

2-177/00-4

MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

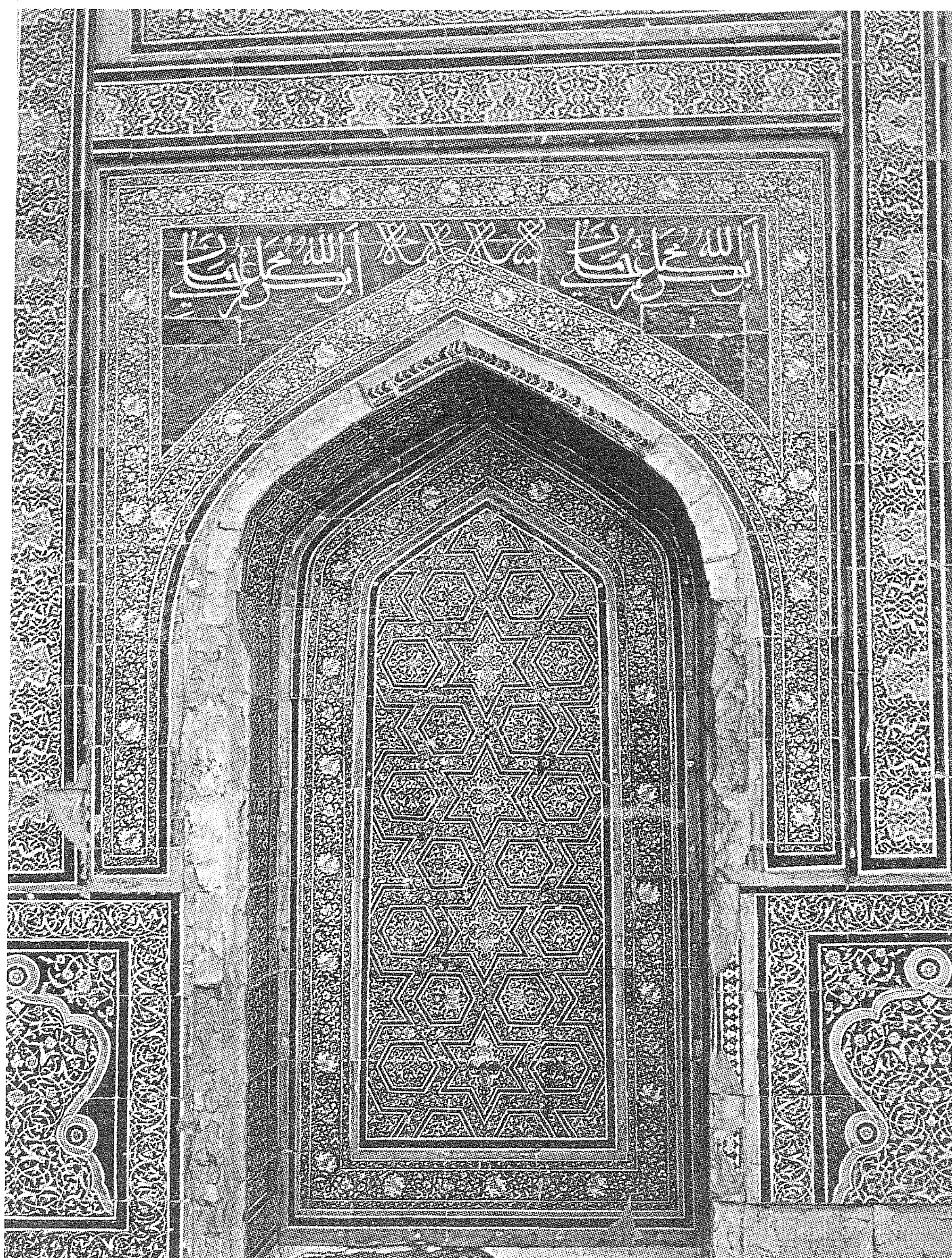
ODPISANO  
ODPISANO

2000

Letnik 47

4

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JULIJ 2000

letnik 47, številka 4, strani 97–128

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (01) 47-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

**Uredniški odbor:** Martin Juvan (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejema Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.300 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.600 SIT, za študente 1.650 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 660 SIT, stare številke 440 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2000 DMFA Slovenije – 1431 Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

---

## VSEBINA — CONTENTS

### Članki – Articles

Str.–Page

Vektorska polja na sferah — Vector fields on spheres (Jože Vrabec) . . . . . 97–108

Zvezne selekcije večličnih preslikav — Continuous selections of multivalued mappings (Jože Malešič) . . . . . 109–119

Precesija enakonočij — The precession of equinoxes (Janez Strnad) . . . . . 120–125

### Vesti — News

Popravek . . . . . 119

Še drobna zanimivost o Juriju Vegi (Marijan Prosen) . . . . . 126

Obvestilo . . . . . 128

Druga nacionalna konferenca fizikov v osnovnih raziskavah (Igor Muševič) . . . . . III

Strokovno srečanje in 52. občni zbor društva (Tomaž Pisanski) . . . . . IV

### Nove knjige – New books

(Jože Malešič) . . . . . 127–128

Na ovitku: *Oltar v mestni trdnjavi*, Hiva, Uzbekistan.

# VEKTORSKA POLJA NA SFERAH

JOŽE VRABEC

Math. Subj. Class. (1991): 57R25, 15A66

V članku pokažemo, kako z uporabo Cliffordovih algeber konstruiramo množico linearno neodvisnih vektorskih polj na enotski sferi evklidskega prostora. Za tako konstruirane množice se da dokazati, da so maksimalne (vendar tega dokaza ni v tem članku).

## VECTOR FIELDS ON SPHERES

We show how one can construct, using Clifford algebras, a set of linearly independent vector fields on the unit sphere of Euclidean space. It can be proved (but is not proved in this article) that the sets constructed in this way are maximal.

### 1. Vektorska polja

Vsak matematik ve, da je *vektorsko polje* na odprti množici  $G \subset \mathbb{R}^3$  zvezna preslikava  $v: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Povsem analogno definiramo vektorska polja na odprtih množicah v drugih evklidskih prostorih  $\mathbb{R}^n$ . Pojem vektorskega polja je nastal kot matematična abstrakcija posebnih polj, ki zanimajo fiziko (električno polje, magnetno, gravitacijsko, ...). Fizikalni problemi so motivirali tudi osnovno teorijo vektorskih polj, ki jo danes poznamo pod imenom vektorska analiza. Toda sčasoma so vektorska polja dobila tudi samostojen matematični pomen. Poljubnemu vektorskemu polju  $v$  na  $\mathbb{R}^n$  lahko pridružimo vektorsko diferencialno enačbo  $\varphi'(t) = v(\varphi(t))$  za neznano vektorsko funkcijo  $\varphi$  (z vrednostmi v  $\mathbb{R}^n$ ) skalarne spremenljivke  $t$  (oziroma če to enačbo napišemo po komponentah, sistem  $n$  skalarne diferencialnih enačb za  $n$  skalarne funkcije). Obratno vsaka vektorska diferencialna enačba  $\varphi'(t) = f(\varphi(t))$  podaja vektorsko polje na  $\mathbb{R}^n$ , namreč  $f$ . Diferencialno enačbo  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  na  $\mathbb{R}^n$  pa lahko spremenimo v diferencialno enačbo  $\psi'(t) = g(\psi(t))$  na  $\mathbb{R}^{n+1}$ , torej v vektorsko polje  $g$  na  $\mathbb{R}^{n+1}$ , s tem da  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  zamenjamo s  $\psi = (t, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$  in  $f = (f_1, \dots, f_n)$  z  $g = (1, f_1, \dots, f_n)$ . Vektorsko polje je torej »praktično isto« kot vektorska diferencialna enačba.

Seveda ima tudi ta pogled na vektorska polja podporo v fiziki. Tu na prvem mestu navedimo zgled, ki ga zgoraj nismo omenili. V prostorskem območju  $G$  naj se giblje poljubna tekočina in označimo z  $v: \mathbb{R} \times G \rightarrow \mathbb{R}^3$  hitrostno polje tega toka: za vsak trenutek  $t \in \mathbb{R}$  in za vsako točko  $x \in G$  naj bo  $v(t, x)$  vektorska hitrost delca tekočine, ki je v trenutku  $t$  na mestu  $x$ . Ta funkcija  $v$  je časovno spremenljivo vektorsko polje. Če pa je hitrost  $v$  neodvisna od  $t$  – tedaj pravimo, da je tok stacionaren – je  $v: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  običajno vektorsko polje na  $G$ . Vsaka rešitev  $x = \varphi(t)$  vektorskemu polju  $v$  pridružene diferencialne enačbe  $\varphi'(t) = v(\varphi(t))$  (ali tudi  $\varphi'(t) = v(t, \varphi(t))$ ) potem podaja možno gibanje delca tekočine v našem toku. Pri primerni interpretaciji (prostor  $\mathbb{R}^3$  moramo zamenjati s faznim prostorom  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ ) opišejo rešitve diferencialne enačbe, pridružene gravitacijskemu polju, možna

gibanja masnega delca v tem polju in nekaj podobnega velja tudi za druga polja (električno, magnetno), ki so v bistvu polja sil.

Za matematiko pa je važnejša uporaba vektorskih polj in pridruženih diferencialnih enačb v geometriji. Privzemimo, da je vektorsko polje  $v$  na  $\mathbb{R}^n$  ne samo zvezno, ampak tudi zvezno diferenciable. Znano je, da tedaj za vsako točko  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  obstaja natančno ena rešitev  $\varphi_{x_0}(t)$  diferencialne enačbe  $\varphi' = v(\varphi)$ , definirana na kakem odprtem intervalu  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  (število  $\varepsilon > 0$  je v splošnem odvisno od  $x_0$ ), ki ustreza začetnemu pogoju  $\varphi_{x_0}(0) = x_0$ , in da je ta funkcija  $\varphi$  odvisna zvezno diferenciable ne samo od spremenljivke  $t$ , temveč tudi od vektorskega parametra  $x_0$ . Geometrično so zanimivi predvsem primeri, ko je za vsak  $x_0$  funkcija  $\varphi_{x_0}$  definirana na vsej premici  $\mathbb{R}$  (ko torej pri vseh  $x_0$  lahko vzamemo  $\varepsilon = \infty$ ); tedaj pravimo, da sta vektorsko polje  $v$  in pridružena diferencialna enačba *kompletно integrabilna* ali kar *kompletна*. Znani so razni zadostni pogoji za  $v$ , ki nam zagotavljajo kompletnost (na  $\mathbb{R}^n$ ). V kompletno integrabilnem primeru pogosto zamenjamo vlogi argumentov  $t$  in  $x_0$  pri družini vseh rešitev  $\varphi_{x_0}(t)$ : točko  $x_0$  štejemo za »spremenljivko« (in jo zato rajši označimo z  $x$  brez indeksa), število  $t$  pa za »parameter«. To poudarimo tudi v zapisu: namesto  $\varphi_x(t)$  pišemo  $\Phi_t(x)$ . Za vsak  $t \in \mathbb{R}$  je tedaj  $\Phi_t$  zvezno diferenciable preslikava iz  $\mathbb{R}^n$  v  $\mathbb{R}^n$ . Po definiciji funkcije  $\varphi_x$  je  $\Phi_0(x) = x$  za vsak  $x$ , torej je

$$\Phi_0 = \text{id} . \quad (1)$$

Za poljubna (začasno fiksna)  $t$  in  $x$  je funkcija  $s \mapsto \varphi_x(s+t)$  rešitev naše diferencialne enačbe in ima pri  $s = 0$  vrednost  $\varphi_x(t) = \Phi_t(x)$ ; zaradi enolične rešljivosti enačbe je torej  $\varphi_x(s+t) = \varphi_{\Phi_t(x)}(s)$  za vsak  $s$ , se pravi  $\Phi_{s+t}(x) = \Phi_s(\Phi_t(x))$  oziroma

$$\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t . \quad (2)$$

Iz enakosti (1) in (2) sledi najprej, da ima za vsak  $t$  preslikava  $\Phi_t$  zvezno diferenciable inverzno preslikavo, namreč  $\Phi_{-t}$ , in je zato difeomorfizem prostora  $\mathbb{R}^n$ , nato pa še, da je s predpisom  $t \mapsto \Phi_t$  podan homomorfizem aditivne grupe  $\mathbb{R}$  v grupo difeomorfizmov prostora  $\mathbb{R}^n$ ; pravimo tudi, da je  $\{\Phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$  *enoparametrična grupa difeomorfizmov* prostora  $\mathbb{R}^n$ .

Če je točka  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ničla vektorskega polja  $v$ , tj.  $v(x_0) = 0^n := (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ , je očitno  $\varphi_{x_0}(t) \equiv x_0$  (kajti ta funkcija reši diferencialno enačbo  $\varphi' = v(\varphi)$ , rešitev z lastnostjo  $\varphi(0) = x_0$  pa je samo ena). Zato je (v kompletno integrabilnem primeru)  $x_0$  skupna negibna točka vseh difeomorfizmov  $\Phi_t$ . Dá se smiselno definirati in dokazati, da skupnost vseh rešitev  $\varphi_x$  ( $x \in M$ ) sestavlja »laminaren tok« v okolici vsake točke, ki ni ničla za  $v$ , v okolici ničle pa je ta tok tipično »turbulenten«. Zato ničle polja  $v$  imenujemo tudi *singularne točke* polja  $v$  oziroma pridružene diferencialne enačbe. Za geometrične namene so zaželena predvsem vektorska polja brez ničel oziroma singularnosti.

Vse povedano ostane v veljavi, če je vektorsko polje  $v$  definirano samo na kaki odprti množici v  $\mathbb{R}^n$ , edino zadostne pogoje za kompletno integrabilnost je teže najti. Nas pa bodo bolj zanimala vektorska polja na gladkih ploskvah ali, splošneje, na gladkih mnogoterostih. Naj bo  $M$  gladka  $m$ -razsežna mnogoterost v  $\mathbb{R}^n$ . Bralec, ki ne ve, kaj je to, naj si ne dela skrbi, ker se bomo po nekaj uvodnih odstavkih omejili na primer, ko je  $m = n - 1$  in je  $M$  enotska sfera  $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$  prostora  $\mathbb{R}^n$  (tu in v nadaljevanju označuje  $\|\cdot\|$  običajno evklidsko normo na  $\mathbb{R}^n$ ); začasno pa naj si predstavlja, da je  $M$  gladka ploskev v  $\mathbb{R}^3$ . V zvezi z  $M$  nas zanimajo taka zvezno diferenciable vektorska polja, definirana na kaki odprti množici  $G \supset M$ , da je mnogoterost  $M$  invariantna za pridruženo diferencialno enačbo: vsaka rešitev enačbe, ki ima začetno točko v  $M$ , cela leži v  $M$ . S prejšnjimi oznakami izrazimo to zahtevo takole: če je  $x \in M$ , je  $\varphi_x(t) \in M$  za vsak  $t$ , pri katerem je funkcija  $\varphi_x$  definirana. Če je vektorsko polje tako, da je ta zahteva izpolnjena, je za vsako točko  $x \in M$  vektor  $v(x) = v(\varphi_x(0)) = \varphi'_x(0)$  tangente na krivuljo  $\varphi_x((-\varepsilon, \varepsilon)) \subset M$  in zato na mnogoterost  $M$  v točki  $x$ . Obratno, če je vektorsko polje  $v: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  tako, da je za vsak  $x \in M$  vektor  $v(x)$  tangente na  $M$  v točki  $x$ , se da dokazati, da je mnogoterost  $M$  invariantna za enačbo  $\varphi' = v \circ \varphi$ . Zato definiramo, da je *vektorsko polje na  $M$*  taka zvezna preslikava  $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , da je za vsak  $x$  vektor  $v(x)$  tangente na  $M$  v točki  $x$ . Posebej:

**Definicija.** *Vektorsko polje na enotski sferi  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  je taka zvezna preslikava  $v: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , da je  $\langle v(x), x \rangle = 0$  za vsak  $x \in S^{n-1}$ ; tu (in v nadaljevanju) je  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  seveda običajni skalarni produkt v  $\mathbb{R}^n$ ).*

Prejšnje ugotovitve o diferencialni enačbi, pridruženi vektorskemu polju, in o rešitvah te enačbe veljajo tudi za vektorska polja na gladkih podmnogoterostih v  $\mathbb{R}^n$ . Del problema se celo poenostavi: ni se težko prepričati, da je v primeru, ko je  $M$  *sklenjena* gladka mnogoterost (npr.  $S^{n-1}$ ), *vsako* (zvezno diferenciable) vektorsko polje na  $M$  kompletno in tako dobimo enoparametrično družino  $\{\Phi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$  difeomorfizmov mnogoterosti  $M$ . To je mnogo uporabljana in najudobnejša metoda za konstrukcijo difeomorfizmov gladkih mnogoterosti.

## 2. Vektorska polja na sferah

Čeprav bomo poslej govorili samo še o vektorskih poljih na sferah, vsaj začetni del tega razdelka velja za vektorska polja na poljubnih gladkih mnogoterostih.

