K-147 1UU 3

MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ODPISANO

2000
Letnik 47
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, MAJ 2000

letnik 47, številka 3, strani 65–96

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Martin Juvan (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.300 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.600 SIT, za študente 1.650 SIT, za tujino 30 EUR. Posamezna številka za člane 660 SIT, stare številke 440 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 2000 DMFA Slovenije – 1426

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles Str.–Page

Sprehod po matematiki: od delitve dediščine do avtomorfnih funkcij — A journey through the Mathematics: From the sharing of an inheritance to the theory of automorphic functions (Ivan Vidav) 65–74

Termoakustični hladilnik in hladilnik s pulzno cevjo — Thermoacoustic refrigerator and pulse tube refrigerator (Andrej Jeromen in Zvonko Trontelj) 75–87

Most je vzdignjen – Matematika na drugem bregu kulture — Drawbridge up – Mathematics – A cultural anatema (Hans Magnus Enzensberger, prevedel Janko Moder, ilustraciji K. H. Hofmann) 88–III

Nove knjige — New books (Ivan Vidav) IV

Na ovitku: *Gerhard Richter*, Brez naslova, 1987.

SPREHOD PO MATEMATIKI: OD DELITVE DEDIŠČINE DO AVTOMORFNIH FUNKCIJ*

IVAN VIDAV

Math. Subj. Class. (2000): 30F35, 11F03

Izhajajoč iz neenačb $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\gtreqless 1$, ki jih dobimo pri delitvi dediščine med tri osebe, pokažemo njihov pomen pri tlakovanju evklidske in neevklidske ravnine (ter sfere) s samimi skladnimi trikotniki. V Poincaréjevem modelu neevklidske ravnine so ti trikotniki krožni trikotniki. Konformna upodobitev vsakega krožnega trikotnika s koti π/m, π/n in π/p na zgornjo polovico ravnine kompleksnih števil nas privede do avtomorfnih funkcij. Na koncu pokažemo na povezavo med konformno upodobitvijo krožnih trikotnikov in rešitvami hipergeometrične diferencialne enačbe.

A JOURNEY THROUGH THE MATHEMATICS: FROM THE SHARING OF AN INHERITANCE TO THE THEORY OF AUTOMORPHIC FUNCTIONS

Starting from the inequalities $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\gtreqless 1$ which appear in the problem of dividing an inheritance between three persons, their relation to the problem of tiling an euclidean or noneuclidean plane by congruent triangles is shown. In the Poincaré's model of the hyperbolic plane these triangles are represented by curvilinear triangles whose sides are circular with angles equal to π/m, π/n, π/p onto the upper half plane of the Argand plane is determined by an automorphic function

1. Denimo, da je treba razdeliti dediščino med tri osebe tako, da dobi prva m-ti, druga n-ti in tretja p-ti del (tu so m, n in p naravna števila >1). Če je bila s tem vsa dediščina razdeljena, velja enačba

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}=1. \tag{1}$$

Kadar je vsota deležev manjša od dediščine, je

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}<1, \tag{1*}$$

neenačbo

$$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}>1 \tag{1**}$$

pa dobimo, kadar je vsota deležev večja od dediščine. V zadnjem primeru seveda delitev v dobesednem pomenu ni mogoča. Oporoka se da v drugem in tretjem primeru razumeti tudi tako, da naj se vsa dediščina razdeli v predpisanem razmerju $\frac{1}{m}:\frac{1}{n}:\frac{1}{p}$. Denimo, da je celotna dediščina enaka k.

---

* Predavanje na jubilejnem 50. občnem zboru Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije dne 23. oktobra 1998 v Lipici.

Delež prve osebe je $\frac{r}{m}$, druge $\frac{r}{n}$ in tretje $\frac{r}{p}$, kjer pomeni r sorazmernostni faktor, ki ga je treba tako izbrati, da je vsota deležev enaka k, torej

$$\frac{r}{m} + \frac{r}{n} + \frac{r}{p} = k.$$

Kadar velja neenačba (1*), je $r > k$, kadar (1**), je $r < k$, v primeru (1) pa imamo $r = k$.

Enačba (1) premore samo končno mnogo rešitev v naravnih številih m, n in p. Če privzamemo, da je $m \leq n \leq p$, so 3 rešitve. Prikazuje jih tabela I:

Tabela I.

m	n	p
2	3	6
2	4	4
3	3	3

Neenačba (1*) pa ima neskončno mnogo rešitev v naravnih številih. Zanimiv je tale primer: Naj bo zapuščina čreda k živali. Denimo, da je r, ki ustreza enačbi (2), skupni večkratnik števil m, n in p in da je poleg tega enak $k + 1$. Čredo razdelimo med dediče tako, da ji dodamo še eno žival. Prvi dedič dobi m-ti del od črede $k + 1 = r$ živali, se pravi $\frac{r}{m}$ živali, drugi $\frac{r}{n}$ in tretji $\frac{r}{p}$. Ker je r skupni večkratnik, so $\frac{r}{m}$, $\frac{r}{n}$ in $\frac{r}{p}$ cela števila. Njihova vsota je enaka $k = r - 1$ in zato dodana žival ostane. Dediči so si razdelili v predpisanem razmerju vso čredo in vsak je dobil samo cele živali.

Če je $k = r - 1$, lahko zapišemo enačbo (2) v obliki

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{r} = 1. \tag{3}$$

Rešitev v naravnih številih m, n, p in r je le neskončno mnogo. Pri vrstnem redu $m \leq n \leq p \leq r$ jih je 14. Prikazuje jih tabela II. Iz nje razberemo, da je r skupni večkratnik števil m, n in p, razen v dveh primerih: $m = 2$, $n = 3$, $p = 10$, $r = 15$ in $m = 3$, $n = 4$, $p = 4$, $r = 6$.

Tabela II.

m	n	p	r
2	3	7	42
2	3	8	24
2	3	9	18
2	3	10	15
2	3	12	12
2	4	5	20
2	4	6	12

m	n	p	r
2	4	8	8
2	5	5	10
2	6	6	6
3	3	4	12
3	3	6	6
3	4	4	6
4	4	4	4

Tudi neenačba (1**) ima nešteto rešitev v naravnih številih > 1. Prikazuje jih tabela III:

Tabela III.

m	n	p
2	2	poljuben
2	3	3
2	3	4
2	3	5

2. Pomnožimo (1), (1∗) in (1∗∗) s π. Dobimo enačbo

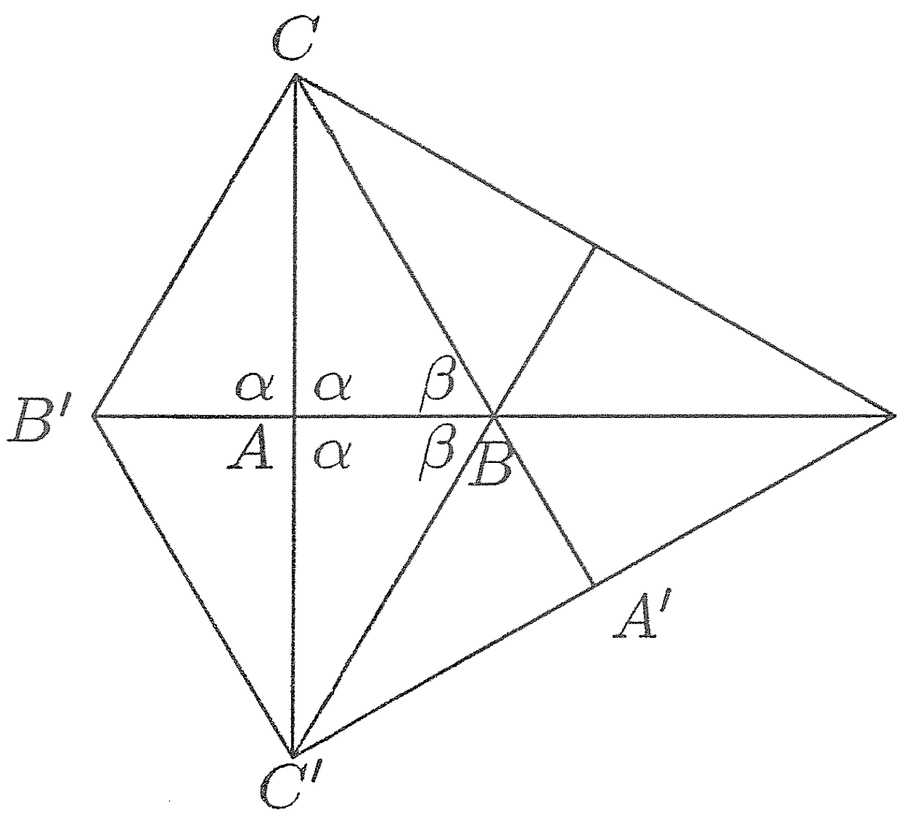
$$\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{p}=\pi \tag{4}$$

in neenačbi

$$\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{p}<\pi, \tag{4∗}$$

$$\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{p}>\pi. \tag{4∗∗}$$

Postavimo $\alpha=\frac{\pi}{m}$, $\beta=\frac{\pi}{n}$, $\gamma=\frac{\pi}{p}$. Enačba (4) se zdaj glasi $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ in pove, da so α, β, γ koti v nekem trikotniku ABC (sl. 1).



Slika 1.

Zrcalimo trikotnik ABC prek stranice AB. Zrcalna slika je trikotnik ABC', ki je skladen z ABC, toda nasprotno orientiran. Pri oglišču A je v obeh trikotnikih kot α. Zrcalimo zdaj trikotnik ABC' prek stranice AC'. Dobljeni trikotnik $AB'C'$ je skladen z ABC in z njim enako orientiran. Dobimo ga tudi tako, da trikotnik ABC zavrtimo okoli oglišča A za kot 2α. Nadaljujmo z zrcaljenji, in sicer vedno prek stranice, ki ima eno krajišče v točki A. S sodim številom $2j$ zrcaljenj pridemo vselej do trikotnika, ki je skladen z ABC in z njim enako orientiran. Dobimo ga tudi tako, da zavrtimo trikotnik ABC okoli oglišča A za kot $2j\alpha$. V posebnem primeru $j=m$ imamo $2j\alpha=2m\alpha=2\pi$, ker je $\alpha=\frac{\pi}{m}$. Trikotnik smo zavrteli za kot 2π in je zato prišel v prvotno lego. Torej z $2m$ zrcalnimi trikotniki pokrijemo natanko enkrat neko okolico oglišča A. Tudi narobe je res: Denimo, da je pri oglišču A kot α in da z $2m$ zrcaljenji tega trikotnika prek stranic, ki imajo vse eno oglišče v točki A, pokrijemo natanko enkrat okolico oglišča A. Tedaj je $2m\alpha=2\pi$, se pravi $\alpha=\frac{\pi}{m}$.

Kar smo povedali za oglišče A, velja tudi za oglišči B in C. Če zrcalimo trikotnik ABC $2n$-krat prek stranic, ki imajo eno oglišče v točki B, pokrijemo neko okolico točke B. Podobno pokrijemo okolico točke C z $2p$ zrcaljenji prek stranic, ki imajo eno krajišče v točki C. Z zrcaljenji nadaljujemo prek stranic, ki smo jih dobili pri prejšnjih zrcaljenjih. Tako pokrijemo okolice novih oglišč B', C' itd. (slika 1). Sčasoma bodo zrcalni trikotniki prekrili vso ravnino natanko enkrat. Dva trikotnika tega pokritja, ki imata skupno stranico, sta vselej zrcalni sliki drug drugega. Če pa dobimo trikotnik $A'B'C'$ iz trikotnika ABC s sodim številom zrcaljenj, je enako

orientiran kakor ABC in z njim skladen. Zato obstaja gibanje ravnine, ki ohranja orientacijo in prevede trikotnik ABC do pokritja trikotnika $A'B'C'$.

Ker ima enačba (1) v bistvu samo tri različne rešitve, so samo tri možnosti, da pokrijemo ravnino na opisani način: Začetni trikotnik ABC je bodisi enakostraničen, bodisi polovica enakostraničnega trikotnika, bodisi polovica kvadrata.

Kaj pa neenačbi (4*) in (4**)? V prvem primeru zadoščajo koti α, β, γ neenačbi $\alpha + \beta + \gamma < \pi$. V neevklidski ravnini je vsota trikotniških kotov manjša od π. Torej lahko vzamemo, da so $\alpha = \frac{\pi}{m}$, $\beta = \frac{\pi}{n}$ in $\gamma = \frac{\pi}{p}$ koti nekega trikotnika ABC v neevklidski ravnini. Tudi v tej ravnini lahko zrcalimo trikotnik ABC prek njegovih stranic in nato prek dobljenih stranic. Ker so koti celoštevilski deli iztegnjenega kota π, pokrijemo vso neevklidsko ravnino natanko enkrat s skladnimi trikotniki. Spet velja, da sta dva trikotnika tega pokritja, ki imata skupno stranico, zrcalni sliki drug drugega. Trikotnik $A'B'C'$, ki nastane iz prvotnega s sodim številom zrcaljenj, je enako orientiran kakor prvotni trikotnik. Zato obstaja gibanje neevklidske ravnine, ki ohranja orientacijo in prevede trikotnik ABC do pokritja s trikotnikom $A'B'C'$.

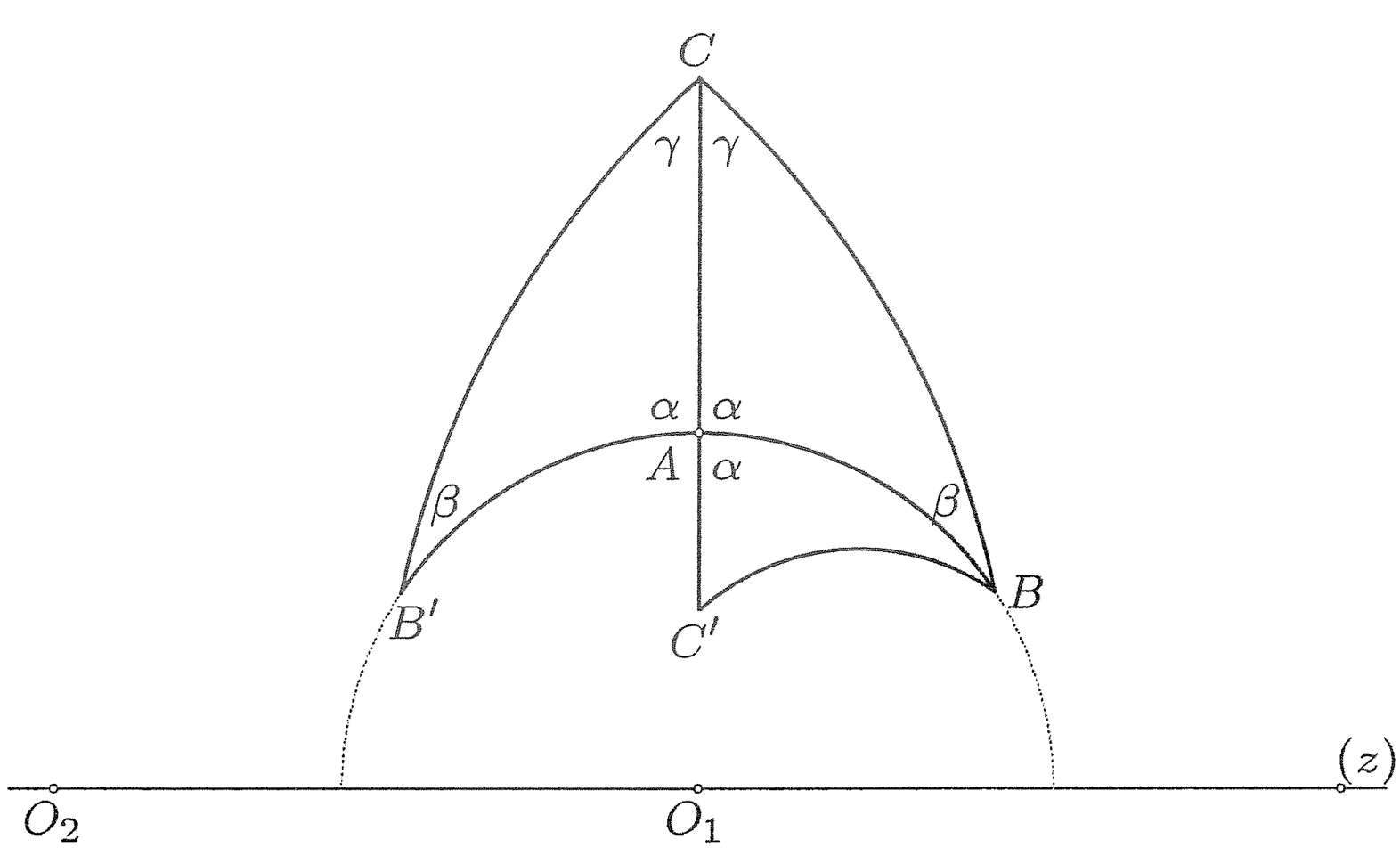
Če velja neenačba (4**), lahko vzamemo, da so α, β, γ koti nekega sferičnega trikotnika ABC. Stranice AB, BC in CA so v tem primeru loki glavnih krogov, to je krogov, katerih ravnine gredo skozi središče sfere. Z zaporednimi zrcaljenji pokrijemo zdaj vso sfero s trikotniki. Spet velja, da sta dva trikotnika tega pokritja zrcalni sliki drug drugega, če imata skupno stranico. Ker je površina sfere končna, je število trikotnikov tega pokritja končno.

