ZDAJA DRUSTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

SSN 0473-7466

ODPISANO

1999
Letnik 46
6

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, NOVEMBER 1999

letnik 46, številka 6, strani 161–192

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Miran Černe (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Marko Zgonik (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.000 SIT, za študente 1.500 SIT, za tujino 25 EUR. Posamezna številka za člane 600 SIT, stare številke 400 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1999 DMFA Slovenije – 1401

Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki – Articles Str.–Page

Integrabilni sistem z zrcalno simetrijo — Integrable systems with mirror-symmetry (Martin Vuk) 161–171

Nenavadni interferenčni poskusi: „Kemijski" Youngov poskus — Unusual interference experiments: A chemical analogue of Young's experiment (Janez Strnad) 172–175

Štiri desetletja matematičnih olimpiad — Four decades of the International Mathematical Olympiad (Matjaž Željko) 176–182

Vesti — News

Plemljeva hiša (Matjaž Željko) 171

Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1998 (Janez Krušič) 183–189

Osmo slovensko srečanje o uporabi fizike (Matjaž Babič) 190–191

Matematični kolokviji (Tomaž Pisanski) 192

Nove knjige — New books

(Anton Suhadolc) 191

Letno kazalo . . . . . III–IV

Na ovitku:, Gustave Courbet, *Morska obala*, 1853.

INTEGRABILNI SISTEM Z ZRCALNO SIMETRIJO

MARTIN VUK

Math. Subj. Class. (1991): 58F07, 81Q05

V članku opišemo hamiltonske dinamične sisteme in obravnavamo klasično in kvantno integrabilnost le-teh. Kot primer skiciramo dokaz kvantne integrabilnosti Calogero--Moserjevega sistema. Iz dokaza je videti, kako simetrija sistema pomaga poiskati ohranitvene količine sistema.

INTEGRABLE SYSTEMS WITH MIRROR-SYMMETRY

In this paper we introduce the notion of Hamiltonian dynamical system and investigate its classical and quantum integrability. As an example we discuss quantum integrability of Calogero-Moser system, which shows the importance of symmetry in the search for the conserved quantities of the system.

1. Uvod

Klasični hamiltonski sistem z n prostostnimi stopnjami in energijsko funkcijo H je *integrabilen*, če obstaja n funkcijsko neodvisnih gladkih funkcij $F_1 = H, \ldots, F_n$ na faznem prostoru, za katere je Poissonov oklepaj $\{F_i, F_j\} = 0$ za vse i, j (natančna definicija Poissonovega oklepaja bo podana kasneje). Med drugim to pomeni, da so funkcije F_i konstantne vzdolž vsake rešitve sistema, to je, da so funkcije F_i integrali gibanja. Definicija integrabilnosti temelji na lokalni rešitvi sistema, ki jo je v 19. stoletju poiskal Liouville z uporabo *kvadratur* (to je kombinacija reševanja eksplicitno podanih enačb in integralov ene spremenljivke). Na ta način lahko poiščemo tako družino funkcij $\phi_1, \ldots, \phi_n$, da funkcije $F_1, \ldots, F_n, \phi_1, \ldots, \phi_n$ tvorijo lokalne koordinate na faznem prostoru, v katerih so Hamiltonove enačbe oblike $\dot{\phi}_i = c_i = konst.$ in $\dot{f}_i = 0$.

V pričujočem članku bomo predstavili, kako pridemo do definicije integrabilnosti in nekatere bistvene lastnosti klasičnih integrabilnih sistemov. Opisali bomo še, kako definicijo integrabilnosti posplošimo na kvantne sisteme. V drugem delu članka bomo kot primer sistema z zrcalno simetrijo obravnavali integrabilnost Calogero-Moserjevega sistema. Omenjeni sistem je posplošitev sistema več enakih delcev na premici, ki paroma interagirajo s potencialom, sorazmernim z $1/x^2$, kjer je x medsebojna oddaljenost delcev.

2. Opis dinamičnega sistema s Poissonovo algebro

V članku se bomo omejili na mehanske sisteme s časovno neodvisno Hamiltonovo funkcijo oziroma Schrödingerjevim operatorjem.

Za opis fizikalnega sistema je treba vedeti, kaj so fizikalne količine, ki jih merimo. Za popoln opis pa moramo tudi vedeti, kako se s časom spreminjajo. Posebej nas bodo zanimale količine, ki se v sistemu ohranjajo, tako imenovane *ohranitvene količine*. Te so bistvenega pomena za definicijo integrabilnosti mehanskega sistema.

Klasični mehanski sistem z n prostostnimi stopnjami obravnavamo na faznem prostoru, ki ga lahko predstavimo z gladko mnogoterostjo razsežnosti $2n$. Gibanje predstavimo s potjo v faznem prostoru $\mathcal{M}$, ki zadošča Hamiltonovim enačbam. Označimo s H Hamiltonovo funkcijo, ki je realna funkcija na faznem prostoru in je enaka celotni energiji sistema. V lokalnih koordinatah $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, kjer so q_i posplošene koordinate in p_i posplošeni impulzi, lahko Hamiltonove enačbe zapišemo kot sistem navadnih diferencialnih enačb:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \end{aligned} \tag{1}$$

za $1 \leq i \leq n$, ki ga imenujemo *hamiltonski sistem enačb*. Hamiltonova funkcija H in druge smiselne fizikalne količine so navadno gladke funkcije na faznem prostoru. Zato poljubni realni gladki funkciji na faznem prostoru $\mathcal{M}$ pravimo *fizikalna količina* ali *opazljivka*[1], algebri vseh gladkih realnih funkcij $\mathbb{Q} = C^\infty(\mathcal{M})$ na $\mathcal{M}$ pa *algebra fizikalnih količin.*

Naš naslednji cilj bo poiskati opis časovnega razvoja fizikalnih količin, ki je neodvisen od izbire lokalnih koordinat. Izračunajmo časovni odvod količine $F \in \mathbb{A}$ vzdolž gibanja sistema. Upoštevamo hamiltonski sistem enačb (1) in dobimo:

$$\begin{aligned} \frac{dF(q_i(t), p_i(t))}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}. \end{aligned} \tag{2}$$

Za poljubni funkciji F in G iz $\mathbb{A}$ in za vsak $x \in \mathcal{M}$ definiramo *Poissonov oklepaj*:

$$\{F, G\}(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial q_i}\frac{\partial G(x)}{\partial p_i} - \frac{\partial F(x)}{\partial p_i}\frac{\partial G(x)}{\partial q_i}. \tag{3}$$

Ker je odvod $\frac{dF}{dt}$ vzdolž poti, ki jo opiše sistem s Hamiltonovo funkcijo G, neodvisen od izbire lokalnih koordinat q_i in p_i, je Poissonov oklepaj globalno definirana gladka funkcija na faznem prostoru $\mathcal{M}$. Hitro se prepričamo, da Poissonov oklepaj zadošča naslednjim lastnostim:

1. Poissonov oklepaj je linearen v obeh faktorjih.
2. Zadošča Jacobijevi identiteti:
   $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$ in
3. Leibnitzovemu pravilu: $\{F, G \cdot H\} = \{F, H\} \cdot G + \{F, G\} \cdot H$, kjer je $\cdot$ navadno množenje funkcij po točkah.

[1] Včasih je definicija opazljivke bolj restriktivna.

Asociativni algebri, opremljeni s Poissonovim oklepajem, ki zadošča zahtevam 1, 2 in 3, pravimo *Poissonova algebra.* Algebra količin $C^\infty(\mathcal{M})$ klasičnega mehanskega sistema je torej Poissonova algebra za oklepaj (3). Enačbo (2) lahko sedaj zapišemo v obliki, ki je neodvisna od izbire koordinat na $\mathcal{M}$:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}. \tag{4}$$

Iz zgornje enačbe vidimo, da so ohranitvene količine natanko tiste, katerih Poissonov oklepaj s Hamiltonovo funkcijo sistema je identično enak 0.

Oglejmo si sedaj kvantni opis mehanskega sistema. V kvantni mehaniki stanje sistema običajno opišemo z enotskim vektorjem (valovno funkcijo) v kakem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$. Količine, ki jih merimo, predstavimo z elementi algebre hermitskih operatorjev na $\mathcal{H}$, ki jo, podobno kot v klasični mehaniki, imenujemo *kvantna algebra fizikalnih količin* in jo prav tako označimo z $\mathbb{A}$. Za popoln opis moramo povedati še, kako za posamezno količino določimo pričakovano vrednost, ki jo hočemo izmeriti. Pričakovana vrednost količine, predstavljene z operatorjem A, je enaka $(A\phi, \phi)$, kjer je ϕ trenutno stanje sistema in $(\cdot, \cdot)$ skalarni produkt na $\mathcal{H}$. Ker so operatorji, ki predstavljajo količine, hermitski, je pričakovana vrednost vedno realna.

Gibanje predstavimo s potjo na enotski sferi Hilbertovega prostora $\mathcal{H}$, ki jo opiše rešitev $\psi(t)$ Schrödingerjeve enačbe:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H\psi(t), \tag{5}$$

kjer je $\hbar$ Planckova konstanta in H Schrödingerjev operator, ki ustreza klasični Hamiltonovi funkciji. Rešitev enačbe (5) dobimo tako, da začetno stanje $\psi(0)$ pomnožimo s časovno odvisnim operatorjem $e^{\frac{-itH}{\hbar}}$, ki ga imenujemo *operator časovnega razvoja*:

$$\psi(t) = e^{\frac{-itH}{\hbar}} \psi(0).$$

Operator $e^{\frac{-iHt}{\hbar}}$ izračunamo kot neskončno vrsto:

$$e^{\frac{-itH}{\hbar}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{-itH}{\hbar})^n}{n!},$$

ki absolutno konvergira za vsako začetno stanje $\psi(0) \in \mathbb{H}$ in vsak $t \in \mathbb{R}$.

Za obravnavo časovnega razvoja opazljivk je primerna Heisenbergova slika, v kateri se ne spreminja stanje, pač pa operatorji, ki so prirejeni posameznim količinam. Dobimo jo tako, da stanje sistema $\psi(t)$ preslikamo v $\tilde{\psi}(t) = e^{\frac{iHt}{\hbar}} \psi(t) = \psi(0)$, operator A pa v

$$A_t = e^{\frac{iHt}{\hbar}} A e^{\frac{-iHt}{\hbar}}. \tag{6}$$

Ker je operator $e^{\frac{iHt}{\hbar}}$ unitaren, se ohranijo tako lastne vrednosti operatorjev kot tudi skalarni produkt; torej vse fizikalno merljive količine. Če odvajamo enačbo (6) po času t, dobimo enačbe, ki opišejo obnašanje posameznih količin in so analogne oblike kot v klasični mehaniki:

$$\frac{d}{dt}A_t = \frac{i}{\hbar}(A_t H - H A_t) = \frac{i}{\hbar}[A_t, H]. \tag{7}$$

Z $[A, B]$ smo označili komutator dveh operatorjev A in B. Hitro se lahko prepričamo, da komutator zadošča lastnostim 1, 2 in 3 iz definicije Poissonove algebre, zato v kvantno algebro fizikalnih količin vpeljemo kvantni Poissonov oklepaj $\{\cdot,\cdot\}_k := \frac{i}{\hbar}[\cdot,\cdot]$[2], s katerim algebra $(\mathbb{A}, \{\cdot,\cdot\}_k)$ postane Poissonova algebra. Enačbo (7) lahko zapišemo kot:

$$\frac{d}{dt}A_t = \{A_t, H\}_k. \tag{8}$$

Podobno kot pri klasični mehaniki vidimo, da algebra fizikalnih količin, opremljena s strukturo Poissonovega oklepaja, opiše obnašanje mehanskega sistema. Ohranitvene količine pa so natanko tiste, ki komutirajo s Schrödingerjevim operatorjem H. Opazimo, da lahko ohranitvene količine in energijo H merimo hkrati. V kvantni mehaniki namreč velja, da lahko dve količini A in B hkrati izmerimo natanko takrat, ko komutirata.