Prejšnjim (precej površnim) utemeljitvam prednosti vektorskih polj brez ničel lahko dodamo še tole: vektorsko polje  $v$  brez ničel na  $S^{n-1}$  porodi »zvezno družino tangent« za  $S^{n-1}$ , natančneje, v določenem smislu zvezno pravilo, ki vsaki točki  $x \in S^{n-1}$  dodeli premico  $\mathbb{R}v(x)$  (ali po želji

$x + \mathbb{R}v(x)$ ), ki je tangenta na  $S^{n-1}$  v točki  $x$ ; pri vektorskem polju, ki ima ničle, ta konstrukcija ni mogoča.

Podobno je mogoče konstruirati zvezne družine dvo- in večrazsežnih tangentnih ravnin na  $S^{n-1}$ . Za vektorska polja  $v_1, \dots, v_k$  na  $S^{n-1}$  bomo rekli, da so *linearno neodvisna* (oziroma *ortonormirana*), če so za vsak  $x \in S^{n-1}$  vektorji  $v_1(x), \dots, v_k(x) \in \mathbb{R}^n$  linearno neodvisni (oziroma ortonormirani). Razume se, da v linearno neodvisni skupini vektorskih polj nobeno teh polj nima ničle. Če imamo linearno neodvisno  $k$ -terico  $v_1, \dots, v_k$  vektorskih polj na  $S^{n-1}$ , lahko konstruiramo zvezno družino  $k$ -razsežnih tangentnih ravnin za  $S^{n-1}$  takole:

$$x \longmapsto (x +) \left\{ \lambda_1 v_1(x) + \dots + \lambda_k v_k(x) \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bralec, ki ve, kaj je tangentni sveženj, je gotovo opazil, da velja še več: s pravilom

$$(x, (\lambda_1, \dots, \lambda_k)) \longmapsto (x, \lambda_1 v_1(x) + \dots + \lambda_k v_k(x))$$

je definirana vložitev  $k$ -razsežnega produktnega svežnja  $S^{n-1} \times \mathbb{R}^k$  v tangentni sveženj  $TS^{n-1}$  sfere  $S^{n-1}$ . Linearno neodvisne množice vektorskih polj na  $S^{n-1}$  generirajo torej trivialne vektorske podsvežnje (direktne sumande) v tangentnem svežnju  $TS^{n-1}$  in so zato ključne za razumevanje diferencialne topologije in geometrije sfer. To utemeljuje pomembnost te naloge: **določiti maksimalno število linearno neodvisnih vektorskih polj na  $S^{n-1}$ .**

V prvem hipu morda sploh ni videti, da je tu kak problem. Prav lahko je namreč konstruirati vektorsko polje brez ničel na  $\mathbb{R}^n$ : vzamemo katerokoli neničelno konstantno funkcijo  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Podobno lahko je izbrati linearno neodvisno  $n$ -terico vektorskih polj. Človek v prvem hipu pomisli, da najbrž tudi z vektorskimi polji na sferi ni dosti težje, in se šele potem zave, da konstantna vektorska polja v  $\mathbb{R}^n$  nikoli niso povsod tangentna na sfero  $S^{n-1}$  in da se bo zato treba malo bolj potruditi. Pa problem ni samo v naši večji ali manjši spretnosti ali vztrajnosti:

**Izrek 1.** *Če je število  $n$  liho, ima vsako vektorsko polje na  $S^{n-1}$  ničlo.*

Ta izrek je znan pod imenom »izrek o lasati (ali dlakavi) krogli«, kajti v primeru  $n = 3$  ga lahko ponazorimo takole: če je kaka krogla vsa porasla z lasmi, je ni mogoče gladko počesati. Običajni dokaz izreka je eden od standardnih zgledov za uporabo preproste algebraične topologije in ga tu ne bomo podali. Bralec si lahko v Milnorjevem članku [4] ogleda dokaz, ki uporablja samo elementarno matematično analizo.

V kontrastu z izrekom 1 pa za vsako sodo število  $n = 2m$  na sferi  $S^{n-1}$  obstaja vektorsko polje brez ničel. Konstruiramo ga takole. Prostor  $\mathbb{R}^n$  predstavimo kot  $\mathbb{C}^m$  in s tem sfero  $S^{n-1}$  kot

$$\left\{ z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m \mid |z_1|^2 + \dots + |z_m|^2 = 1 \right\}.$$

Preslikava  $\mathbb{S}^{2m-1} \rightarrow \mathbb{C}^m$ , definirana s predpisom

$$z = (z_1, \dots, z_m) \mapsto iz = (iz_1, \dots, iz_m), \quad (3)$$

je brez ničle, in ker je standardni realni skalarni produkt  $\langle iz, z \rangle_{\mathbb{R}}$  v  $\mathbb{C}^m$  realna komponenta standardnega kompleksnega skalarne produkta  $\langle iz, z \rangle_{\mathbb{C}} = i\langle z, z \rangle_{\mathbb{C}} = i$ , je s predpisom (3) res podano vektorsko polje na  $\mathbb{S}^{2m-1}$ .

Podobno za  $n = 4m$  konstruiramo tri ortonormirana vektorska polja na  $\mathbb{S}^{n-1}$ : prostor  $\mathbb{R}^n$  predstavimo kot  $\mathbb{H}^m$ , kjer je  $\mathbb{H}$  obseg kvaternionov, in nato vektorska polja  $v_1, v_2, v_3 : \mathbb{S}^{4m-1} \rightarrow \mathbb{H}^m$  definiramo takole:

$$v_1(z) := iz, \quad v_2(z) := jz, \quad v_3(z) := kz,$$

kjer je  $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{H}^m$  taka  $m$ -terica, da je  $|z_1|^2 + \dots + |z_m|^2 = 1$  in so  $i, j, k$  običajne imaginarne kvaternionijske enote.

$\mathbb{C} = \mathcal{Cl}_1$  in  $\mathbb{H} = \mathcal{Cl}_2$  sta začetni »standardni« Cliffordovi algebri. V nadaljevanju bomo pokazali, kako s splošnejšimi Cliffordovimi algebrami dobimo v nekaterih primerih še več ortonormiranih vektorskih polj na  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

*Radon-Hurwitzova funkcija*  $\rho: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je definirana takole: poljubno naravno število  $n$  ima natančno eno izražavo oblike  $n = 16^a \cdot 2^b \cdot (2c+1)$ , kjer so  $a, b, c$  nenegativna cela števila in je  $b \leq 3$ , in za tak  $n$  naj bo  $\rho(n) := 8a + 2^b$ . Glavni namen tega sestavka, ki je osnovan na 12. poglavju Husemollerjeve knjige [2], je dokazati tale

**Izrek 2.** *Za vsako naravno število  $n$  obstaja na  $\mathbb{S}^{n-1}$  vsaj  $\rho(n) - 1$  linearno neodvisnih vektorskih polj.*

Ta izrek dobi polno veljavo šele v paru z naslednjim izrekom:

**Izrek 3** (Adams [1]). *Na  $\mathbb{S}^{n-1}$  ne obstaja  $\rho(n)$  linearno neodvisnih vektorskih polj.*

Očitno je izrek 1 poseben primer izreka 3. Dokaz izreka 3 je neprimerno težji in daljši od dokaza izreka 2. Tu ga ne bomo podali. Izrek 3 je dokazan tudi v 16. poglavju Husemollerjeve knjige [2] in v razdelku V.2 Karoubijeve knjige [3].

### 3. Cliffordove algebre

Pred dokazom izreka 2 bomo navedli osnovne definicije in dejstva o Cliffordovih algebrah – ne več, kot potrebujemo tu. Za poljubno polje (komutativen obseg)  $K$ , poljuben vektorski prostor  $V$  nad  $K$  in poljubno kvadratno formo  $q: V \rightarrow K$  definiramo *Cliffordovo algebro*  $\mathcal{Cl}(V, q)$  kot (asociativno)  $K$ -algebro z enoto  $\mathbf{1}$ , ki vsebuje  $V$  kot linearen podprostor

in ki je generirana s to svojo podmnožico  $V$ , pri čemer vsak tak generator  $x \in V$  ustreza relaciji

$$x^2 = q(x) \cdot 1 \quad (4)$$

(mišljeno je, da v  $\mathcal{Cl}(V, q)$  veljajo poleg »trivialnih« ali »tavnoloških« enakosti, kot je npr.  $(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$  ali  $3a - 2a = a$ , samo še enakosti, ki so posledice relacij (4)). S temi zahtevami je algebra  $\mathcal{Cl}(V, q)$  določena do (kanoničnega) izomorfizma natančno. Kako jo konstruiramo, bomo pokazali samo v posebnem primeru, ko je  $K = \mathbb{R}$ ,  $V = \mathbb{R}^k$  (za kak  $k \in \mathbb{N}$ ) in  $q(x) = -\|x\|^2$  – ustrezno Cliffordovo algebro bomo označili na kratko s  $\mathcal{Cl}_k$  – kajti v dokazu izreka 2 bomo uporabljali samo take Cliffordove algebre.

*V nadaljevanju bo beseda »algebra« vedno pomenila algebro nad poljem  $\mathbb{R}$ , vse naše algebre bodo imele enoto in pod izrazom »homomorfizem algeber« bomo razumeli tak homomorfizem (algeber), ki preslika enoto v enoto.*

Označimo z  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle$  algebro realnih polinomov *nekomutirajočih* simbolov  $X_1, \dots, X_k$ . Ta algebra je čisto podobna običajni algebri polinomov, le da »spremenljivke«  $X_1, \dots, X_k$  tu ne komutirajo med seboj, pač pa komutirajo s koeficienti (ki so realna števila). Natančneje, vsak element algebre  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle$  je končna linearna kombinacija (z realnimi koeficienti) *monomov*, vsak monom pa je niz (»produkt«) oblike  $X_{i_1} \cdots X_{i_r}$ , v katerem so indeksi  $i_1, \dots, i_r$  poljubni elementi množice  $\{1, 2, \dots, k\}$ ; število  $r$  je *stopnja* monoma. Upoštevati moramo še *prazni monom*  $\emptyset$ , ki je stopnje 0. Očitno obstaja  $k^r$  monomov stopnje  $r$ . Zaporedje (»produkt«) enakih simbolov (»faktorjev«) v monomu navadno zapišemo v obliki potence na običajni način, vrstnega reda simbolov v njem pa ne smemo spreminjati. Za  $k = 2$  imamo npr. tele monome stopnje  $\leq 3$ :

$$\begin{aligned} &\emptyset; X_1, X_2; X_1^2, X_1X_2, X_2X_1, X_2^2; \\ &X_1^3, X_1^2X_2, X_1X_2X_1, X_1X_2^2, X_2X_1^2, X_2X_1X_2, X_2^2X_1, X_2^3. \end{aligned}$$

To, kar smo opisali doslej, bi bolj formalno povedali takole: množica monomov je prosti monoid z bazo  $\{X_1, \dots, X_k\}$ ,  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle$  pa je realni vektorski prostor, ki ima za bazo množico vseh monomov.

Množenje polinomov iz  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle$  je definirano takole: produkt enočlenih polinomov  $\lambda X_{i_1} \cdots X_{i_r}$  in  $\mu X_{j_1} \cdots X_{j_s}$ , v katerih sta  $\lambda$  in  $\mu$  realna koeficienta, je  $\lambda\mu X_{i_1} \cdots X_{i_r} X_{j_1} \cdots X_{j_s}$ , dva poljubna polinoma pa zmnožimo tako, da pomnožimo vsak člen prvega z vsakim členom drugega in te produkte seštejemo. Očitno je prazni monom (opremljen s koeficientom 1) enota za množenje v  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle$  in ga bomo zato odslej označevali z  $1$ .

Označimo z  $I_k$  dvostranski ideal algebre  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle$ , ki ga generirajo vsi kvadratni polinomi oblike

$$(\lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_k X_k)^2 + (\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_k^2) \cdot 1 \quad (5)$$

za  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ . Označimo s  $\mathcal{C}\ell_k$  kvocientno algebro  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle / I_k$  in s  $p: \mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle \rightarrow \mathcal{C}\ell_k$  kvocientno projekcijo. Sliko enote  $p(1)$  označimo spet z  $1$ .

Posebej definiramo, da je  $\mathcal{C}\ell_0 := \mathbb{R}$ .

Oglejmo si najpreprostejši primer  $k = 1$ . Očitno je  $\mathbb{R}\langle X \rangle$  kar običajna algebra  $\mathbb{R}[X]$  »komutativnih« polinomov, vsak generator (5) ideala  $I_1$  pa je oblike  $\lambda^2(X^2 + 1)$ . To pomeni, da je  $I_1$  glavni ideal  $(X^2 + 1)$  in zato je  $\mathcal{C}\ell_1 = \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ .

**Lema 1.** Linearna preslikava  $\iota: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{C}\ell_k$ , definirana s pravilom

$$\iota(\lambda_1, \dots, \lambda_k) := p(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k)$$

(za poljubne  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ), je injektivna.

*Dokaz.* Naj bo  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  tak vektor v  $\mathbb{R}^k$ , da je  $\iota(\lambda) = p(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k) = 0$ . Ker  $p$  preslika tudi element (5) ideala  $I_k$  v  $0$ , sledi od tod, da v  $\mathcal{C}\ell_k$  velja enakost  $(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_k^2) \cdot 1 = 0$  in da je zato  $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$  – če je  $1 \neq 0$  v  $\mathcal{C}\ell_k$ , torej če je  $\mathcal{C}\ell_k$  neničelna algebra. Prav tu pa je glavna težava (obstaja več kot en učbenik, v katerem je avtor to težavo spregledal). Zdi se, da ni zelo preprostega dokaza za neničelnost algebre  $\mathcal{C}\ell_k$  (in če bi v konstrukciji zamenjali algebro  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle$  z algebro komutativnih polinomov, potem bi bil ideal, generiran z elementi (5), pri  $k > 1$  dejansko enak celi algebri  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_k]$ , tako da bi bila kvocientna algebra trivialna). Običajna pot je, da konstruiramo izomorfizem vektorskih prostorov

$$\mathcal{C}\ell_k \cong \underbrace{\mathcal{C}\ell_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{C}\ell_1}_k \cong \underbrace{\mathbb{C} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}}_k. \quad (6)$$

Od tod sledi, da je  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}\ell_k = 2^k$ , in zato je seveda  $\mathcal{C}\ell_k \neq 0$ . Da bi v (6) dobili izomorfizem algeber, bi morali običajni tenzorski produkt algeber zamenjati s stopničastim tenzorskim produktom glede na naravno  $\mathbb{Z}_2$ -stopničenje algeber  $\mathcal{C}\ell_k$  in  $\mathbb{C}$ . V dokazu relacije (6) se tej stopničasti teoriji žal ne moremo izogniti. Če bi hoteli definirati in razložiti vse potrebno, bi nam vzelo preveč prostora, zato bomo dokaz trditve (6) izpustili. ■

Zdaj je že razvidno, da algebre  $\mathcal{C}\ell_k$  ustrezajo splošni definiciji Cliffordovih algeber, kot smo jo podali v prvem odstavku tega razdelka: če prostor  $\mathbb{R}^k$  enačimo z njegovo izomorfno sliko  $\iota(\mathbb{R}^k)$ , smemo reči, da  $\mathcal{C}\ell_k$  vsebuje  $\mathbb{R}^k$  kot linearen podprostor; ker je algebra  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle$  generirana (kot algebra z enoto) s polinomi  $X_1, \dots, X_k$  in zato toliko bolj z vsemi homogenimi linearnimi polinomi  $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k$ , je  $\mathcal{C}\ell_k$  generirana z elementi  $p(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_k X_k) = \iota(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ; in ker v  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle$  ni netrivialnih enakosti, vse netrivialne enakosti v  $\mathcal{C}\ell_k$  izhajajo iz deljenja z idealom  $I_k$ , to je iz relacij, da so slike generatorjev (5) ideala  $I_k$  enake  $0$ ; te relacije pa so natančno relacije (4).

Naj bo  $\{e_1, \dots, e_k\}$  naravna baza prostora  $\mathbb{R}^k$  ( $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$  itd.). Za vsak  $i \in \{1, \dots, k\}$  naj bo  $\varepsilon_i := \iota(e_i) = p(X_i)$ .

Prej smo sicer rekli, da lahko elemente iz  $\mathbb{R}^k$  enačimo z njihovimi slikami pri  $\iota$ , in v skladu s tem bi smeli pisati kar  $e_i$  namesto  $\varepsilon_i$ , a v prihodnje nam bo prišlo ločevanje med  $e_i \in \mathbb{R}^k$  in  $\varepsilon_i \in \mathcal{Cl}_k$  kar prav.