3. Za neevklidsko ravnino obstajajo številni modeli v evklidski ravnini. Oglejmo si Poincaréjev model. V ta namen vzemimo evklidsko ravnino, opremljeno s pravokotnim koordinatnim sistemom. Na njej lahko upodabljamo kompleksna števila. Slika kompleksnega števila $z = x + iy$ je točka, ki ima absciso x in ordinato y. Tako opremljeni ravnini pravimo kompleksna ravnina (z). Abscisno os imenujemo realna os, ker se na njej upodabljajo realna števila, ordinatno os pa imaginarna os.

V Poincaréjevem modelu predstavimo neevklidsko ravnino z zgornjo polovico kompleksne ravnine (z), se pravi z množico točk $z = x + iy$, pri katerih je $y > 0$. Realna os je meja, ne sodi več v model neevklidske ravnine. Premice neevklidske ravnine so v tem modelu vsi poltraki polravnine, pravokotni na realno os, in vse polkrožnice, ki sekajo realno os pravokotno in imajo zato središče na realni osi. Trikotnik neevklidske ravnine predstavimo s krožnim trikotnikom, katerega stranice so loki krogov, ki imajo središče na realni osi, ali pa daljice, pravokotne na realno os (samo ena stranica je v takem trikotniku lahko daljica) (slika 2). Pomembno je to, da merimo v tem modelu kote kakor v evklidski ravnini. Sekajoči se premici oklepata v neevklidski geometriji kot, ki je enak kotu, v katerem se sečeta pripadajoči polkrožnici. Slika 2 prikazuje tak neevklidski trikotnik v Poincaréjevem modelu. Stranica AC je daljica, pravokotna na realno os, stranici AB in BC

pa sta loka krogov, ki imata središči O_1 in O_2 na realni osi. Kota α in γ tega trikotnika sta kota, ki ju oklepa daljica AC z lokoma AB in CB, β pa je kot, v katerem se sečeta loka BA in BC.

Kaj pomeni v tem modelu zrcaljenje prek premice? Če je premica neevklidske ravnine predstavljena s poltrakom, pravokotnim na realno os, se zrcaljenje ujema z zrcaljenjem v evklidski ravnini. Zrcalna slika trikotnika ABC prek stranice AC je potemtakem trikotnik $AB'C$, ki je kar običajna (evklidska) zrcalna slika trikotnika ABC (sl. 2).



Slika 2.

Če pa je neevklidska premica predstavljena v našem modelu s polkrožnico, je zrcaljenje prek take premice preslikava, ki jo imenujemo zrcaljenje prek kroga. Zrcaljenje prek kroga je v evklidski geometriji opredeljeno takole: Naj bo K krožnica s središčem O in polmerom R. Nadalje naj bo $A \neq O$ poljubna točka ravnine, na kateri leži krožnica K. Njena zrcalna slika A' glede na K je točka na poltraku OA, ki je določena tako, da velja razmerje $\overline{OA'}:R = R : \overline{OA}$ (sl. 3). Če postavimo $\overline{OA} = r$ in $\overline{OA'} = r'$, zapišemo to razmerje v obliki $r' : R = R : r$ in od tod izračunamo, da je

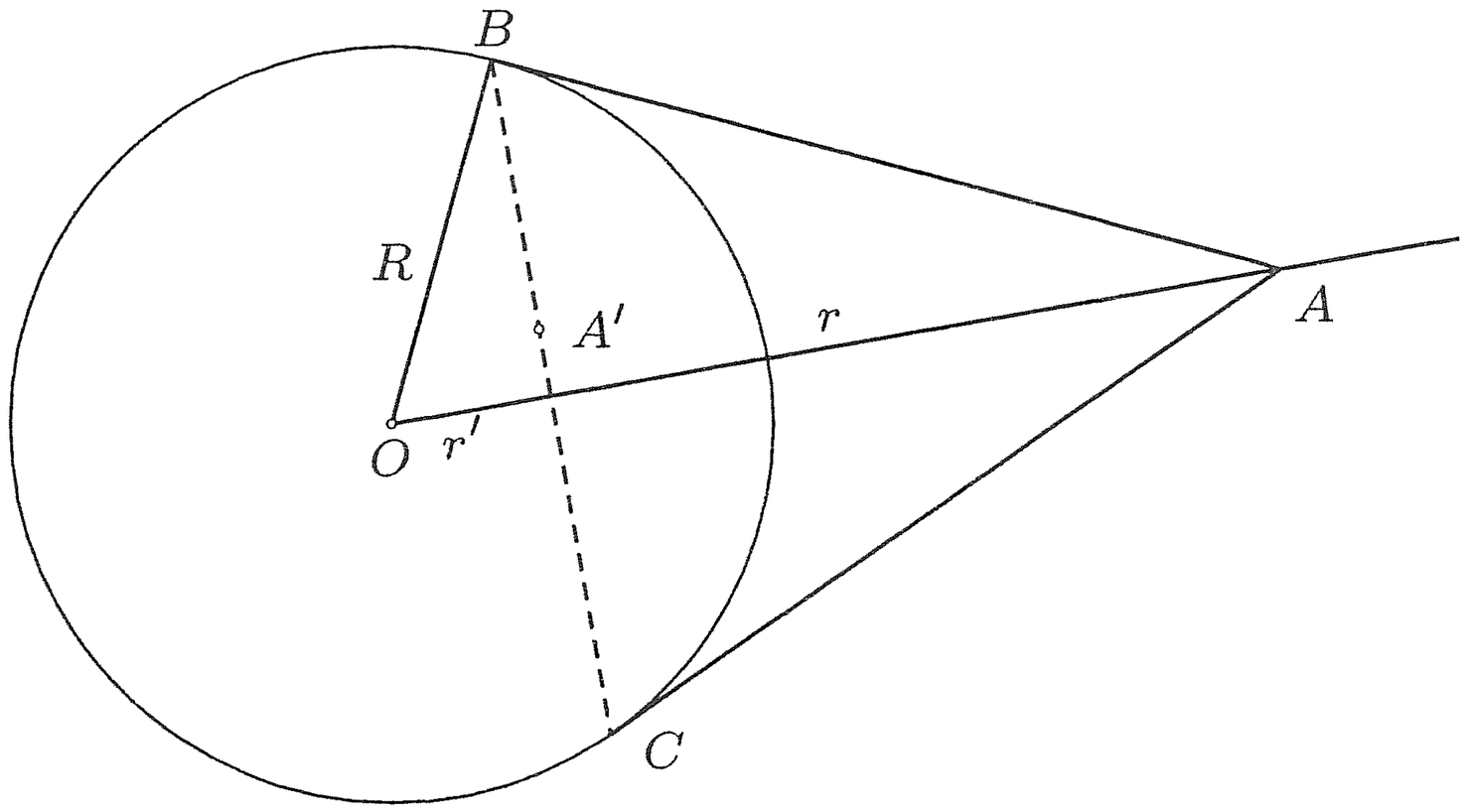
$$r' = \frac{R^2}{r}.$$

Iz te enačbe se vidi, da je zrcalna točka A' zunaj kroga, če je A v notranjosti, in obratno (iz $r < R$ namreč sledi $r' > R$, iz $r > R$ pa $r' < R$). Če leži A na krožnici K, se ujema z zrcalno sliko: $A' = A$.

Denimo, da leži krožnica K na kompleksni ravnini (z) in da je njeno središče O v izhodišču. Če je točka A na sliki kompleksnega števila z in zrcalna točka A' slika števila z', se brez težave prepričamo, da velja zveza

$$z' = \frac{R^2}{\overline{z}}.$$

($\overline{z}$ pomeni konjugirano vrednost števila z.)



Slika 3.

V evklidski in neevklidski ravnini dobimo vsako gibanje z nekaj zaporednimi zrcaljenji prek primerno izbranih premic. Če je teh zrcaljenj sodo število, pripadajoče gibanje ohranja orientacijo. Gibanje v neevklidski ravnini, ki ohranja orientacijo, se izraža v Poincaréjevem modelu z Möbiusovo transformacijo

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Koeficienti a, b, c, d so dana realna števila, med katerimi je zveza

$$ad - bc = 1. \tag{$*$}$$

Da pomeni transformacija (5) v modelu neevklidske ravnine res gibanje, ugotovimo takole: Ker so koeficienti a, b, c, d realni, preslika transformacija (5) realno os na realno os. Zveza $(*)$ med koeficienti pa pove, da se upodobi zgornja polravnina na zgornjo polravnino. Funkcija $f(z) = (az+b)/(cz+d)$ je na zgornji polravnini holomorfna, njen odvod $f'(z) = 1/(cz+d)^2$ povsod različen od nič. Preslikava s tako holomorfno funkcijo ohranja kote in orientacijo. Nadaljnja lastnost vsake Möbiusove transformacije je ta, da preslika premice in krožnice v krožnice (ali premice). Ker se preslika realna os vase, se vsaka krožnica, ki seče realno os pravokotno, upodobi v krožnico z isto lastnostjo ali v premico, ki stoji pravokotno na realno os. Torej (5) preslika premice našega modela neevklidske ravnine v premice. Trikotnik ABC, katerega stranice so loki krožnic, ki sečejo pravokotno realno os, se preslika v krožni trikotnik $A'B'C'$ z isto lastnostjo. Ker je preslikava konformna, so koti α', β', γ' pri ogliščih A', B', C' preslikanega trikotnika enaki ustreznim kotom α^*, β^*, γ^* pri ogliščih A, B, C prvotnega trikotnika. V neevklidski geometriji pa velja izrek, da sta dva trikotnika skladna, če se ujemata v vseh treh kotih. Torej sta trikotnika ABC in $A'B'C'$ skladna. To pomeni, da transformacija (5) preslika vsak trikotnik na skladen trikotnik. Zato določa v modelu neevklidske geometrije neko gibanje, ki ohranja orientacijo. Ni

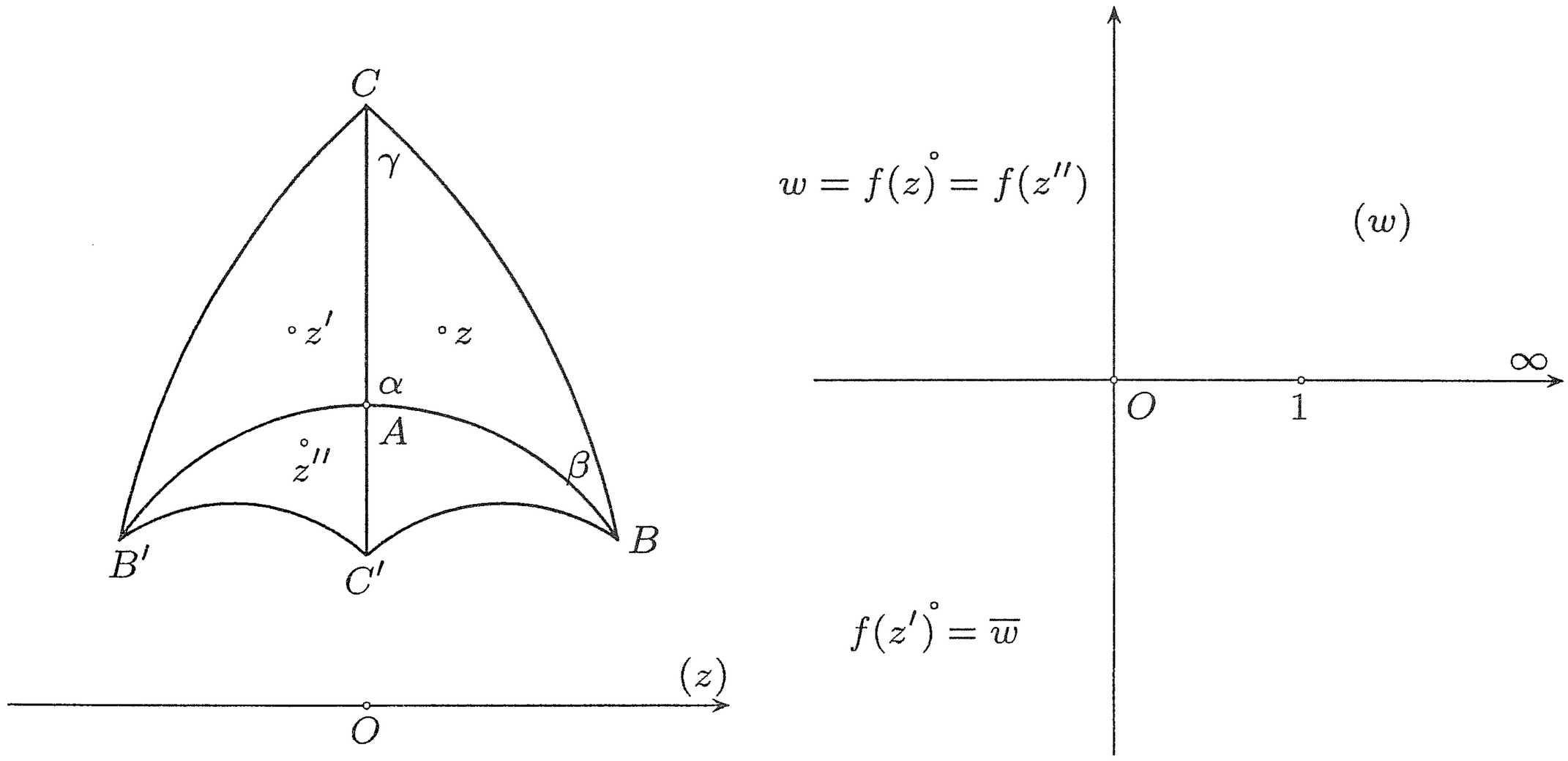
težko dokazati, da se vsako gibanje, ki ohranja orientacijo, v tem modelu izraža z Möbiusovo transformacijo (5), pri kateri so koeficienti a, b, c, d realni in je med njimi zveza $(*)$.

Če so koti trikotnika ABC celoštevilski deli iztegnjenega kota, se da vsa neevklidska ravnina, kakor smo videli, natanko enkrat pokriti s samimi skladnimi trikotniki. V Poincaréjevem modelu pokrivajo ustrezni krožni trikotniki natanko enkrat vso zgornjo polovico kompleksne ravnine. To pokritje dobimo z zaporednimi zrcaljenji trikotnikov prek stranic. Če pridemo do kakega trikotnika $A'B'C'$ s sodim številom zrcaljenj iz prvotnega trikotnika ABC, sta trikotnika ABC in $A'B'C'$ enako orientirana (in seveda skladna). Zato obstaja gibanje, ki preslika trikotnik ABC na trikotnik $A'B'C'$. To gibanje določa v Poincaréjevem modelu neka Möbiusova transformacija (5). Za vsak par enako orientiranih trikotnikov tega pokritja obstaja torej po ena taka transformacija. Tako dobimo neskončno množico transformacij. Vse imajo to lastnost, da preslikajo zgornjo polovico kompleksne ravnine nase, ohranjajo orientacijo in razdelitev polravnine na krožne trikotnike. Te Möbiusove transformacije (oz. pripadajoča gibanja) sestavljajo neko grupo, ki je podgrupa grupe vseh gibanj. To podgrupo bomo imenovali G.

4. Osnovni izrek konformnega upodabljanja pove, da se da vsako enostavno povezano ravninsko območje, ki ni vsa ravnina, konformno upodobiti v notranjost enotnega kroga ali, kar je v bistvu isto, na zgornjo polovico ravnine. Če je rob območja preprost, se robne točke območja preslikajo povratno enolično na točke enotne krožnice oz. na točke realne osi. Upodobitev je natanko določena s slikami treh robnih točk. Obstaja ena in samo ena konformna upodobitev, ki preslika notranjost območja na zgornjo polovico ravnine, rob območja na realno os in tri poljubno izbrane točke na robu v tri poljubno izbrane točke na realni osi.

Notranjost krožnega trikotnika ABC je enostavno povezano območje, rob, ki sestoji iz treh krožnih lokov, je dovolj preprost in zato lahko uporabimo osnovni izrek. Upodobimo trikotnik tako, da se njegova notranjost preslika na zgornjo polovico kompleksne ravnine (w), rob ABC pa na realno os te ravnine, in sicer naj gredo oglišča A, B, C zaporedoma v točke $w = 0$, $w = 1$ in $w = \infty$. S temi podatki je konformna upodobitev natanko določena. Če vzamemo, da leži krožni trikotnik ABC na kompleksni ravnini (z), se upodobitev izraža s funkcijo $z \mapsto f(z)$, ki je v notranjosti trikotnika holomorfna, na robu pa so njene vrednosti realne: f preslika stranico AB na interval $(0, 1)$ realne osi ravnine (w), stranico BC na interval $(1, \infty)$, stranico CA pa na interval $(-\infty, 0)$ (sl. 4).