3. Definicija in lastnosti integrabilnih sistemov

V prejšnjem poglavju smo pokazali (enačbi (4) in (8)), da Poissonov oklepaj na klasični oziroma kvantni algebri količin skoraj povsem opiše lastnosti mehanskega sistema z določeno Hamiltonovo funkcijo oziroma Schrödingerjevim operatorjem. Vpeljemo posplošeno definicijo mehanskega sistema:

Definicija 1. Naj bo $(\mathbb{A}, \{,\})$ Poissonova algebra in $H \in \mathbb{A}$ izbran element algebre $\mathbb{A}$. Urejenemu paru $(\mathbb{A}, H)$ pravimo *mehanski sistem*, elementu H pa *Hamiltonov* element (Hamiltonova funkcija v klasičnem oziroma Schrödingerjev operator v kvantnem primeru). Enačbe gibanja, ki opisujejo časovni razvoj poljubnega elementa $F \in \mathbb{A}$, so oblike:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}. \tag{9}$$

Zgornja definicija je uporabna tako za klasično kot tudi za kvantno mehaniko. Zato v nadaljevanju ne bomo več ločevali med klasičnim in kvantnim sistemom. Poudariti pa je treba, da klasična in kvantna algebra količin,

[2] Faktor i je potreben, ker je komutator dveh simetričnih operatorjev antisimetričen operator.

ki opisujeta isti mehanski sistem, kot Poissonovi algebri nista izomorfni. Število prostostnih stopenj sistema je enako rangu Poissonove algebre $\mathbb{A}$, vendar se v natančno definicijo ranga ne bomo spuščali. Povejmo le to, da je rang algebre gladkih funkcij $C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, opremljene s klasičnim Poissonovim oklepajem, enak n. Prav tako je rang algebre simetričnih operatorjev na prostoru $L_2(\mathbb{R}^n)$ kompleksnih funkcij z integrabilnim kvadratom enak n.

Definicija 2 (Arnold-Liouville). Mehanski sistem $(\mathbb{A}, H)$ z n prostostnimi stopnjami je *integrabilen*, če obstaja n *funkcijsko neodvisnih* elementov $H = F_1, \ldots, F_n \in \mathbb{A}$, za katere velja $\{F_i, F_j\} = 0$ za poljubna $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Postavi se vprašanje, kdaj sta dva elementa algebre funkcijsko neodvisna. Odgovorili bomo le za dva primera, ki nas zanimata. Prvi primer so klasične fizikalne količine, ki smo jih predstavili z gladkimi funkcijami na faznem prostoru. Funkcije $F_1, \ldots, F_n$ na $\mathbb{R}^{2n}$ so funkcijsko odvisne natanko tedaj, ko je njihova Jacobijeva determinanta identično enaka 0. Neodvisnost funkcij na faznem prostoru mehanskega sistema lahko prevedemo na prejšnji primer.

Drugi primer so kvantne fizikalne količine, ki jih navadno predstavimo s hermitskimi operatorji na Hilbertovem prostoru $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ funkcij na $V = \mathbb{R}^n$ z integrabilnim kvadratom. Očitno so operatorji, ki jih ni moč hkrati diagonalizirati, funkcijsko neodvisni. Naj bo $\{A_1, \ldots, A_k\}$ množica operatorjev na $\mathcal{H}$, za katere obstaja poln sistem skupnih lastnih funkcij $\{\phi(\lambda); \quad \lambda \in I \in \mathbb{C}^n\}$, in naj bo $\phi(\lambda)$ gladko odvisna od parametra λ. Funkcijo $a_i : \lambda \in I \Rightarrow \mathbb{C}$, za katero velja $A_i\phi(\lambda) = a_i(\lambda)\phi(\lambda)$, imenujemo *spektralna funkcija* operatorja A_i. Operatorji $A_1, \ldots, A_k$ so funkcijsko neodvisni natanko takrat, ko so funkcijsko neodvisne njihove spektralne funkcije.

Lastnosti klasičnih integrabilnih sistemov opisuje naslednji izrek.

Izrek 3 (Arnold-Liouville). *Naj bo gladka mnogoterost $\mathcal{M}$ dimenzije $2n$ fazni prostor mehanskega sistema in H Hamiltonova funkcija. Algebro gladkih funkcij opremimo s klasičnim Poissonovim oklepajem (3). Naj obstaja n funkcijsko neodvisnih gladkih funkcij na faznem prostoru $F_1 = H, F_2, \ldots, F_n$, za katere velja $\{F_i, F_j\} = 0$ za poljubna i in j. Naj bo $F = (F_1, \ldots, F_n) \in \mathbb{R}^n$ n-terica realnih števil, ki je regularna vrednost preslikave $(F_1, \ldots, F_n) : \mathcal{M} \Rightarrow \mathbb{R}^n$. Potem velja:*

1. *Nivojska množica $\mathcal{M}_F = \{x; F_i(x) = f_i \quad 1 \leq i \leq n\}$ je gladka mnogoterost. Če je $\mathcal{M}_F$ kompaktna, je difeomorfna n-dimenzionalnemu torusu.*
2. *Na $\mathcal{M}$ lahko v okolici $\mathcal{M}_F$ vpeljemo akcijsko-kotne koordinate $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \phi_1, \ldots \phi_n\}$ v katerih so enačbe gibanja linearne:*

$$\begin{aligned} \dot{F}_i(t) =& 0, \\ \dot{\phi}_i(t) =& \omega_i(F) = \text{konst.} \end{aligned}$$

   za vsak $1 \leq i \leq n$.
3. *Gibanje sistema z začetnim stanjem na $\mathcal{M}_F$ leži na $\mathcal{M}_F$ in je v akcijsko-kotnih koordinatah linearno.*

Dokaz je dolg, zato ga ne navajamo. Ogledate si ga lahko v [1].

V praksi so integrabilni sistemi bolj ali manj edini, za katere znamo eksplicitno poiskati rešitev. Poleg tega nam prejšnji izrek zagotavlja „lepo" obnašanje rešitev klasičnega integrabilnega sistema.

4. Integrabilni sistemi z zrcalno simetrijo

Kot zgled integrabilnih sistemov si bomo ogledali Calogero-Moserjev sistem. Ta sistem je posplošitev sistema n enakih delcev na premici z medsebojnim potencialom: $V(x) = x^{-2}$, kjer je x razdalja med posameznima delcema. Označimo s ξ_i koordinato i-tega delca. Ker imamo n delcev, je konfiguracijski prostor enak $\mathbb{R}^n$. Položaj sistema označimo s $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^T$. Če predpostavimo, da na sistem ne delujejo zunanje sile in da delci paroma interagirajo, je potencial $\mathcal{V}(\xi)$ enak:

$$\mathcal{V}(\xi) = \sum_{i<j} V(\xi_i - \xi_j), \tag{10}$$

kjer je $V(x) = kx^{-2}$ za neki $k \in \mathbb{R}$. Ker so delci enaki, je vseeno, kako jih označimo. Torej je naš sistem invarianten na vsako permutacijo indeksov i v vektorju $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n)^T$. Označimo z $\{e_1, \ldots, e_n\}$ standardno bazo prostora $\mathbb{R}^n$. Sistem je invarianten na permutacije koordinat, ki so generirane z zrcaljenji prek hiperravnine, pravokotne na vektorje $a_{ij} = e_i - e_j$ za $i \neq j$. Zrcaljenje prek $e_i - e_j$ namreč ravno zamenja koordinati ξ_i in ξ_j. Potencial (10) lahko zapišemo kot:

$$V(\xi) = \sum_{i<j} V(a_{ij}^T \xi). \tag{11}$$

Hamiltonova funkcija H omenjenega sistema je vsota kinetične in potencialne energije in je v primernem sistemu enot enaka:

$$H(\xi, \dot{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} \dot{\xi}_i^2 + \sum_{i<j} \frac{k}{(a_{ij}^T \xi)^2}.$$

Klasični zapis prevedemo v kvantnega tako, da klasičnim količinam priredimo operatorje na prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Koordinati ξ_i priredimo operator množenja s ξ_i, gibalni količini $\dot{\xi}_i$ pa diferencialni operator $i\hbar \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. Schrödingerjev operator H za sistem n enakih delcev na premici je potem enak:

$$H\psi(\xi) = (-\Delta + \sum_{i<j} \frac{k}{(a_{ij}^T \xi)^2})\psi(\xi),$$

kjer je Δ Laplaceov operator.

Tipična lastnost integrabilnih sistemov je prisotnost simetrije. Obstaja namreč tesna povezava med ohranitvenimi količinami in simetrijo sistema. Sistem enakih delcev na premici je invarianten za delovanje simetrične grupe permutacij S_n, ki je generirana z zrcaljenji. Zato pravimo, da ima sistem enakih delcev na premici *zrcalno simetrijo*. Tudi sistem, ki ga bomo obravnavali, bo zrcalno simetričen, vendar bo grupo S_n zamenjala poljubna končna grupa, generirana z zrcaljenji. Zato si oglejmo *korenske sisteme*, ki karakterizirajo omenjene grupe.

Naj bo $V = \mathbb{R}^n$ realen vektorski prostor z običajnim skalarnim produktom $(x, y) = x^T y$ za poljubna $x, y \in \mathbb{R}^n$. Naj bo $a \in V$ od nič različen vektor. Ortogonalni komplement vektorja a označimo z V_a. Zrcaljenje $r_a : V \longrightarrow V$ čez hiperravnino V_a je definirano s formulo:

$$r_a(\xi) = \xi - \frac{2(\xi, a)}{(a, a)} a, \quad \xi \in V. \tag{12}$$

Hiperravnino V_a imenujemo *zrcalo*.

Definicija 4. Neprazno končno množico vektorjev $R = \{a_1, \ldots, a_n\}$ iz V imenujemo *normaliziran korenski sistem* (v nadaljevanju kar *korenski sistem*), če velja:

1. Vektorji $a_1, \ldots, a_n$ razpenjajo V.
2. Za vsak $a_i, a_j \in R$ velja: $r_{a_i}(a_j) \in R$ in $(a_i, a_i) = 2$.

Grupo, generirano z zrcaljenji prek korenov korenskega sistema, imenujemo *refleksijska grupa korenskega sistema R*. Pogoj 2 iz definicije korenskega sistema zagotavlja, da je refleksijska grupa korenskega sistema končna. Poleg tega velja, da je vsaka končna grupa, generirana z zrcaljenji, enaka refleksijski grupi nekega korenskega sistema.

Razsežnosti vektorskega prostora V pravimo *rang* korenskega sistema. Označimo z $V_0 = V \backslash (\cup_{a \in R} V_a)$ odprto podmnožico prostora V, na katero deluje grupa W tranzitivno. Množica V_0 razpade na povezane komponente, ki jim pravimo *Weylove celice*. Posebej izberemo neko Weylovo celico in jo označimo z V_+. Korenski sistem razpade na disjunktno unijo $R = R_+ \cup R_-$, kjer je $R_+ = \{a \in R;\ (a, \xi) > 0\ \forall \xi \in V_+\}$. Elementom R_+ pravimo *pozitivni koreni*. Zrcaljenja prek pozitivnih korenov generirajo refleksijsko grupo.

