka	Metode Rieszovih prostorov v ekonomiji

Fizika

180. Komelj Matej*	Izračun magnetnih lastnosti v sistemu $\text{Nd}_2\text{Fe}_{17-x}\text{Al}_x$ ab initio
--------------------	--

* še v letu 1998

181. Petkovšek Rok Krmiljenje volumsko stabiliziranih feroelektričnih tekoče-kristalnih prikazovalnikov
182. Skačej Gregor Sidranje na površini nematskega tekočega kristala: model s heksagonalno mrežo

Jedrska tehnika

25. Omahen Gregor Račun in-situ spektra žarkov gama z metodo Monte Carlo
26. Končar Boštjan Modeliranje vrenja podhlajenega toka
27. Jačimović Radojko Priprava in verifikacija jedrskih konstant za aktivacijsko analizo na osnovi evaluiranih knjižnic jedrskih podatkov
28. Jurkovič Mihael Prehodni pojavi z znižanim nivojem hladila v jedrski elektrarni

Doktorati – matematika

55. Cimprič Jaka Ureditve višjega eksponenta na nekomutativnih kolobarjih
56. Bren Matevž Mere različnosti
57. Govekar-Leban Darja Morerovi pogoji in Cauchy-Riemannove funkcije na realnih hiperploskvah v $\mathbb{C}^N$

Doktorati – fizika

194. Šalamun Igor Razpoznavanje predhodnih pojavov v jedrski elektrarni z metodo opazovanja ravnotežnih stanj
195. Žontar Dejan Study of radiation damage in silicon detectors to high luminosity experiments at LHC
196. Merzel Franc The construction of density functionals and their application to the electronic structure of atoms and molecules
197. Maučec Marko Monte Carlo preračuni transporta nevtronov in fotonov v zahtevnih geometrijah
198. Babič Dušan Meritve sevalnih lastnosti izoliranih mikronskih delcev
199. Širca Simon The axial form factor of the nucleon from coincident pion electro-production at low Q^2
200. Čepin Marko Tomaž Izboljšane zanesljivosti računalniških sistemov, povezanih z varnostjo jedrskih elektrarn
201. Prošek Andrej Ocena negotovosti realističnih simulacij potekov nezgod v jedrskih elektrarnah
202. Božič Bojan Vpliv zunanjih sil na obliko fosfolipidnega mehurčka
203. Mikac Mojca Urška Raziskave antiferoelektričnih faznih prehodov kvantnih feroelektrikov vrste $\text{Rb}_3\text{D}(\text{SO}_4)_2$ in $\text{Rb}_3\text{H}(\text{SO}_4)_2$ z jedrsko magnetno resonanco
204. Galičič Mirjam Observations of minute time-scale modulation of pulsar PSR 0531+21 optical pulses
205. Verovnik Ivo Kontinuirano opazovanje in merjenje interferenčne slike neodvisnih laserjev
206. Stanič Samo Search for charged Higgs bosons at LEP 2 collider
207. Slavinec Mitja Površinsko inducirani defekti v smektičnih A tekočih kristalih
208. Omerzu Aleš Magnetne, transportne in optične raziskave spojin na osnovi fulerenov

Janez Krušič