Teorija konformnega upodabljanja zagotavlja, da je upodobitvena funkcija f holomorfna tudi na stranicah trikotnika, izjeme so lahko le oglišča. Zato se da f analitično nadaljevati prek vsake izmed stranic. Funkcijo, ki jo dobimo s tem nadaljevanjem, bomo označili z isto črko f. Razširimo torej definicijsko območje funkcije f v notranjost treh trikotnikov, ki so zrcalne slike trikotnika ABC prek njegovih stranic. Kam preslikuje f točke iz zrcalnih trikotnikov? Tole velja: Naj bosta z in z' zrcalni točki glede na eno



Slika 4.

izmed stranic, npr. glede na stranico AC, in sicer naj bo z v notranjosti trikotnika ABC, z' pa je potem v notranjosti zrcalnega trikotnika $AB'C$ (sl. 4). Funkcija f upodobi stranico CA na interval $(-\infty, 0)$ realne osi ravnine (w). Točki z in z', ki sta zrcalni glede na stranico CA, se preslikata v točki w in w', ki sta zrcalni sliki druga druge glede na pripadajoči interval $(-\infty, 0)$, se pravi glede na realno os ravnine (w). Toda zrcalna točka w' točke w glede na realno os je slika konjugiranega števila $\overline{w}$, torej $w' = \overline{w}$. Zato je vrednost funkcije f v zrcalni točki z' enaka konjugirani vrednosti funkcije f v točki z, torej $f(z') = \overline{f(z)}$. Ker se upodobi trikotnik ABC na zgornjo polravnino ravnine (w), vidimo, da se upodobi zrcalni trikotnik $AB'C$ na spodnjo polravnino.

Kar smo povedali za zrcalni trikotnik $AB'C$, velja tudi za druga dva ABC' in $A'BC$. Vsakega izmed njih upodobi f na spodnjo polravnino.

Območje funkcije f lahko zdaj razširimo prek novih stranic, npr. prek stranice AB' v notranjost trikotnika $AB'C'$, ki je zrcalna slika trikotnika $AB'C$. Če sta z' in z'' zrcalni točki glede na stranico AB', pri čemer naj bo z' zrcalna točka točke z v prvotnem trikotniku ABC (sl. 4), in če sta nadalje pripadajoči točki na ravnini (w) enaki $w' = f(z')$ ter $w'' = f(z'')$, je spet w'' konjugirana vrednost števila w', torej je $w'' = \overline{w}'$. Ker pa je $w' = \overline{w}$, pri čemer je $w = f(z)$, vidimo, da je $w'' = \overline{w} = w$. Torej velja $f(z'') = f(z)$. Potemtakem zavzame funkcija f v točki z'' isto vrednost kakor v točki z, če dobimo z'' z dvakratnim zrcaljenjem točke z. Funkcija f upodobi trikotnik $AB'C'$ spet na zgornjo polravnino ravnine (w).

Če so stranice krožnega trikotnika ABC loki krogov, ki pravokotno sečejo realno os ravnine (z), in so njegovi koti celoštevilski deli kota π, pokrijemo z zrcalnimi trikotniki natanko enkrat vso zgornjo polravnino ravnine (z). Upodobitvena funkcija f se da analitično nadaljevati v notranjost vseh teh trikotnikov. Analitična je tudi na stranicah. Kako pa je v ogliščih? Funkcija f je holomorfna v neki okolici oglišča A in tam omejena, saj pre-

slika točko A v $w = 0$. Zato je f holomorfna tudi v točki A (A je odpravljiva singularnost). Isto velja za oglišče B in za vse točke, ki jih dobimo iz A in B z zaporednimi zrcaljenji. Prav tako je f holomorfna v neki okolici točke C, vendar tam ni omejena, ker njena absolutna vrednost narašča čez vse meje, ko se bližamo točki C (f preslika točko C v $w = \infty$). Zato ima f v točki C pol. Isto velja za vse točke, ki jih dobimo z zrcaljenji točke C. Tako smo ugotovili, da je f holomorfna na vsej zgornji polravnini ravnine (z), razen v točkah, kjer ima pole. To se pravi, da je f na zgornji polravnini meromorfna funkcija. Konformno upodobi vsak trikotnik pokritja, ki je enako orientiran kakor trikotnik ABC, na zgornjo polravnino ravnine (w), vsak trikotnik, ki je nasprotno orientiran, pa na spodnjo polravnino. Nadalje velja tole: Če smo dobili točko z' iz točke z s sodim številom zrcaljenj prek stranic, zavzame f v z in z' isto vrednost, torej $f(z') = f(z)$. V prejšnjem razdelku pa smo ugotovili, da sta taki točki z in z' povezani z neko Möbiusovo transformacijo (5), ki pripada grupi G. Od tod sklepamo, da velja enakost

$$f(\frac{az+b}{cz+d}) = f(z) \tag{6}$$

za vsak z iz zgornje polravnine, ki ni pol funkcije f, in za vsako Möbiusovo transformacijo $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, ki pripada grupi G. Zaradi te lastnosti pravimo, da je f **avtomorfna funkcija**.

Splošna definicija avtomorfne funkcije je takale: Naj bo D odprto povezano območje ravnine (z) in G (diskretna) grupa Möbiusovih transformacij, ki vse preslikajo območje D nase. Meromorfna funkcija f, definirana na območju D, se imenuje avtomorfna funkcija, če velja enakost (6) za vsak $z \in D$, ki ni pol in za vsako Möbiusovo transformacijo $z \mapsto (az+b)/(cz+d)$, ki pripada grupi G.

Preprost zgled avtomorfne funkcije je cela periodična funkcija f s periodo ω, npr. $f(z) = \sin z$, pri kateri je perioda $\omega = 2\pi$. Za periodično funkcijo velja enakost $f(z + n\omega) = f(z)$ za vsak z in vsako celo število n. Območje D je v tem primeru vsa ravnina (z), grupa G Möbiusovih transformacij pa sestoji iz vseh vzporednih premikov $z \mapsto z + n\omega$, $n \in \mathbb{Z}$.

Vsaki trojki naravnih števil m, n, p, ki zadoščajo neenačbi (1*), smo priredili neko avtomorfno funkcijo, pri kateri je definicijsko območje zgornja polravnina ravnine (z). Nekatere trojke zadoščajo enačbi (3), kjer je r naravno število. Prikazuje jih tabela II. Zastavlja se vprašanje, ali se morda pripadajoče avtomorfne funkcije odlikujejo s kakšnimi posebnimi lastnostmi.

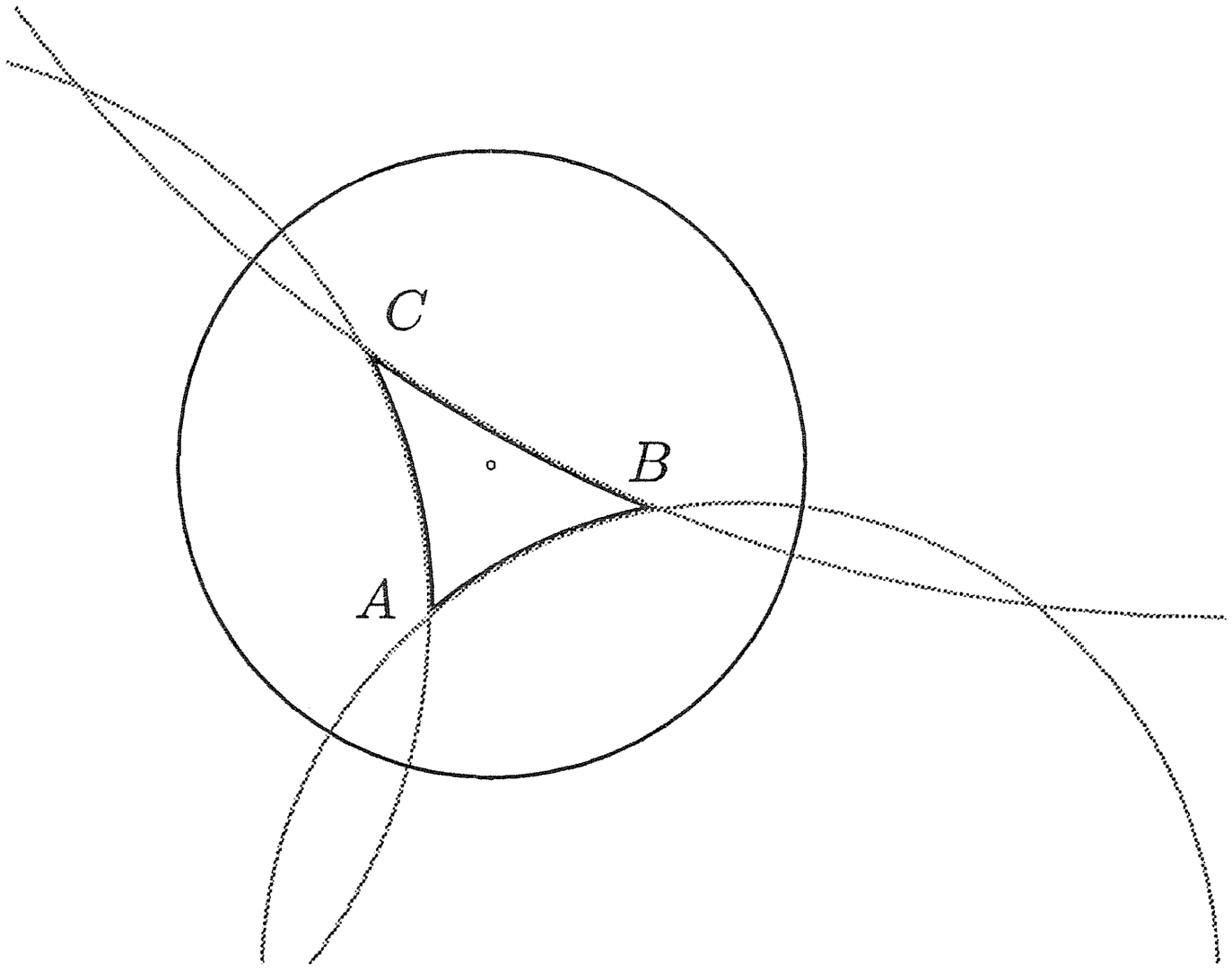
5. Kako dobimo konformno upodobitev krožnega trikotnika na zgornjo polovico kompleksne ravnine? Inverzno preslikavo – le-ta upodobi zgornjo polravnino na krožni trikotnik ABC – najdemo takole: Izhajajmo iz hipergeometrične diferencialne enačbe

$$x(x-1)y'' + [(a+b+1)x - c]y' + aby = 0. \tag{7}$$

Tu so a, b, c še poljubne konstante. Privzemimo, da so realne in takole urejene po velikosti: $1 > c > a + b > a > b > 0$. Enačbo (7) obravnavajmo

v kompleksnem. Njene rešitve so holomorfne funkcije na kompleksni ravnini (x) z izjemo singularnih točk $x = 0$, $x = 1$ in $x = \infty$.

Naj bosta y_1 in y_2 linearno neodvisni rešitvi enačbe (7). Če par y_1 in y_2 primerno izberemo, je kvocient $y_1/y_2 = \eta$ holomorfna funkcija na vsej zgornji polravnini kompleksne ravnine (x), pa tudi na realni osi z izjemo singularnih točk $x = 0$, $x = 1$ in $x = \infty$. Funkcija $x \mapsto \eta(x)$ upodobi realno os povratno enolično na rob nekega krožnega trikotnika ABC, in sicer interval $(0, 1)$ na lok AB, interval $(1, \infty)$ na lok BC, interval $(-\infty, 0)$ pa na lok CA. Dokazati se da, da η upodobi zgornjo polravnino ravnine (x) konformno v notranjost trikotnika ABC. Koti tega trikotnika so $\alpha = (1 - c)\pi$, $\beta = (c - a - b)\pi$ in $\gamma = (a - b)\pi$.



Ker je vsota kotov $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, obstaja krožnica, ki seče pravokotno vse tri krožnice, na katerih ležijo stranice AB, BC in CA (sl. 5). S primerno izbrano Möbiusovo transformacijo preslikamo pravokotno krožnico na realno os. To pomeni, da izbrani par y_1, y_2 linearno neodvisnih rešitev enačbe (7) zamenjamo z nekim drugim parom. Kvocient novih rešitev preslika realno os ravnine (x) na rob krožnega trikotnika, katerega stranice so loki krogov, ki sečejo realno os pravokotno. Tako dobljeni trikotnik lahko vzamemo kot trikotnik s koti α, β, γ v Poincaréjevem modelu neevklidske ravnine. Koti so celoštevilski deli kota π, namreč $\alpha = \pi/m$, $\beta = \pi/n$ in $\gamma = \pi/p$ pri primerno izbranih konstantah a, b, c, ki nastopajo v diferencialni enačbi (7). Preprost račun pokaže, da se konstante izražajo takole:

$$a = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} + \frac{1}{p}), \quad b = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{n} - \frac{1}{p}), \quad c = 1 - \frac{1}{m}.$$

LITERATURA

[1] J. Plemelj, *Teorija analitičnih funkcij*, Slovenska akademija znanosti in umetnosti, Ljubljana 1953.

TERMOAKUSTIČNI HLADILNIK IN HLADILNIK S PULZNO CEVJO

ANDREJ JEROMEN IN ZVONKO TRONTELJ

PACS 07.20.Mc

V članku predstavimo termoakustični hladilnik in hladilnik s pulzno cevjo z odprtino. Osnove njunega delovanja opišemo s povprečnim entalpijskim tokom.

THERMOACOUSTIC REFRIGERATOR AND PULSE TUBE REFRIGERATOR

In the paper, thermoacoustic refrigerator and orifice pulse tube refrigerator are introduced. We describe the basics of their operation using the average enthalpy flow.

Uvod

Danes uporabljamo številne naprave, v katerih morajo biti posamezni sestavni deli hlajeni, saj delujejo dobro le pri dovolj nizki temperaturi. Omenimo le polprevodniške senzorje ionizirajočih sevanj, senzorje infrardeče svetlobe ter široko področje visokotemperaturnih superprevodnikov. Zaradi nizke cene in preproste uporabe takšne naprave večinoma hladimo z utekočinjenim dušikom ali helijem. Če pa želimo doseči daljše obdobje delovanja naprave brez vzdrževanja – dolivanja utekočinjenega plina, potrebujemo majhen hladilnik, ki pri temperaturi od 150 do 4 K črpa od 100 mW do nekaj W toplotnega toka. Najbolj očiten primer, ko je uporaba hladilnika skoraj nujna, so naprave v satelitih, prenosnih senzorjih infrardeče svetlobe in v nekaterih delih telekomunikacijskih sistemov.

Ogledali si bomo dve vrsti majhnih hladilnikov: termoakustični hladilnik in hladilnik s pulzno cevjo z odprtino. Njuno delovanje bomo opisali s povprečnim entalpijskim tokom. Enoten opis nam bo razkril skupne značilnosti obeh mehanizmov hlajenja in omogočil primerjavo.

Opis z entalpijskim tokom

Za opis hladilnikov bomo uporabljali termodinamsko funkcijo stanja entalpijo:

$$H = W_n + pV. \tag{1}$$

Tu je W_n notranja energija, p tlak v snovi in V njen volumen. Entalpija je za naš namen primerna funkcija stanja, saj se entalpija tekočine pri pretakanju skozi vodoravno cev ohranja. To je res, če je tekočina toplotno izolirana in če lahko zanemarimo prispevek njene kinetične energije [1]. V obeh hladilnikih, ki ju bomo obravnavali, pa plin ne teče po cevi, ampak v njej niha sem in tja. Pokazali bomo, da v plinu kljub temu lahko teče povprečen entalpijski tok vzdolž cevi.

Zamislimo si idealen plin v cevi. Po njem naj se širi sinusno zvočno valovanje z majhno amplitudo. Delci v plinu naj nihajo vzdolž cevi. Tlak p, hitrost v, temperaturo T in gostoto plina ρ v vsaki točki posebej zapišimo kot vsoto povprečne vrednosti (indeks 0) in fluktuacije (indeks 1), ki s časom sinusno niha. Tlak v plinu na primer zapišemo takole: $p(t) = p_0 + p_1(t)$. Privzemimo, da so fluktuacije majhne v primerjavi s povprečnimi vrednostmi in da so lahko naštete količine odvisne samo od vzdolžne koordinate. Obravnavani plin naj bo torej neviskozen in naj ne izmenjuje toplote s steno cevi.