Več o korenskih sistemih in njihovih refleksijskih grupah si lahko preberete v [2] in [3].

Naj bo R korenski sistem ranga n in V_+ Weylova celica. Z W označimo refleksijsko grupo korenskega sistema R. Prostor $V = \mathbb{R}^n$, ki ga R razpenja, bo konfiguracijski prostor Calogero-Moserjevega sistema. Stanja sistema bodo iz prostora $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, na katerega grupa W deluje z: $w \cdot f(\xi) = f(w\xi)$ za $w \in W$, $\xi \in V$ in funkcijo $f \in \mathcal{H}$. Stanje sistema, za katero velja $f(w\xi) = f(\xi)$ za vse $\xi \in V$ in $w \in W$, imenujemo *invariantno stanje*, podprostor invariantih stanj pa označimo s $\mathcal{H}^W = L^2(\mathbb{R}^n)^W$.

Naj bodo $g_a^2 \in \mathbb{R}$, $a \in R$ realni parametri, ki so konstantni na orbiti refleksijske grupe W korenskega sistema R. Korenskemu sistemu R priredimo kvantni dinamični sistem s prostorom stanj $\mathcal{H}^W$ in Schrödingerjevim operatorjem, ki na poljubno stanje $\psi \in \mathcal{H}^W \cap C^2(\mathbb{R}^n)$ deluje z:

$$H(g)\psi(\xi) = -\Delta\psi(\xi) + \sum_{a\in R} \frac{g_a^2}{(a,\xi)^2}\psi(\xi). \tag{13}$$

Ker so parametri g_a konstantni na orbiti refleksijske grupe, Schrödingerjev operator H preslika prostor invariantnih stanj $\mathcal{H}^W$ vase. Sistem z omenjenim Schrödingerjevim operatorjem se imenuje *Calogero-Moserjev sistem*, prirejen korenskemu sistemu R.

V nadaljevanju bomo dokazali integrabilnost Calogero-Moserjevega sistema prirejenega poljubnemu korenskemu sistemu. Integrabilnost klasičnega Calogero-Moserjevega sistema sta prva obravnavala Calogero(1971) in Moser(1975) za sistem več delcev na premici. Olshanetsky in Perelomov(1983) sta z uporabo Laxovega para dokazala klasično integrabilnost za vse korenske sisteme, prirejene Liejevim algebram. Za poljubne korenske sisteme je Opdam leta 1988 dokazal integrabilnost kvantnega Calogero-Moserjevega sistema. V našem članku bomo sledili Heckmanu [4], ki je z uporabo Dunklovih operatorjev poenostavil Opdamov dokaz.

Za dokaz integrabilnosti je treba poiskati komutativno družino, generirano z n neodvisnimi operatorji, ki bo vsebovala Schrödingerjev operator H. Problem poenostavimo tako, da za množico parametrov $k = \{k_a;\ a \in R\}$ vpeljemo operatorja:

$$\delta(k;\xi)^{\frac{1}{2}} = \prod_{a>0} (a,\xi)^{k_a} \quad \text{in}$$

$$L(k) = \Delta + \sum_{a\in R} \frac{k_a}{(a,\xi)} \frac{\partial}{\partial a},$$

kjer je $\delta^{\frac{1}{2}}(k;\xi)$ mišljen kot operator množenja s funkcijo $\delta^{\frac{1}{2}}(k;\xi)$. Za izbiro parametrov $g_a^2 = k_a(k_a - 1)$ za $a \in R$ namreč velja:

$$\delta(k;\xi)^{\frac{1}{2}} \circ L(k) \circ \delta(k;\xi)^{-\frac{1}{2}} = -H(g).$$

Zato je dovolj poiskati komutativno družino, ki vsebuje operator $L(k)$. Izkaže se, da lahko omenjeno družino poiščemo z Dunklovimi diferencialno-diferenčnimi operatorji. V nadaljnjem razmišljanju bomo Hilbertov prostor $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$ zamenjali s $P[V]$, prostorom vseh polinomov n spremenljivk. Zamenjavo bomo upravičili kasneje. Vzemimo $a \in R$ in definirajmo operator $\triangle_a : P[V] \longrightarrow P[V]$:

$$\triangle_a(P)(\xi) = \frac{P(\xi) - P(r_a\xi)}{(a,\xi)}.$$

Za izbiro realnih parametrov $k = \{k_a \in \mathbb{R},\ a \in R\}$, ki so konstantni na orbiti grupe W, in vektor $\xi \in V$ definiramo operator $D_\xi(k) : P[V] \to P[V]$, ki ga dobimo kot deformacijo navadnega smernega odvoda $\frac{\partial}{\partial \xi}$ v smeri vektorja ξ:

$$D_\xi(k) = \frac{\partial}{\partial \xi} + \sum_{a>0} k_a(a,\xi)\triangle_a.$$

Operator D_ξ imenujemo *Dunklov diferencialno-diferenčni* operator. Nekaj elementarnega računanja pokaže, da velja $D_\xi D_\eta = D_\eta D_\xi$, zato lahko za vsak polinom $P \in P[V]$ definiramo operator D_P podobno, kot mu priredimo diferencialni operator s konstantnimi koeficienti $\frac{\partial}{\partial P}$[3]. Posebej velja, da je Dunklov operator, prirejen polinomu $|\xi|^2$, enak:

$$\sum_j D^2_{\xi_j}(k) = \Delta + \sum_{a\in R_+} \frac{k_a}{(a,\xi)}\left\{\frac{\partial}{\partial a} - \triangle_a\right\} = L(k) + \sum_{a\in R_+} \frac{k_a}{(a,\xi)}\triangle_a,$$

kjer je $\xi_1,\ldots,\xi_n$ ortonormirana baza prostora V. Podobno kot na funkcije iz $\mathcal{H}$ deluje refleksijska grupa tudi na prostor polinomov $P[V]$. Ker imamo opravka s sistemom, ki je invarianten na delovanje grupe W, se bomo omejili na $\mathbb{A}^W = \{D \in \mathbb{A}; wD = Dw\ \forall w \in W\} \subset \mathrm{End}(P[V])$ podalgebro invariantnih operatorjev na prostoru polinomov $P[V]$. Podprostor $P[V]^W < P[V]$ invariantnih polinomov je invarianten podprostor za algebro operatorjev $\mathbb{A}^W$, zato lahko za vsak $D \in \mathbb{A}$ definiramo zožitev operatorja D na $P[V]^W$:

$$\mathrm{Res}(D) : P[V]^W \longrightarrow P[V]^W.$$

Preslikava $\mathrm{Res} : \mathbb{A}^W \longrightarrow \mathrm{End}(P[V]^W)$ je homomorfizem algeber. Ker so parametri k_a konstantni na orbiti grupe W, je operator $L(k)$ element $\mathbb{A}^W$. Ohranitvene količine bomo tako iskali v algebri $\mathbb{A}^W$. Pri tem bomo uporabili *Chevalleyev izrek* (glej [3]), ki pove, da je kolobar $P[V]^W$ invariantnih polinomov na V za poljubno končno refleksijsko grupo W generiran z natanko $n = \dim V$ algebraično neodvisnimi homogenimi polinomi.

Izrek 5. *Naj bo algebra polinomov $P[V]^W$ generirana s homogenimi polinomi $P_1,\ldots,P_n$ iz Chevalleyevega izreka. Potem so operatorji*

$$\mathrm{Res}(D_{P_i}(k)), \quad 1 \le i \le n \tag{14}$$

algebraično neodvisni in generirajo algebro komutirajočih diferencialnih operatorjev $\mathcal{A}$, ki vsebuje operator

$$\mathrm{Res}\left(\sum_j D^2_{\xi_j}(k)\right) = \mathrm{Res}(L(k)).$$

[3] Polinomu $|\xi|^2 = \sum_i \xi_i^2$ tako priredimo Laplaceov diferencialni operator $\frac{\partial}{\partial|\xi|} = \Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$.

Dokaz. Najprej pokažemo, da so operatorji D_{P_i} iz $\mathbb{A}^W$. Velja namreč $D_\xi w = wD_{w\xi}$ za vsak $w \in W$ in $\xi \in V$. Odtod sledi, da je $D_P w = wD_{wP} = wD_P$ za vsak invarianten polinom P. Ker je $D_P(P) = 1$ za vsak $P \in P[V]^W$, je preslikava $P[V]^W \Rightarrow \mathcal{A}$, ki preslika $P \mapsto \mathrm{Res}(D_P)$, injektivna in zato izomorfizem komutativnih algeber. Po Chevalleyevem izreku so invariante P_i algebraično neodvisne, zato jih izomorfizem preslika v neodvisne operatorje $\mathrm{Res}(D_{P_i})$.
Operator $\mathrm{Res}(D_{|\xi|^2}) = \mathrm{Res}(\sum_{i=1}^n D_{\xi_i}^2)$ je vedno element algebre $\mathcal{A}$, ki jo generirajo operatorji $\mathrm{Res}(D_{P_i})$, ker je polinom $|\xi|^2 = (\xi, \xi)$ invarianten na delovanje poljubne refleksijske grupe.

Zdaj moramo le še dokazati, da je $\mathrm{Res}(D_{|\ |^2}(k)) = \mathrm{Res}(L(k))$ in da algebro $\mathcal{A}$ sestavljajo diferencialni operatorji. Oboje sledi iz dejstva, da je $\triangle_a(P) = 0$ za poljubna $a \in R$ in $P \in P[V]^W$. ■

Zgornji rezultat pomeni algebraično integrabilnost Calogero-Moserjevega sistema. S konjugacijo z $\delta^{\frac{1}{2}}$ namreč dobimo iskano družino operatorjev. Vendar se pojavi problem, ker je družina $\mathcal{A}$ definirana na prostoru $P[V]^W$. Polinomi so neomejeni in njihov kvadrat ni integrabilna funkcija, zato sploh niso stanja sistema. Pri operatorjih, ki predstavljajo fizikalne količine, pa nas seveda zanima, kako delujejo na prostoru stanj. Operatorji iz družine $\mathcal{A}$ so diferencialni, zato jih lahko definiramo na gostem podprostoru $C_c^\infty(V)^W$ prostora stanj $L^2(V)$, vendar ne vemo, ali tako definirani operatorji še vedno komutirajo. Omenjeni problem rešimo tako, da poiščemo ortonormiran sistem funkcij, ki so skupne lastne funkcije operatorja $\mathrm{Res}(L(k))$ in drugih operatorjev iz $\mathcal{A}$, ter poskusimo vsako stanje razviti po dobljenem sistemu lastnih funkcij. Operatorji seveda komutirajo na skupnih lastnih funkcijah, zato bodo komutirali tudi na poljubni funkciji, ki jo lahko razvijemo po sistemu skupnih lastnih funkcij. Položaj je podoben kot pri klasični Fourierovi analizi na $\mathbb{R}^n$. Lastne funkcije $e^{i(\lambda,\xi)}$ Laplaceovega operatorja za noben $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ne pripadajo prostoru $L^2(\mathbb{R}^n)$. Niso niti integrabilne, pač pa lahko vsako funkcijo iz $L^2(\mathbb{R}^n)$ razvijemo po $e^{i(\lambda,\xi)}$ v Fourierov integral. Za komutativno družino $\mathcal{A}$ naslednji izrek pove, da obstaja poln sistem lastnih funkcij.