**Lema 2.** *Elementi  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \mathcal{Cl}_k$  ustrezajo enakostim*

$$\varepsilon_i^2 = -1 \quad (i = 1, \dots, k) \quad (7)$$

$$\varepsilon_j \varepsilon_i = -\varepsilon_i \varepsilon_j \quad (i, j = 1, \dots, k, \quad i \neq j) \quad (8)$$

*Dokaz.* Enakosti (7) sledijo neposredno iz definicije algebre  $\mathcal{Cl}_k$ , saj je  $\varepsilon_i^2 + 1 = p(X_i^2 + 1)$ , polinom  $X_i^2 + 1$  pa je v idealu  $I_k$ , ker je oblike (5). S podobnim sklepanjem ugotovimo, da je  $(\varepsilon_i + \varepsilon_j)^2 + 2 \cdot 1 = 0$ , če je  $i \neq j$ . Če pa v tej zadnji enakosti izvedemo kvadriranje na levi strani in nato upoštevamo enakosti (7), dobimo enakost (8). ■

**Posledica.**  $E := \{1\} \cup \{\varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_m} \mid 1 \leq m \leq k, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq k\}$  je baza vektorskega prostora  $\mathcal{Cl}_k$ .

*Dokaz.* Ker je vektorski prostor  $\mathbb{R}\langle X_1, \dots, X_k \rangle$  generiran z vsemi monomi, je prostor  $\mathcal{Cl}_k$  generiran s slikami teh monomov, torej z enoto 1 in vsemi mogočimi produkti  $\varepsilon_{i_1} \cdots \varepsilon_{i_r}$ , kjer so  $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, k\}$ . Z relacijami (8) pa lahko v vsakem takem produktu preuredimo faktorje tako, da indeksi  $i_1, \dots, i_r$  sestavljajo nepadajoče zaporedje (in pri tem morda spremenimo znak produkta), nato pa lahko z relacijami (7) eliminiramo vse potence  $\varepsilon_i^t$  z eksponenti  $t > 1$  (in pri tem morda spet spremenimo znak). Zato množica  $E$  generira vektorski prostor  $\mathcal{Cl}_k$ . Ker pa je  $\dim \mathcal{Cl}_k = 2^k = (\text{moč množice } E)$ , je  $E$  baza. ■

Na osnovi te posledice in leme 2 je prav lahko »prepoznati« algebro  $\mathcal{Cl}_2$ . Kot vektorski prostor ima bazo  $\{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2\}$ , in če pogledamo, kako se elementi  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1 \varepsilon_2$  množijo med seboj, ugotovimo, da je s predpisom  $\lambda_0 1 + \lambda_1 \varepsilon_1 + \lambda_2 \varepsilon_2 + \lambda_3 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mapsto \lambda_0 + \lambda_1 i + \lambda_2 j + \lambda_3 k$  podan izomorfizem algebre  $\mathcal{Cl}_k$  na algebro kvaternionov  $\mathbb{H}$ .

Nadaljnjih algeber  $\mathcal{Cl}_k$  ne prepoznamo tako zlahka, kot smo  $\mathcal{Cl}_1$  in  $\mathcal{Cl}_2$ . Odkrili pa so nekakšne rekurzivne relacije, ki povezujejo algebre  $\mathcal{Cl}_k$  in nekatere druge Cliffordove algebre (ki jih dobimo pri drugih kvadratnih formah). Te relacije nam dajo konec koncev tale rezultat:

**Izrek 4.** *Za vsako algebro  $K$  in vsako naravno število  $m$  naj  $K(m)$  označuje algebro matrik velikosti  $m \times m$  z elementi iz  $K$ . Cliffordove algebre  $\mathcal{Cl}_k$  za  $0 \leq k \leq 7$  podaja tabela*

| $k$              | 0            | 1            | 2            | 3                              | 4               | 5               | 6               | 7                                    |
|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------------------------------------|
| $\mathcal{Cl}_k$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{H}$ | $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ | $\mathbb{H}(2)$ | $\mathbb{C}(4)$ | $\mathbb{R}(8)$ | $\mathbb{R}(8) \times \mathbb{R}(8)$ |

Poleg tega za vsako celo število  $k \geq 0$  obstaja izomorfizem  $\mathcal{Cl}_{k+8} \cong \mathcal{Cl}_k(16)$ .

Dokaz je preobsežen, da bi ga podali tu, zato sprejmimo izrek 4 brez njega.

## 4. Konstrukcija vektorskih polj na sferah

V tem razdelku bomo dokazali izrek 2.

V 2. razdelku smo pokazali: kadar prostor  $\mathbb{R}^n$  lahko predstavimo kot vektorski prostor nad  $\mathbb{C}$  ali  $\mathbb{H}$ , nam to zagotavlja eksistenco določenega števila ortonormiranih vektorskih polj na  $S^{n-1}$ . Naslednja trditev nam pove, da velja nekaj podobnega, kadar lahko predstavimo  $\mathbb{R}^n$  kot modul nad kako Cliffordovo algebro.

**Trditev 1.** *Če obstaja homomorfizem algeber  $\mathcal{Cl}_k \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$  (tj. če  $\mathbb{R}^n$  dopušča strukturo unitalnega  $\mathcal{Cl}_k$ -modula), obstaja na  $S^{n-1}$  ortonormirana  $k$ -terica vektorskih polj.*

Tu pomeni  $\text{End}(\mathbb{R}^n)$  seveda algebro  $\mathbb{R}$ -linearnih preslikav  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Pripomnimo, da ortonormirana  $k$ -terica vektorskih polj ni za naše namene nič »boljša« kot linearno neodvisna  $k$ -terica, kajti vsako linearno neodvisno  $k$ -terico lahko z znanim Gram-Schmidtovim postopkom spremenimo v ortonormirano  $k$ -terico.

Lahko bi se zdelo, da je trditev 1 prešibka, kajti v nekaterih primerih obstaja na  $S^{n-1}$  več ortonormiranih vektorskih polj, kot nam jih da ta trditev: kot smo pokazali v 2. razdelku, lahko dobimo v primeru  $n = 4m$ , torej tedaj, ko je  $\mathbb{R}^n$  vektorski prostor nad  $\mathbb{H} = \mathcal{Cl}_2$ , na  $S^{n-1}$  ne le dve (kot pravi trditev 1), ampak celo tri ortonormirana vektorska polja. Toda lahko je videti, da je  $\mathbb{R}^{4m}$  tudi modul nad  $\mathcal{Cl}_3$ , tako da dobimo na  $S^{4m-1}$  tudi po trditvi 1 tri ortonormirana vektorska polja. Sicer pa so vse skrbi odveč: iz trditve 1 (in izreka 4) bomo izpeljali izrek 2, se pravi, da bomo za vsak  $n$  na  $S^{n-1}$  dobili  $\rho(n) - 1$  linearno neodvisnih (ali po želji ortonormiranih) vektorskih polj, več jih pa po izreku 3 tako ali tako ni.

*Dokaz trditve 1.* Naj bo  $f: \mathcal{Cl}_k \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$  homomorfizem. Iz leme 2 sledi, da za linearne preslikave  $u_i := f(\varepsilon_i) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, \dots, k$ ) veljajo enakosti

$$u_i^2 = -\text{id} \quad \text{za vsak } i, \quad (9)$$

$$u_j u_i = -u_i u_j \quad \text{za } i \neq j. \quad (10)$$

**Lema 3.** *Privzeti smemo, da so  $u_1, \dots, u_k$  ortogonalne transformacije.*

Odložimo dokaz te leme in nadaljujmo dokaz trditve 1. V skladu z lemo 3 privzemimo, da vsi  $u_i$  ležijo v grupi  $O(n)$  ortogonalnih transformacij prostora  $\mathbb{R}^n$ . Če na obeh straneh enakosti (9) vzamemo kompozitum z  $u_i^*$  (tj. s preslikavi  $u_i$  adjungirano preslikavo) in upoštevamo, da je  $u_i u_i^* = \text{id}$ , dobimo

$$u_i^* = -u_i. \quad (11)$$

Pokažimo, da so preslikave  $v_i := u_i|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $i = 1, \dots, k$ ) ortonormirana vektorska polja na  $S^{n-1}$ .

Za vsak  $i \in \{1, \dots, k\}$  in vsak  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  je

$$\langle v_i(x), x \rangle = \langle u_i(x), x \rangle \stackrel{(11)}{=} \langle x, -u_i(x) \rangle = -\langle x, v_i(x) \rangle,$$

iz enakosti  $\langle v_i(x), x \rangle = -\langle v_i(x), x \rangle$  pa sledi  $\langle v_i(x), x \rangle = 0$ , torej je  $v_i$  res (tangentno) vektorsko polje na  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Za poljubna različna  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  in vsak  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  je

$$\begin{aligned} \langle v_i(x), v_j(x) \rangle &= \langle u_i(x), u_j(x) \rangle \stackrel{(11)}{=} \langle x, -u_i u_j(x) \rangle \stackrel{(10)}{=} \langle x, u_j u_i(x) \rangle \\ &\stackrel{(11)}{=} \langle -u_j(x), u_i(x) \rangle = -\langle v_j(x), v_i(x) \rangle, \end{aligned}$$

od tod pa spet sledi  $\langle v_i(x), v_j(x) \rangle = 0$ , torej so vektorska polja  $v_1, \dots, v_k$  paroma ortogonalna.

In končno za vsak  $i \in \{1, \dots, k\}$  in vsak  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$  velja

$$\langle v_i(x), v_i(x) \rangle = \langle u_i(x), u_i(x) \rangle \stackrel{(11)}{=} \langle x, -u_i^2(x) \rangle \stackrel{(9)}{=} \langle x, x \rangle = 1,$$

torej je vsak  $v_i$  polje enotskih vektorjev. ■

*Dokaz leme 3.* Iz enakosti (9) sledi, da za vsak  $i$  leži  $u_i$  v grupi  $GL(n, \mathbb{R})$  obrnljivih linearnih transformacij prostora  $\mathbb{R}^n$  in da je  $u_i^{-1} = -u_i$ . Označimo z  $G$  podgrupo v  $GL(n, \mathbb{R})$ , ki jo generirajo  $u_1, \dots, u_k$ . Ta grupa sestoji iz vseh mogočih produktov transformacij  $u_1, \dots, u_k$  in njihovih inverzov, torej je

$$G = \left\{ \pm u_{i_1} \cdots u_{i_r} \mid r \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, k\} \right\}.$$

Toda zaradi enakosti (10) lahko vsak element grupe  $G$  spremenimo v produkt  $\pm u_{i_1} \cdots u_{i_r}$ , v katerem je  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$ . Ker pa je zaradi enakosti (9) vsaka potenca  $u_i^m$  enaka  $\pm \text{id}$  (če je  $m$  sod) ali  $\pm u_i$  (če je  $m$  lih), je konec koncev

$$G = \{\pm \text{id}\} \cup \{\pm u_{i_1} \cdots u_{i_r} \mid 1 \leq r \leq k, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq k\},$$

to pa pomeni, da je grupa  $G$  končna.

Definirajmo preslikavo  $\sigma: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  s formulo

$$\sigma(x, y) := \sum_{g \in G} \langle g(x), g(y) \rangle.$$

Takoj vidimo, da je  $\sigma$  (neki nov) skalarni produkt na  $\mathbb{R}^n$ . Glede na ta skalarni produkt je vsaka transformacija  $u_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) izometrija:

$$\sigma(u_i(x), u_i(y)) = \sum_{g \in G} \langle g u_i(x), g u_i(y) \rangle = \sum_{\gamma \in G u_i = G} \langle \gamma(x), \gamma(y) \rangle = \sigma(x, y)$$

(srednji enačaj v tem računu dobimo s substitucijo  $g u_i =: \gamma$ ).

Če izberemo ortonormirano bazo, npr.  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , prostora  $\mathbb{R}^n$  glede na skalarni produkt  $\sigma$ , je linearna preslikava  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definirana s pravilom  $h(e_j) := a_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), izometrija prostora  $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  na prostor  $(\mathbb{R}^n, \sigma)$ : za poljubna vektorja  $x, y \in \mathbb{R}^n$  je  $\sigma(h(x), h(y)) = \langle x, y \rangle$ . Definirajmo zdaj preslikavo  $f': \mathcal{C}\ell_k \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$  s pravilom: za vsak  $\alpha \in \mathcal{C}\ell_k$  naj bo  $f'(\alpha) := h^{-1}f(\alpha)h$ . Zlahka se prepričamo, da je  $f'$  homomorfizem algeber. Pri tem novem homomorfizmu je za vsak  $i \in \{1, \dots, k\}$  transformacija  $u'_i := f'(\varepsilon_i)$  prostora  $\mathbb{R}^n$  kompozitum izometrij

$$(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \xrightarrow{h} (\mathbb{R}^n, \sigma) \xrightarrow{u_i} (\mathbb{R}^n, \sigma) \xrightarrow{h^{-1}} (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle),$$

torej je izometrija prostora  $\mathbb{R}^n$  glede na običajni skalarni produkt, se pravi, da je  $u'_i \in O(n)$ . ■

*Dokaz izreka 2.* Glede na trditev 1 je dovolj dokazati, da

(\*) za vsako naravno število  $n$  obstaja homomorfizem algeber

$$\mathcal{C}\ell_{\rho(n)-1} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n).$$

Pri konstrukciji takih homomorfizmov si bomo pomagali z naslednjima preprostima lemmama.

**Lema 4.** Za poljubno realno algebro  $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$  obstaja naraven homomorfizem  $K \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^d)$ , kjer je  $d := \dim_{\mathbb{R}} K$ .

*Dokaz.* Za poljuben  $\alpha \in K$  označimo z  $\hat{\alpha}: K \rightarrow K$  operacijo množenja z  $\alpha$ :  $x \mapsto \alpha x$  ( $x \in K$ ). Očitno je preslikava  $\hat{\alpha}$   $\mathbb{R}$ -linearna (v primeru  $K = \mathbb{H}$  res samo  $\mathbb{R}$ -linearna in v splošnem ne tudi  $\mathbb{H}$ -linearna ali  $\mathbb{C}$ -linearna). Poleg tega je pravilo  $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$  homomorfizem realnih algeber  $f: K \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(K)$ . Prostor  $K$  kot realni vektorski prostor pa je izomorfen prostoru  $\mathbb{R}^d$  in tako lahko razumemo  $f$  kot homomorfizem  $K \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^d)$ . ■

**Lema 5.** Za poljubno realno algebro  $K$  in poljubni naravni števili  $m, n$  lahko vsak homomorfizem  $K \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$  »razširimo« do homomorfizma  $K(m) \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{mn})$ .

*Dokaz.* Naj bo dan homomorfizem  $f: K \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ . Prostor  $\mathbb{R}^{mn}$  predstavimo kot kartezični produkt  $m$  primerkov prostora  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathbb{R}^{mn} = (\mathbb{R}^n)^m = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ . Definirajmo preslikavo  $F: K(m) \rightarrow \text{End}((\mathbb{R}^n)^m)$  takole:  $F$  naj poljubno matriko  $A = [\alpha_{ij}]_{i,j=1}^m \in K(m)$  prevede v linearno preslikavo  $F(A): (\mathbb{R}^n)^m \rightarrow (\mathbb{R}^n)^m$ , ki poljuben  $x = [x_i]_{i=1}^m \in (\mathbb{R}^n)^m$  preslika v

$$(F(A))(x) := \left[ \sum_{j=1}^m \left( f(\alpha_{ij}) \right) (x_j) \right]_{i=1}^m \in (\mathbb{R}^n)^m.$$

Preprosta računsko dokaza, da je preslikava  $F(A)$  res linearna in da je  $F$  homomorfizem algeber, bomo izpustili. Pripomnimo, da je  $F$  le neznatna posplošitev dobro znane preslikave, ki vsaki matriki iz  $K(m)$  pridruži  $\mathbb{R}$ -linearo preslikavo  $K^m \rightarrow K^m$ . ■

Dokažimo zdaj trditev (\*) in s tem izrek 2. V prvem koraku bomo obravnavali števila  $n$  oblike  $2^b$ , kjer je  $0 \leq b \leq 3$ . Sklicevali se bomo seveda na izrek 4. Homomorfizma  $\mathcal{C}l_{\rho(1)-1} = \mathcal{C}l_0 = \mathbb{R} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R})$  in  $\mathcal{C}l_{\rho(2)-1} = \mathcal{C}l_1 = \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^2)$  dobimo neposredno iz leme 4, homomorfizem  $\mathcal{C}l_{\rho(4)-1} = \mathcal{C}l_3 = \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^4)$  kot kompozitum naravne projekcije  $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  (recimo na prvi faktor) in homomorfizma iz leme 4, homomorfizem  $\mathcal{C}l_{\rho(8)-1} = \mathcal{C}l_7 = \mathbb{R}(8) \times \mathbb{R}(8) \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^8)$  pa kot kompozitum projekcije  $\mathbb{R}(8) \times \mathbb{R}(8) \rightarrow \mathbb{R}(8)$  in naravnega homomorfizma (v resnici izomorfizma)  $\mathbb{R}(8) \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^8)$ , ki ga navsezadnje dobimo tudi iz lem 4 in 5.