Entalpija je v idealnem plinu odvisna le od temperature: $H = mc_pT$. Tu je m masa plina, c_p pa specifična toplota pri konstantnem tlaku. Gostota entalpijskega toka je potem enaka produktu gostote entalpije ρc_pT in hitrosti plina v. Zapišimo povprečen entalpijski tok v plinu skozi celoten presek cevi σ:

$$\langle \dot{H} \rangle = \sigma \langle \rho c_p T v \rangle. \tag{2}$$

Oklepaji $\langle\,\rangle$ pomenijo povprečje po času enega cikla. V enačbo vstavimo ρ, T in v v dogovorjeni obliki. Ker je povprečje sinusne količine po času enega cikla enako nič, obdržimo le konstantni člen $\rho_0 T_0 v_0$ in člene s produktom dveh fluktuacij. Člen s produktom treh fluktuacij $\rho_1 T_1 v_1$ odpade, ker je njegovo časovno povprečje enako nič ne glede na fazne zamike posameznih fluktuacij. Povprečen entalpijski tok je tako:

$$|\dot{H}| = \sigma c_p \Big(\rho_0 T_0 v_0 + \rho_0 |T_1 v_1| + T_0 |\rho_1 v_1| + v_0 |\rho_1 T_1| \Big). \tag{3}$$

Upoštevajmo še pogoj, da je povprečen masni tok v cevi enak nič, saj se plin nikjer ne kopiči:

$$\sigma |\rho v| = \sigma \Big(|\rho_1 v_1| + \rho_0 v_0 \Big) = 0. \tag{4}$$

Iz pogoja izrazimo povprečno hitrost plina $v_0 = -\frac{|\rho_1 v_1|}{\rho_0}$ in jo vstavimo v izraz za povprečen entalpijski tok (3). Zadnji člen v oklepaju na desni strani enačbe izpustimo, ker je v primerjavi z drugimi majhen, prvi in tretji člen pa se odštejeta. Tako nam za povprečen entalpijski tok ostane:

$$|\dot{H}| = \sigma\, \rho_0 c_p |T_1 v_1|. \tag{5}$$

Da dobimo preglednejšo obliko, izrazimo fluktuacijo temperature T_1 s fluktuacijama entropije na masno enoto s_1 in tlaka p_1. Za to uporabimo diferencial entalpije idealnega plina in diferencial entalpije po definiciji (1):

$$dH = mc_p dT = T\, dS + V\, dp. \tag{6}$$

Z dS smo zaznamovali diferencial entropije. Enačbo delimo z maso m, diferenciale zamenjamo s fluktuacijami, preostale količine pa s povprečnimi

vrednostmi. Dobimo izraz za povprečen entalpijski tok, ki teče skozi izbran presek cevi σ:

$$|\dot{H}| = \underbrace{\sigma\, \rho_0 T_0 |s_1 v_1|}_{|\dot{Q}|} + \underbrace{\sigma\, |p_1 v_1|}_{|\dot{A}|}\,. \tag{7}$$

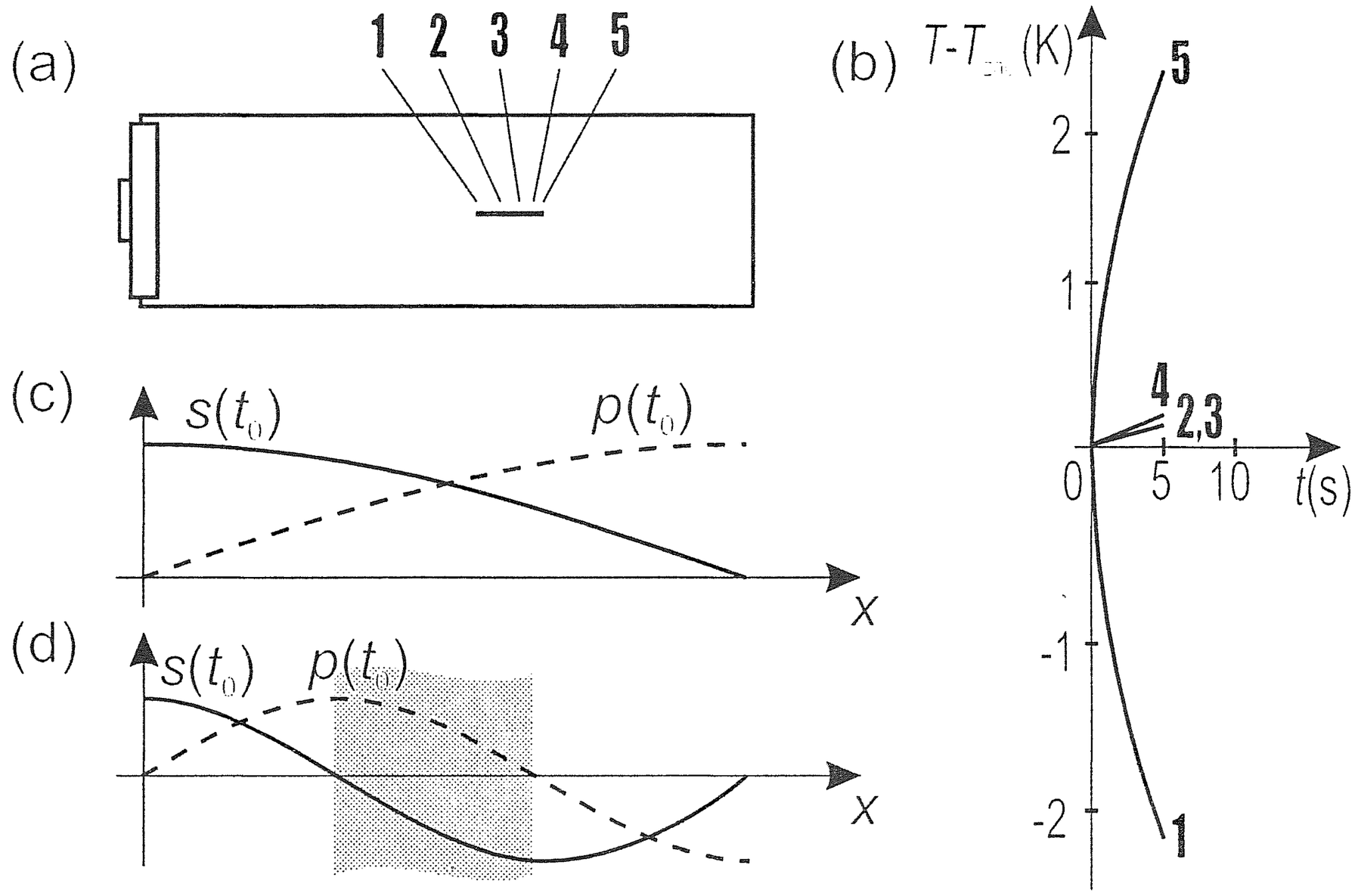
V prvem členu na desni prepoznamo povprečen konvekcijski toplotni tok $|\dot{Q}|$, v drugem členu pa povprečen tok dela $|\dot{A}|$.

Za ponazoritev povprečnega toka dela si predstavljajmo zvočnik, ki v zrak pri sobnih razmerah seva potujoče zvočno valovanje. Povprečen entalpijski tok je v tem primeru kar enak povprečnemu toku dela, saj so razmere v zraku adiabatne in je zato $s_1 = 0$. Povprečje $|p_1 v_1|$ pa je različno od nič, saj v potujočem valovanju nihata tlak in hitrost sočasno. Če hočemo, da v plinu teče tudi povprečen toplotni tok, moramo poskrbeti, da razmere v plinu niso čisto adiabatne in da fazni kot med nihanjem gostote entropije s_1 in hitrosti v_1 ni enak $\pi/2$.

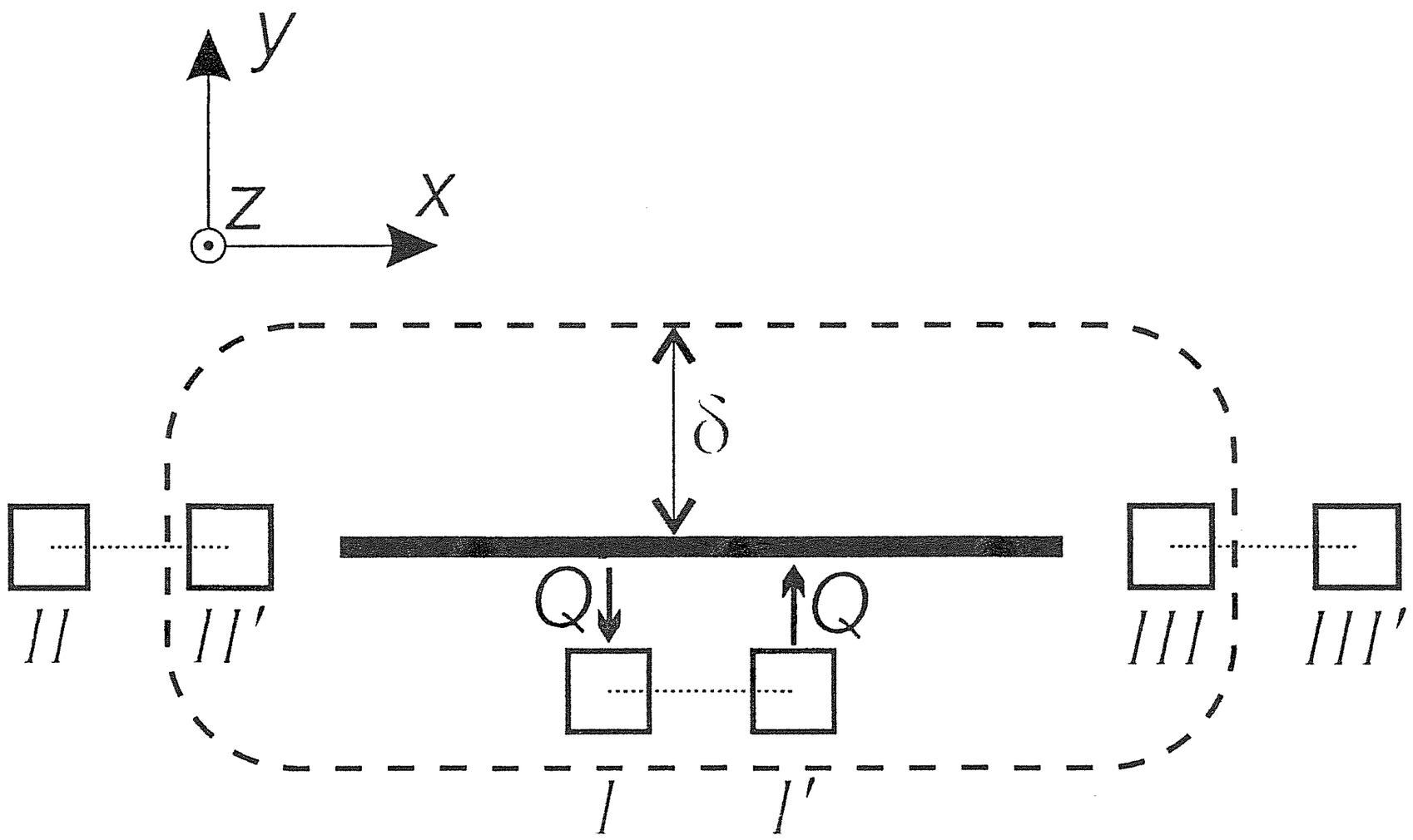
Termoakustični pojav

Najprej si oglejmo termoakustični pojav, ki ga termoakustični hladilnik izkorišča za delovanje in po katerem se tudi imenuje. Zamislimo si plin, v katerem vzbujamo stoječe zvočno valovanje. Fazni kot med nihanjem tlaka in hitrosti je v stoječem zvočnem valovanju $\pi/2$, razmere v plinu pa so pri zvočnih frekvencah adiabatne. Zato po enačbi (7) sledi, da sta povprečen tok dela in povprečen toplotni tok enaka nič. Sedaj v plin vstavimo tanko ploščo, ki jo poravnamo vzdolž smeri nihanja delcev plina. Dolžina plošče naj bo v tej smeri kratka v primerjavi z valovno dolžino zvočnega valovanja, tako da lahko vzamemo amplitudi nihanja tlaka in hitrosti vzdolž plošče za konstantni. Pazimo tudi, da plošče ne postavimo v vozel tlaka ali hitrosti. Skica poskusa je na sliki 1a. Opazimo, da se en konec plošče segreva, drugi pa ohlaja, temperatura vmesnega dela pa vsaj v začetku ostane skoraj nespremenjena (glej sliko 1b). Prisotnost plošče očitno povzroči, da po plinu vzdolž nje teče toplotni tok, ki na enem koncu plošče toploto jemlje, na drugem pa jo odlaga.

Pojav bomo kvalitativno razumeli, če si ogledamo, kaj se dogaja s plinom, ki je tako blizu plošče, da z njo med nihanjem lahko izmenjuje toploto. V tem območju si izberimo tako majhen volumen plina, da je vedno v termodinamskem ravnovesju, hkrati pa vsebuje toliko molekul, da ga lahko obravnavamo makroskopsko. Tak volumen plina bomo imenovali kar delec plina. Predstavljali si bomo, kaj se dogaja z delci plina, ki začnejo pot v točkah I, II in III (glej sliko 2). Da si predstavo olajšamo, zamenjajmo sinusno nihanje s pravokotnim: delec plina se hitro premakne, obstoji, nato pa se hitro vrne na izhodiščno mesto ter spet obstoji. Plošča, ki smo jo vstavili v plin, pa naj ima veliko toplotno kapaciteto na enoto površine in temperaturo, ki je enaka povprečni temperaturi plina.



Slika 1. (a) Zvočnik na levi strani resonatorja vzbuja stoječe zvočno valovanje z osnovno lastno frekvenco. (b) Spreminjanje temperature plošče na različnih mestih zaradi termoakustičnega pojava. Meritev se je začela ob času $t = 0$, ko smo začeli vzbujati stoječe zvočno valovanje in ko je bila temperatura po vsej plošči enaka. [2] (c) Odmik delcev in fluktuacija tlaka v plinu kot funkciji koordinate za osnovno in (d) prvo višjo lastno frekvenco. Odmik delcev in fluktuacija tlaka sta narisana pri času t_0, ko hkrati dosežeta amplitudo.



Slika 2. Skica prenosa toplote s konvekcijo ob plošči v neviskoznem plinu s stoječim zvočnim valovanjem. Temperatura plošče je po vsej površini enaka povprečni temperaturi plina. Plošča je v primerjavi z valovno dolžino valovanja dovolj kratka, da se amplitude nihanja tlaka, hitrosti in temperature vzdolž plošče ne spreminjajo zaznavno. S črtkano črto je zaznamovano območje širine δ od plošče, kjer je plin s ploščo v toplotnem stiku. Posebej so zaznamovani trije delci plina, ki nihajo med I in I', II in II' ter III in III'. [3]

Najprej si na sliki 2 oglejmo delec plina pri I. Ko se premakne v pozitivno smer iz I v I', se mu tlak poveča, ker odmik delcev in tlak v resonatorju nihata v fazi (glej sliko 1c). Pri hitrem premiku se zato delec adiabatno segreje. Ker ima v I' višjo temperaturo kot plošča, ji odda toploto Q in se ohladi na začetno temperaturo. Znižanje tlaka pri premiku delca iz I' nazaj v I je tudi adiabatno, zato se pri vračanju ohladi in ima v I nižjo temperaturo kot plošča. Od plošče sedaj prejme toploto Q in se segreje do povprečne temperature. Tako v enem ciklu delec prenese toploto Q z mesta I na mesto I'. Enako velja za vsak delec plina, ki niha vzdolž plošče. Energija plošče se pri tem ne spreminja, saj toploto Q, ki jo je delec plina med ciklom „odložil" na mestu I', „pobere" sosednji delec in jo prenese naprej. Cela veriga delcev tako vzdržuje konvekcijski toplotni tok v plasti plina ob plošči. Na koncu plošče pa je dogajanje drugačno. Delec plina, ki je v II, niha iz območja brez toplotnega stika s ploščo v območje blizu plošče (II'). Ko je pri večjem tlaku v točki II', je v toplotnem stiku s ploščo in se njegova temperatura izravna s temperaturo plošče. Ko pa se adiabatno razpne pri premiku nazaj v II, toplotni stik s ploščo izgubi in ostane ohlajen. Tak delec plina nima vloge pri prenosu toplote, ker ima v območju izmenjevanja toplote enako temperaturo kot plošča. Podobno toplote ne prenaša tudi delec, ki je v III. Delci plina tako iz levega konca plošče toploto jemljejo in jo ob plošči prenašajo v desni konec. Zato se levi konec plošče ohlaja, desni pa segreva, kot kažejo meritve na sliki 1. Ker pa ima realna plošča končno toplotno prevodnost, začne po njej teči toplotni tok v levo. Na njej se tako vzpostavi temperaturni gradient. V stacionarnih razmerah teče konvekcijski toplotni tok od levega konca plošče ob plošči proti desnemu koncu, nato pa po notranjosti plošče spet nazaj v levi konec. Če bi v resonatorju vzdrževali drugo lastno frekvenco zvočnega valovanja in bi ploščo postavili v območje, kjer odmik delcev in tlak nihata z nasprotno fazo (senčeni del na sliki 1d), bi se smeri obeh toplotnih tokov in temperaturnega gradienta na plošči obrnile.

Iz narave opisanega mehanizma sledi, da na plošči ne moremo doseči temperaturnih gradientov, ki bi bili večji od $|T_1|/|x_1|$, kjer je $|T_1|$ amplituda nihanja temperature v plinu, $|x_1|$ pa amplituda nihanja lege delcev plina. Pri mejnem gradientu je namreč sprememba temperature delca plina pri adiabatnem stiskanju ali razpenjanju ravno enaka spremembi temperature zaradi ustreznega premika delca ob plošči s temperaturnim gradientom. Takrat se toplotni tok v plinu in z njim tudi naraščanje temperaturnega gradienta ustavi.