Lema 6. *Za vsak parameter $\lambda \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{C}$ obstaja do konstante natančno ena sama funkcija $J(k, \lambda; \xi) \in P[V]^W$, ki jo imenujemo Besselova*[4] *funkcija, prirejena korenskemu sistemu R in parametru λ, ki je rešitev enačbe:*

$$D_P(J(\lambda, k; \xi)) = P(\lambda) J(\lambda, k; \xi)$$

za vsak $P \in P[V]^W$. Poleg tega velja, da so Besselove funkcije poln sistem na prostoru $C_c^\infty(V)^W$ v smislu Plancherelove formule:

$$f(\xi) = \int_{\lambda \in V} \int_{\eta \in V} f(\eta) J(-i\lambda, k; \eta) J(i\lambda, k; \xi) d\eta \, d\lambda,$$

[4] V primeru, ko je rang sistema R enak 1, je $J(k, \lambda; x)$ kar običajna Besselova funkcija.

kjer je $d\lambda$ Plancherelova mera:

$$d\lambda = \frac{\prod_{a>0}(a,\xi)^{2k_a}}{\int_V \prod_{a>0}(a,\eta)^{2k_a} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\eta,\eta)} d\eta} d\xi.$$

Zgornji izrek je zadnji korak k dokazu integrabilnosti. Zaradi Plancherelove formule družina operatorjev $\mathcal{A}$ komutira na gostem podprostoru prostora stanj, kjer je definirana. Funkcijsko neodvisnost generatorjev družine $\mathcal{A}$ lahko tudi preverimo. Za generatorje $\mathrm{Res}(D_{P_i})$ algebre $\mathcal{A}$ so namreč spektralne funkcije enake invariantam P_i iz Chevalleyevega izreka, za katere nam omenjeni izrek zagotavlja funkcijsko neodvisnost. Konjugacija z $\delta^{\frac{1}{2}}$ je avtomorfizem algebre simetričnih operatorjev na prostru stanj, zato je $\delta^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}\delta^{-\frac{1}{2}}$ komutativna algebra, ki vsebuje Schrödingerjev operator $H(g)$.

Na koncu naj omenim, da iz integrabilnosti kvantnega Calogero-Moserjevega sistema sledi integrabilnost klasičnega sistema, saj v klasični limiti, ko gre Planckova konstanta $\hbar$ proti 0, kvantna algebra količin postane izomorfna klasični.

LITERATURA

[1] V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, New York 1997.
[2] J.-P. Serre, *Complex semisimple Lie algebras*, Springer, New York 1987.
[3] J. E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.
[4] G. Heckmnan, H. Schlichtkrull, *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces*, Academic Press, San Diego 1994.
[5] G. Heckman, *Integrable systems and reflection groups*, Notes for the autumn school „Geometry of Hamiltonian systems", Woudschoten 1992.
[6] J. M. Rabin, *Introduction to Quantum field theory* v knjigi *Geometry and Quantum Field Theory*, urednika D. Freed in K. Uhlenbeck, AMS, Institute for advanced study, 1995.
[7] M. Vuk, *Integrabilni sistemi z zrcalno simetrijo*, Diplomsko delo, Ljubljana 1998.

VESTI

Plemljeva hiša

DMFA Slovenije ima v lasti Plemljevo hišo na Bledu, v kateri je 9 dvoposteljnih apartmajev s kuhinjami in kopalnicami ter predavalnica za 16 oseb. Hiša je primerna za organizacijo letnih šol za osnovno- in srednješolce ter drugih strokovnih srečanj. Člani DMFA Slovenije lahko najamejo apartmaje v Plemljevi hiši tudi za svoj oddih.

Trenutna cena najema je 3.000 SIT na apartma na dan, k temu znesku je treba primakniti še turistično takso. Individualni gosti morajo posteljnino prinesti s seboj. Koledar prostih terminov in potrebne informacije za prijavo dobite na spletnih straneh Društva na naslovu `http://www.dmfa.si`.

Matjaž Željko

NENAVADNI INTERFERENČNI POSKUSI

„KEMIJSKI" YOUNGOV POSKUS

JANEZ STRNAD

PACS 33.80.-b

Pri obsevanju molekul vode z ultravijolično svetlobo z valovno dolžino 121,6 nm so opazili pojav, ki ga je mogoče imeti za kemijsko različico Youngovega interferenčnega poskusa z dvema režama. Iz začetnega vzbujenega stanja molekule vode vodita dve različni vmesni stanji H-OH in H-HO do istega končnega stanja atoma H in molekule OH. Zaradi dveh mogočih poti se pojavi interferenca.

UNUSUAL INTERFERENCE EXPERIMENTS

A CHEMICAL ANALOGUE OF YOUNG'S EXPERIMENT

By irradiating water molecules with ultraviolet light of 121,6 nm wavelength a phenomenon was observed which can be interpreted as a chemical analogue of Young's two slit interference experiment. From the initial excited state of the water molecule two different intermediate states H-OH and H-HO lead to the same final state of a hydrogen atom and an OH molecule. Owing to two possible pathways interference appears.

Med interferenčnimi poskusi zasluži pozornost poskus kemijske narave, čeprav ne kaže izrazitih potez, ki so sicer značilne za interferenčne poskuse. Posebno zanimiv je merilni način, ki so ga pri njem uporabili. Disociacija molekul vode v ozračju z ultravijolično svetlobo je pomemben pojav, zato so absorpcijski spekter vodne pare na ultravijoličnem območju premerili že pred časom. V zadnjih letih pa so se lotili podrobnega raziskovanja disociacije molekule vode s svetlobo z valovno dolžino 121,6 nm [1]. To svetlobo absorbira posamični vodikov atom, ko preide iz osnovnega stanja v prvo vzbujeno stanje. Pri enem od mogočih pojavov molekula vode pri absorpciji te svetlobe iz osnovnega stanja $\tilde{X}$ preide v vzbujeno stanje $\tilde{B}$ in se nazadnje razdeli na atom vodika H in molekulo OH. Pojav zbuja precejšnje zanimanje, čeprav vseh podrobnosti o njem še ne poznajo. Na drugi strani je molekula OH pomembna posrednica v vrsti kemijskih pojavov in pojavov v ozračju in v velikih oblakih v vesolju seva, kot je značilno za maserje. Poleg tega je pripravna za teoretično raziskovanje vrtenja in nihanja molekul in njune sklopitve. Pred nedavnim so poskus ponovili v okoliščinah, ki so omogočile natančno merjenje [2]. Opišimo glavne poteze tega merjenja.

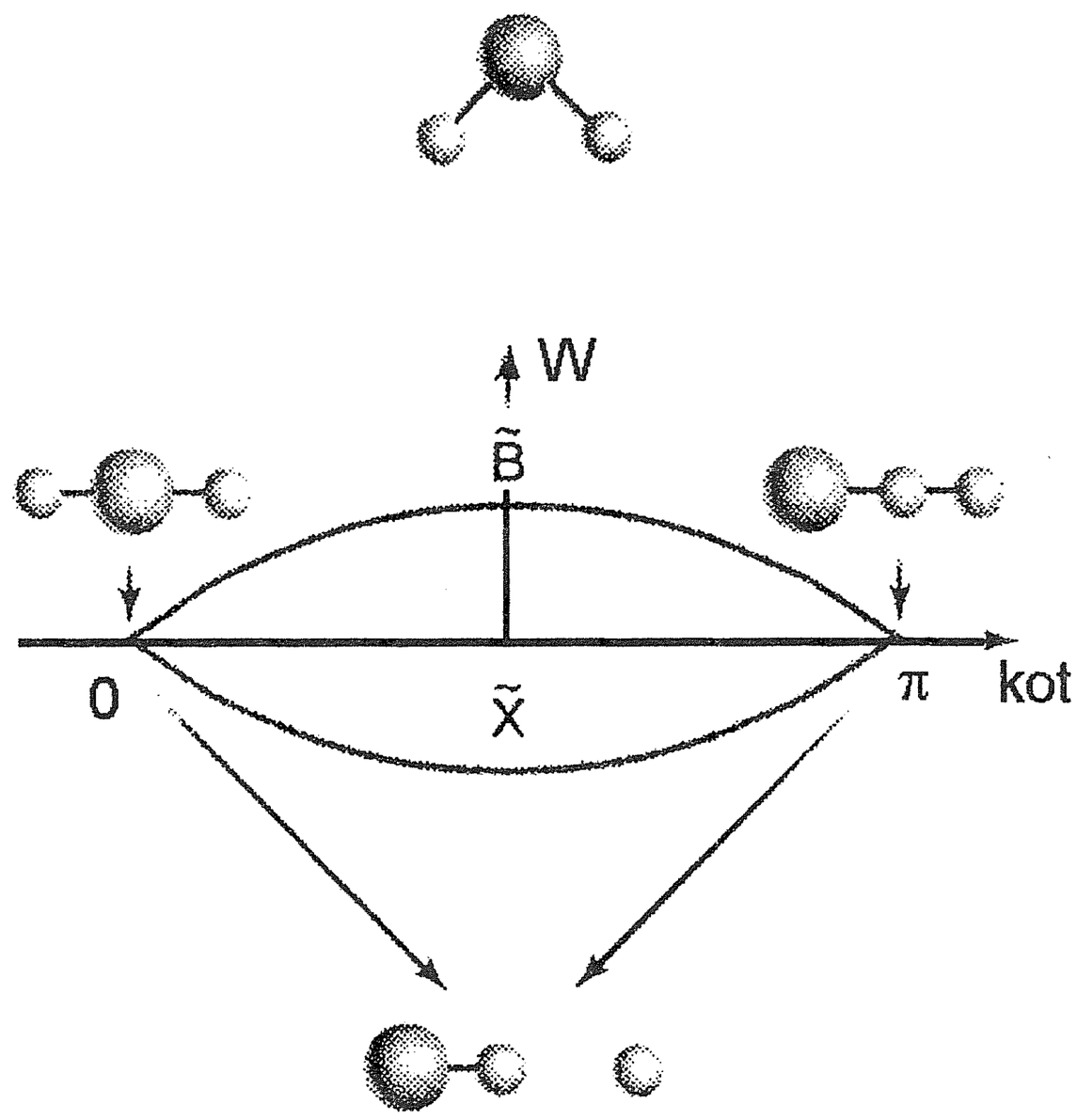
Najprej so dobili redek curek molekul vode tako, da so 3 % vodne pare dodali argonu. Iz posodice pri tlaku 800 milibarov se je curek skozi šobo razširil v prvi del vakuumske posode s tlakom 10^{-6} milibara in nato skozi zaslonko z drobno odprtino vstopil v drugi del posode s tlakom 10^{-7} milibara. Pred merjenjem so poskrbeli, da so bile molekule vode v curku v nizkih vrtilnih vzbujenih stanjih. Pod pravim kotom so na curek molekul usmerili svetlobo z valovno dolžino 121,6 nm, ki so jo dobili z laserji. Laserji

so delovali v sunkih, ki so se ravnali po časih, v katerih se je odpirala šoba, denimo desetkrat na sekundo po 100 μs. Na območju, na katerem je curek molekul zadel svetlobni curek, se je del molekul vode v curku razdelil na atome vodika H in molekule OH.