V drugem koraku bomo dokazali trditev (\*) za števila  $n$  oblike  $16^a \cdot 2^b$  ( $a \geq 0$ ,  $0 \leq b \leq 3$ ), in sicer z indukcijo na  $a$ . Pri  $a = 0$  je trditev pravilna, kot smo pokazali v prvem koraku. Privzemimo, da je pravilna za neki  $n = 16^a \cdot 2^b$ , da torej obstaja homomorfizem  $f: \mathcal{C}l_k \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ , kjer je  $k = \rho(n) - 1 = 8a + 2^b - 1$ . Za število  $n' = 16^{a+1} \cdot 2^b = 16n$  je  $\rho(n') - 1 = 8(a+1) + 2^b - 1 = k + 8$ . Po izreku 4 je  $\mathcal{C}l_{k+8} = \mathcal{C}l_k(16)$ . Zato dobimo homomorfizem  $\mathcal{C}l_{k+8} = \mathcal{C}l_k(16) \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{16n}) = \text{End}(\mathbb{R}^{n'})$  iz homomorfizma  $f$  in leme 5.

Končno vzemimo poljubno naravno število  $n = 16^a \cdot 2^b \cdot (2c+1)$ , kjer so  $a, b, c \geq 0$  in je  $b \leq 3$ . Naj bo  $m := 16^a \cdot 2^b$ . Kot smo pokazali v prejšnjem koraku, obstaja homomorfizem  $f: \mathcal{C}l_k \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^m)$ , kjer je  $k := \rho(m) - 1$ . Če je  $c = 0$ , je  $n = m$  in nam ni treba storiti nič. Tudi za  $c > 0$  pa je  $\rho(n) = \rho(m)$  in zato lahko homomorfizem  $\mathcal{C}l_{\rho(n)-1} = \mathcal{C}l_k \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{m(2c+1)}) = \text{End}(\mathbb{R}^n)$  konstruiramo kot kompozitum diagonalne vložitve  $\mathcal{C}l_k \rightarrow \mathcal{C}l_k(2c+1)$  (vsak  $\alpha \in \mathcal{C}l_k$  se preslika v diagonalno matriko z elementom  $\alpha$  po diagonali) in homomorfizma  $\mathcal{C}l_k(2c+1) \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^{m(2c+1)})$ , ki nam ga dasta homomorfizem  $f$  in lema 5. Dokaz je končan. ■

## LITERATURA

- [1] J. F. Adams, *Vector fields on spheres*, Ann. Math. (2) **75** (1962) 603–632.
- [2] D. Husemoller, *Fibre Bundles* (3rd edition), Graduate Texts in Mathematics, 20, Springer, New York, 1994.
- [3] M. Karoubi, *K-Theory*, Grundlehren der math. Wissenschaften, 226, Springer, Berlin, 1978.
- [4] J. Milnor, *Analytic proofs of the 'Hairy ball theorem' and the Brouwer fixed point theorem*, Amer. Math. Monthly **85** (1978) 521–524.

# ZVEZNE SELEKCIJE VEČLIČNIH PRESLIKAV

JOŽE MALEŠIČ

Math. Subj. Class. (1991): 54C65, 54E45

V članku na elementaren način predstavimo teorijo zveznih selekcij večličnih preslikav. Kot ilustracijo uporabimo selekcijske izreke pri dokazu, da lahko spremenljivko  $\delta$  v  $\varepsilon$ - $\delta$  definiciji zveznosti funkcije v točki  $x$  izberemo tako, da je zvezno odvisna od  $\varepsilon$  in  $x$ .

## CONTINUOUS SELECTIONS OF MULTIVALUED MAPPINGS

An elementary introduction to the theory of continuous selections of multivalued mappings is given. The selection theorems are applied as an example of how to prove that the variable  $\delta$  in the  $\varepsilon$ - $\delta$  definition of continuity at a point  $x$  can be chosen to depend continuously on  $\varepsilon$  and  $x$ .

### Večlične preslikave

Naj bosta  $X$  in  $Y$  poljubni množici. *Enolična* preslikava  $f : X \rightarrow Y$  je predpis, ki vsaki točki  $x \in X$  priredi natančno določeno točko  $f(x) \in Y$ . *Večlična* preslikava  $F : X \rightarrow Y$  pa je predpis, ki vsaki točki  $x \in X$  v splošnem ne priredi le ene točke iz  $Y$ , ampak neko neprazno podmnožico  $F(x) \subset Y$ . Kadar je  $Y \subseteq \mathbb{R}$ , pravimo preslikavi (enolični ali večlični) *funkcija* (enolična ali večlična).

**Primer 1.** Naj bo  $X = Y = \mathbb{R}$ . Večlična funkcija  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  naj bo dana s predpisom:

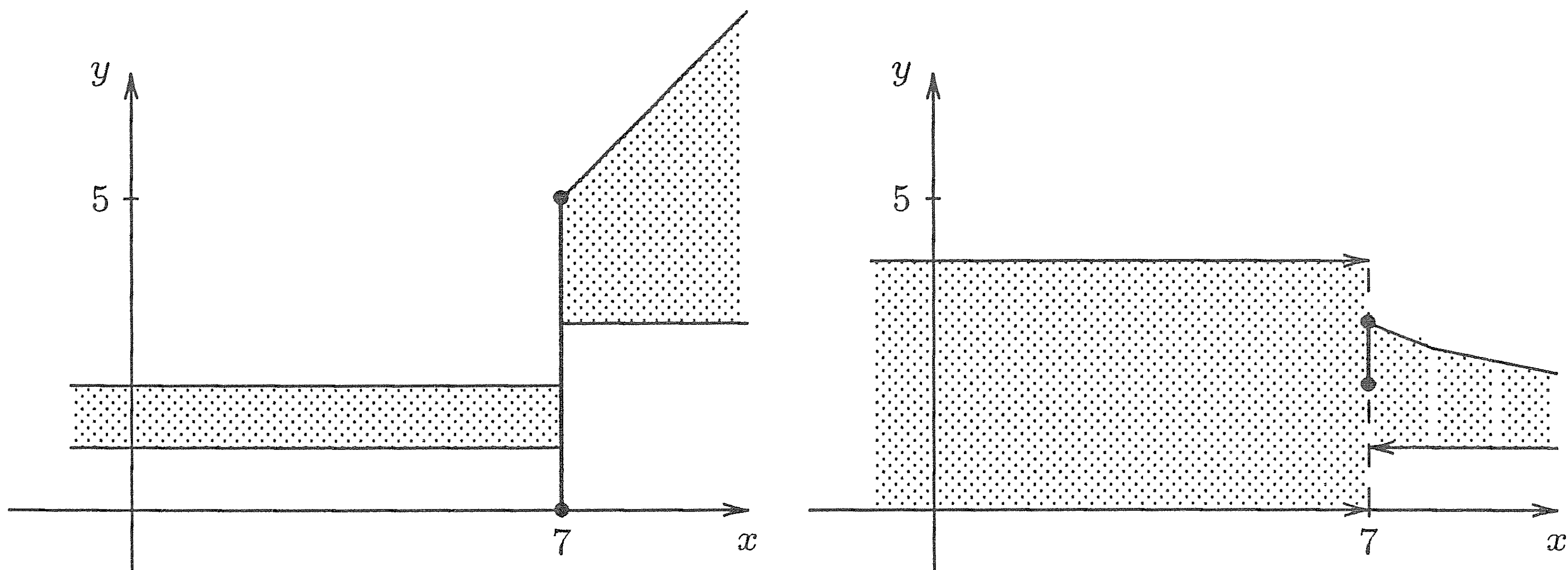
$$G(x) = \begin{cases} [1, 2] & \text{za } x < 7 \\ [0, 5] & \text{za } x = 7 \\ [3, x - 2] & \text{za } x > 7 \end{cases}$$

**Primer 2.** Naj bo  $X = Y = \mathbb{R}$ . Večlična funkcija  $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  naj bo dana s predpisom:

$$H(x) = \begin{cases} [0, 4] & \text{za } x < 7 \\ [2, 3] & \text{za } x = 7 \\ [1, \frac{2x - 11}{x - 6}] & \text{za } x > 7 \end{cases}$$

Večlični funkciji  $G$  in  $H$  iz zgornjih dveh primerov lahko predstavimo tudi z grafoma na sliki 1, pri čemer graf splošne večlične preslikave  $F : X \rightarrow Y$  definiramo kot množico točk

$$\Gamma(F) = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times F(x)) \subset X \times Y.$$



Slika 1. Grafa večličnih funkcij  $G$  in  $H$

Zelo naravno se večlične preslikave pojavijo pri iskanju inverznih preslikav. Če dana preslikava  $f : X \rightarrow Y$  ni injektivna, inverzne preslikave ne moremo definirati v klasičnem smislu. Lahko pa definiramo večlično inverzno preslikavo  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  s predpisom

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

**Primer 3.** Funkciji  $k(x) = x^3 - x$  priredimo inverzno večlično funkcijo

$$k^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Funkcijama  $\text{tg}$  in  $\cos$  priredimo inverzni večlični funkciji

$$\text{tg}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ in } \cos^{-1} : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R},$$

ki ju ponavadi označimo z  $\text{Arctg}$  in  $\text{Arccos}$  (simbola  $\text{arctg}$  in  $\text{arccos}$  pa pomenita glavni veji teh dveh funkcij).

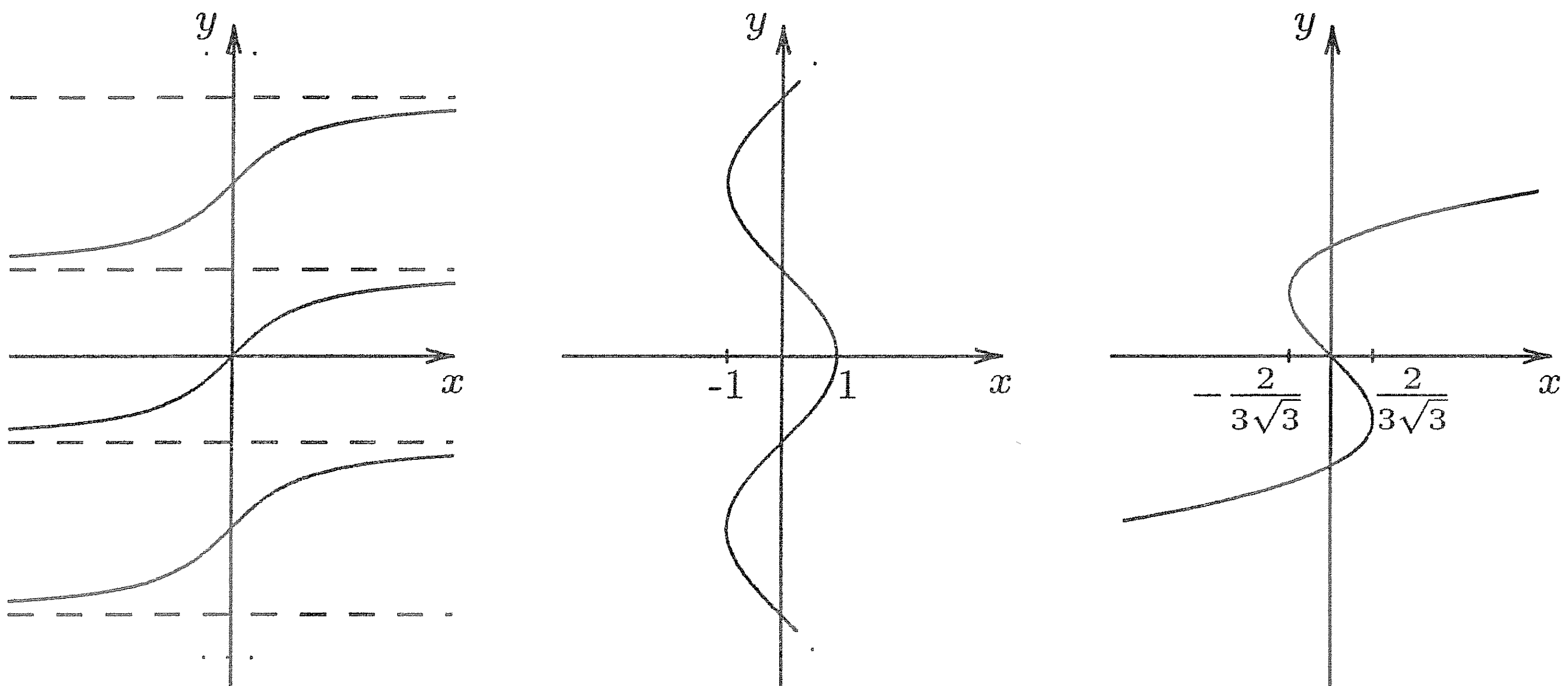
Njihove grafe kaže slika 2.

V tem članku bomo obravnavali večlične preslikave s stališča topologije; v tem okviru predstavljajo pomembno posplošitev marsikaterih klasičnih problemov in izhodišče za nove raziskave.

Eden od osnovnih topoloških pojmov je *zveznost*. Najprej ponovimo definicijo zveznosti običajne preslikave.

**Definicija 1.** Preslikava  $f : X \rightarrow Y$  je zvezna v točki  $x \in X$ , če za poljubno okolico  $\mathcal{V} \subset Y$  točke  $f(x) \in Y$  obstaja taka okolica  $\mathcal{U} \subset X$  točke  $x$ , da je  $f(x') \in \mathcal{V}$  za vsako točko  $x' \in \mathcal{U}$ .

To lahko povemo nazorneje, čeprav ne tako natančno: Če se točka  $x'$  bliža točki  $x$ , potem se tudi točka  $f(x')$  bliža točki  $f(x)$ .



Slika 2. Grafi inverznih funkcij

Pri zvezni večlični preslikavi  $F : X \rightarrow Y$  bi se torej morala množica  $F(x')$  bližati množici  $F(x)$ , ko bi se točka  $x'$  bližala točki  $x$ . Bližanje ene množice drugi pa se da vpeljati na različne načine. V teoriji večličnih preslikav sta se izkristalizirala predvsem naslednja dva načina.

Pri prvem načinu se množica  $F(x')$  bliža množici  $F(x)$  tako, da je pri  $x' \rightarrow x$  „ $F(x')$  v limiti podmnožica množice  $F(x)$ “. Pri drugem načinu pa je „ $F(x')$  v limiti nadmnožica množice  $F(x)$ “. Zato pravimo prvemu tipu zveznosti *polzveznost navzgor*, drugemu tipu pa *polzveznost navzdol*. Med obema tipoma ni nobene posebne odvisnosti.

Da bi lahko napisali natančno definicijo polzveznosti navzgor, se najprej dogovorimo, da naj *okolica množice* pomeni unijo poljubnih okolic njenih točk.

**Definicija 2.** Večlična preslikava  $F : X \rightarrow Y$  je v točki  $x \in X$  navzgor polzvezna, če za poljubno okolico  $\mathcal{V} \subset Y$  množice  $F(x) \subset Y$  obstaja taka okolica  $\mathcal{U} \subset X$  točke  $x$ , da je  $F(x') \subset \mathcal{V}$  za vsako točko  $x' \in \mathcal{U}$ . Preslikava  $F$  je navzgor polzvezna, kadar je navzgor polzvezna v vsaki točki domene.

**Definicija 3.** Pravimo, da se večlična preslikava  $F : X \rightarrow Y$  v točki  $x \in X$  približuje točki  $y \in Y$ , če za poljubno okolico  $\mathcal{V} \subset Y$  te točke  $y$  obstaja taka okolica  $\mathcal{U} \subset X$  točke  $x$ , da je  $F(x') \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$  za vsako točko  $x' \in \mathcal{U}$ . Če se preslikava  $F : X \rightarrow Y$  v točki  $x \in X$  približuje vsem točkam iz množice  $F(x)$ , pravimo da je navzdol polzvezna v točki  $x \in X$ . Preslikava  $F$  je navzdol polzvezna, kadar je navzdol polzvezna v vsaki točki domene.

Funkcija  $G$  iz primera 1 je pri  $x = 7$  navzgor polzvezna, ni pa navzdol polzvezna, saj se npr. ne približuje vrednosti  $1 \in G(7)$ . Funkcija  $H$  iz primera 2 pa je – ravno nasprotno – pri  $x = 7$  navzdol polzvezna, ni pa

navzgor (pri drugih vrednostih spremenljivke  $x$  sta obe navzgor in navzdol polzvezni). Funkciji  $\text{Arctg}$  in  $\text{Arcsin}$  iz primera 3 sta pri vseh vrednostih neodvisne spremenljivke navzgor in navzdol polzvezni. Funkcija  $k^{-1}$  je pri vrednostih  $+\frac{2}{3\sqrt{3}}$  in  $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$  neodvisne spremenljivke samo navzgor polzvezna, ne pa tudi navzdol.