Za poenostavljen primer izračunajmo temperaturo plina ob plošči. Z njo bomo lahko izračunali povprečen toplotni tok v plinu. Pokazali bomo, da zaradi prisotnosti plošče temperatura ne niha več v fazi s tlakom kot v nemotenem stoječem valovanju, spremeni pa se tudi njena amplituda.

Plin naj niha v smeri osi x, os y pa naj bo pravokotna na ploščo (slika 2). Računajmo za stacionaren primer, ko je na plošči vzpostavljen temperaturni gradient v smeri osi x. Povprečna temperatura plina naj bo neodvisna od koordinate y in naj bo pri vsakem x enaka temperaturi plošče: $T_0 = T_0(x)$. Privzemimo, da je plin neviskozen, zato njegova hitrost ni odvisna od y. Izpeljavo začnimo s splošno enačbo za prevajanje toplote, ki jo zapišemo takole [4]:

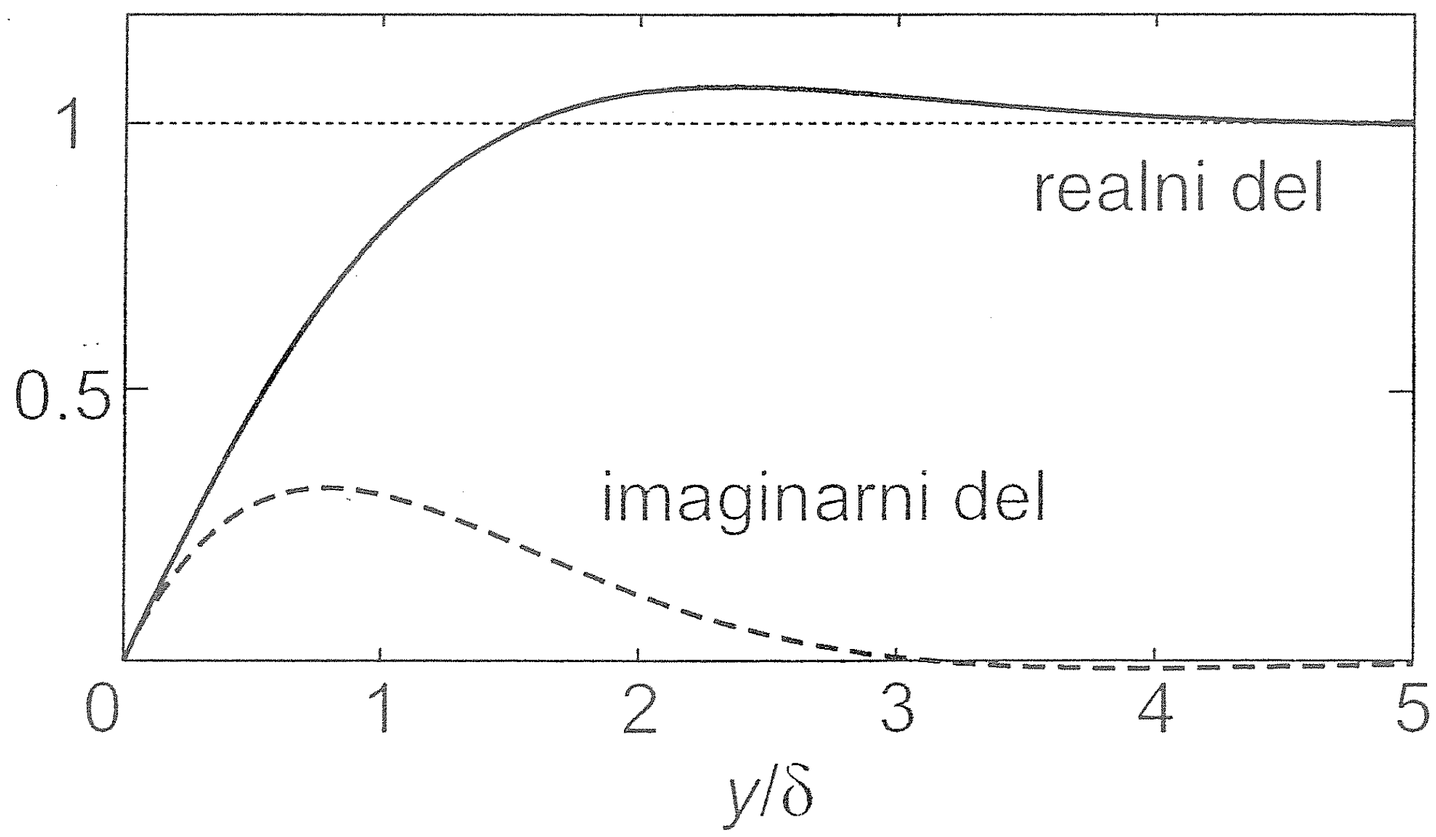
$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla s \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + (\text{členi s kvadratom hitrosti}). \qquad (8)$$

Z λ smo zaznamovali toplotno prevodnost plina. Gostota entropije plina se s časom spremeni zaradi konvekcije (drugi člen na levi), prevajanja toplote (prvi člen na desni) in zaradi nastajanja entropije pri drugih ireverzibilnih procesih (npr. zaradi viskoznosti tekočine), kar vsebuje drugi člen na desni. Pri računu upoštevamo samo člene, majhne v prvem redu. Iščemo fluktuacijo temperature T_1 kot funkcijo časa in koordinate y. Uporabimo nastavek $T_1(y,t) = |T_1(y)|\, e^{i\omega t}$, kjer je ω krožna frekvenca stoječega valovanja. Upoštevamo še, da je $v_0 = 0$, $\frac{\partial T_0}{\partial x} = konst.$, $\nabla p_1 = 0$ in da nihanje hitrosti prehiteva nihanje tlaka za četrt nihaja. Gostoto entropije razčlenimo kot druge količine: $s = s_0 + s_1(t)$. Fluktuacijo s_1 in odvod $\frac{\partial s_0}{\partial x}$ izračunamo iz enačbe (6). Po kratkem računu dobimo diferencialno enačbo za iskano funkcijo amplitude nihanja temperature $|T_1(y)|$. Rešimo jo pri znanih amplitudah stoječega valovanja $|p_1|$, $|v_1|$, pri gradientu temperature ∇T_0 ter pri robnih pogojih $|T_1(0)| = 0$ in $|T_1(\infty)|$ je končna. Rešitev je [5]:

$$|T_1(y)| = \left(\frac{1}{\rho_0 c_p} |p_1| - \frac{\nabla T_0}{\omega} |v_1| \right) \left(1 - e^{-(1+i)y/\delta} \right). \qquad (9)$$

Takoj opazimo, da je amplituda temperature $|T_1|$ postala kompleksna. To pomeni, da temperatura ne niha več v fazi s tlakom kot v nemotenem stoječem valovanju. Na sliki 3 sta narisana realni in imaginarni del drugega oklepaja na desni strani enačbe (9). Velikost imaginarne komponente je največja pri $y \sim \delta$. Z δ smo zaznamovali razdaljo $\sqrt{\frac{2\lambda}{\rho_0 c_p \omega}}$. To je tipična razdalja od plošče, znotraj katere plin s ploščo lahko izmenjuje toploto. Kot v difuzijski enačbi je δ povprečna razdalja, do katere toplota 'difundira' v določenem času: $\delta = |y^2|^{1/2} = \sqrt{2Dt}$, kjer je difuzijska konstanta $D = \frac{\lambda}{\rho_0 c_p}$, tipičen čas pa $t = \frac{1}{\omega}$. Pri normalnih razmerah in pri frekvenci 1000 Hz je v zraku $\delta \sim 0.1$ mm.

Oglejmo si še prvi oklepaj na desni strani enačbe (9). Prvi člen je amplituda nihanja temperature zaradi adiabatnega stiskanja in razpenjanja v stoječem zvočnem valovanju. Zaradi gradienta povprečne temperature v plinu pa dobimo še drugi člen. Ker namreč plin niha vzdolž osi x z amplitudo $\frac{|v_1|}{\omega}$, niha temperatura v določeni točki prostora z amplitudo



Slika 3. Realni in imaginarni del izraza $1-e^{-(1+i)y/\delta}$ v odvisnosti od brezdimenzijskega parametra y/δ

$\nabla T_0 \frac{|v_1|}{\omega}$. Izberemo lahko tak gradient ∇T_0, da si bosta prispevka ravno nasprotna. Takrat bo temperatura v vsaki točki plina ob plošči konstantna. Tak temperaturni gradient imenujemo kritični temperaturni gradient:

$$(\nabla T_0)_{krit} = \frac{\omega}{\rho_0 c_p} \frac{|p_1|}{|v_1|}. \tag{10}$$

Pri idealnem plinu lahko za stoječe zvočno valovanje izrazimo hitrost zvoka kot $c = \frac{|p_1|}{\rho_0 |v_1|}$ [6]. Izraz (10) lahko potem zapišemo kot $(\nabla T_0)_{krit} = \frac{\omega c}{c_p}$. Od tod pa dobimo za zrak pri normalnih razmerah in frekvenci 1000 Hz oceno: $(\nabla T_0)_{krit} \sim 1$ K/cm.

Izračunajmo sedaj povprečen toplotni tok po enačbi (7). Fluktuacijo gostote entropije s_1 izrazimo s fluktuacijama temperature in tlaka po enačbi (6). K povprečnemu toplotnemu toku prispeva le imaginarna komponenta temperature T_1, ker sta časovni povprečji produktov fluktuacij tlaka in hitrosti ter realnega dela temperature in hitrosti zaradi fazne razlike $\pi/2$ med količinama enaki nič. Za celoten povprečen toplotni tok vzdolž plošče tako dobimo:

$$|\dot{Q}| = 2b \int_0^\infty dy\, \rho_0 c_p\, \mathrm{Im}(|T_1(y)|)|v_1| = \frac{1}{4}\, 2b\, \delta\, |p_1||v_1| \left(1 - \frac{\nabla T_0}{(\nabla T_0)_{krit}}\right). \tag{11}$$

Z b smo zaznamovali dolžino roba plošče vzdolž osi z. Toplotni tok je sorazmeren s površino $2b\,\delta$, kar je razumljivo, saj je $\mathrm{Im}(|T_1(y)|)$ znaten le v plasti debeline velikostnega reda δ na obeh straneh plošče. Toplotni tok je sorazmeren tudi produktu amplitud $|p_1||v_1|$, zato je največji, če postavimo ploščo na sredino med vozla tlaka in hitrosti. Končno je toplotni tok odvisen tudi od velikosti gradienta temperature ∇T_0. Njegov vpliv na črpanje toplote, ki smo ga z besedami omenili v uvodnem opisu termoakustičnega

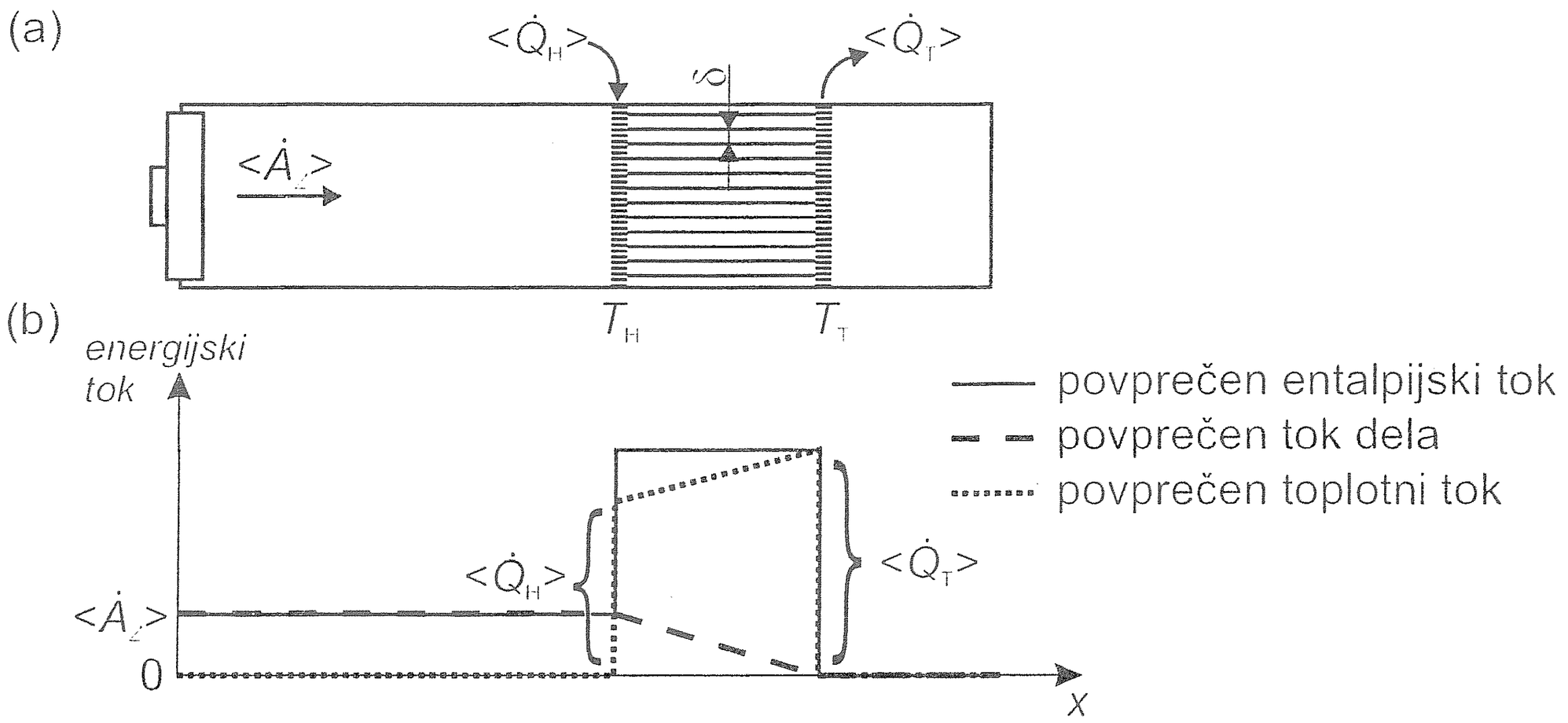
pojava, je sedaj očiten. Če je namreč gradient temperature ∇T_0 enak kritičnemu gradientu, je povprečen toplotni tok enak nič. Če pa je ∇T_0 večji od kritičnega gradienta, se toplotni tok obrne in začne teči v smer, ki je nasprotna temperaturnemu gradientu, kar s stališča hlajenja seveda ni zanimivo.

Že prej bi se lahko vprašali, od kod jemljemo delo za črpanje toplote z mesta z nižjo temperaturo na mesto z višjo temperaturo. Da se pokazati [5], da se v plasti plina debeline velikostnega reda δ nad obema površinama plošče energija zvoka porablja. Če imamo ploščo postavljeno v resonatorju, bi morali energijo dovajati, da se amplituda zvoka v resonatorju ne bi zmanjševala. Energijo dovajamo s povprečnim tokom dela potujočega valovanja, ki se nato ob plošči absorbira. V našem primeru potujoče valovanje poganja zvočnik na levi strani resonatorja. Povedano velja za primer, ko je ∇T_0 manjši od kritičnega gradienta. Če pa je ∇T_0 večji, se zvočna energija ob plošči sprošča in povprečen tok dela vzdolž plošče narašča.

Termoakustični hladilnik

Kako je termoakustični hladilnik zgrajen in kako deluje? Oglejmo si skico na sliki 4a. Hladilnik je narejen iz cevi, ki je na desni strani zaprta, na levi pa je vanjo vstavljen zvočnik. Cev deluje kot resonator, v katerem zvočnik vzbuja stoječe zvočno valovanje. Predpostavimo, da resonator nima izgub. V cev postavimo sklad enakomerno razmaknjenih tankih plošč iz snovi, ki slabo prevaja toploto. Plošče so razmaknjene za približno δ, da za črpanje toplote izkoristimo čimvečji del preseka cevi. Na vsakem koncu se sklada plošč dotika kratek sklad plošč iz snovi z veliko toplotno prevodnostjo. Ta kratka sklada imenujemo toplotna izmenjevalnika. Ker ju potrebujemo za dober toplotni stik med plinom in zunanjostjo cevi, je razmik med ploščami v obeh toplotnih izmenjevalnikih v primerjavi z δ majhen.