Natančno so premerili kinetično energijo nastalih atomov vodika. Atomi v osnovnem stanju z glavnim kvantnim številom $n = 1$ so absorbirali svetlobo z valovno dolžino 121,6 nm in prešli v prvo vzbujeno stanje z glavnim kvantnim številom $n = 2$. V tem stanju so absorbirali svetlobo z valovno dolžino okoli 364,5 nm iz barvilnega laserja in prešli v visoko vzbujeno stanje z glavnim kvantnim številom okoli 80. Dolgoživo stanje z razpadnim časom okoli 100 μs imenujejo Rydbergovo stanje in atome v njem Rydbergove atome. Tem atomom je treba dovesti zelo majhno energijo, da se spremenijo v ione vodika in elektrone. Rydbergovi atomi so odleteli iz ravnine molekulskega curka in svetlobnih curkov in nekateri od njih zadeli merilnik v pravokotni smeri na to ravnino. Tam so se na elektrodi merilnika z majhno napetostjo spremenili v ione, ki jih je bilo lahko zaznati. S tem, da so izmerili čas preleta za 38 cm dolgo pot od kraja obsevanja do merilnika, so določili hitrost in kinetično energijo atomov vodika. Ta postopek imenujejo translacijska spektroskopija z vodikovimi Rydbergovimi atomi ali Rydbergovo zaznamovanje vodikovih atomov. Omogoča ga to, da prihajajo molekule v gručah in da delujejo laserji v ubranih sunkih. Merilni način je natančen, ker nevtralni atomi ne motijo drug drugega, ione, ki morebiti nastanejo med obsevanjem molekul, pa odstranijo iz curka z elektrodami.

Molekule OH so imele poleg translacijske kinetične energije vrtilno kinetično energijo. Energiji atoma vodika in molekule OH sta določeni z začetno kinetično energijo molekule vode in energijo fotona. Poleg energije se ohrani tudi gibalna količina. Tako je s kinetično energijo atoma vodika mogoče ugotoviti vrtilno stanje molekule OH, ki ga določa kvantno število l. Nizko vrtilna stanja molekule opišemo s togim rotatorjem, ko je pri kvantnem številu l lastna valovna funkcija krogelna funkcija $Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi)$ in je lastna vrednost kvadrata vrtilne količine $\hbar^2 l(l+1)$. Molekula z vztrajnostnim momentom okoli prečne težiščne osi I ima potem vrtilno kinetično energijo $\hbar^2 l(l+1)/2I$. Pri visoko vzbujenih vrtilnih stanjih rotator ni tog, ampak z naraščajočim kvantnim število l narašča tudi vztrajnostni moment [3]. V tem primeru vrtilno kinetično energijo izrazimo z vrsto, ki vsebuje člene z naraščajočimi sodimi potencami vrtilne količine in katere koeficiente prilagodijo merjenjem.

V osnovnem stanju $\tilde{X}$ meri kot med krakoma molekule 104,5°. V stanju $\tilde{B}$ se molekula ne more razdeliti na sestavna dela OH in H, dokler se kot med krakoma ne spremeni (sl. 1). O tem so se poučili, ko so računsko raziskali ploskve polne energije. Pri tem so ugotovili, da se molekula lahko



Slika 1. Molekulo vodika v osnovnem stanju zadene foton ultavijolične svetlobe z valovno dolžino 121,6 nm (zgoraj). Energija osnovnega stanja $\tilde{X}$ in energija vzbujenega stanja $\tilde{B}$ sta odvisni od kota med krakoma molekule (na sredini) [4]. Risba je zelo poenostavljen približek za ploskev polne energije za obe stanji [2]. Prehod iz stanja $\tilde{B}$ v osnovno stanje $\tilde{X}$ pri kotu okoli 104,5° ni mogoč, ker bi vmesno stanje zahtevalo preveliko energijo. Pri kotih 0 in π pa je tak prehod mogoč in molekula vode se v obeh primerih razdeli na atom H in molekulo OH (spodaj). Klasično gledano je potreben velik navor, da se kot 104,5° zmanjša na 0 ali poveča na π, zato odleti molekula OH z veliko vrtilno količino.

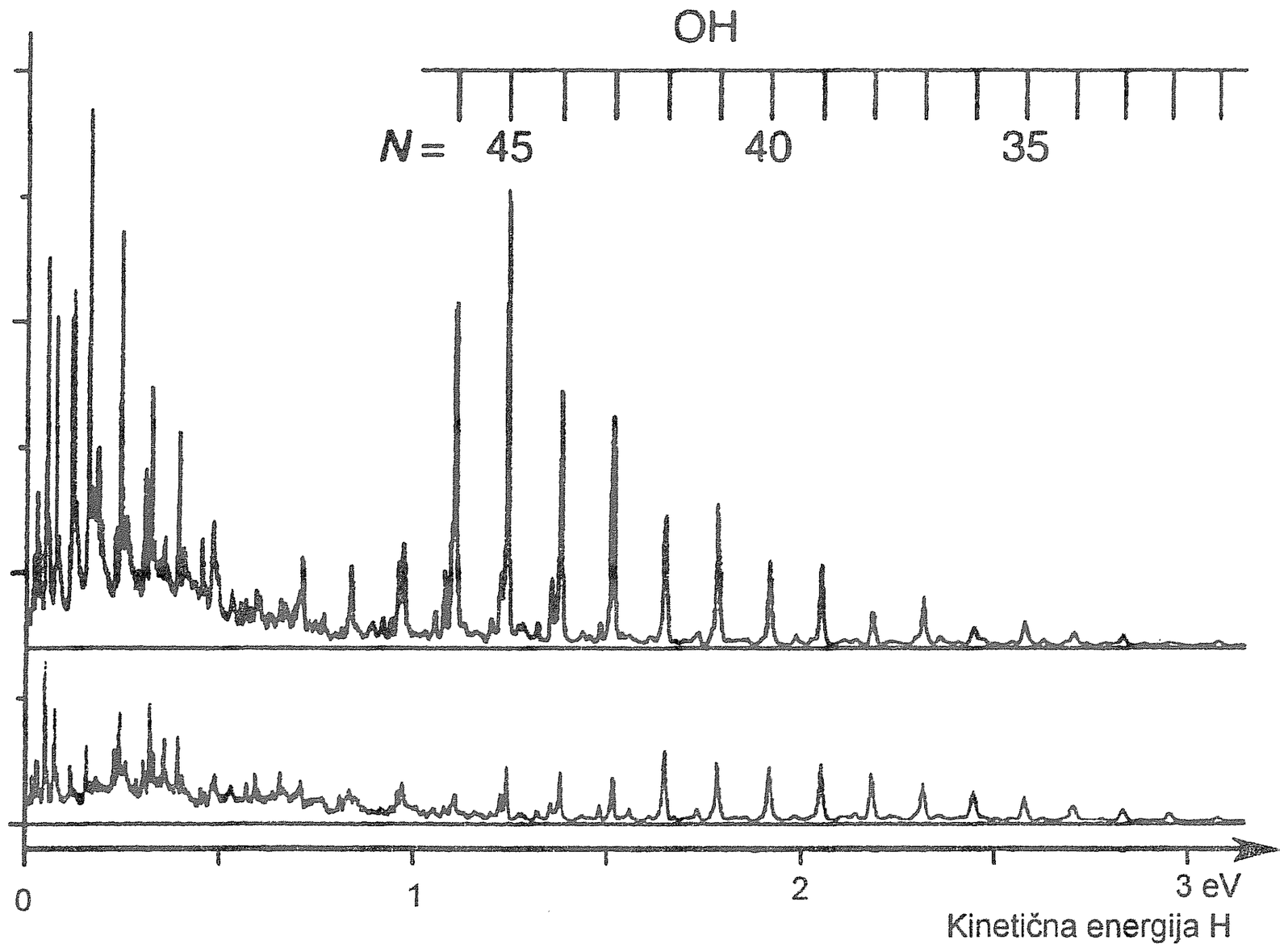
razdeli na sestavna dela OH in H, če se eden od atomov vodika preseli na drugo stran, tako da so atomi razvrščeni v ravno vrsto. Obstajata dve taki možnosti: HHO in HOH. Obe ti vmesni stanji vodita do enakega končnega stanja z atomom vodika v osnovnem stanju ter molekulo OH v osnovnem elektronskem stanju in v visoko vzbujenem vrtilnem stanju.

Ne vemo, prek katerega od obeh vmesnih stanj HHO in HOH gre prehod v končno stanje. Zato moramo upoštevati linearno kombinacijo obeh možnosti: $\psi_1 - (-1)^l\psi_2$. Pri tem ψ_1 zadeva disociacijo prek enega od vmesnih stanj in ψ_2 disociacijo prek drugega [4]. V linearni kombinaciji se pojavi parnost krogelne funkcije $(-1)^l$. Verjetnostno gostoto dobimo kot kvadrat absolutne vrednosti valovne funkcije

$$[\psi_1 - (-1)^l\psi_2]^*[\psi_1 - (-1)^l\psi_2] = \psi_1^*\psi_1 + \psi_2^*\psi_2 - (-1)^l(\psi_1^*\psi_2 + \psi_1\psi_2^*)\,.$$

Zaradi zadnjega člena je verjetnostna gostota za sode in lihe izmenoma velika in majhna.

Pri merjenju so opazili, da so bila vrtilna stanja OH z lihim l nekoliko bolj zasedena kot bližnja stanja s sodim l – posebno med kvantnima



Slika 2. Porazdelitev atomov vodika po kinetični energiji pri disociaciji molekule vode s svetlobo z valovno dolžino 121,6 nm [2]. Zgornja krivulja zadeva vzporedno polarizacijo, ko je jakost električnega polja v laserskem curku vzporedna s smerjo hitrosti molekul, in spodnja pravokotno polarizacijo, ko je jakost električnega polja pravokotna na smer hitrosti. Čim manjša je kinetična energija vodikovega atoma, tem večja je energija molekule OH. Na intervalu kinetične energije vodikovega atoma med 0 in 1 eV ležijo tudi nekatera nihajna vzbujena stanja molekule OH, večji energiji vodikovih atomov pa ustrezajo le vrtilna stanja molekule OH. Nad temi je narisana energijska lestvica vrtilnih stanj molekule OH. Največ molekul je vzbujenih v vrtilno stanje s kvantnim številom $l = 45$.

številoma 39 in 43. Valovno funkcijo smo že zapisali v obliki, ki to upošteva. Najbolj je bilo zasedeno stanje z $l = 45$. Pojav je bil izrazit, ko je jakost električnega polja v linearno polariziranem laserskem curku imela smer gibanja molekul (sl. 2). Opazovanega pojava ni bilo mogoče pojasniti drugače kot na opisani način. Razlago so podprli z natančnejšimi računi, ki jim tu ne moremo slediti. Tudi ti računi so le približni; pri natančnejših bo treba tesneje povezati gibanje elektronov in jeder.

LITERATURA

[1] D. H. Mordaunt, M. N. R. Ashfold, R. N. Dixon, *Dissociation dynamics of H_2O (D_2O) following photoexcitation of the Lyman-α wavelength (121,6 nm)*, J. Chem. Phys. **100** (1994) 7360.

[2] R. N. Dixon, D. W. Hwang, X. F. Yang, S. Harich, J. J. Lin, X. Yang, *Chemical 'double slits': Dynamical interference of photodissociation pathways of water*, Science **285** (1999) 1249.

[3] J. Strnad, *Fizika. IV. del*, DMFA, Ljubljana 1986, str. 20.

[4] D. C. Clary, *Interfering with water*, Science **285** (1999) 1218.

ŠTIRI DESETLETJA MATEMATIČNIH OLIMPIAD

MATJAŽ ŽELJKO

Math. Subj. Class (1991): 97–03

V članku je prikazana zgodovina Mednarodne matematične olimpiade – tekmovanja mladih matematikov z vsega sveta. V kronološkem pregledu na koncu članka so zapisane tudi vse udeležbe in uspehi slovenskih tekmovalcev.