Naj bo  $F : X \rightarrow Y$  poljubna večlična preslikava. Vpeljimo dve prasliki množice  $U \subset Y$ , *malo prasliko*  $F_{-1}(U) = \{x \in X | F(x) \subset U\}$  in *veliko*  $F^{-1}(U) = \{x \in X | F(x) \cap U \neq \emptyset\}$ . Ni težko videti, da je preslikava  $F$  navzgor (navzdol) polzvezna v vseh točkah prostora  $X$  natanko takrat, ko je za vsako odprto množico  $U \subset Y$  njena mala praslika  $F_{-1}(U)$  (velika praslika  $F^{-1}(U)$ ) odprta množica v  $Y$ .

### Zvezne selekcije večličnih preslikav

Naj bo  $F : X \rightarrow Y$  večlična preslikava. Običajni preslikavi  $f : X \rightarrow Y$ , za katero velja, da je  $f(x) \in F(x)$  pri vseh vrednostih spremenljivke  $x$ , pravimo *selekcija* preslikave  $F$ . Obstoj selekcij nam zagotavlja aksiom o izboru. Običajno pa bi radi od preslikave  $f$  še kakšno dodatno lastnost – mi bomo iskali zvezne selekcije.

Neposredno se vidi, da imajo funkcija  $H$  iz primera 2 ter funkciji  $\text{Arctg}$  in  $\text{Arccos}$  iz primera 3 zvezne selekcije (za  $H$  je to konstantna funkcija, za funkciji  $\text{Arctg}$  in  $\text{Arccos}$  pa sta to glavni veji  $\text{arctg}$  in  $\text{arccos}$ ). Hkrati se vidi, da funkcija  $G$  iz primera 1 in funkcija  $k^{-1}$  iz primera 3 ne moreta imeti zveznih selekcij, čeprav sta v vsaki točki navzgor polzvezni. Ti primeri kažejo, da je za obstoj zvezne selekcije polzveznost navzdol pomembnejša od polzveznosti navzgor.

Z elementarnimi sredstvi se da dokazati naslednji selekcijski izrek:

**Izrek 1.** *Naj bo  $X \subset \mathbb{R}$  zaprta podmnožica in  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  večlična funkcija, katere vrednost  $F(x)$  je v vsaki točki  $x \in \mathbb{R}$  neki neizrojen interval (odprt, zaprt, polodprt, omejen ali neomejen). Če je  $F$  navzdol polzvezna, potem ima zvezno selekcijo.*

Najprej navedimo dve lemi, ki ju bomo potrebovali pri dokazu. Če unija družine množic  $\mathcal{I}$  vsebuje množico  $X$ , pravimo, da je družina  $\mathcal{I}$  *pokritje* množice  $X$ .

**Lema 1.** *Naj bo  $\mathcal{I}$  neskončno pokritje zaprtega intervala  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  z odprtimi intervali. Potem obstaja končna poddružina  $\mathcal{K} \subset \mathcal{I}$ , ki pokrije interval  $[a, b]$ .*

Ta lema je splošno znana in je zato tu ne bomo dokazovali (dokaz je npr. v [11]). Naj bosta  $\mathcal{I}$  in  $\mathcal{J}$  dve pokritji iste množice. Če vsaka množica iz družine  $\mathcal{J}$  leži vsaj v eni množici iz družine  $\mathcal{I}$ , pravimo, da je pokritje  $\mathcal{J}$  *včrtano* v pokritje  $\mathcal{I}$ . Naj bo  $\mathcal{J}$  tako pokritje topološkega prostora  $X$ , da

vsaka točka tega prostora leži samo v končno mnogo množicah iz  $\mathcal{J}$ . Če je  $\{h_J : X \rightarrow [0, 1] \mid J \in \mathcal{J}\}$  taka množica zveznih funkcij, da je  $h_J(x) = 0$  za vsako točko  $x \notin J$ , in je nadalje  $\sum_{J \in \mathcal{J}} h_J(x) = 1$  za vsako točko  $x \in X$  (v tej vsoti je samo končno mnogo sumandov neničelnih), pravimo tej množici funkcij *zvezen razcep enote*, podrejen pokritju  $\mathcal{J}$ .

**Lema 2.** *Za vsako (neskončno) pokritje  $\mathcal{I}$  realne osi  $\mathbb{R}$  z odprtimi intervali obstaja tako števno neskončno pokritje  $\mathcal{J}$  z odprtimi intervali, ki je včrtano pokritju  $\mathcal{I}$ , da vsako omejeno podmnožico realne osi seka (in zato tudi pokrije) samo končno mnogo intervalov iz pokritja  $\mathcal{J}$ . Nadalje obstaja zvezen razcep enote, ki je podrejen temu pokritju  $\mathcal{J}$ .*

*Dokaz.* Po lemi 1 za vsako celo število  $n \in \mathbb{Z}$  obstaja končno mnogo intervalov iz pokritja  $\mathcal{I}$ , ki pokrijejo zaprti interval  $[n, n + 1]$ . Tako končno družino intervalov označimo z  $\mathcal{I}_n$ . Vsak interval iz  $\mathcal{I}_n$  presekajmo z odprtim intervalom  $(n - 1, n + 2)$  in označimo:

$$\mathcal{I}'_n = \{I \cap (n - 1, n + 2) \mid I \in \mathcal{I}_n\}.$$

Družina intervalov  $\mathcal{I}'_n$  je torej končno pokritje intervala  $[n, n + 1]$ , ki sega čez interval na vsako stran največ za 1. Zato je unija družin intervalov

$$\mathcal{J} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{I}'_n$$

iskano pokritje realne osi.

Za vsak  $J \in \mathcal{J}$  in  $x \in \mathbb{R}$  naj bo  $g_J(x)$  razdalja med  $x$  in  $\mathbb{R} \setminus J$ , torej

$$g_J(x) = \inf_{y \in \mathbb{R} \setminus J} |x - y|.$$

Očitno je  $g_J : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  zvezna funkcija. Vsota

$$g(x) = \sum_{J \in \mathcal{J}} g_J(x)$$

ima smisel, ker je za vsak  $x \in \mathbb{R}$  samo končno mnogo sumandov neničelnih: vsak  $x$  namreč leži samo v končno mnogo intervalih  $J \in \mathcal{J}$ . Tudi vsak omejen odprti interval leži samo v končno mnogo intervalih  $J \in \mathcal{J}$ . Zato je funkcija  $g$  zvezna povsod na realni osi. Nadalje je družina  $\mathcal{J}$  pokritje realne osi; zato je  $g(x) > 0$  za vsak  $x \in \mathbb{R}$ . Vpeljimo novo družino zveznih funkcij:

$$h_J(x) = \frac{g_J(x)}{g(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, J \in \mathcal{J}.$$

Te funkcije so iskani zvezni razcep enote, ki je podrejen pokritju  $\mathcal{J}$ . ■

*Dokaz izreka 1.* Naj bo najprej  $X = \mathbb{R}$ . Za vsako točko  $x \in \mathbb{R}$  si na intervalu  $F(x)$  izberimo tri notranje točke

$$d_x < s_x < g_x.$$

Ker je funkcija  $F$  navzdol polzvezna, sta veliki prasliki  $F^{-1}(-\infty, d_x)$  in  $F^{-1}(g_x, \infty)$  odprtih intervalov  $(-\infty, d_x)$  in  $(g_x, \infty)$  odprti množici, v katerih seveda leži tudi točka  $x$ . Zato obstaja neki dovolj majhen odprt interval  $I_x$  s središčem v točki  $x$ , ki leži v obeh množicah  $F^{-1}(-\infty, d_x)$  in  $F^{-1}(g_x, \infty)$ . Za poljubno točko  $x' \in I_x$  je vrednost  $F(x')$  funkcije  $F$  neki interval, ki seka intervala  $(-\infty, d_x)$  in  $(g_x, \infty)$ . Zato tudi število  $s_x$  leži na intervalu  $F(x')$ .

Družina intervalov  $\mathcal{I} = \{I_x \mid x \in \mathbb{R}\}$  je pokritje realne osi. Naj bo  $\mathcal{J}$  pokritje iz leme 2, ki je včrtano pokritju  $\mathcal{I}$ . Za vsak interval  $J \in \mathcal{J}$  obstaja taka točka  $x_J \in \mathbb{R}$ , da je  $J \subset I_{x_J}$ . Na kratko označimo:  $s_J = s_{x_J}$ . Iz ugotovitve v prejšnjem odstavku sledi, da za vse točke  $x' \in J$  velja:  $s_J \in F(x')$ .

Vzemimo razcep enote  $\{h_J \mid J \in \mathcal{J}\}$ , ki je podrejen pokritju  $\mathcal{J}$ , in sestavimo zvezno funkcijo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \sum_{J \in \mathcal{J}} s_J h_J(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ker je  $\sum_{J \in \mathcal{J}} h_J(x) = 1$  in števila  $s_J$  ležijo na intervalu  $F(x)$  za vse tiste  $J$ , pri katerih je  $h_J(x) > 0$ , leži tudi število  $f(x)$  na intervalu  $F(x)$ . Torej je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  iskana selekcija večlične funkcije  $F$ .

Naj bo zdaj  $X \subset \mathbb{R}$  poljubna zaprta podmnožica. Da bi dokazali izrek 1 tudi v tem primeru, razširimo večlično funkcijo  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  na večlično funkcijo  $\hat{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takole:

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} (-\infty, \infty), & x \notin X \\ F(x), & x \in X \end{cases}.$$

Funkcija  $\hat{F}$  je navzdol polzvezna v vsaki točki  $x \in \mathbb{R}$ : za točke  $x \in X$  je to očitno, za točke  $x \in \mathbb{R} \setminus X$  pa sledi iz dejstva, da je množica  $\mathbb{R} \setminus X$  odprta in je torej  $\hat{F}(x) = (-\infty, \infty)$  tudi za vse  $x$  iz neke dovolj majhne okolice točke. Dokazali smo že, da ima  $\hat{F}$  zvezno selekcijo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Omejitev  $f|_X : X \rightarrow \mathbb{R}$  pa je potem zvezna selekcija večlične funkcije  $F$ . ■

Pripomočki, ki smo jih uporabili pri dokazu izreka 1, sugerirajo posplošitev tega izreka na parakompaktne prostore: Hausdorffov topološki prostor je *parakompakten*, če se da v vsako njegovo pokritje včrtati lokalno končno pokritje. Pokritje je *lokalno končno*, če dovolj majhne okolice katere koli točke seka samo končno mnogo članov pokritja.

**Izrek 2.** Naj bo  $X$  parakompakten topološki prostor in  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  taka večlična funkcija, da je za vsak  $x \in X$  množica  $F(x)$  neizrojen interval (odprt, zaprt, polodprt, omejen ali neomejen). Če je  $F$  navzdol polzvezna, ima zvezno selekcijo.

Dokaz izreka 2 je v osnovi podoben dokazu izreka 1, vendar je precej zahtevnejši. V njem je za konstrukcijo razcepa enote nujno potrebna Urysonova lema, ki velja za normalne prostore. Zato je treba tudi dokazati, da je vsak parakompakten prostor normalen. Vsi ti rezultati so dosegljivi v standardnih učbenikih topologije, npr. v [6].

V 50. letih tega stoletja je ameriški matematik Ernest Michael odkril celo vrsto zadostnih pogojev za obstoj zveznih selekcij večličnih preslikav: eden od njih je vedno polzveznost navzdol večlične funkcije  $F$ , drugi parakompaktnost prostora  $X$ , nadaljnji pogoji pa so geometrijske in topološke lastnosti množic  $F(x)$  (Michaelovi osnovni rezultati so bili objavljeni v člankih [3], [4] in [5]). Za zgled navedimo enega od njegovih najbolj znanih zadostnih pogojev:

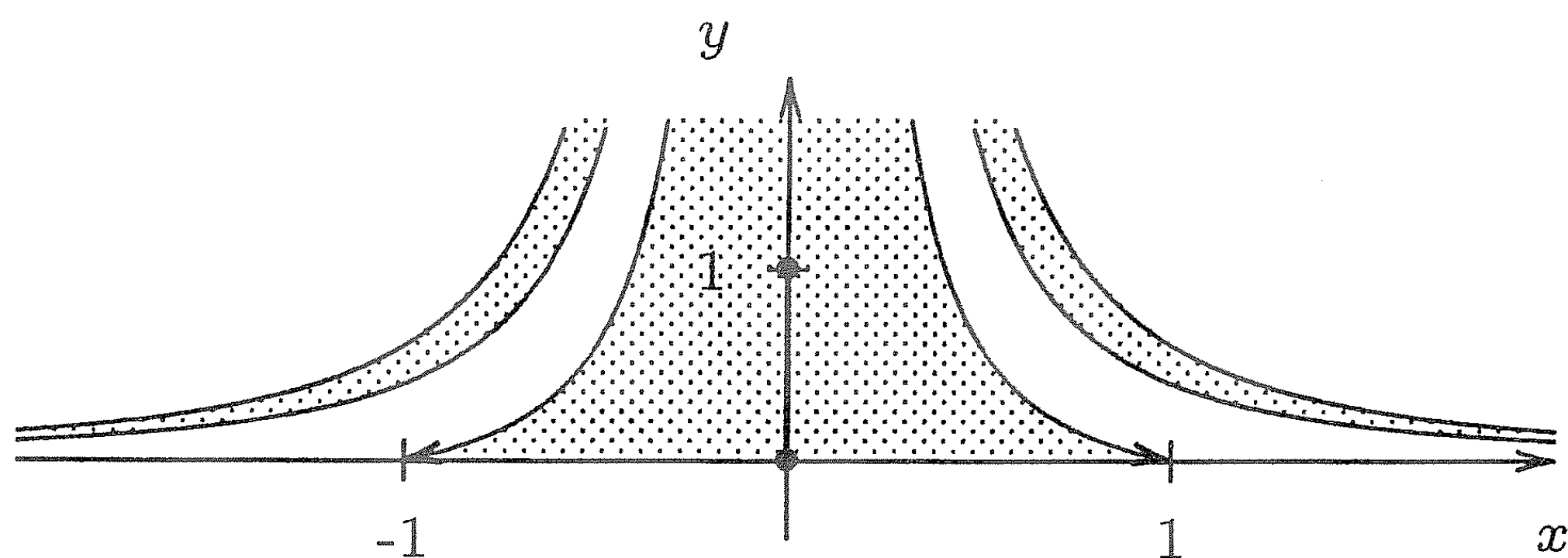
**Izrek 3** (Michael). Naj bo  $X$  parakompakten topološki prostor,  $Y$  Banachov prostor in  $F : X \rightarrow Y$  taka navzdol polzvezna večlična preslikava, da je za vsako točko  $x \in X$  množica  $F(x)$  konveksna in zaprta. Potem obstaja zvezna selekcija preslikave  $F$ .

Naslednji protiprimer kaže, da se v izrekih 1, 2 in 3 pogoju konveksnosti ne da izogniti:

**Primer 4.** Večlično funkcijo  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definirajmo s predpisom:

$$F(x) = \begin{cases} [\frac{2}{x^2}, \frac{3}{x^2}] & \text{za } |x| > 1 \\ [\frac{2}{x^2}, \frac{3}{x^2}] \cup [0, \frac{1}{x^2} - 1] & \text{za } |x| < 1 \text{ in } x \neq 0 \\ [0, 1] & \text{za } x = 0 \end{cases}$$

(njen graf je na sliki 3).



**Slika 3.** Večlična navzdol polzvezna funkcija, ki nima zvezne selekcije

Funkcija  $F$  je navzdol polzvezna (natančneje si je treba ogledati le vrednosti  $-1$ ,  $0$  in  $1$  spremenljivke  $x$ ), množice  $F(x)$  pa pri  $0 < |x| < 1$  niso konveksne. Očitno funkcija  $F$  nima zvezne selekcije.

## Zveznost izbire spremenljivke $\delta$ v $\varepsilon$ - $\delta$ definiciji zveznosti

Z uporabo izrekov o zveznih selekcijah se da priti do vrste zanimivih rezultatov. Eden izmed elementarnejših je zveznost izbire spremenljivke  $\delta$  pri  $\varepsilon$ - $\delta$  definiciji zveznosti.

Naj bo  $X \subset \mathbb{R}$  podmnožica in  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  enolična funkcija. Ponovimo klasično  $\varepsilon$ - $\delta$  definicijo zveznosti: Funkcija  $f$  je zvezna v točki  $x \in X$ , če za poljuben pozitiven  $\varepsilon$  obstaja tak pozitiven  $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ , da je

$$f(x') \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$$

za vsak  $x' \in X \cap (x - \delta, x + \delta)$ .

Naslednji izrek trdi, da je možno izbrati  $\delta(x, \varepsilon)$  celo tako, da je zvezno odvisen od  $\varepsilon$  in od  $x$ :

**Izrek 4.** Naj bo  $X \subset \mathbb{R}$  zaprta podmnožica in  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna enolična funkcija. Potem obstaja taka zvezna enolična funkcija  $\hat{\delta} : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  dveh spremenljivk, da velja

$$f(x') \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$$

za vsak  $x' \in X \cap (x - \hat{\delta}(x, \varepsilon), x + \hat{\delta}(x, \varepsilon))$ .