Zaradi termoakustičnega pojava na ploščah, razmaknjenih za δ, se med njimi energija zvočnega valovanja porablja za vzdrževanje toplotnega toka, ki med ploščami teče na desno. Nespremenjeno amplitudo valovanja v resonatorju vzdržuje zvočnik, ki poganja potujoče valovanje. To nosi povprečen tok dela $|\dot{A}_Z|$, ki se porablja med ploščami (glej sliko 4b). Povprečnega toplotnega toka v obeh odprtih območjih resonatorja ni, ker so tam razmere adiabatne. Na levem koncu plošč pa povprečen toplotni tok naenkrat zraste na $|\dot{Q}_H|$, ki je povprečen toplotni tok zaradi termoakustičnega pojava in teče na desno. Proti desnemu koncu plošč se toplotni tok povečuje, ker se povprečen entalpijski tok, ki je vsota povprečnega toplotnega toka in toka dela, ohranja, saj med ploščami ni zunanjih izvirov ali ponorov energije. Toplotna izmenjevalnika na hladnem (T_H) in na toplem (T_T) delu omogočata in vzdržujeta nezveznosti v toplotnem toku. Skozi levi toplotni izmenjevalnik teče toplotni tok $|\dot{Q}_H|$ v cev, skozi desni toplotni izmenjevalnik pa toplotni



Slika 4. (a) Skica termoakustičnega hladilnika. Razmik med ploščami je približno enak δ. Zvočnik na levi poganja tok dela $|\dot{A}_Z|$, ki pri temperaturi hladnega dela hladilnika T_H iz okolice črpa toplotni tok $|\dot{Q}_H|$ in pri temperaturi toplega dela hladilnika T_T oddaja toplotni tok $|\dot{Q}_T|$. (b) Povprečni energijski tokovi v hladilniku. Izgub resonatorja ne upoštevamo. [5]

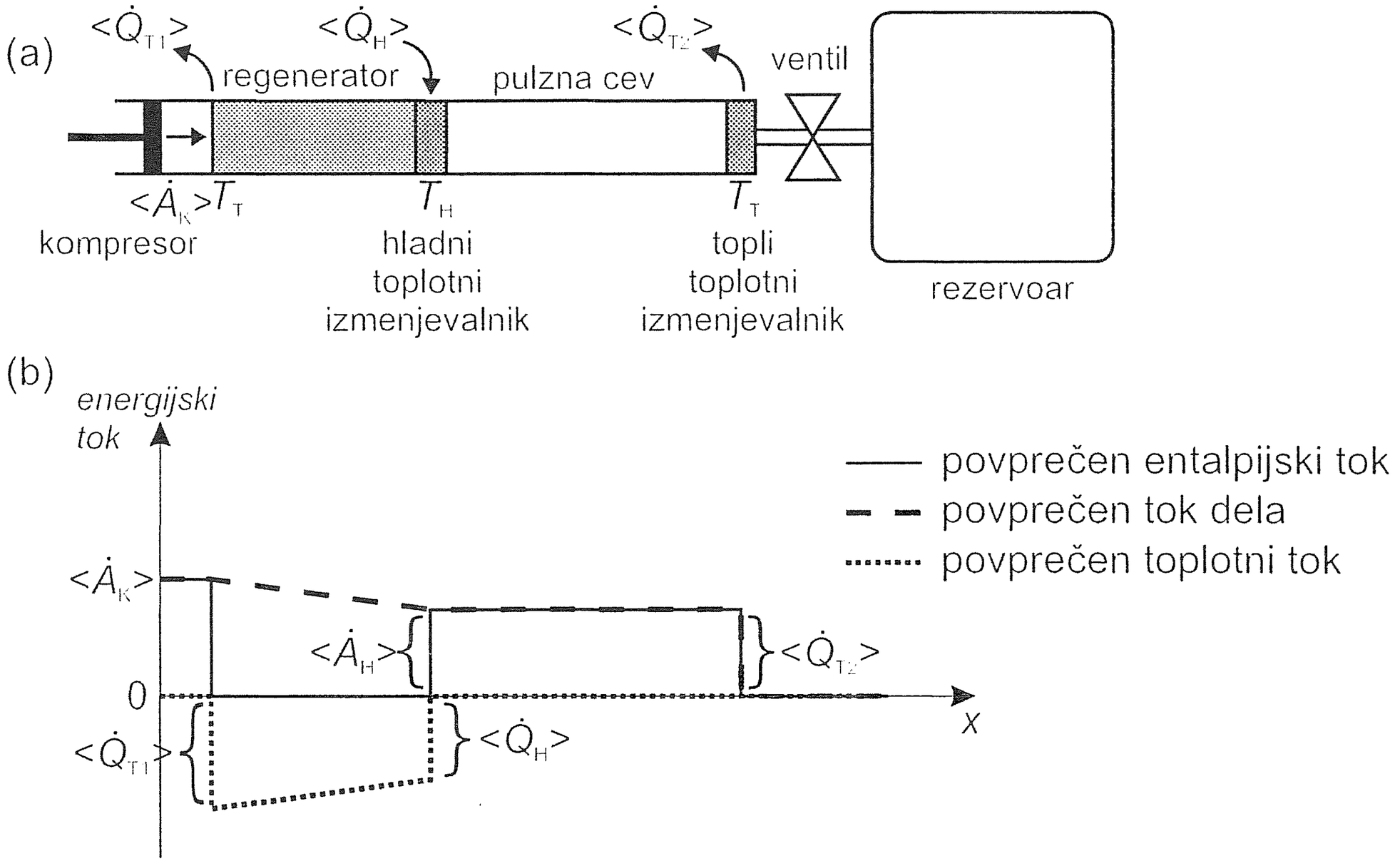
tok $|\dot{Q}_T|$ iz cevi. Pri tem smo zanemarili toplotni tok, ki teče po ploščah na levo. Povprečna hladilna moč, ki jo hladilnik črpa pri temperaturi T_H, je:

$$|Q_H| = |Q_T| - |A_Z|. \tag{12}$$

Leta 1985 je Wheatley s termoakustičnim hladilnikom dosegel temperaturo 195 K [7]. Cev je imela premer 39 mm, 67 μm debele plošče pa so bile razmaknjene za 0,38 mm. Frekvenca stoječega valovanja je bila 516 Hz, povprečen tlak p_0 je bil 1 MPa, amplituda tlaka pa $0{,}034 p_0$.

Hladilnik s pulzno cevjo z odprtino

Skica hladilnika s pulzno cevjo z odprtino je narisana na sliki 5a. Hladilnik navadno poganja batni kompresor, ki deluje pri frekvencah velikostnega reda 10 Hz. Namesto batnega kompresorja lahko uporabimo ventil, ki izmenično preklaplja med rezervoarjem, v katerem je plin pod velikim tlakom, in rezervoarjem, v katerem je plin pod majhnim tlakom. Za kompresorjem je nameščen regenerator, ki je narejen iz snovi z veliko toplotno kapaciteto (svinec, nerjaveče jeklo) in ima gobasto strukturo, tako da teče plin skozenj po kanalih, katerih premer je mnogo manjši od δ. Toplotni stik med plinom in regeneratorjem je zato zelo dober in lahko rečemo, da je temperatura plina v vsaki točki idealnega regeneratorja kar konstantna. Regeneratorju sledi hladni toplotni izmenjevalnik, ki je nameščen na začetku pulzne cevi. Na drugem koncu pulzne cevi, ki nima nobene notranje strukture, je topli toplotni izmenjevalnik. Pulzno cev z rezervoarjem povezuje ozka odprtina,



Slika 5. (a) Skica hladilnika s pulzno cevjo s hladilnikom. Kompresor na levi poganja tok dela $|\dot{A}_K|$. Hladilnik pri temperaturi T_H iz okolice črpa toplotni tok $|\dot{Q}_H|$ in pri temperaturi T_T oddaja toplotna tokova $|\dot{Q}_{T1}|$ in $|\dot{Q}_{T2}|$. (b) Povprečni energijski tokovi v hladilniku. Izgub resonatorja ne upoštevamo. [5]

ki je za tok plina upor. Ponavadi med pulzno cev in rezervoar namestimo odprtino s spremenljivo geometrijo – ventil.

Pri zaprtem ventilu kompresor v pulzni cevi vzdržuje nihanje tlaka, ki za nihanjem hitrosti zaostaja za četrt nihaja, enako kot v stoječem valovanju. Zato je po enačbi (7) povprečen tok dela v pulzni cevi enak nič. Ker so v pulzni cevi razmere adiabatne, je tam enak nič tudi povprečen toplotni tok (enačba (7)). V regeneratorju pa so razmere drugačne. Ker je njegova gobasta struktura za tok plina upor, se tam energija valovanja porablja. Izgubljeno energijo nadomešča kompresor, ki poganja potujoče valovanje – tok dela, ki teče proti regeneratorju in se v njem absorbira. Ker je v regeneratorju temperatura v vsaki točki konstantna, mora po enačbah (5) in (7) v nasprotno smer povprečnega toka dela teči enako velik povprečen toplotni tok. Na levem koncu regeneratorja ga odvajamo v okolico, ker so razmere v prostoru levo od regeneratorja adiabatne in toplotnega toka tam ni. Pri zaprtem ventilu torej hladilnik toploto samo oddaja.

Če pa ventil odpremo in pustimo, da plin teče iz pulzne cevi v rezervoar in nazaj, se fazni kot med nihanjem tlaka in hitrosti v pulzni cevi zmanjša. To lahko prikažemo z analogijo iz elektrike. Rezervoar nadomestimo s kondenzatorjem kapacitete C, ki ustreza volumnu rezervoarja, ventil pa z uporom R. Na upor priključimo sinusno napetost, ki je analogna s sinusnim nihanjem tlaka, in gledamo, kaj se pri različnih vrednostih konstante $\tau = RC$ dogaja z električnim tokom, ki ustreza hitrosti delcev plina. Amplituda

nihanja električnega toka je:

$$|I| = \frac{|U|\omega C}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}. \tag{13}$$

Tu je $|U|$ amplituda napetosti, ω pa krožna frekvenca nihanja napetosti. Fazna razlika φ med nihanjem napetosti in toka pa je:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\tau\omega}\right). \tag{14}$$

Napetost in tok nihata v fazi, če je $\tau\omega \gg 1$. Amplituda toka ima v tej limiti vrednost $|I| = |U|/R$. Če sta hidrodinamski upor ventila in volumen rezervoarja pri dani ω dovolj velika, sistem ventil-rezervoar zmanjša fazno razliko med nihanjem tlaka in hitrosti. Takrat v hladilniku teče povprečen tok dela. Tok dela je največji takrat, ko je povprečje $|p_1 v_1|$ največje. Če je ventil premalo odprt, je amplituda hitrosti, ki niha v fazi s tlakom, majhna. Če pa ventil preveč odpremo, se fazna razlika med nihanjem celotne hitrosti in tlaka poveča, amplituda tlaka v hladilniku pa zmanjša. Za največji povprečen tok dela moramo tako pri danih pogojih izbrati optimalno odprtino ventila.

Oglejmo si delovanje hladilnika s pulzno cevjo z odprtino. Zaradi sistema ventil-rezervoar se v hladilniku pojavi povprečen tok dela $|A_K|$, ki teče od kompresorja na desno (glej sliko 5b). V regeneratorju se tok dela zmanjšuje, ker se zaradi upora gobaste snovi energija zvoka porablja. V pulzni cevi je tok dela konstanten, pri ventilu pa pade na nič. Tam s toplim toplotnim izmenjevalnikom odvajamo povprečen toplotni tok $|\dot{Q}_{T2}|$. Ker je v regeneratorju povprečen entalpijski tok zaradi izotermnih razmer enak nič, mora v nasprotno smer kot tok dela teči po velikosti enak povprečen toplotni tok. Nezveznosti toplotnega toka na obeh koncih regeneratorja povzročita črpanje toplotnega toka $|\dot{Q}_H|$ v plin skozi hladni toplotni izmenjevalnik na desni strani regeneratorja in oddajanje toplotnega toka $|\dot{Q}_{T1}|$ skozi levi konec regeneratorja. Hladilna moč $|\dot{Q}_H|$ je enaka povprečnemu toku dela $|A_H|$, ki teče skozi pulzno cev.

Z izboljšanim hladilnikom na pulzno cev z ventilom so leta 1990 dosegli temperaturo 42 K [8]. Za delovni plin so uporabili helij. Danes pa so komercialno dosegljivi dvostopenjski hladilniki, ki dosežejo temperaturo 2,8 K [9].

Zaključek

Z zvočnikom v praznem resonatorju termoakustičnega hladilnika ali s kompresorjem v pulzni cevi z zaprtim ventilom ustvarimo zvočno valovanje, kjer temperatura in tlak nihata s fazno razliko $\pi/2$ glede na hitrost. V članku smo opisali dva načina, kako lahko to fazno razliko spremenimo in dosežemo črpanje toplote:

a) Pri termoakustičnem hladilniku spremembo dosežemo s toplotnim stikom med plinom in skladom plošč.

b) Pri hladilniku s pulzno cevjo z odprtino pa spremembo dosežemo s sistemom ventila in rezervoarja, ki deluje analogno električnemu RC členu.

V obeh primerih dobimo potujoče zvočno valovanje – povprečen tok dela, katerega izvir je zvočnik ali kompresor. Tok dela se v termoakustičnem hladilniku porablja neposredno za črpanje toplote. V hladilniku s pulzno cevjo z odprtino pa tok dela črpanje toplote povzroči posredno, porablja pa se v regeneratorju in pri ventilu.

Primerjajmo izkoristka obeh hladilnikov z izkoristkom idealnega (Carnotovega) hladilnika: $\eta_C = 1/(\frac{T_T}{T_H} - 1)$. Če ne upoštevamo izgub v resonatorju in izgub zaradi prevajanja toplote, je izkoristek termoakustičnega hladilnika enak [5]:

$$\eta_{TA} = \frac{|Q_H|}{|\dot{A}_Z|} = \frac{\nabla T_0}{(\nabla T_0)_{krit}} \eta_C .$$

Ker je razmerje temperaturnih gradientov pri črpanju toplote nujno manjše od ena (enačba (11)), je izkoristek termoakustičnega hladilnika vedno manjši od izkoristka idealnega hladilnika. Čim bolj pa se razmerje temperaturnih gradientov približuje ena (čim večja je temperaturna razlika pri dani dolžini plošč), tem manjša je hladilna moč (enačba (11)). Izkoristek hladilnika s pulzno cevjo z ventilom, pri katerem ne upoštevamo izgub zaradi upora regeneratorja in zaradi prevajanja toplote, pa je [10]:

$$\eta_{PC} = \frac{|\dot{Q}_H|}{|\dot{A}_K|} = \left(1 - \frac{T_H}{T_T}\right) \eta_C .$$

Tudi ta izkoristek je vedno manjši od idealnega, vendar se razlika med njima z naraščajočo temperaturno razliko manjša. Izkoristki delujočih hladilnikov obeh vrst so zaradi prevajanja toplote, viskoznosti plina, dinamičnega upora gradnikov hladilnika in drugih izgub še dosti manjši [9]. Tu smo navedli le teoretični zgornji meji.

Oba hladilnika sta konstrukcijsko zelo preprosta in zato tudi zanesljiva in imata dolgo življenjsko dobo. Ker se v njunem hladnem delu premika

le plin, so mehanske vibracije hladnega dela zelo majhne. To je še posebej pomembno pri hlajenju občutljivih senzorjev.

Zaradi narave termoakustičnega pojava je temperaturna razlika, ki jo doseže termoakustični hladilnik, omejena s kritičnim gradientom temperature. To daje pri nizkih temperaturah prednost hladilniku s pulzno cevjo z odprtino, ki podobne omejitve nima. Pri temperaturah, nižjih od 10 K, pa je toplotna kapaciteta običajnih regeneratorskih snovi premajhna. Glavni, fononski prispevek k toplotni kapaciteti namreč pada s temperaturo na tretjo potenco. Za hlajenje v tem temperaturnem območju je treba poiskati nove materiale, ki imajo tudi pri temperaturah pod 10 K dovolj veliko toplotno kapaciteto. Ena od pomembnih vej raziskav na področju hlajenja do nekaj K se zato ukvarja z raziskovanjem materialov. V zadnjih letih posvečajo veliko pozornost zlitinam redkih zemelj z nikljem in germanijem ([11], [12]), ki imajo pri temperaturah pod 10 K magnetni fazni prehod in zaradi tega povečano toplotno kapaciteto.

LITERATURA

[1] F. Bošnjaković, *Nauka o toplini, II. dio*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1976.

[2] J. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift, A. Migliori, *An intrinsically ireversible thermoacoustic heat engine*, J. Acoust. Soc. Am. **74** (1983) 153.

[3] J. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift, A. Migliori, *Understanding some simple phenomena in thermoacoustics with applications to acoustical heat engines*, Am. J. Phys. **53** (1985) 147.

[4] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Pergamon, Oxford, 1987.

[5] G. W. Swift, *Thermoacoustic engines*, J. Acoust. Soc. Am. **84** (1988) 1145.

[6] J. Strnad, *Fizika, 1. del*, DMFA, Ljubljana, 1987.

[7] R. Radebaugh, J. Zimmerman, D. R. Smith, B. Louie, *A comparison of three types of pulse tube refrigerators: new methods for reaching 60 K*, Advances in Cryogenic Engineering **31** (1986) 779.

[8] S. Zhu, P. Wu, Z. Chen, W. Zhu, Y. Zhou, *A single stage double inlet pulse tube refrigerator capable of reaching 42 K*, Cryogenics **30** September Supplement (1990) 257.

[9] `http://www.cryomech.com/cryostats.htm`

[10] P. Kittel, *Ideal Orifice Pulse Tube Performance*, Cryogenics **32** (1992) 843.