FOUR DECADES OF THE INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

The history of International Mathematical Olympiad is presented along with the results of Slovenian contestants.

1. Matematična olimpiada

Matematična olimpiada je dandanes gotovo najprestižnejše mednarodno matematično tekmovanje srednješolcev. To potrjuje tudi številčnost držav, ki se je udeležujejo. Očiten je njen vpliv na matematično izobraževanje in znanstveno vzgojo mladih matematikov.

V državah, katerih dijaki tradicionalno posegajo po najžlahtnejših odličjih, so v temeljite priprave na matematično olimpiado vključeni mnogi univerzitetni profesorji in raziskovalci.

Mednarodna matematična olimpiada je desetdnevno srečanje najuspešnejših mladih matematikov sodelujočih držav. V ekipi vsake države je lahko največ 6 tekmovalcev, ki še niso dopolnili 20 let in ki niso vpisani na nobeno višjo ali visoko šolo ali enakovredno izobraževalno institucijo. Dva zaporedna dneva sta tekmovalna, dijaki rešujejo po tri naloge na dan in imajo za to po štiri ure in pol časa. Naloge izbere mednarodna tekmovalna komisija izmed predlogov, ki jih pošljejo sodelujoče države in „prečisti" poseben odbor države gostiteljice. V tekmovalni komisiji je po en član iz vsake države, vodi pa jo predsednik, ki je vedno domačin.

Tekmovalci rešujejo naloge v svojem jeziku in (kot je za matematična tekmovanja običajno) smejo uporabljati le pribor za pisanje in risanje. Po končanem drugem tekmovalnem dnevu prejmeta izdelke („svojih") tekmovalcev vodja ekipe in član mednarodne tekmovalne komisije, jih pregledata in predstavita ocenjevalni komisiji. Ta komisija si že poprej ogleda izdelke tekmovalcev, saj dobi kopije, in izoblikuje ocenjevalni kriterij, zato je ob predstavitvi običajno treba razjasniti le še manjše nejasnosti.

Skupno število nagrajenih tekmovalcev ne preseže polovice vseh sodelujočih tekmovalcev. Zadnje čase je število podeljenih zlatih, srebrnih oziroma bronastih medalj približno v razmerju 1 : 2 : 3, tekmovalci, ki v celoti rešijo vsaj eno nalogo in ne dobijo medalje, pa prejmejo pohvalo.

Matematična olimpiada je tekmovanje posameznikov, zato lahko o ekipnem vrstnem redu govorimo neuradno, in sicer tako, da seštejemo dosežene

točke posameznih tekmovalcev ekipe. Ker pa vse države ne sodelujejo s šestčlanskimi ekipami, dobljeni ekipni rezultati pravzaprav niso primerljivi med seboj.

Mednarodna matematična olimpiada pa ni le tekmovanje. Gostitelji poskušajo dijakom in drugim gostom z vsega sveta pokazati čim več naravnih in kulturnih znamenitosti svoje dežele. Veliko je priložnosti za prijetno druženje z vrstniki in sklepanje prijateljstev.

2. Zgodovinski pregled

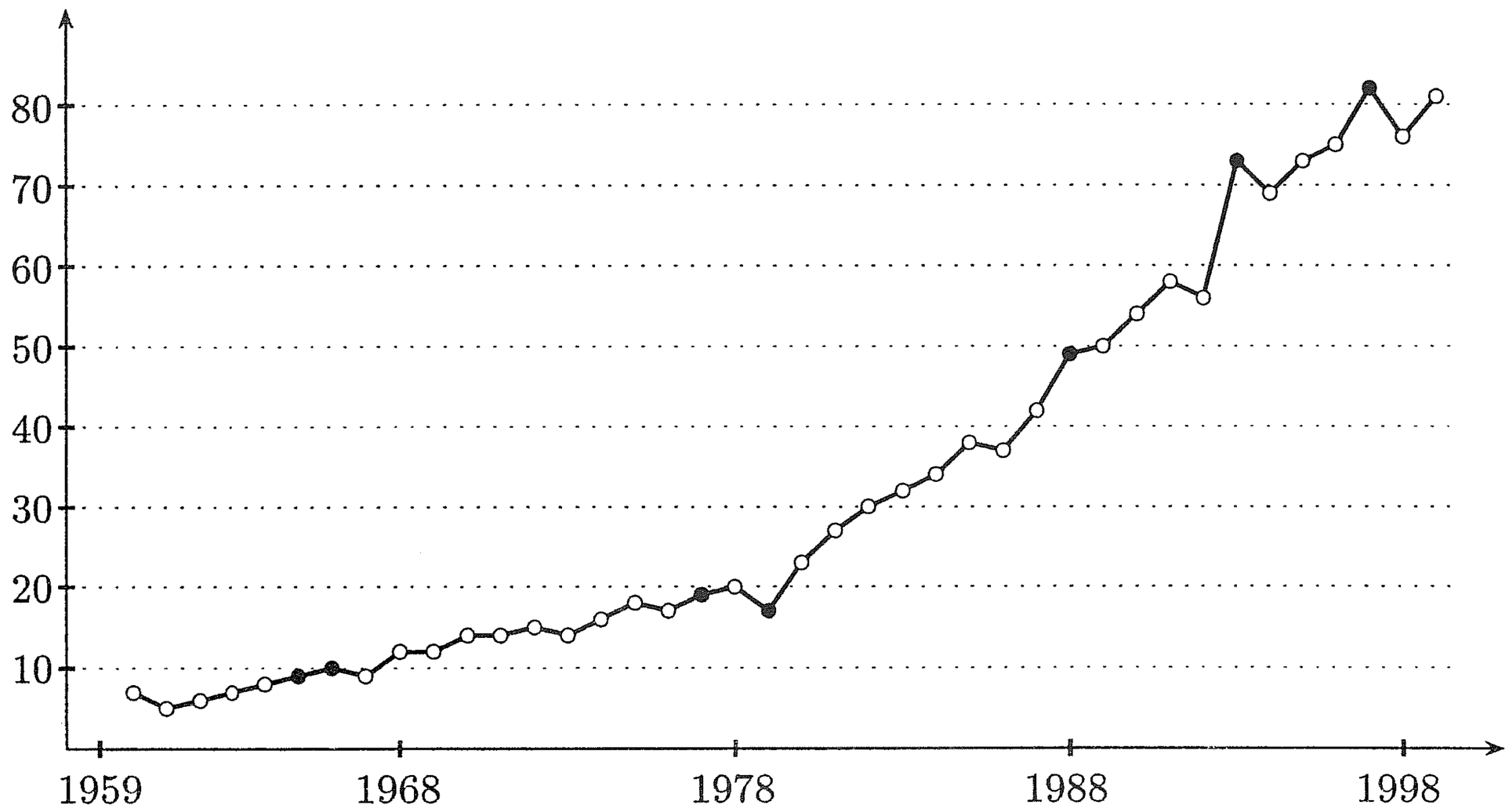
Prva mednarodna matematična olimpiada (v nadaljevanju MMO) je bila leta 1959 v Romuniji na pobudo Društva matematikov in fizikov Romunije. Ministrstvo za šolstvo države gostiteljice je poslalo vabila za sodelovanje „prijateljskim" socialističnim državam, in tako je na prvi olimpiadi sodelovalo 7 držav: Bolgarija, Češkoslovaška, Madžarska, Nemška demokratična republika, Poljska, Romunija in Zveza sovjetskih socialističnih republik. Države so sodelovale z osemčlanskimi ekipami. Gostitelj je že na prvi MMO za udeležence pripravil nekaj ekskurzij, kar je poleg tekmovanja najrazburljivejši dogodek za vse dijake. Na prvi MMO je bila najuspešnejša ekipa Romunije.

Tudi druga MMO je bila v Romuniji, nato pa je bila olimpiada na Madžarskem, Češkoslovaškem in leta 1963 na Poljskem. Ta MMO je bila za tekmovalce iz Slovenije nadvse pomembna, saj je njej prvič sodelovala ekipa Jugoslavije. V njeni osemčlanski ekipi so bili trije Slovenci: Franc Dacar, Peter Petek in Stanko Vrščaj. Naši tekmovalci so bili zelo uspešni, saj je Franc Dacar osvojil zlato medaljo, Peter Petek pa srebrno.

Na prvih petih MMO so sodelovale le nekatere vzhodnoevropske države, na šesti se je udeleženkam pridružila Mongolija kot prva neevropska država, na sedmi pa Finska kot prva nesocialistična država. Na deveti olimpiadi v Cetinju so na novo sodelovale ekipe Francije, Italije, Švedske in Velike Britanije. Organizacija MMO je bila v rokah vzhodnoevropskih držav celih sedemnajst let – tradicijo je prekinila Avstrija leta 1976.

Leta 1980 MMO ni bilo. Mongolija je zaradi finančnih težav tik pred začetkom odpovedala organizacijo tekmovanja; v kratkem času pa nadomestnega gostitelja ni bilo moč najti.

Z leti je število sodelujočih držav nezadržno naraščalo, zato so lahko leta 1982 na MMO na Madžarskem države sodelovale le s štiričlanskimi ekipami. Od MMO leta 1983 v Franciji pa lahko vsaka država sodeluje z največ šestimi tekmovalci. Na MMO v Avstraliji leta 1988 je 9 držav sodelovalo prvič (mnoge daljnovzhodne države), leta 1993 v Turčji pa je bilo takih držav kar 18 (razpadi nekaterih vzhodnoevropskih držav). Leta 1997 v Argentini sicer ni bilo veliko držav, ki bi sodelovale prvič, a je bilo skupno število držav največje doslej zaradi udeležbe večine južnoameriških držav, ki so na MMO že kdaj prej sodelovale.



Slika 1. Število sodelujočih držav na MMO

Na diagramu opazimo tudi nekaj zmanjšanj števila udeleženk. Leta 1978 na MMO v Romuniji ni sodelovalo nekaj vzhodnoevropskih držav zaradi političnih razlogov. Za manjše število udeleženk leta 1994 v Hongkongu in leta 1998 na Tajvanu pa so bile najverjetneje vzrok finančne težave pri tistih državah, ki so se leto poprej udeležile olimpiade prvič, in sicer zato, ker je bila prirediteljica kakšna od njim bližnjih držav.