*Dokaz.* Naj bo  $\delta_0 : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow (0, \infty]$  funkcija, definirana za vse  $x \in X$  in  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  s predpisom

$$\delta_0(x, \varepsilon) = \sup\{\delta > 0 \mid f(X \cap (x - \delta, x + \delta)) \subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)\},$$

kjer je supremum mišljen na razširjeni realni osi. S formulo

$$\Delta(x, \varepsilon) = (0, \delta_0(x, \varepsilon))$$

vpeljimo večlično funkcijo  $\Delta : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \infty)$ . Dokažimo, da je  $\Delta$  navzdol polzvezna.

Dokazujemo s protislovjem: denimo, da funkcija  $\Delta$  v neki točki  $(x, \varepsilon) \in X \times \mathbb{R}^+$  ni navzdol polzvezna.

Najprej si oglejmo primer, ko je  $\delta_0(x, \varepsilon) < \infty$ . Ker se večlična funkcija  $\Delta$  v točki  $(x, \varepsilon)$  ne približuje vrednosti  $\delta_0(x, \varepsilon)$ , obstaja tako pozitivno število  $\alpha$  in tako neskončno zaporedje točk  $(x_1, \varepsilon_1), (x_2, \varepsilon_2), (x_3, \varepsilon_3), \dots$ , ki konvergira proti točki  $(x, \varepsilon)$ , da je  $\delta_0(x_k, \varepsilon_k) < \delta_0(x, \varepsilon) - \alpha$  za  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Iz definicije funkcije  $\delta_0$  sledi:

$$f(X \cap (x_k - \delta_0(x, \varepsilon) + \alpha, x_k + \delta_0(x, \varepsilon) - \alpha)) \not\subset (f(x_k) - \varepsilon_k, f(x_k) + \varepsilon_k),$$

torej obstaja tako neskončno zaporedje števil  $x'_1, x'_2, x'_3, \dots$ , da je

$$x'_k \in X \cap (x_k - \delta_0(x, \varepsilon) + \alpha, x_k + \delta_0(x, \varepsilon) - \alpha) \tag{1}$$

$$f(x'_k) \notin (f(x_k) - \varepsilon_k, f(x_k) + \varepsilon_k). \tag{2}$$

Iz (1) sledi, da je zaporedje števil  $x'_1, x'_2, x'_3, \dots$ , omejeno. Obstaja podzaporedje, ki konvergira proti nekemu številu  $x'$ . Ker je množica  $X$  zaprta, je  $x' \in X$ . Iz formule (1) v limiti sledi formula:

$$x' \in X \cap [x - \delta_0(x, \varepsilon) + \alpha, x + \delta_0(x, \varepsilon) - \alpha]. \quad (3)$$

Ker je  $f$  po predpostavki zvezna, iz (2) dobimo:

$$f(x') \notin (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon). \quad (4)$$

Iz formule (3) sledi:

$$x' \in X \cap (x - \delta_0(x, \varepsilon) + \frac{\alpha}{2}, x + \delta_0(x, \varepsilon) - \frac{\alpha}{2}). \quad (5)$$

Iz (4) in (5) pa dobimo:

$$f(X \cap (x - \delta_0(x, \varepsilon) + \frac{\alpha}{2}, x + \delta_0(x, \varepsilon) - \frac{\alpha}{2})) \not\subset (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon),$$

kar je v protislovju z definicijo funkcije  $\delta_0$ . Dobljeno protislovje kaže, da je večlična funkcija  $\Delta$  navzdol polzvezna v točki  $(x, \varepsilon)$ .

Oglejmo si še primer, ko je  $\delta_0(x, \varepsilon) = \infty$ . Če večlična funkcija  $\Delta$  v točki  $(x, \varepsilon)$  ni navzdol polzvezna, obstaja dovolj velika številska vrednost  $M$ , ki se ji  $\Delta$  v tej točki ne približa. Kot v prejšnjem primeru odtod spet sledi obstoj takega števila  $x' \in X$ , da velja:  $f(x') \notin (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon)$ . To pa je v protislovju z dejstvom, da je  $\delta_0(x, \varepsilon) = \infty$ .

Zdaj, ko smo dokazali, da je  $\Delta$  navzdol polzvezna, lahko uporabimo posledico 1: obstaja zvezna selekcija  $\hat{\delta} : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  večlične funkcije  $\Delta : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Ta  $\hat{\delta}$  pa je ravno tista zvezna enolična funkcija, o kateri govori izrek. ■

Izrek 4 se da posplošiti na lokalno kompaktno metrične prostore:

**Izrek 5** (Repovš in Semenov). *Naj bosta  $(X, d)$  in  $(Y, \rho)$  metrična prostora,  $X$  naj bo lokalno kompakten,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  zvezna enolična funkcija. Potem obstaja taka zvezna enolična funkcija  $\hat{\delta} : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  dveh spremenljivk, da pri poljubnem paru spremenljivk  $(x, \varepsilon) \in X \times \mathbb{R}^+$  velja  $\rho(f(x), f(x')) < \varepsilon$  za vsako točko  $x' \in X$ , ki ustreza pogoju  $d(x', x) < \hat{\delta}(x, \varepsilon)$ .*

Izrek 5 se dokaže s pomočjo izreka 2 podobno kot izrek 4 s pomočjo izreka 1, upoštevati je treba še, da je vsak metrični prostor parakompakten [6]. Bralec, ki ga zanimajo nadaljnji rezultati v tej smeri, si lahko ogleda članke [2] in [8]–[10]. V [12] je celo konstruirana funkcija  $\hat{\delta} : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , ki je izračunljiva v smislu efektivne analize.

## Nekateri nadaljnji primeri uporabe teorije zveznih selekcij

Naj bosta  $X$  in  $Y$  poljubna topološka prostora,  $A$  pa zaprta podmnožica v prostoru  $X$ . Poljubni zvezni preslikavi  $f : X \rightarrow Y$  priredimo večlično preslikavo  $F : X \rightarrow Y$  takole:

$$F(x) = \begin{cases} Y, & x \notin A \\ \{f(x)\}, & x \in A \end{cases}.$$

Naj bo  $g : X \rightarrow Y$  neka zvezna selekcija večlične preslikave  $F$ . Očitno je  $g$  ravno razširitev zvezne preslikave  $f$  z množice  $A$  na ves prostor  $A$ . Torej je problem o obstoju takih razširitev samo poseben primer problema o obstoju zveznih selekcij. Zgoraj definirana večlična preslikava  $F$  je *navzdol polzvezna*. Če je  $x \in A$ , to takoj sledi iz zveznosti preslikave  $f : A \rightarrow Y$ . Če je  $x \in X \setminus A$ , pa to sledi iz dejstva, da je množica  $X \setminus A$  odprta. Zato se da pri študiju problema razširitve zvezne preslikave uporabiti vsa Michaelova teorija o zveznih selekcijah in seveda novejši rezultati v tej smeri. Primere bralec lahko najde v monografiji [10].

Naj bo na primer  $X$  parakompakten topološki prostor,  $Y$  pa Banachov prostor. V tem primeru je za vsak  $x \in X$  množica  $F(x)$  zaprta in konveksna. Po izreku 3 obstaja zvezna selekcija  $g : X \rightarrow Y$  preslikave  $F$ , kot pravi naslednja varianta klasičnega Dugundjijevega izreka:

**Izrek 6** (Dugundji). *Vsaka zvezna preslikava  $f : A \rightarrow Y$  zaprte podmnožice  $A$  parakompaktnega prostora  $X$  v Banachov prostor  $Y$  se da razširiti do zvezne preslikave  $g : X \rightarrow Y$  vsega prostora  $X$ .*

Poleg skupine Michaelovih izrekov, v katerih je ključni pogoj konveksnost množic  $F(x)$  (primer takega izreka je izrek 1), je še nekaj drugih skupin Michaelovih izrekov:

- a) izreki, v katerih je ključni pogoj, da je prostor  $X$  ničrazsežen;
- b) izreki, pri katerih je ključni pogoj, da je prostor  $X$  končnorazsežen in so hkrati množice  $F(x)$   $n$ -povezane (kjer je  $n$  dimenzija prostora  $X$ );
- c) izreki, pri katerih je ključni pogoj kompaktnost množic  $F(x)$ , pri tem pa mora biti  $Y$  poln metrični prostor.

Našteti izreki so uporabni tako v topologiji (pri raziskovanju grup avtohomeomorfizmov mnogoterosti, pri ugotavljanju, kdaj so preslikave metričnih prostorov Hurewiczeve fibracije, ...) kot tudi na drugih področjih matematike (v teoriji funkcij kompleksne spremenljivke, pri diferencialnih vključitvah, to je diferencialnih enačbah z večlično desno stranjo, ...) in celo v uporabni matematiki (npr. v teoriji optimalnega vodenja). Številne primere lahko najdemo v [1] in [10].

Za konec omenimo, da je prve rezultate o selekcijah večličnih preslikav že v 30. letih tega stoletja odkril J. von Neumann pri študiju matematičnih modelov v ekonomiji, vendar ni preučeval *zveznih* selekcij, ampak *merljive*.

Prva monografija, v celoti posvečena teoriji zveznih selekcij večličnih preslikav, pa je izšla šele pred kratkim [10].

## LITERATURA

- [1] J.-P. Aubin in H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Basel, 1990.
- [2] J. Malešič in D. Repovš, *Continuity-like properties and continuous selections*, Acta Math. Hungar. **73** (1996), 141–154.
- [3] E. Michael, *Continuous selections I*, Ann. of Math. (2) **63** (1956), 361–382.
- [4] E. Michael, *Continuous selections II*, Ann. of Math. (2) **64** (1956), 562–580.
- [5] E. Michael, *Continuous selections III*, Ann. of Math. (2) **65** (1957), 375–390.
- [6] J. R. Munkres, *Topology: A First Course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- [7] D. Repovš in P. V. Semenov, *An application of the theory of selections in analysis*, Proc. Int. Conf. Topol., Trieste 1993, G. Gentili, Ed., Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste **25** (1993), 441–446.
- [8] D. Repovš in P. V. Semenov, *On continuous choice in the definition of continuity*, Glasnik Mat. **29** (49) (1994), 169–173.
- [9] D. Repovš in P. V. Semenov, *On continuity properties of the modulus of local contractibility*, J. Math. Anal. Appl. **216** (1997), 86–93.
- [10] D. Repovš in P. V. Semenov, *Continuous Selections of Multivalued Mappings*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
- [11] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFAS, Ljubljana, 1994.
- [12] K. Weihrauch in X. Zheng, *Effectiveness of the global modulus of continuity on metric spaces*, Category Theory and Computer Science, Santa Margherita 1997, Lect. Notes Comp. Sci. **1290**, Springer-Verlag, Berlin, 1997, str. 210–219.

## POPRAVEK

---

Pri stavljenju članka A. Jeromna in Z. Trontlja *Termoakustični hladilnik in hladilnik s pulzno cevjo*, ki je izšel v prejšnji številki Obzornika, je nastalo kar precej tiskarskih napak, ki pa so na srečo vse iste vrste. Namesto znaka za povprečje  $\langle \rangle$  (gre za časovno povprečje količine v času enega cikla nihanja plina) je namreč ponekod pomotoma zapisan znak za absolutno vrednost  $||$  (ta pa v članku zaznamuje amplitudo količine). Tako je treba na straneh 76, 77, 82, 83, 84 in 86 vse znake za absolutno vrednost nadomestiti z znaki za povprečje, na strani 80 je treba to storiti le v osmi vrstici od spodaj navzgor, na strani 85 vse od 10 vrstice naprej navzdol, na strani 81 pa le na začetku formule (11), torej  $\langle \dot{Q} \rangle$  namesto  $|\dot{Q}|$ .

Avtorjema in bralcem se seveda iskreno opravičujemo za neljube pomote, hkrati pa vas obveščamo, da so interesentom v uredništvu (Jadranska 19, prostor Komisije za tisk) na voljo pravilni izvodi članka.

Uredništvo

# PRECESIJA ENAKONOČIJ

JANEZ STRNAD

PACS 01.65.+g

Precesijo enakonočij je prvi pojasnil Isaac Newton z gravitacijskim zakonom. Njegovo izpeljavo je zanimivo postaviti nasproti današnji. Ob tem na eni strani občudujemo, kako je uporabil izreke za gibanje togega telesa, ki so se uveljavili šele pozneje, a na drugi ne moremo spregledati nekaterih pomanjkljivosti.

## THE PRECESSION OF EQUINOXES

The precession of equinoxes was first explained by Isaac Newton by means of the law of universal gravitation. It is interesting to compare his derivation with the present-day one. At the one hand Newton's anticipation of the theorems of motion of rigid bodies awakes admiration whereas at the other some deficiencies cannot be overlooked.

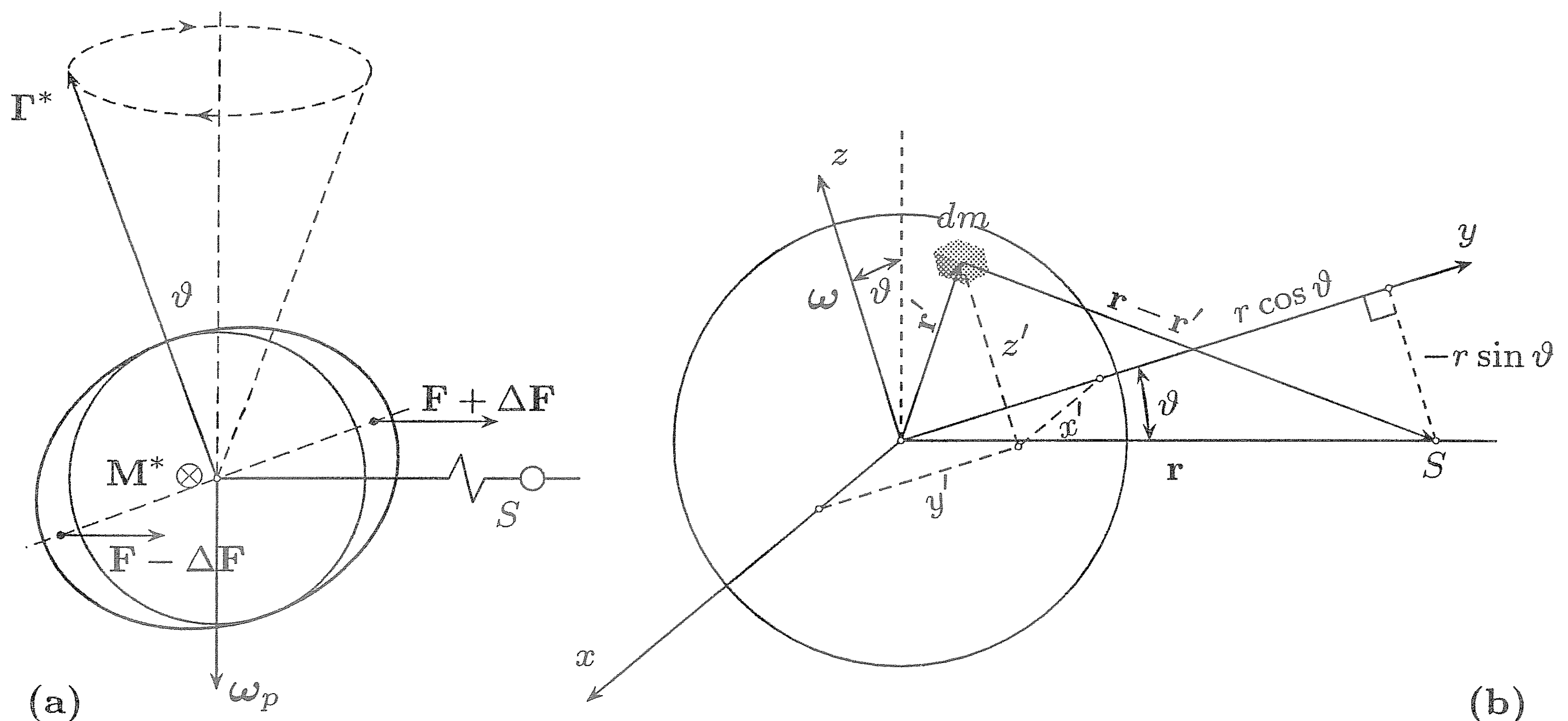
### Današnja pot

Precesijo enakonočij je opazil Hiparh v 2. stoletju pred našim štetjem. Nikolaj Kopernik je leta 1543 privzel, da se Zemlja giblje okoli Sonca z vrtilno osjo, togo povezano z zveznico s Soncem. Vpeljati je moral *tretje gibanje Zemlje*, da je utemeljil, zakaj zemeljska os kaže približno proti Severnici. Zemlja se v 24 urah zavrti okoli svoje osi, v 1 letu obide Sonce in njena os se giblje po plašču stožca, tako da se v 1 letu domala vrne v začetno lego. Nova lega le za  $50''$  zaostane za staro, tako da os približno v 26 tisoč letih opiše plašč stožca. Isaac Newton, ki je odkril gravitacijski zakon, je leta 1687 prvi pojasnil precesijo enakonočij. Pri tem je izhajal iz tega zakona in upošteval sploščenost Zemlje na polih in nagib njene geometrijske osi proti ravnini gibanja okoli Sonca.