[11] Y. Long, H. Fu, *Heat capacity of ternary compounds RNiGe (R=Gd, Dy, Er, Y)*, J. Appl. Phys. **78** (1995) 7410.

[12] A. Takahashi, Y. Tokai, M. Sahashi, T. Hashimoto, *Specific heat of a regenerator material Er_3Ni*, Jpn. J. Appl. Phys. **33** (1994) 1023.

MOST JE VZDIGNJEN
MATEMATIKA NA DRUGEM BREGU KULTURE

HANS MAGNUS ENZENSBERGER

Objavljamo prevod dvojezične knjižice *H. M. Enzensbergerja, Zugbrücke außer Betrieb, Drawbridge up, AK PETERS, Natick, Massachusetts, 1999*, ki sloni na govoru, ki ga je imel nemški pesnik in esejist Hans Magnus Enzensberger avgusta 1998 na petdesetem mednarodnem kongresu matematikov v Berlinu.

DRAWBRIDGE UP
MATHEMATICS – A CULTURAL ANATHEMA

This is a translation of the bilingual booklet of *H. M. Enzensberger, Zugbrücke außer Betrieb, Drawbridge up, AK PETERS, Natick, Massachusetts, 1999*, based on an address delivered by the German poet and essayist H. M. Enzensberger at the occasion of the 50th International Congress of Mathematicians in Berlin, August 1998.

Uvod

Kot poklicni matematik sem vajen življenja v nekakšni praznini sredi ljudi, ki kakor v prvem poglavju Enzensbergerjevega eseja s čudnim ponosom izjavljajo, da so matematično nepismeni. Potem pa pridem na mednarodni kongres in – kakšno presenečenje – zaslišim uglednega pesnika in esejista, s kako globokim razumevanjem in tenkočutno razčlenjuje to vprašanje. Esej je čudovit in matematik ga z velikim užitkom prebere. V njem se kakor pod izredno ostrim drobnogledom odkrivajo čudna navzkrižja, sredi katerih živimo. Pokaže se, kako smo po eni strani ponosni, ker gradimo uglajen svet, strogo ločen od zahtev stvarnosti, po drugi pa menimo, da so naše zamisli dejansko usklajene z vsemi pomembnimi tehničnimi dognanji. Še posebej mi je bilo ljubo, ko sem dojel piščevo prepričanje, da je napredek v pouku matematike mogoč in da se dá za mlade možgane napraviti vznemirljiv. Sam sem za svoje otroke (zaman) poskušal najti srednjo šolo, na kateri bi lahko med geometrijo stopili ven in ugotovili, koliko je v resnici visok hrast na dvorišču. Namesto tega so podrejeni šolskemu redu in prikrajšani celo za temeljni predmet moje generacije: za nenavadno evklidovsko dokazovanje s formulami, pri katerem posebej razčlenjuješ vsako stopnjo postopka. To staro igro, del gimnazijske matematike, s toplino omenjajo ljudje, ki matematiko sicer sovražijo, in jo pogrešajo matematični puritanci, kakršne omenja Stewartov navedek, češ da se matematik ne mara „niti za las zlagati kakor vsak drug". Upam, da bodo esej prebrali pravi ljudje, snovalci in kritiki učnih programov, in da jih bo spodbudil, da bodo v razredu dovolili cveteti sto in sto cvetovom.

David Mumford,
predsednik Mednarodne matematične zveze

Zmeraj in povsod ista pesem: „Tak nehajte že! Matematike sem sit do grla." – „Že v šoli sama ljuba muka. Nimam pojma, kako sem jo sploh zvozil pri maturi." – „Prava mora! Saj nimam niti malo daru zanjo." – „Davek na dodano vrednost komaj še spravim skupaj z žepnim računalom. Vse drugo presega moje moči." – „Matematične formule so zame čisti strup. Pri priči izklopim."

Take reči je slišati dan na dan. Povsem razsodni, šolani ljudje jih gladko ponavljajo s čudno mešanico kljubovanja in ponosa. Računajo z razumevajočimi poslušalci in teh se jim res ne manjka. Izoblikovalo se je posplošeno mnenje, ki molče, vendar odločno določa odnos do matematike. Videti je, da nikogar ne moti, če je nekako intelektualno skopljena in izobčena iz območja kulture. Komur se zdi tako stanje obžalovanja vredno in kdor govori kaj o čaru in pomenu, o daljnosežnosti in lepoti matematike, je občudovan kot izvedenec; in če se poskuša predstaviti kot ljubitelj, obvelja v najboljšem primeru za posebneža, ki se ukvarja z odpisanim konjičkom, kakor da redi želve ali zbira viktorijanske pisemske obtežilnike.

Občutno poredkeje srečujemo ljudi, ki s podobno zagnanostjo pripovedujejo, kako jim že misel na to, da bi prebrali roman, si ogledali sliko ali odšli v kino, povzroča nepremagljive muke. Po maturi se tenkovestno izogibajo slehernega stika z umetnostmi, naj bo te ali one vrste; rajši vidijo, če jih nihče več ne spominja na nekdanje izkušnje z leposlovjem ali s slikarstvom. Res pa je, da tako rekoč nikoli ni slišati, da bi kdo preklinjal glasbo, čeprav nekateri, najbrž upravičeno, trdijo, da nimajo smisla zanjo. Eni sicer na glas pojejo napačno, drugi ne obvladajo nobenega glasbila in le prav redki hitijo na koncert s partituro pod pazduho. Ampak kdo bi resno trdil, da ne pozna nobene pesmi? Naj gre za Spice Girls ali za državno himno, za sodobni jazz ali za gregorijanski koral, nihče ni za glasbo do kraja neobčutljiv. In sicer utemeljeno. Posluh za glasbo ali zmožnost igranja sta genetsko zakoreninjena; sodita med človeške univerzalije. To se seveda ne pravi, da smo vsi enako glasbeno nadarjeni. Kakor drugi darovi in lastnosti se tudi ta del naše nadarjenosti ravna po Gaußovi naravni porazdelitvi. V vsaki skupnosti so izjemno nadarjeni kakor tudi glasbeno popolnoma gluhi; statistično povprečje je nekje na sredi.

Ravno tako je seveda tudi z matematičnimi zmožnostmi. Tudi te so v človeških možganih genetsko zasnovane in v vsaki skupnosti porazdeljene po modelu Gaußove krivulje. Potemtakem ne drži, da je matematično mišljenje izjemno redka, eksotična muha narave.

Smo pred uganko: Kdo je kriv, da je matematika v naši zavesti nekakšna slepa pega, tuje območje, v katerem je vkopanih le nekaj redkih posvečencev?

Nekakšna osama

Kdor si želi olajšati odgovor, pravi, da so tega krivi matematiki sami. Dobra stran te izjave je preproščina. In povrh tega potrjuje šablono, ki si jo je zunanji svet že zdavnaj ustvaril o poklicnih predstavnikih te panoge. V matematiku vidimo nekakšnega svetnega višjega duhovnika, ki ljubosumno varuje svoje sveto območje. Običajnim rečem tega sveta obrača hrbet in ker je zaverovan zgolj v svoje nerazumljive probleme, težko vzpostavlja stik z zunanjim svetom. Živi sam zase, radosti in trpljenje človeške družbe ima za nadležne motnje in uživa v samotarstvu, ki meji na ljudomrzništvo. Z logičnim dlakocepstvom sam svoji okolici žre živce. Še prav posebej pa boleha za nekakšno težko odpustljivo nadutostjo. Bister, kakor je – tega mu nihče ne spodbija – gleda zviška in podcenjevalno na nebogljene poskuse drugih, da bi to ali ono dojeli. Zato mu nikoli še na misel ne pride, da bi koga poskusil pridobiti za svojo stvar.

To je sicer karikatura, vendar pogosto kar prisegajo nanjo. Pa seveda ni podlage zanjo. Matematiki se namreč, razen po dejavnosti, le malo ločijo od drugih ljudi, saj sam poznam strokovnjake in strokovnjakinje, ki so vesele narave, svetovljanski, duhoviti in včasih celo nerazsodni. Kljub temu pa je v klišeju kakor po navadi zrno resnice. V vsakem poklicu so posebna tveganja, posebne patologije, poklicne deformacije. Rudarji trpijo zaradi prahu v

pljučih, pisatelji zaradi narcisoidnih motenj, režiserji zaradi domišljavosti. Za vse to je mogoče najti opravičilo v okolju, v katerem delajo.

Matematiki potrebujejo za svojo dejavnost zlasti skrajno in trajno zbranost. Morajo se prevrtati skoz zelo debele in trde plasti. Ni čudno, da vsak poseg od zunaj sprejemajo kot brezobzirnost. Po drugi strani pa je že zdavnaj minil čas univerzalnih matematikov Eulerjevega ali Gaußovega kova. Danes nima nihče več pregleda čez vsa področja svoje stroke. To pa tudi pomeni, da se strokovni krogi ožijo. Zares izvirna dela doumejo le redki; po internetu krožijo med ducatom bralcev med Princetonom, Bonnom in Tokiom. Posledica je nekakšna osamljenost. Taki raziskovalci so že zdavnaj napravili križ čez poskuse, da bi postali razumljivi nepoučenim, skoraj zanesljivo pa to vpliva tudi na druge, manj napredne delavce v vinogradu matematike.

Značilen za to je izraz, ki se ponavlja že v prvem semestru pri vsakem predavanju iz analize ali iz algebre. Ta izpeljava ali ona prirejenost, je rečeno, je „trivialna" in pika. Vsako nadaljnje pojasnjevanje je odveč; bilo bi tako rekoč pod matematikovo častjo. Saj bi bilo v resnici naporno in dolgočasno vsakokrat posebej vtepati vsak člen dokazovalne verige. Zato matematiki po navadi preskočijo ponavljajoče se vmesne korake, se pravi, kratko in malo predvidevajo tisočkrat preizkušeno veljavnost. To je nedvomno gospodarno, vendar prav posebej vpliva na komunikativnost. Med strokovnjaki more dobiti besedo le tisti, za kogar je trivialno trivialno in potemtakem samo po sebi razumljivo. Vsi drugi – se pravi vsaj devetindevetdeset odstotkov človeštva – so pa v tem pogledu brezupni primeri, s katerimi se kratko in malo sploh ne splača pogovarjati.

Za povrh imajo matematiki ne le kakor drugi znanstveniki svojo strokovno govorico, temveč tudi simbole, različne od navadnega pisanja, pa nepogrešljive za svoje sporazumevanje. (Tudi pri tem lahko govorimo o podobnosti z glasbo, ki si je ravno tako izoblikovala svoj ključ.) Ampak večino ljudi pri priči popade strah, če le zagledajo formulo. Težko je razumeti, od kod tak refleks bega, saj je vsaj za matematike nepojmljiv. Ti so namreč prepričani, da je njihov način zapisovanja prečudno jasen in boljši od vseh naravnih jezikov. Zato jim sploh ne gre v glavo, zakaj bi se morali truditi in svoje zamisli prevajati v nemščino ali v angleščino. Taki poskusi veljajo v njihovih očeh za eno najstrahotnejših mrcvarjenj.

Se pravi, da so matematiki sami krivi za osamljenost svoje vede? Da so sami pokazali družbi hrbet in objestno vzdignili most do svoje panoge? S tako lahkim odgovorom pa se more zadovoljiti le, kdor podcenjuje to vprašanje in njegovo daljnosežnost. Kratko in malo ne gre, da bi črnega Petra podtikali manjšini izvedencev, dokler se pretežna večina sama od sebe temu odpoveduje in ne mara usvojiti kulturne glavnice neznanskega pomena in največje mikavnosti.

Znano je, da je nevednost nebeška sila nepremagljive moči. Večina ljudi je najbrž prepričana, da je mogoče povsem dobro živeti brez matematičnega znanja in da je ta veda zadosti nepomembna, da jo lahko prepustijo znanstvenikom. Številni celo sumijo, da gre pri tem za kruhoborsko umetelnost, katere korist je vse prej kakor očitna. V tej zmoti se čutijo še podkrepljene zaradi gledanja številnih matematikov, ki z močnimi besedami zagovarjajo čistost svojega početja. Tako je na primer Godfrey Harold Hardy, ugledni angleški številski teoretik, izrekel tole znamenito izpoved: „Še nikoli nisem naredil nič 'koristnega'. Za blaginjo človeštva nima nobeno moje odkritje – naj bo v dobrem ali v slabem – nobenega pomena in to se očitno tudi ne bo nič spremenilo. Pomagal sem izobraževati druge matematike, vendar taiste vrste, kakor sem sam, in njihovo delo je bilo, vsaj kolikor sem jih jaz pri tem podpiral, ravno tako nekoristno kakor moje. Po vseh praktičnih merilih je vrednost mojega matematičnega življenja enaka ničli in zunaj matematike popolnoma trivialna." – Tako smo že spet pri nesrečni besedi trivialno, s katero je ožigosano vse, kar pisec zaničuje. „Imam eno samo možnost," nadaljuje Hardy, „izmakniti se prekletstvu popolne trivialnosti, če mi bo priznano, da sem ustvaril kaj takega, kar se je splačalo ustvariti. Da sem ustvarjal, tega ni mogoče zanikati; vprašanje je le, ali je tisto kaj vredno." (*Matematikova izpoved*, Cambridge 1967.)

Čudovito povedano! Skromnost, ki jo je komaj mogoče ločiti od aristokratske nadutosti. Matematik Hardyjevega kova misli na vse drugo prej kakor na to, da bi se potegoval za priznanje svojih sodobnikov in se sklicéval na praktično koristnost svojega dela. V tem ima prav in hkrati neprav. Njegovo ravnanje je podobno umetnikovemu. Po zgolj tržnih vidikih bi bila v hudih škripcih ne le Ovid in Bach, temveč tudi Pitagora in Cantor. Njihovo delo bi komaj dajalo petnajst odstotkov takojšnjih obresti, ki vzdržijo danes na delničarskih lestvicah. Seveda je večina človeških dejavnosti pod tem vidikom brez vrednosti. (In vendar so, mimogrede rečeno, matematične raziskave med najboljšimi kulturnimi naložbami. Medtem ko je novi pospeševalnik ženevske Evropske organizacije za jedrske raziskave ocenjen na štiri do pet milijard, pomeni Inštitut Maxa Plancka za čisto matematiko v Bonnu, svetovno znano raziskovalno središče, le 0,3 odstotka proračunske vsote Družbe Maxa Plancka. Veliki matematiki kakor Galois ali Abel so bili vse življenje siromaki. Težko bi našli cenejše genije.)

Avtonomija, ki jo Hardy zahteva za svoje temeljne raziskave, ni v nasprotju z umetnostmi in sploh ni naključje, da večini matematikov estetski kriteriji niso tuji. Ni jim zadosti, da dokaz drži, ženejo se še za „eleganco". Pri tem se uveljavlja povsem določen smisel za lepoto, značilen za matematična dela od najzgodnejših začetkov naprej. S tem pa se seveda obnavlja nerešeno vprašanje, zakaj znajo ljudje ceniti gotske katedrale, Mozartove opere in Kafkove povesti, ne pa metode neskončnega spusta ali Fourierjeve analize.

Glede družbene koristnosti je pa igrača ugovarjati Hardyjevim trditvam. Inženir pri opisu povsem navadnega elektromotorja uporablja več ko samo po sebi razumljiva kompleksna števila. O tem niso mogli niti slutiti Wessel in Argand, Euler in Gauß, ko so ob koncu osemnajstega stoletja ustvarjali teoretično podlago za to razširitev sistema števil. Brez binarnega številskega ključa, ki ga je razvil Leibniz, si ni mogoče misliti naših računalnikov. Einstein bi ne bil mogel formulirati svoje relativnostne teorije brez Riemannovih pripravljalnih del in kvantni mehaniki, kristalografi in komunikacijski tehniki bi bili precej praznih rok, ko bi ne bilo teorije grup. Raziskave praštevil, neizčrpno mikavna veja teorije števil, že od nekdaj velja za nekaj izbrano posebnega. Nekaj tisočletij, ne šele od Eratostena in Evklida naprej, so se najbistrejše glave ukvarjale s temi od sile muhastimi števili, ne da bi mogle povedati, za kaj je to dobro – dokler niso v preteklem stoletju kar na lepem ljudje od tajne policije, programerji, vojaki in bančniki spoznali, da se je mogoče vojskovati in poslovati s cepitvijo na prafaktorje in s kodami za zasilni izhod.

Možgani in vesolje

V nesluteni uporabnosti matematičnih modelov je nekaj osupljivega. Še malo ni jasno, zakaj so skrajno precizne izmišljije, porojene daleč od vsakršne empiričnosti, nekakšen l'art pour l'art, po svoje tako primerne za razlago in uporabo stvarnega sveta, kakor nam je dan. Že marsikdo se je čudil „izredni uspešnosti matematike". Za bolj verne čase taka vnaprej določena ubranost ni bila nič čudnega. Leibniz je lahko še povsem mirno trdil, da z matematiko dobivamo „razveseljiv pogled v božje zamisli" kratko in malo zato, ker je bil Vsemogočni sam prvi matematik. Danes se filozofi veliko težje sprijaznijo s tem. Stari spor med platoniki, formalisti in konstruktivisti se končuje nekako medlo neodločeno. Matematiki se pri svojem delu komaj kaj zanimajo za taka vprašanja. Preprosto razlago, ki pa pri varuhih izročila seveda ni posebej priljubljena, bi utegnili videti v tem, da gre za zmeraj iste razvojne procese, ki so ustvarili vesolje in naše možgane, tako da slabotno antropološko načelo skrbi za to, da ista pravila igre odkrivamo v fizikalni stvarnosti in v našem mišljenju.