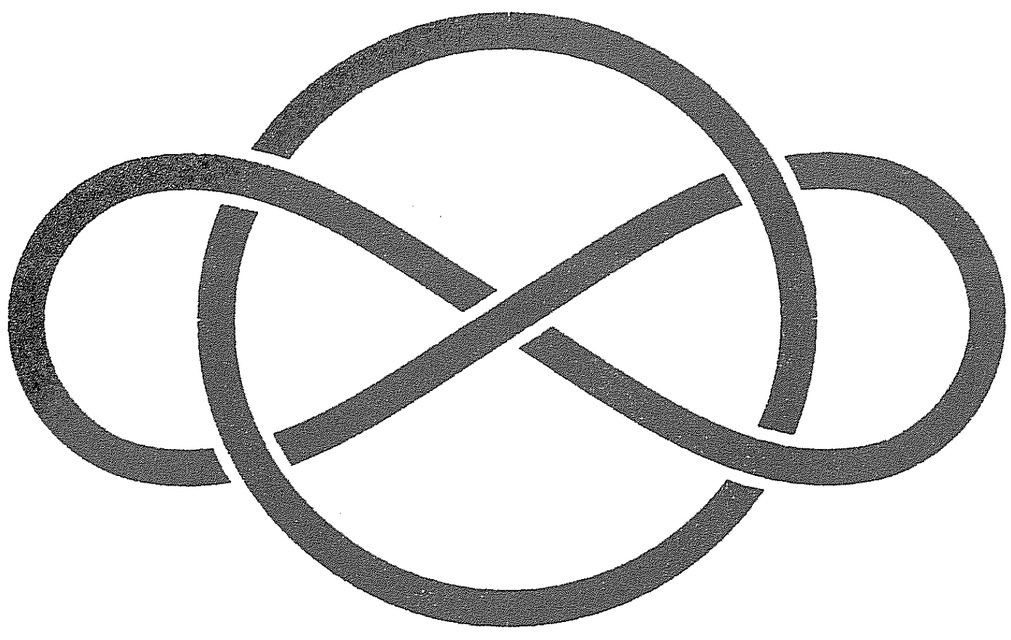
V zadnjem desetletju tega tisočletja smo bili priča mnogim spremembam na političnem zemljevidu Evrope. Leta 1991 je na MMO na Švedskem prvič sodelovala ekipa (združene) Nemčije – dobrim tekmovalcem iz Nemčije je tako sedaj še teže priti v olimpijsko ekipo. Po drugi strani pa je z razpadom Jugoslavije, Sovjetske zveze in Češkoslovaške nastalo precej novih držav s samostojnimi ekipami. Za tekmovalce iz na novo nastalih držav se je pot do MMO bistveno poenostavila: poleg manjše konkurence se sedaj ni treba več boriti proti udeležencem iz „bolj enakopravnih" republik (npr. izbor jugoslovanske ekipe je bil v letih pred razpadom skupne države nacionalno obarvan). Čeprav je Slovenija razglasila samostojnost že leta 1991, na MMO leta 1992 ni sodelovala s svojo ekipo. Tega leta je bila namreč olimpiada v Moskvi, Rusija pa je k sodelovanju povabila le Jugoslavijo. Da so bili v Sovjetski zvezi nekateri „bolj enakopravni" od drugih, kaže tudi to, da so lahko tega leta ruski tekmovalci sodelovali na MMO bodisi kot člani ekipe Rusije ali pa ekipe Skupnosti neodvisnih držav. Navkljub velikim političnim preprekam je imela Slovenija tudi na MMO v Moskvi svojega tekmovalca – pa čeprav kot člana švicarske ekipe.

Leta 1993 je bila MMO v Turčiji. Zaradi mnogih na novo nastalih držav je tega leta število udeleženk skokovito naraslo: s 56 na 73 – in med njimi lahko prvič najdemo ekipo Slovenije. Naša petčlanska ekipa se je z olimpiade vrnila z dvema bronastima medaljama in eno pohvalo.

Jubilejna 40. MMO je bila leta 1999 spet v Romuniji, v prihodnjih letih pa bodo MMO gostile Južna Koreja, ZDA, Japonska, ... in leta 2006 predvidoma Slovenija.

3. Grafična podoba MMO

Leta 1995 je bila na olimpiadi v Kanadi uradno sprejeta zastava MMO, ki sestoji iz logotipa tedanje olimpiade (Whiteheadov splet oz. prepletajoči se 0 in ∞), obarvanega s petimi barvami, ki predstavljajo posemezne celine.



Slika 2. Logotip mednarodne matematične olimpiade

Vsaka država gostiteljica pripravi logotip olimpiade in morda najzanimivejši doslej je bil leta 1996 v Indiji. Na njem sta upodobljena pav in kača, kot ju najdemo v eni od nalog, zapisani v knjigi *Leelevati* starodavnega indijskega matematika Bhaskaracharya iz 12. stoletja. Zapišimo to nalogo v prostem prevodu.

> *Pav je stal na vrhu stebra, devet laketi visoko. Ob vznožju stebra bila je luknja. Ko je pav na razdalji trikratne višine stebra ugledal kačo brzeti proti luknji, je poletel poševno proti njej. Povej mi hitro, o Leelavati, kje se bosta srečala, vedoč, da hitrosti njuni sta enaki.*

4. Slovenski tekmovalci na MMO

V zgodovinskem pregledu smo omenili le imena prvih treh Slovencev, ki so se udeležili MMO. Sprehodimo se po štirih desetletjih MMO še enkrat in poglejmo uspeh vseh naših tekmovalcev. Oznake Ⓩ, Ⓢ, Ⓑ in Ⓟ po vrsti pomenijo zlato, srebrno oz. bronasto medaljo in pohvalo.

1959 Brašov, Romunija

1960 Sinaia, Romunija

1961 Veszprem, Madžarska

1962 Češke Budejovice, Češkoslovaška

1963 Wrocław, Poljska

Franc Dacar TSŠS Ljubljana Ⓩ
Peter Petek I. gimnazija Ljubljana Ⓢ
Stanko Vrščaj Gimnazija Vič, Ljubljana

1964 Moskva, Sovjetska zveza

Velimir Bole II. gimnazija Ljubljana
Josip Globevnik Gimnazija Vič, Ljubljana
Stanko Vrščaj Gimnazija Vič, Ljubljana Ⓑ

1965 Berlin, NDR

Velimir Bole II. gimnazija Ljubljana Ⓑ

1966 Sofija, Bolgarija

Tomaž Pisanski II. gimnazija Ljubljana

1967 Cetinje, Jugoslavija

Tomaž Pisanski Gimnazija Ljubljana – Center Ⓑ
Tomaž Slivnik TŠ za elektro stroko, Ljubljana Ⓑ

1968 Moskva, Sovjetska zveza

Peter Legiša II. gimnazija Ljubljana
Tomo Žitko II. gimnazija Ljubljana Ⓑ

1969 Bukarešta, Romunija

1970 Keszthely, Madžarska

1971 Žilina, Češkoslovaška

Janez Cerar Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Karel Markelj Gimnazija M. Zidanška, Maribor

1972 Toruń, Poljska

Boris Lavrič Gimnazija Kranj Ⓑ

1973 Moskva, Sovjetska zveza

Boris Lavrič Gimnazija Kranj Ⓑ

1974 Erfurt, NDR

Darko Šifrer Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

1975 Burgas, Bolgarija

Franci Forstnerič V. gimnazija Ljubljana

1976 Lienz, Avstrija

Gorazd Cvetič Gimnazija M. Zidanška, Maribor
Tamar Čefarin Gimnazija Novo mesto

1977 Beograd, Jugoslavija

Gorazd Cvetič Gimnazija M. Zidanška, Maribor Ⓢ
Matjaž Vidmar Gimnazija Nova Gorica Ⓑ

1978 Bukarešta, Romunija

1979 London, Velika Britanija
Leon Matoh Gimnazija Novo mesto

1981 Washington, ZDA

1982 Budimpešta, Madžarska
Igor Kukavica SNŠ Ljubljana

1983 Pariz, Francija
Roman Drnovšek SNŠ Ljubljana Ⓑ

1984 Praga, Češkoslovaška
Roman Drnovšek SNŠ Ljubljana Ⓑ
Uroš Seljak NSC Nova Gorica

1985 Joutsa, Finska
Roman Drnovšek SNŠ Ljubljana Ⓑ

1986 Varšava, Poljska
Jože Fabčič STNŠ Postojna Ⓑ

1987 Havana, Kuba

1988 Canberra, Avstralija
Tomaž Slivnik SNŠ Ljubljana Ⓑ

1989 Braunschweig, Nemčija
Jaka Cimprič SNŠ Ljubljana Ⓟ

1990 Peking, Kitajska

1991 Sigtuna, Švedska
Tomaž Cedilnik Gimnazija Bežigrad, Ljubljana Ⓑ

1992 Moskva, Rusija
Tomaž Cedilnik Gimnazija Bežigrad, Ljubljana

1993 Istanbul, Turčija
Petra Ipavec Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Iztok Kavkler STŠ Celje – gimnazija Lava
Marko Krajnc Druga gimnazija Maribor Ⓑ
Mitja Mastnak STŠ Celje – gimnazija Lava Ⓑ
Andrej Srakar Gimnazija Bežigrad, Ljubljana Ⓟ

1994 Hongkong
Jernej Barbič Gimnazija Tolmin Ⓟ
Iztok Kavkler STŠ Celje – gimnazija Lava Ⓟ
Blaž Mavčič Gimnazija Bežigrad, Ljubljana
Primož Moravec Gimnazija Novo mesto Ⓟ
Helena Šmigoc STŠ Celje – gimnazija Lava

1995 Toronto, Kanada

Jernej Barbič	Gimnazija Tolmin	Ⓟ
Gorazd Brumen	Gimnazija Bežigrad, Ljubljana	Ⓟ
Polona Grešak	Gimnazija in ESŠ, Trbovlje	Ⓟ
Tadej Novak	SŠ Rudolfa Maistra, Kamnik	
Mitja Pirc	Gimnazija in ESŠ, Brežice	

1996 Bombay, Indija

Polona Grešak	Gimnazija in ESŠ, Trbovlje	
Igor Klep	ŠC – gimnazija Ptuj	Ⓑ
Matjaž Konvalinka	Gimnazija Bežigrad, Ljubljana	Ⓑ
Tadej Starčič	Gimnazija Bežigrad, Ljubljana	
Andrej Zorko	Gimnazija in ESŠ, Brežice	
Sašo Živanovič	ŠC Celje – gimnazija Lava	

1997 Mar del Plata, Argentina

Matjaž Konvalinka	Gimnazija Bežigrad, Ljubljana	Ⓑ
Matija Mazi	Gimnazija Bežigrad, Ljubljana	
Martin Milanič	Gimnazija Koper	Ⓟ
Tadej Starčič	Gimnazija Bežigrad, Ljubljana	Ⓟ
Matjaž Titan	Gimnazija Murska Sobota	Ⓑ
Andrej Vodopivec	Prva gimnazija v Celju	

1998 Taipei, Tajvan

Dušan Jan	Gimnazija Tolmin	
Jure Kališnik	ŠC Celje – gimnazija Lava	
Martin Milanič	Gimnazija Koper	
Ajda Skarlovnik	Gimnazija Bežigrad, Ljubljana	Ⓟ
Tadej Starčič	Gimnazija Bežigrad, Ljubljana	Ⓑ
Matjaž Titan	Gimnazija Murska Sobota	Ⓟ

1999 Bukarešta, Romunija

Dušan Jan	Gimnazija Tolmin	
Jure Kališnik	ŠC Celje – gimnazija Lava	
Irena Majcen	Gimnazija Bežigrad, Ljubljana	Ⓑ
Mojca Miklavec	Škofijska kl. gimnazija, Ljubljana	
Ajda Skarlovnik	Gimnazija Bežigrad, Ljubljana	
Matjaž Urlep	ŠC Celje – gimnazija Lava	Ⓑ

Naši tekmovalci so torej na MMO doslej prejeli skupaj 1 zlato, 2 srebrni in 23 bronastih medalj ter 12 pohval, od tega kot člani ekipe Slovenije 9 bronastih medalj in 11 pohval.