Kolikor mogoče preprosto izpeljimo enačbo za precesijo v najnižjem približku. Zemljo obravnavamo kot simetrično vrtavko, ki se vrti okoli geometrijske osi skozi težišče, z lastno vrtilno količino  $\Gamma^*$ . Po izreku o ohranitvi vrtilne količine bi se lastna vrtilna količina ohranila po velikosti in smeri, če na vrtavko ne bi deloval navor glede na težišče. Na Zemljo pa deluje Sonce z navorom  $M^*$  glede na težišče, zato njena geometrijska os precedira s kotno hitrostjo  $\omega_p$ . Podobno kot Sonce deluje na Zemljo tudi Luna. Prispevka izračunamo vsakega zase in ju nato seštejemo. Tri količine povezuje *Eulerjeva enačba* [1]

$$M^* = \omega_p \times \Gamma^*, \quad (1)$$

če se velikost lastne vrtilne količine ne spreminja. Enačba velja v težiščnem koordinatnem sistemu, četudi je ta pospešen in torej ni inercialen. Geometrijska os Zemlje je nagnjena za  $\vartheta$  proti ravnini gibanja Zemlje okoli Sonca. Sonce deluje na Zemljo in privlačna sila na bližji del odebeline ob ekvatorju prevlada nad privlačno silo na oddaljeni del. Nastali navor poskuša



**Slika 1.** Na Zemljo v obliki rotacijskega elipsoida deluje Sonce z navorom glede na težišče. Zato njena geometrijska os v 26 tisoč letih opiše plašč stožca (a). V računu najprej vzamemo, da Sonce miruje v točki, do katere vodi krajevni vektor  $\mathbf{r}$  (b).

zmanjšati kot  $\vartheta$  in geometrijska os opisuje plašč stožca okoli smeri, pravokotne na ravnino gibanja (sl. 1).

Podprimo trditve z računom. Vpeljimo težiščni koordinatni sistem z izhodiščem v središču Zemlje, ki jo vzamemo za homogeno. Os  $x$  usmerimo proti *pomladišču*, ki ga ob pomladnem enakonočju določa presečišče ravnine gibanja z ekvatorsko ravnino. Os  $z$  postavimo v geometrijsko os Zemlje v smeri lastne vrtilne količine. Sonce vzamemo za točkasto in do njega vodi krajevni vektor  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  pod kotom  $\vartheta$  proti osi  $y$ , tako da je  $\mathbf{r} = (0, r \cos \vartheta, -r \sin \vartheta)$ . Do dela Zemlje z maso  $dm = \rho dx' dy' dz'$  vodi krajevni vektor  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ . Na ta del deluje Sonce s silo  $d\mathbf{F} = \mathcal{G} M dm \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3$ , če je  $M$  masa Sonca in  $\mathcal{G}$  gravitacijska konstanta [1]. Oddaljenost dela Zemlje od Sonca je

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{1/2} = r(1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{y'}{r} \cos \vartheta + 2\frac{z'}{r} \sin \vartheta)^{1/2} =$$

$$= r(1 - \frac{y'}{r} \cos \vartheta + \frac{z'}{r} \sin \vartheta). \quad (2)$$

Nazadnje smo zanemarili  $r'^2/r^2$  v primeri z 1, razvili izraz v Taylorjevo vrsto in obdržali samo linearna člena. Z enačbo (2) izračunamo kub oddaljenosti v imenovalcu, tako da je sila Sonca na del Zemlje  $d\mathbf{F} = (\mathcal{G} M dm/r^3)(1 + 3y' \cos \vartheta/r - 3z' \sin \vartheta/r)(-x', -y' + r \cos \vartheta, -z' + r \sin \vartheta)$ .

Ročico  $\mathbf{r}'$  vektorsko pomnožimo s to silo in dobimo navor privlačne sile Sonca na Zemljo  $\mathbf{M}^* = \int \mathbf{r}' \times d\mathbf{F}$ , ko integriramo po  $x'$ ,  $y'$  in  $z'$  po vsej prostornini Zemlje. Zemljo obravnavamo kot sploščen rotacijski elipsoid, katerega vztrajnostni moment okoli geometrijske osi

$J = \int (x'^2 + y'^2) dm$  je malo večji od vztrajnostnega momenta okoli pravokotne osi  $\tilde{J} = \int (x'^2 + z'^2) dm$ . Pod integralom se pojavi veliko členov s koordinato v prvi potenci, a integrali vrste  $\int x' dm$  so vsi enaki nič, ker smo izhodišče postavili v težišče. Preostane samo komponenta navora v smeri osi  $x$  z integralom  $\int (z'^2 - y'^2) dm$ , ki ga dopolnimo v  $-\int (x'^2 + y'^2) dm + \int (x'^2 + z'^2) dm = -J + \tilde{J}$ :

$$M_x^* = -\frac{\mathcal{G}M}{r^3}(J - \tilde{J}) \cos \vartheta \sin \vartheta. \quad (3)$$

Ta navor zapišemo z enotskim vektorjem  $\mathbf{e}_z$  v smeri geometrijske osi  $z$ :

$$\mathbf{M}^* = -\frac{\mathcal{G}M}{r^3}(J - \tilde{J})\left(\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{e}_z\right)\left(\frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{e}_z\right). \quad (4)$$

Sonce glede na Zemljo ne miruje, ampak se giblje okoli nje. Težiščni koordinatni sistem sme namreč biti pospešen in lahko uporabimo geocentrično sliko. Zaradi tega se spreminja smer geometrijske osi Zemlje in enotskega vektorja  $\mathbf{e}_z$ . V obhodnem času Sonca okoli Zemlje  $t_0$  opiše poln kot, tako da je treba v skalarnem produktu in v komponenti vektorskega produkta v smeri osi  $x$  upoštevati faktor  $\sin 2\pi t/t_0$ , če začnemo čas meriti ob spomladanskem enakonočju. Tako v enačbi (4) faktor  $\sin^2 2\pi t/t_0$  v povprečju po enem obhodnem času da  $\frac{1}{2}$  in je povprečna komponenta navora enaka  $\frac{1}{2}M_x^*$ . Postavimo jo na levo stran enačbe (1) za komponento v smeri osi  $x$ . Na njeni desni strani je s kotno hitrostjo precesije  $\omega_p$  pomnožena komponenta lastne vrtilne količine v smeri osi  $x$ , to je  $\Gamma^* \sin \vartheta = J\omega \sin \vartheta$  s kotno hitrostjo dnevnega vrtenja Zemlje  $\omega$ . Povprečna kotna hitrost precesije je:

$$\bar{\omega}_p = -\frac{3\mathcal{G}M}{2r^3\omega} \frac{J - \tilde{J}}{J} \cos \vartheta = -\frac{3\mathcal{G}M\varepsilon}{2r^3\omega} \cos \vartheta. \quad (5)$$

Zadnji korak bi lahko bolje utemeljili, če bi vpeljali Eulerjeve kote [2]. Kotna hitrost precesije se med obhodom Sonca okoli Zemlje spreminja in (5) je prvi približek za njeno časovno povprečje. Komponenta navora okoli osi  $y$  je tudi različna od 0, a njeno odvisnost od časa določa faktor  $\sin 2\pi t/t_0$ , katerega povprečje je enako nič. Ta komponenta opiše *nutacijo zemeljske osi*, čeprav sicer z nutacijo poimenujemo gibanje vrtavke, na katero ne deluje navor okoli težišča. Komponenta navora v smeri osi  $z$  je enaka nič, tako da se velikost vrtilne količine Zemlje okoli lastne osi ne spreminja. *Sploščenost*  $\varepsilon = (a - b)/a$  izrazimo z veliko polosjo  $a$  in malo polosjo  $b$  elipse v osnem preseku rotacijskega elipsoida. Vztrajnostni moment  $J$  je v tem primeru sorazmeren z  $2a^2$ , vztrajnostni moment  $\tilde{J}$  pa z  $a^2 + b^2$  in v prvem redu se  $(J - \tilde{J})/J = (2a^2 - a^2 - b^2)/2a^2 = (a - b)(a + b)/2a^2$  ujema s sploščenostjo  $\varepsilon = (a - b)/a$ .

Najprej izračunamo prispevek Sonca. V enačbo (5) vstavimo za  $\mathcal{G}M/r^3$  po tretjem Keplerjevem zakonu  $\mathcal{G}M_S/r_S^3 = (2\pi/t_0)^2$  z maso Sonca  $M_S$  in oddaljenostjo Sonca od Zemlje  $r_S$ . Za  $t_0$  vzamemo siderično leto in  $\omega = 2\pi \cdot 366,25 \text{ leto}^{-1}$ . Mednarodna astronomska unija je leta 1964 za sploščenost Zemlje  $\varepsilon$  sprejela  $1/298,25$ . S temi podatki in s  $\vartheta = 23,45^\circ$  dobimo  $\bar{\omega}_{pS} = -7,92 \cdot 10^{-5} \text{ leto}^{-1} = -16,3'' \text{ leto}^{-1}$ .

Podobno izračunamo prispevek Lune, le z izpopolnjenim tretjim Keplerjevim zakonom upoštevamo, da se Zemlja in Luna gibljeta okoli skupnega težišča. Iz zvez  $\mathcal{G}M_L M_Z / (r_1 + r_2)^2 = M_L r_1 (2\pi/t_{0L})^2 = M_Z r_2 (2\pi/t_{0L})^2$  sledi  $\mathcal{G}M_L/r_L = (2\pi/t_{0L})^2 / (1 + M_Z/M_L)$  z maso Lune  $M_L$ , maso Zemlje  $M_Z$  in oddaljenost Lune od Zemlje  $r_L = r_1 + r_2$ . V enačbo (5) vstavimo za siderični obhodni čas Lune  $t_{0L} = 27,32/365,25$  leta in  $1 + M_Z/M_L = 82,5$  ter dobimo  $\bar{\omega}_{pL} = -1,71 \cdot 10^{-5} \text{ leto}^{-1} = -35,3'' \text{ leto}^{-1}$ . Oba prispevka skupaj dasta  $-51,6''$  na leto, kar se za okoli 2 % razlikuje od izmerjene letne precesije. Boljšega izida od približka s homogeno Zemljo ne moremo pričakovati. Nekoliko manjšo absolutno vrednost izmerjene letne precesije od izračunane bi lahko pojasnili, če bi Zemlje ne obravnavali kot homogene in upoštevali, da je gostota njene skorje manjša od povprečne gostote.

## Newtonova pot

Newtonovi *Principi* iz leta 1687 so ena od najpomembnejših fizikalnih knjig [3]. V glavnih potezah vsebujejo velik del klasične mehanike, čeprav jim lahko to in ono očitamo, na primer drugi zakon v obliki  $\mathbf{F} \propto \Delta \mathbf{G}$ . V obliki  $\mathbf{F} dt = m d\mathbf{v}$  ga je šele leta 1752 zapisal Leonard Euler, ki je izpeljal tudi izreke za gibanje togega telesa, med njimi leta 1765 enačbo (1). Pot do vrtilne količine so pripravili Daniel Bernoulli, Patrick d'Arcy in drugi. Toda Newton je pri precesiji enakonočij že uporabil nekatere izreke o vrtenju togega telesa, čeprav jih ni imel za tako pomembne, kot jih imamo danes. Njegovo izvajanje se z današnjega gledišča zdi nekoliko okorno in nepopolno, a vsebuje vse osnovne količine: vztrajnostni moment (moment of inertia), ki določa „učinkovitost (efficacy) pri vrtenju telesa okoli takega središča“, vrtilno količino ali moment gibalne količine (moment of momentum), ki meri „gibanje vsega telesa okoli vrtilne osi“, in navor ali moment sile, ki meri „moč, s katero zavrti“ telo zunanja sila. Newtonova izvajanja so skopa in včasih težko razumljiva, še posebej težavno je slediti njegovemu geometrijskemu načinu dokazovanja. Le poredko je uporabil svojo „metodo fluksij“, to je infinitezimalni račun, kot da bi jo hotel čim dlje obdržati zase. *Principi* bi sodobnemu bralcu ostali dokaj tuji, če jih ne bi predelal znani astrofizik Subrahmanyan Chandrasekhar [2].

Newton je razpravo o precesiji enakonočij začel s tremi lemmami. Prva je opredelila okoliščine in postavila razmerje 1:2 med vztrajnostnim momentom tanke krožne plošče  $\frac{1}{2}mR^2$  in vztrajnostnim momentom obroča  $mR^2$  z enako maso in enakim radijem  $R$  pri vrtenju okoli geometrijske osi. Kot

kaže, je Newton slutil enačbe, ki jih danes pregledno zapišemo z vektorji, na primer za hitrost dela vrtečega se togega telesa  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$  in za vrtilno količino takega telesa  $\mathbf{\Gamma} = \int dm \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ , če integriramo po prostornini telesa. Po Chandrasekharjevem mnenju je bilo za Newtona pomembno, da je razmerje vztrajnostnih momentov neodvisno od kota  $\vartheta$ .

V drugi lemi je zagotovil, da sta vztrajnostni moment krogle in vztrajnostni moment obroča z enako maso in z enakim radijem v razmerju 2:5. Vztrajnostni moment krogle okoli premera je zares  $\frac{2}{5}mR^2$ , razpravo pa je težko razumeti. Tudi ta rezultat je zaradi simetrije krogle neodvisen od kota  $\vartheta$ .

V tretji lemi je zatrdil, da sta „gibanje vse Zemlje” in „gibanje obroča” v razmerju  $(3\pi^2/32R^2) \cdot m/\Delta m$ , če je  $m/\Delta m$  razmerje med maso krogle in maso obroča ( $R^2$  v imenovalcu je odveč). Po Chandrasekharjevem mnenju je ob skopi utemeljitvi Newton pod gibanjem pravzaprav razumel cirkulacijo  $\oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ , ki jo je vpeljal šele lord Kelvin kakih dvesto let pozneje. Cirkulacija po krogu z radijem  $r$  je  $2\pi r\omega \sin \vartheta$ , če upoštevamo komponento hitrosti  $\omega r \sin \vartheta$ , pravokotno na ravnino geometrijske osi in pravokotnice na ravnino gibanja.  $\int_0^R \int_0^\pi 2\pi\omega r^3 \sin^2 \vartheta d\vartheta dr = \frac{1}{4}\omega\pi^2 R^4$  je integral cirkulacije po krogli, po obroču s prečnim presekom  $\Delta S$  pa  $\int_0^\pi 2(\omega R \sin \vartheta) R \Delta S d\vartheta = 4\omega R^2 \Delta S$ . Razmerje obeh je  $(3\pi^2/32)V/\Delta V = (3\pi^2/32) \cdot m/\Delta m$ , če je  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  in  $\Delta V = 2\pi R \Delta S$  ter sta pri homogenih telesih prostornini v razmerju mas.

Newton je odmisllil kroglo sredi Zemlje in preostali del snovi razporedil v tanek obroč, ki se je vrtel okoli svoje geometrijske osi pod kotom  $23,5^\circ$  proti pravokotnici na ravnino gibanja. V obliki „domneve” je zapisal, da bi se pomladišče enako gibalo, če bi bil obroč sestavljen iz drobnih delov ali tog. Nato je v „predlogu XXXIV, nalogi XX”, zatrdil, da je prispevek Sonca k precesiji pomladišča sorazmeren z letnim premikom vozliščnice Lune, pomnoženim z razmerjem sideričnega dne in sideričnega obhodnega časa Lune. Letni premik Lunine vozliščnice,  $-20^\circ 11' 46''$ , je izračunal prej, ko je obravnaval gibanje Lune. Trditev naj bi veljala za vsako Luno, če bi se jih več gibalo v enaki oddaljenosti. Za Luno, ki pa bi se gibala okoli Zemlje na majhni višini, bi bil letni premik vozliščnice enak izmerjenemu premiku, pomnoženemu z razmerjem sideričnega dne in sideričnega obhodnega časa Lune. To bi veljalo tudi za obroč lun, če bi se dotikale in bile sestavljene iz majhnih delov ali bile togo povezane.