Konrad Knopp je leta 1927 v nastopnem predavanju v Tübingenu lahko zmagoslavno izjavil, da je „matematika podlaga vsega spoznanja in nosilka višje kulture". Bahavo zamišljeno in patetično izrečeno, pa ne napačno. Le da se oprijemljiva korist, tehnična uporaba, po navadi pokaže šele pozneje, po svoje za hrbtom matematičnih pionirjev, ki hodijo kakor Hardy brezobzirno svoja pota, o katerih ne more nihče vnaprej reči, kam bodo pripeljala. Povezave med čisto in uporabno matematiko so včasih težko pregledne; tudi to utegne biti eden od razlogov, zakaj so postavke matematičnih raziskav v sodobni družbi neznansko podcenjene in da sploh ni stroke, v kateri bi bila kulturna zaostalost tako velika. Splošna zavest caplja stoletja za raziskavami, ja, mirne duše lahko trdimo, da pretežna večina ljudi – razen glede slasti v desetiškem sistemu – še sploh ni prišla čez stanje grške matematike.

Tak zaostanek na drugih področjih, na primer v medicini ali v fiziki, bi bil bržkone smrtno nevaren. Manj neposredno bi smelo to veljati tudi za matematiko, zakaj še nikoli ni bilo omike, ki bi bila vse do vsakdanjega življenja tako prežeta z matematičnimi metodami in tako odvisna od njih, kakor je naša.

Kulturni paradoks, s katerim imamo opravka, je mogoče še bolj zaostriti. Povsem utemeljeno se namreč dá sklepati, da živimo v zlati dobi matematike. Vsaj sodobni dosežki na tem področju so senzacionalni. Upodabljajoče umetnosti, literatura in gledališče se po mojem v primeri z matematiko lahko precej skrijejo.

Ne upam pa si te trditve natančneje utemeljiti. Kot brezupen laik bi mogel argumentom matematikov slediti le v najbolj grobih obrisih. Dostikrat sem lahko še vesel, če sploh dojamem, za kaj jim gre. Tudi zame ostaja most na njihov otok vzdignjen. Vendar me to ne moti, da se ne bi kdaj pa kdaj ozrl na drugi breg. In tisto, kar tam razločim, mi seveda omogoča, da svojo trditev z več zgledi napravim verjetno.

Večina ljudi najbrž še nikoli ni slišala o problemu razrednega števila. Gre za eno največjih ugank teorije števil. Leta 1801 jo je formuliral Gauß, po dolgotrajnih uvodnih delih pa sta jo leta 1983 dokončno rešila Zagier in Gross. Ravno tako dolgo je tudi trajalo, da je bil dokazan klasifikacijski teorem. Pri tem je šlo za ureditev neskončne množice enostavnih grup, ki popolnoma neupravičeno nosijo to ime, saj so preklemansko zapletene. Šele sto osemdeset let po utemeljitvi teorije grup sta Aschbacher in Solomon našla temeljni kamen. Druge primere si lahko prihranim. Izreka o nepopolnosti Kurta Gödla, bržkone najgenialnejšega matematičnega logika svojega stoletja, sta zadosti znana. Prav tako so verjetno veliko govorili o tem, da je Andrew Wiles šele leta 1995 dokazal Fermatov zadnji izrek, ob katerem so si brusili zobe tri stoletja. Rad bi videl nogometno prvenstvo, ki bi moglo tekmovati s takimi zmagoslavji – da niti ne govorim o razstavah listin in o srečanjih gledališč v zadnjih letih.

Kljub temu pa med občinstvom ni nikjer slišati izbruhov viharnega navdušenja, tako da smo spet pri začetnem vprašanju mojih razglabljanj. In pri tem preostaja samo še en grešni kozel, namreč naša intelektualna socializacija, natančneje rečeno: šola. Pri tem niti ne gre le za hudo preobremenjenost, pod katero se krivi. Zamude tičijo globlje in imajo starejše korenine. Lahko bi se vprašali, ali gre v prvih petih letih učnega načrta sploh za matematični pouk. Tistemu, kar tam učijo, so prej popolnoma upravičeno rekli „računstvo". Tudi danes otroke še zmeraj leta in leta trapijo skoraj izključno s pusto rutino, obtičalo v obdobju industrializacije in danes že popolnoma zastarelo. Do približno srede dvajsetega stoletja je delovni trg od večine zaposlenih zahteval le tri temeljne spretnosti: branje, pisanje in računanje. Naloga osnovne šole je bila skrbeti za minimalno pismenost delovne moči. To naj bi bilo opravičilo, zakaj je v nji izpeljano in uveljavljeno le formalno razmerje do matematike. Seveda pa s tem ne mislim, da obvladovanje poštevanke in reševanja preprostih sklepnih računov ali ulomkov ni

koristno. Vendar to nima sploh nobene zveze z matematičnim mišljenjem. To je, kakor če bi hoteli koga vpeljati v glasbo, pa bi moral leta in leta vaditi le tonsko lestvico. Skoraj ni dvoma, da bi do konca življenja sovražil to umetnost.

Otroška urečenost

Tudi v višjih razredih večinoma ni dosti boljše. Analitično geometrijo obravnavajo pretežno kot zbirko kuharskih receptov, podobno tudi infinitezimalni račun. Posledica je, da lahko dobimo dobro oceno, ne da bi sploh vedeli, kaj počnemo. Vsakemu maturantu privoščimo, da se dobro odreže, še posebej, ker nima niti najmanj vpliva na učni načrt in metodo. Vendar se ne smemo čuditi, če tak pouk podpira matematično nepismenost. Funkcionalni smisel se je tako ali tako že zdavnaj izgubil, ker so se merila delovnega trga in tehnike v zadnjih desetletjih odločno spremenila. Noben šestnajstletnik ne more sprevideti, zakaj se mora ubijati z dolgočasnim računanjem, kakršno vsako ročno računalo lahko opravi hitreje in bolje.

Vendar običajni pouk matematike ne le dolgočasi, temveč tudi premalo zahteva od učenčeve inteligence. Kakor da se pedagogika ne more otresti mnenja, da otroci ne znajo abstraktno misliti. To je kajpak čista zmota. Rajši je nasprotno res. Pojem neskončno velikega in neskončno majhnega je na primer nagonsko neposredno dostopen vsakemu devet- ali desetletniku. Številni otroci so izrecno očarani nad odkritjem ničle. Gladko jim je mogoče razložiti pojem limite, mirne duše pa tudi razliko med konvergentnimi in divergentnimi zaporedji. Veliko otrok kaže spontano zanimanje za topološka vprašanja. Celo s temeljnimi vprašanji teorije grup ali kombinatorike jih je mogoče kratkočasiti, če izkoristimo njihov prirojeni smisel za simetrije, in tako dalje in tako naprej. Bržkone je njihova sprejemljivost za matematične zamisli na splošno večja kakor pri večini odraslih, ki so že prerasli naravni razvoj izobraževanja. V večini primerov si pa nikoli ne bodo opomogli od poškodb, ki so jih pri tem pretrpeli.

Prav gotovo bi ne bilo pošteno, če bi hoteli za polom okriviti le učitelje matematike. Te obžalovanja vredne žrtve tepejo ne le odločbe didaktikov in njihovih muh, temveč se morajo uklanjati tudi povodcu ministrske birokracije, ki jim predpisuje povsem surove učne programe in cilje. Mogoče je status uradnikov kriv, da se učni kader, kakor se kaže ob zgledu tako imenovane pravopisne reforme, nagiba k prehitevajoči pokorščini. Nekakšna bojazljivost ovira marsikoga, da ne izkoristi svobode, ki mu jo odpira tako rekoč neodpovedljiva služba. Vendar poznamo učitelje, ki se postavljajo po robu preživeli rutini, čeprav jim jo prisojajo, in se jim posreči seznaniti učence z lepotami, bogastvom in izzivi matematike. Njihovi uspehi govorijo sami po sebi.

Tudi zunaj izobraževalnega sistema je nekaj znamenj, ki zbujajo upanje, da je najnižja točka matematične nevednosti že dosežena in mogoče celo premagana. Predvsem je videti, da se je to in ono spremenilo v zavesti znanstvenikov. Današnji rod matematikov se manj kakor kdaj prej ujema s

klišejem vase zaprtega, od sveta odmaknjenega samotarja. To velja zlasti za anglosaški svet. O taki spremembi miselnosti ne govorijo le bližnji zunanji razlogi, na primer boj za raziskovalna sredstva, temveč tudi notranji matematični vzroki. Tako imenovana kriza osnov prve polovice dvajsetega stoletja je najbrž pripomogla, da se začenja uveljavljati manj okostenelo gledanje. Zmanjšal se je tudi prepad med čistim in uporabnim raziskovanjem, ker je mogoče prepričati naročnike in uporabnike, da se z raziskavo osnov lahko najhitreje odkrije dobiček. Popolnoma nove možnosti so se odprle tudi z eksperimentalno, z računalniki podprto matematiko, čeprav so bile njene metode dolgo osumljene, da gre za pomanjkljivo strogost. In glede tradicionalne nadutosti stroke sodim, da je danes odpravljena zaradi nadiha ironije. Bolj kakor poprej se matematiki zavedajo svoje zmotljivosti; na jasnem so si o tem, da njihova katedrala ne bo nikoli dokončana in da za tako delo ne more biti niti stavbnega načrta brez vrzeli. Marsikdo je že celo pripravljen spregovoriti z nematematikom.

Semantična približevanja

Ni čudno, da mora to pripeljati do težav v sporazumevanju. Vendar je dobro znamenje, da je v zadnjih desetletjih čedalje več tolmačev, specializiranih za prevajanje formalne govorice stroke v naravno govorico. To je sicer skrajno kočljivo, pa tudi od sile hvaležno početje. Tudi na tem področju vodijo anglosaški pisci. Slavni graditelji mostov kakor Martin Gardner, Keith Devlin, John Conway in Philip Davis so pri tem opravili pionirsko delo. V Nemčiji se moramo za pomembno posredovalno vlogo zahvaliti revijam, kakor je *Spektrum der Wissenschaft*, in publicistom, kakor je Thomas von Randow. Tu pa tam so se celo množična občila že lotila matematičnih snovi, na primer leta 1976, ko sta Appel in Haken rešila problem štirih barv, ki je bil najbrž bolj razvpit kakor pomemben. Seveda se je treba sprijazniti s tem, da tako lahko nastajajo modne napačne osvetlitve kakor v primeru teorij o kaosu in katastrofah. Pri tem ne gre le za semantične nesporazume.

Afera Sokal je pokazala, v kakšne blamaže lahko zabredemo, če diletanti spregovorijo v svoji čiribirščini o znanstvenih pojmih, ne da bi se zavedali, o čem govorijo. Po drugi plati pa je čutiti obetavno znamenje v tem, da je Fermatov zadnji izrek, skoz in skoz resna znanstvena grozljivka Simona Singha, postal mednarodna uspešnica.

Treba je nekaj drznosti, da se v kulturi, ki se odlikuje po globoki matematični nevednosti, lotevajo takih prevajalskih poskusov. Ne morem se ubraniti skušnjavi, da ne bi navedel nekaj stavkov iz pogovora, ki ga je pred svojo knjigo Problemi matematike postavil Ian Stewart, poklicni matematik in odličen pisatelj. Eden od izvedencev se takole pogovarja z domnevnim laikom.

Matematik: Gre za eno najpomembnejših odkritij zadnjega desetletja.

Laik: Bi mi mogli to pojasniti z besedami, razumljivimi navadnim smrtnikom?

Matematik: To se ne dá. Ne morete dobiti prave podobe, če ne razumete tehničnih podrobnosti. Kako pa naj govorim o mnogoterostih, ne da bi omenil, da teoremi, za katere gre, funkcionirajo samo v primeru, če so mnogoterosti končnorazsežne, parakompaktne in Hausdorffove brez roba?

Laik: Se pa malo zlažite.

Matematik: Se ne znam.

Laik: Zakaj ne? Saj tudi vsi drugi lažejo.

Matematik (se skoraj spozabi, vendar v nasprotju s siceršnjo privajenostjo): Ne, kljub vsemu moram govoriti resnico!

Laik: Seveda. Vendar jo lahko za las skrivite, če postane s tem razumljivejše tisto, s čimer se pravzaprav ukvarjate.

Matematik (skeptično, vendar okriljen z lastno drznostjo): Naj bo. Pa poskusimo.

Tu gre pravzaprav za poskus opismenjevanja: za dolgotrajno, vendar zelo obetavno opravilo, ki bi ga bilo treba zastaviti že v nežni mladosti, da bi moglo našim veliko prepočasnim možganom oskrbeti vsaj nekaj nujno potrebnega urjenja in nas pri tem nagraditi s povsem neprivajenimi užitki.

Hans Magnus Enzensberger, rojen 1929 v Kaubeurenu, je po letu 1945 eden najuglednejših pisateljev nemške književnosti. Poleg pesmi in esejev, ki pogosto obravnavajo pereča vprašanja v zelo poljudni obliki, je zlasti znana in še danes zelo opazna zbirka otroških pesmic *Ragu* (*Allerleirauh*), prvič izdana leta 1961. Tudi *Številski škrat* (*Der Zahlenteufel*), knjiga za pod blazino vsem, ki jih je strah matematike (Carol Hanser Verlag, München 1997), je namenjena mladim bralcem, ne da bi bili pri tem odrasli zanemarjeni.

Urednik se zahvaljuje Janku Modru za izvrsten prevod in Marku Petkovšku, ker mu je predstavil knjižico in poskrbel za stik z založbo AK PETERS.

NOVE KNJIGE

N. Prijatelj, Uvod v matematično analizo, 2. del. Matematika–Fizika. Zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij. DMFA, Ljubljana 1999. Str. 381.

Prvi del monografije, ki obravnava množice, števila in metrične prostore, je izšel že leta 1980. Drugi del sestoji iz enega samega poglavja: Neskončne vrste in produkti. Analitične funkcije. Za tem razmeroma skromnim naslovom pa se skriva zelo bogata vsebina. Avtor v sedmih razdelkih obravnava najprej številske vrste, kriterije za konvergenco in operacije z vrstami, nato neskončne produkte in funkcijske vrste. Obsežni četrti razdelek je posvečen potenčnim vrstam. Poleg splošnih lastnosti teh vrst je avtor v njem prikazal osnove Weierstrassove teorije analitičnih funkcij z analitičnim nadaljevanjem potenčnih vrst. Peti razdelek govori o dopolnjeni kompleksni ravnini, stereografični projekciji in Laurentovih vrstah. V šestem razdelku so nadrobno opisane lastnosti elementarnih funkcij v kompleksnem, namreč eksponentne in logaritemske funkcije ter lastnosti trigonometričnih in ciklometričnih funkcij. Zadnji razdelek obravnava neskončne produkte funkcij. Opredeljen je pojem celih funkcij, opisane so njihove osnovne lastnosti, med drugim pa sta dokazana Liouvillov izrek in osnovni izrek algebre. Razdelek (in prav tako knjiga) se konča z Weierstrassovo teorijo o izražanju celih funkcij z danimi ničlami v obliki neskončnega produkta. Kot zgled je izpeljan neskončni produkt za funkcijo sinus.

Iz tega kratkega pregleda seveda ni mogoče razbrati vse bogate vsebine. Naj opozorim samo na eno podrobnost. V razdelku o potenčnih vrstah se avtor ukvarja tudi s Taylorjevo vrsto in Taylorjevo formulo. Pri izpeljavi ostanka R_n v Taylorjevi formuli, npr. v obliki $R_n = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$, je seveda treba privzeti obstoj odvoda $f^{(n+1)}(x)$ v neki okolici izbrane točke x_0. Kaj pa, če ta odvod morda sploh ne obstaja in vemo samo za obstoj odvoda $f^{(n)}(x_0)$? Ta primer obravnava avtor na str. 120. Če zapišemo ostanek v Taylorjevi formuli v obliki $R_n = \frac{\lambda(x,x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$, vselej velja $\lim\limits_{x \to x_0} \lambda(x, x_0) = 0$. Pisec teh vrstic je prvič zvedel za to dejstvo pri branju te knjige (oz. rokopisa).

Avtor si je zastavil za cilj napisati monografijo, ki bi zajela osnove matematične analize, izhajajoč pri tem iz kolikor mogoče skromnih predpostavk. Pri pisanju se vselej drži načela: najprej je treba obravnavati splošno teorijo in iz splošnega prehajati na specialnejša področja. Zato se oba dela monografije odlikujeta po svojevrstnosti prikaza. Kakor vsa svoja dela je avtor tudi to knjigo napisal izredno skrbno, jasno in pregledno. Za razumevanje je potrebno le to, da bralec pozna vsebino prvega dela.

Ivan Vidav