Z izrazom, ki ga je dobil za letni premik Lunine vozliščnice, ugotovimo, da je Newton za povprečno kotno hitrost precesije v prvem redu  $\varepsilon$  navedel

$$\bar{\omega}_p = -1,081 \frac{3\mathcal{G}M\varepsilon}{5r^3\omega} \cos \vartheta, \quad (6)$$

kar se za faktor  $1,081 \cdot \frac{2}{5} = 0,42$  razlikuje od (5). S sploščenostjo  $\varepsilon = 1/230$  je tako za prispevek Sonca dobil  $-9,05'' \text{ leto}^{-1}$ . Razmerje med prispevkom Lune in prispevkom Sonca k precesiji je izenačil z razmerjem med prispevkom Lune in prispevkom Sonca k plimovanju. Plimska pospeška Lune in

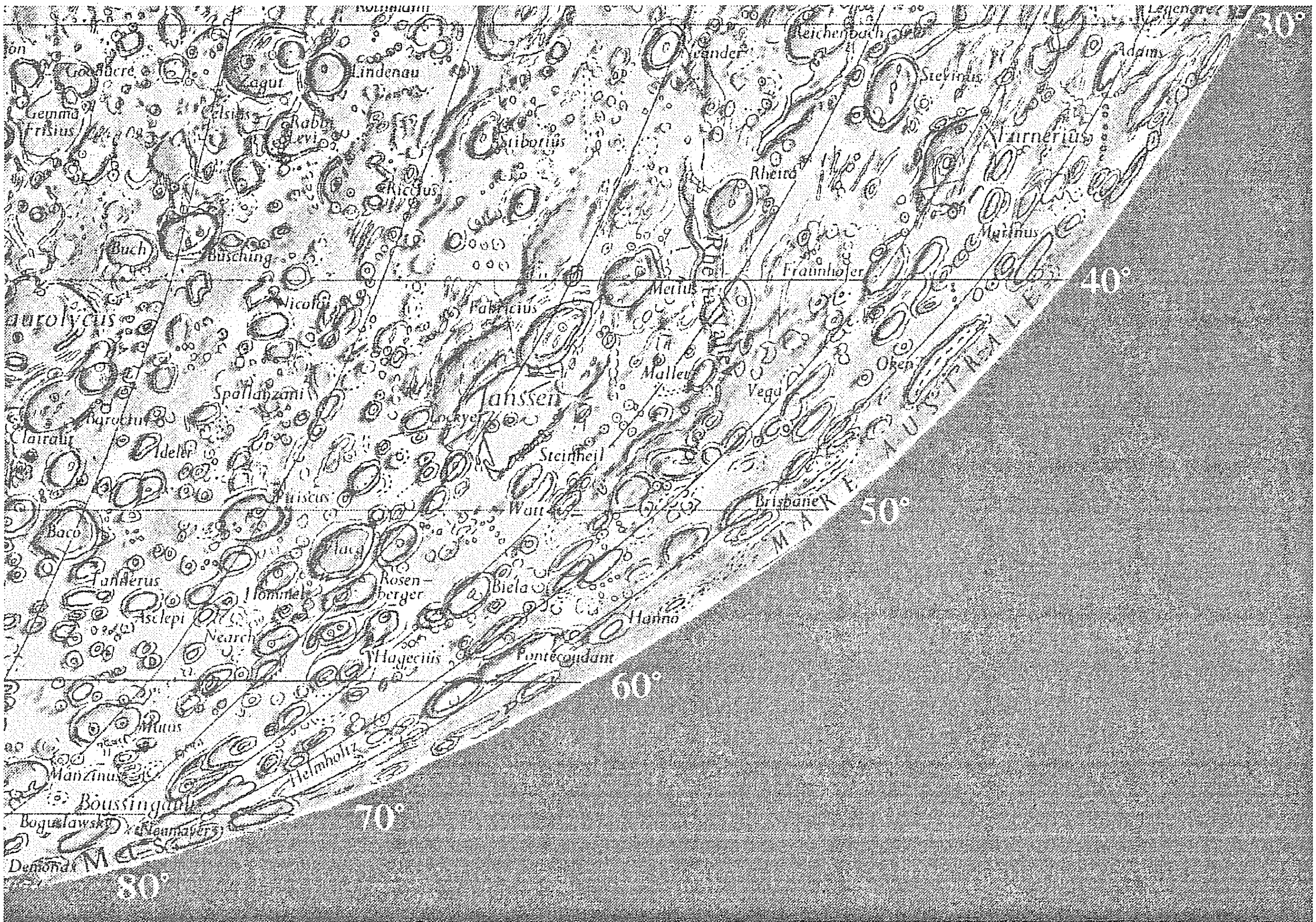
Sonca sta v razmerju  $(M_L/M_S)/(r_L/r_S)^3$  [4], zato je bil sklep upravičen. Toda za številski podatek je Newton vzel 4,48, kar je bilo precej večje od današnjega podatka 2,17, ki izhaja tudi iz računa v prvem razdelku: 35,3/16,3. S prevelikim podatkom je za prispevek Lune k precesiji dobil dobrih  $-40'' \text{ leto}^{-1}$  in skupaj s prispevkom Sonca  $-50'' \text{ leto}^{-1}$ . Zadovoljno je pripomnil, da se to „sklada s pojavi“. Ne gre pozabiti, da tedaj še niso poznali gravitacijske konstante in so bili podatki za maso Zemlje in Lune dokaj nenatančni.

Obravnavanje precesije enakonočij je značilno za razdelke, ki jih je v *Principih* več in v katerih je Newton ob novih vprašanjih uvedel nove zamisli. Pri tem se je pri precesiji še posebej „jasno pokazala globina Newtonovega predirnega fizikalnega razumevanja po načinu, kako je prepoznal razne prispevke, kar preseneča celo sodobnega bralca“. Nasprotno pa „na analitični strani Newton, z običajnimi zahtevami o strogosti, naloge ni prignal dovolj daleč.“ [2] Premajhen sorazmernostni koeficient v enačbi (6) je po naključju izravnal preveliko razmerje med plimskima pospeškoma Lune in Sonca ter preveliko sploščenost in dal pravi izid. Chandrasekhar se čudi, da so sodobniki sprejeli Newtonovo izvajanje, čeprav „bi moralo biti celo priložnostnemu bralcu jasno, da je ujemanje naključno“. V poznejših izdajah tega dela besedila niso spremenili, kar po njegovem mnenju meče slabo luč na delo urednikov, med njimi Rogerja Cotesa.

Zgodba je poučna v več pogledih. Včasih raziskovalec – podzavestno ali zavedno – uporabi podatke, ki dajo pričakovani rezultat. Ni vseeno, v kakšni obliki objavi novo zamisel in kako pomembna se mu zdi. Mimogrede izražene ali skrite zamisli ostanejo neopažene ali potrebujejo dalj časa, da se uveljavijo. Odkritje se navadno ne pojavi nenadoma in v končni obliki. Pogosto je bila pot do njega precej bolj zamotana, kot bi pričakovali dandanes. Newtona in Eulerja ne povezuje samo Eulerjeva oblika drugega Newtonovega zakona, ampak tudi Newtonova slutnja Eulerjeve enačbe, čeprav je najbrž Euler začel gibanje togega telesa obravnavati od začetka. Bralec bi utegnil pri prebiranju Newtona in Chandrasekharja dobiti še več podobnih misli.

## LITERATURA

- [1] J. Strnad, *Fizika, 1. del*, DMFA, Ljubljana 1995, str. 63, str. 87.
- [2] S. Chandrasekhar, *Newton's Principia for the Common Reader*, Clarendon Press, Oxford 1995, str. 455.
- [3] I. Newton, *The Mathematical Principles of Natural Philosophy*, iz latinščine prevedel Andrew Motte 1729, Dawson of Pall Mall, London 1968, Vol. II, str. 320.
- [4] J. Strnad, *O plimi in oseki*, Obzornik mat. fiz. **32** (1985) 66.



Dušan Repovš in Pavel V. Semenov, *Continuous Selections of Multivalued Mappings, Mathematics and Its Applications 455*, Kluwer, Dordrecht 1998, 356 str.

Obširna monografija s področja sodobne teoretične matematike predstavlja prvo sistematično in izčrpno študijo teorije zveznih selekcij večličnih preslikav. Le-ta je tesno povezana s klasičnim matematičnim pojmom funkcijske odvisnosti. Na začetku tega stoletja so nekateri matematiki osnovali teorijo *večličnih* funkcij – pri njih vrednost odvisne spremenljivke  $y$  ni več enolično določena z vrednostjo neodvisne spremenljivke  $x$  kot je to pri klasični enolični funkciji, ampak je znano le to, da vrednosti  $y$  leži v neki množici  $F(x)$ , ki je enolično določena z  $x$ . V naslednjih desetletjih je postal študij lastnosti večličnih funkcij intenzivnejši – motivirali so ga problemi, ki so se pojavili v uporabni matematiki, na primer v teoriji optimalnega vodenja, v teoriji sistemov, pri študiju matematičnih modelov v ekonomiji, biologiji, umetni inteligenci itd. Eden od osnovnih teoretičnih problemov pri študiju večličnih funkcij je obstoj *selekcij*, to je takih klasičnih enoličnih funkcij, za katere je pri vsaki vrednosti neodvisne spremenljivke  $x$  vrednost odvisne spremenljivke  $f(x)$  element množice  $F(x)$ . Različna področja uporabe zahtevajo od selekcij dodatne lepe lastnosti.

Začel se je intenziven študij lastnosti večlične funkcije, ki zagotavljajo določene lepe lastnosti njene selekcije. Tako je v 40. letih John von Neumann pri študiju matematičnih modelov v ekonomiji odkril zadostne pogoje za obstoj *merljivih* selekcij. Nekoliko kasneje – v 60. letih – je Ernest Michael odkril niz pogojev, ki zagotavljajo obstoj *zveznih* selekcij. Njegovo odkritje je spodbudilo številne nove raziskave, tako na teoretičnem kot tudi na uporabnem področju. Vendar vse do sedaj niso bili najpomembnejši rezultati zbrani na enem mestu.

Knjiga je namenjena tako začetnikom kot tudi specialistom, pa tudi tistim, ki bi radi uporabili rezultate teorije selekcij na svojem raziskovalnem področju. V skladu s tem je priročno razdeljena na tri dele – na *Teorijo*, *Rezultate* in *Primere za uporabo*.

*Teorija* je zasnovana kot učbenik teorije zveznih selekcij. Uvodoma so na kratko razloženi vsi potrebni pojmi o topoloških, linearnih topoloških in Banachovih prostorih ter o večličnih preslikavah, tako da v načelu bralec ne potrebuje nikakršnega posebnega predhodnega znanja. Najprej je dokazan selekcijski izrek za večlične preslikave s konveksnimi oz. kompaktnimi slikami ter izrek za ničrazsežne in končnorazsežne prostore. Sledi predstavitev Milyutinovih preslikav in zveze med selekcijskima izrekoma za ničrazsežne prostore ter za preslikave s konveksnimi slikami. Tu je zbrano tudi nekaj primerov in protiprimerov ter tudi nov dokaz za končnorazsežne prostore. Dokazi so v tem delu knjige organizirani na poseben način – najprej so

pregledno opisane vse konstrukcije, nato sledi podrobno preverjanje lastnosti konstruiranih objektov. Taka organizacija bralcu omogoča, da sam preveri vse lastnosti.

*Rezultati* so sestavljeni kot priročnik, v katerem so zbrani vsi najpomembnejši doslej odkriti rezultati. Dokazi so tu bodisi le skicirani bodisi je samo naveden vir. Zato pa je seznam literature zelo bogat – obsega prek štiristo naslovov. Rezultate je težko klasificirati, navedimo samo, iz katerih področij so: teorija merljivih selekcij, problem uniformizacije v deskriptivni teoriji množic, diferencialne vključitve ter topološke konveksne strukture.

*Primeri za uporabo* so prav tako zbirka iz različnih področij: iz topologije in geometrije Banachovih prostorov (izreki Bartle-Gravesovega tipa, Kadecov izrek o homeomorfizmih separabilnih Banachovih prostorov, aproksimacija Čebyševa v normalnih prostorih ter problem Efimova, Kleeja in Stečkina), iz geometrijske topologije (regularne preslikave, lokalno trivialne fibracije, Dyer-Hamströmov izrek o lokalni trivialnosti homotopsko regularnih preslikav, Ferryjev izrek o Hurewiczovih vlaknenjih absolutnih okoličnih retraktov ter Masonov izrek o grupi avtohomeomorfizmov dvo-razsežnih mnogoterosti), iz teorije diferencialnih vključitev, iz teorije negibnih točk ter tudi teorije mehkih preslikav in spektralne teorije Dugundžijevih prostorov.

Knjiga je pisana v tekočem in razumljivem jeziku. Njen izid pri ugledni tuji založbi je tudi pomembno priznanje za slovensko matematiko.

*Jože Malešič*

## OBVESTILO

---

V prvi številki Obzornika za matematiko in fiziko za leto 1997 sta bila na 29. in 30. strani objavljena pravilnika:

- Razpis DMFA Slovenije za posebne pohvale šolam,
- Pravila o podeljevanju priznanj učiteljem matematike, fizike, astronomije in računalništva za delo z mladimi in za popularizacijo teh znanosti.

Vabimo vas, da pisne predloge za priznanja učiteljem in pohvale šolam pošljete do 20. oktobra 2000 na naslov:

DMFA Slovenije, Komisija za pedagoško dejavnost,  
1000 Ljubljana, Jadranska 19, p. p. 2964.

Predlogi morajo vsebovati dovolj podatkov, da bodo zadoščali komisiji za vsestransko presojo in tehtno odločitev.

Sekretarka komisije za  
pedagoško dejavnost:  
*Danica Jereb*

Predsednik DMFA Slovenije:  
*Tomaž Pisanski*

Nacionalni komite za fiziko pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije

napoveduje

## 2. nacionalno konferenco fizikov v osnovnih raziskavah

9. november 2000, Terme Zreče

Vabimo vas, da se udeležite 2. nacionalne konference fizikov v osnovnih raziskavah, ki bo v hotelu Terme Zreče v četrtek, 9. novembra 2000, v okviru letnega srečanja Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Prevoz od Ljubljane do Zreč in nazaj bo v celoti zagotovil organizator srečanja.

Namen *2. nacionalne konference fizikov v osnovnih raziskavah* je nadaljevati redna srečanja slovenskih fizikov, ki delujejo na različnih področjih osnovnih raziskav. V okviru srečanja želimo predstaviti predvsem raziskovalno delo uspešnih raziskovalcev mlajše generacije, ki so doktorirali v zadnjem obdobju. Poleg tega želimo na srečanju predstaviti raziskovalno delo na različnih področjih fizike in seznaniti študente višjih letnikov fizike z možnostmi raziskovalnega dela v okviru podiplomskega študija.

Predvideni program srečanja:

- 9.30–10.00 Registracija udeležencev
- 10.00–13.00 Predavanja, vmes je predvidena krajša pavza s kavo in čajem
- 13.00–14.00 Krajše kosilo v hotelski restavraciji
- 14.00–17.00 Predavanja s krajšo pavzo za kavo in čaj
- 17.00–19.00 Predstavitev plakatov
- 19.00–20.30 Predavanja
- 20.30–23.30 Večerja
- 23.30 Zagotovljen avtobusni prevoz v Ljubljano

Časovni raspored pošiljanja konferenčnih obvestil in pomembni datumi:

- 15. april 2000: Prvo obvestilo
- 29. september 2000: Zadnji rok za oddajo abstraktov
- 20. oktober 2000: Drugo obvestilo in program srečanja

Kontaktna oseba: doc. dr. Igor Muševič, FMF, tel. (01) 47-66-652

Informacije: [http://www.fmf.uni-lj.si/fiz\\_slo.html](http://www.fmf.uni-lj.si/fiz_slo.html)

Upravni odbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije vabi vse matematike, fizike in astronome na

## STROKOVNO SREČANJE IN 52. OBČNI ZBOR DRUŠTVA ter

### 2. NACIONALNO KONFERENCO FIZIKOV V OSNOVNIH RAZISKAVAH

ki bodo 9., 10. in 11. novembra 2000 v Zrečah

Program:

2. nacionalna konferenca fizikov v osnovnih raziskavah

Četrtek, 9.11. 2000

9.30–20.30 Registracija, predavanja, predstavitev plakatov  
20.30 Večerja, družabni večer

Strokovno srečanje in 52. občni zbor društva

Četrtek, 9.11. 2000

15.00–19.30 Strokovno srečanje

Petek, 10.11. 2000

9.00–20.00 Strokovno srečanje  
Predstavitev plakatov ob svetovnem letu matematike  
20.00 Večerja, družabni večer

Sobota, 11.11.2000

9.00 Občni zbor Društva matematikov, fizikov  
in astronomov Slovenije  
14.00 Izlet

Pregled predavanj ter predstavitev, dnevni red občnega zbora in predlog kandidacijske liste za novi upravni odbor bodo objavljeni kasneje.

Člani DMFA lahko predlagajo svoje kandidate za upravni odbor društva. Pisne predloge z obveznim pisnim soglasjem predlaganega kandidata pošljite najkasneje do srede, 8. 11. 2000 na spodnji naslov ali oddajte neposredno na strokovnem srečanju DMFA v pripravljeno škatlo do petka, 10. 11. 2000 zvečer (do 19.30).

Svoje prijave za udeležbo na 2. nacionalni konferenci fizikov v osnovnih raziskavah oziroma strokovnem srečanju in občnem zboru pošljite **najkasneje do sobote, 28. oktobra 2000**, na naslov: Janez Krušič, DMFA Slovenije, Jadranska c. 19, 1000 Ljubljana.

Predsednik DMFA Slovenije:  
*Tomaž Pisanski*