VESTI

Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1998*

Pedagoška fakulteta – Maribor

Univerzitetni študij

Matematika

1.	Antolič Mateja	Wienerjev indeks na simetričnih grafih
2.	Benkovič Dominik	Polenostavni moduli in kolobarji ter Jacobsonov radikal
3.	Brantuša Vojko	Kontinuumi
4.	Dukarić Leskovar Vesna	Konformne preslikave
5.	Eremita Daniel	Kolobarji kvocientov
6.	Jeromel Simona	Posplošeni integrali
7.	Kociper Simona	Kompaktni operatorji
8.	Kosi Ulbl Irena	Uvodna poglavja teorije nekomutativnih kolobarjev
9.	Lipovec Alenka	Hedetniemijeva domena
10.	Peterin Iztok	Primitivni kolobarji
11.	Pulko Lidija	BIP – načrti
12.	Rajh Sonja	Matroidi
13.	Reberc Melita	Barvanje povezav grafov
14.	Repolusk Samo	Enakomerni prostori
15.	Rudolf Manja	Perturbacija krepko zveznih polgrup operatorjev
16.	Smolar Katja	Selbergov dokaz izreka o porazdelitvi praštevil
17.	Stergar Monika	Različni dokazi problemov s trikotniki
18.	Šparl Petra	Končno razsežne algebre
19.	Tomšič Mojca	Konstrukcija (n, k, s, ks) turnirja
20.	Vogrinec Jelka	Pellova enačba

Fizika

1.	Fajmut Aleš	Oscilacije v fiziki, biologiji in kemiji

Matematika-fizika

81.	Emeršič Ivan	Stieltjesov integral
82.	Erveš Rija	Dodeljevanje radijskih frekvenc
83.	Jeričević Andrej	Končna polja
84.	Močivnik Branko	Neskončni produkti
85.	Omerzel Martina	Izolirane singularnosti holomorfnih funkcij in posplošeni integrali
86.	Smole Aleš	Izbrane geometrijske konstrukcije s programom Cabri geometry II
87.	Uranjek Otmar	Struktura proteinov : predavanje na internetu

Kemija – matematika

4.	Orešek Natalija	Rešitev Dirichletovega problema v ravnini
5.	Rudolf Elena	Program Thales in njegova uporaba v geometriji

* Seznam diplomantov iz leta 1997 je bil objavljen v Obzorniku mat. fiz. **45** (1998) 6.

Matematika – proizvodno tehnična vzgoja

8. Kosi Tanja — Linearni sistemi navadnih diferencialnih enačb
9. Lukanc Špela — Vloga, položaj in pomen tehniško-tehnoloških predmetov v programu strojni tehnik

Računalništvo z matematiko

1. Berghaus Anita — Uporaba „Geoneta" v stereometriji
2. Gradišnik Maja — Nekaj NP-polnih problemov
3. Sternad Simona — Multimedija v izobraževanju : analiza multimedijskih gradnikov znotraj programskih jezikov WinLogo, Visual Basic, Delphi in Visual Cafe
4. Vlasak Tjašo — Obdelava statističnih podatkov s programskim paketom SPSS

Doktorati – fizika

1. Marhl Marko — Matematično modeliranje oscilirajoče izmenjave kalcija med citoplazmo in celičnimi organelami

Pedagoška fakulteta – Ljubljana

Univerzitetni študij

Matematika-fizika

114. Jan Mateja — Zgodovina determinant
115. Cvirn Mojca — Geometrija na psevdosferi
116. Grabner Albina — Kitajski izrek o ostankih
117. Smajić Aleš — Legendrovi polinomi
118. Erčulj Tatjana — Prikaz dvolomnosti tekočih kristalov
119. Černilec Boris — Tales iz Mileta
120. Kapš Mateja — Aksiomatizacija Łukasiewiczeve trivrednostne logike
121. Rožič Mojca — Zgodovina reševanja kvadratnih in kubičnih enačb
122. Podjavoršek Natalija — Avtomorfne funkcije
123. Kuhar Alenka — Tekmovalne naloge iz geometrije za srednjo šolo
124. Štefanič Andreja — Zgodovina reševanja linearnih enačb
125. Cimperman Ana — Pafnucij Lvovič Čebišev
126. Bizjak Mojca — Podoide krivulj drugega reda
127. Bartolj Veronika — Pouk fizike v osnovni šoli do prve svetovne vojne
128. Usenik Iztok — Uporaba eliptičnih integralov
129. Klun Nataša — Pogled na modalno logiko
130. Žigon Elizabeta — Geometrijska topologija v ravnini
131. Vončina Valentina — Zgodovina sferne trigonometrije
132. Ponikvar Zalar Albina — Sferna geometrija z uporabo v geodeziji
133. Zadel Nina — Pierre Simon Laplace
134. Harej Suzana — Cassini in njegova doba

Matematika-tehnika

23. Indihar Anica — Fraktali v razredu
24. Lajnšček Elizabeta — Iteracija v šoli
25. Balantič Tina — Ploščina v hiperbolični geometriji
26. Korošec Lucija — Vpliv sodelovalnih iger na znanje matematike manj uspešnih učencev
27. Šmuc Alenka — Regularni, po povezavah tranzitivni in po točkah netranzitivni grafi
28. Žumer Tadeja — Biljard na elipsi

29. Žontar Mateja — Izrek o popolnosti predikatnega računa
30. Prinčič Davis — Kaj nudi internet učitelju naravoslovja
31. Lazović Dobrila — Neskončne vrste pri Bernoullijih
32. Pogačar Tina — Poltranzitivni grafi
33. Zupan Simon — Kubični s-tranzitivni grafi
34. Hudoklin Danijel Mike — Sodobni kompozitni materiali
35. Ložar Stopar Milka — Model šolskega teleskopa in izdelava pri tehničnem pouku
36. Velak Rebeka — Nožiščne krivulje
37. Končan Tomaž — Uporaba teorije grafov v elektrotehniki in komunikacijskih omrežjih
38. Blatnik Melita — Felix Hausdorff
39. Jerala Alenka — Zgodovina Pitagorovega izreka
40. Trobentar Mojca — Naravne omejitve in možnosti pri izrabi raznih virov energije
41. Bavcon Mija — Toplotna izraba energije sonca
42. Urukalo Jožica — Eliptična funkcija theta
43. Višnar Bogdan — Zasnova „on-line" meritev v energetskem laboratoriju
44. Pavasović Ljubinka — Neformalni postopki reševanja enačb
45. Trojer Tadeja — Diofant in njegov vpliv

Kemija-fizika

16. Močnik Urška — Analiza rezultatov maturitetnega preizkusa iz splošne in anorganske kemije

Fizika-tehnika

17. Žigon Sašo — Veter kot vir energije
18. Ošlaj Štefan — Spektroskopija pri pouku fizike
19. Magajne Anica — Pouk o alternativnih virih v osnovni šoli
20. Derstvenšek Helena — O okolju v zasavskih šolah

Fakulteta za matematiko in fiziko

Višješolski študij

Matematika – uporabna smer

303. Mervič Nataša — Lastne vrednosti razpršene simetrične matrike
304. Brecl Kornelija — Iskanje polinoma najboljše aproksimacije z linearnim programom
305. Kopmajer Miran — Algoritem za računanje najboljše racionalne aproksimacije
306. Miko Aleš — Fazni portreti nelinearnih diferencialnih enačb
307. Mevlja Nataša — Hitra Givensonova metoda
308. Zdovc Metod — Računanje lastnih vrednosti simetričnih matrik z metodo deli in vladaj
309. Cigüt Natalija — Gibbsonov fenomen
310. Šterban Gorazd — Risanje nad splošnimi območji v jeziku Mathematica
311. Gumzej Petra — Metode najmanjših kvadratov in ortogonalni polinomi
312. Nikić Boro — Lastne vrednosti hermitskih matrik
313. Šalamun Andrej — Prenosi pri seštevanju kot markovska veriga
314. Duščak Katarina — Robne vrednosti komformnih ekvivalenc enostavno povezanih območij
315. Golmajer Terziev Alenka — Matrike, ki slikajo stožce v stožce
316. Zalar Primož — Merjeni integral

317.	Žutić Matija	Numerično reševanje hiperbolične parcialne diferencialne enačbe
318.	Es Klavdij	Programski jezik JavaScript
319.	Vidmar Matija	Simetrične merilne funkcije
320.	Žakelj Branko	Bézierove krivulje
321.	Jaklič Boštjan	TEX, METAFONT in PostScript pri oblikovanju revije Presek

Fizika

237. Troha Boštjan
238. Kolar Andrej

Univerzitetni študij

Matematika – pedagoška smer

504.	Ivanec Dezider	Razdalja med afinimi prostori
505.	Šatej Darja	Končne grupe izometrij v prostoru
506.	Kračun Lucijana	Posebne točke v trikotniku
507.	Kocbek Kristijan	Izometrije na Hardyjevih prostorih
507.	Žvanut Breda	Nekatere osnove reševanja algebraičnih enačb
509.	Basej Martina	Mrežno tlakovanje v $\mathbb{R}^n$ in faktorizacija Abelovih grup
510.	Bogolin Špela	Tlakovanje s poliominami: Conwayjeva metoda
511.	Močnik Anita	Determinantne reprezentacije gladkih projektivnih krivulj
512.	Zupan Eva	Kristalografija
513.	Bržan Irena	Včrtovanje večkotnikov v ravninske krivulje
514.	Fajfar Jasna	Primeri numeričnega računanja v srednji šoli
515.	Ivanuša Blaž	Kompleksna števila in elementarna geometrija
516.	Prezelj Melita	Geometrijska tomografija
517.	Stepančič Tjaša	Distribucije
518.	Šircelj Karin	Geometrija inverzij

Matematika – uporabna smer

536.	Roblek Dominik	Baze podatkov s poudarkom na relacijskem modelu
537.	Virc Romana	Teorija števil
538.	Sitar Iztok	Programiranje gradnikov v razvojnem orodju Delphi
539.	Sotlar Matej	Lovászova funkcija $\vartheta(G, w)$ na grafih
540.	Sušnik Matej	Rešljivost in enoličnost nelinearnega robnega problema
541.	Žibert Janez	Interpolacija z G^2 zveznimi zlepki
542.	Brzin Luka Boštjan	Geometrijsko reševanje omejitev
543.	Koman Andrej	Igre z neničelno vsoto in kooperativne igre med N igralci
544.	Justin Mateja	Vrednotenje opcij z Esscherjevo transformacijo
545.	Bartol Ksenija	Učinkovito poenostavljanje prepletanj mostov
546.	Brvar Darko	VRML – jezik za opis trirazsežnih svetov
547.	Brlec Uršula	Interpolacija, ki ohranja obliko
548.	Zevnik Robert	Jezik SQL z zgledi v narečju Interbase
549.	Kariž Saša	Hamiltonovi cikli v ravninskih grafih
550.	Drolka Vlasta	Šibko monotone matrike
551.	Koren Urška	Weierstrassova reprezentacija minimalnih ploskev
552.	Boben Marko	Simulacija invariantnih porazdelitev markovskih verig
553.	Benko Maja	Vodeni diskretni linearni stohastični sistemi
554.	Povh Janez	Teorija zavarovalniških procesov

555. Luževič Peter — Stohastično polnjeneje košev
556. Vilfan Aleš — Komponente za delo z internetom v okolju Delphi 3.0
557. Lipovec Dejan — Prenos zbirke Vega iz sistema MATHEMATICA v sistem MuPAD
558. Tomažin Aleš — Metode ponovnega vzorčenja
559. Horvat Vinko — Littlewood-Richardsonovo pravilo

Matematika – teoretična smer

50. Mastnak Mitja — Polenostavnost križnega produkta
51. Veren Suzana — Izometrije delno urejenih grup
52. Škulj Damjan — Približne izometrije na Banachovih prostorih
53. Vuk Martin — Integrabilni sistemi z zrcalno simetrijo
54. Močnik Anita — Determinantne reprezentacije gladkih projektivnih krivulj
55. Dragičević Oliver — Analitičnost na rotacijsko invariantnih družinah krivulj

Matematika – smer računalništvo z matematiko

7. Galjot Marija — Računanje srednješolskih matematičnih nalog z računalnikom

Fizika – pedagoška smer

142. Rudolf Dejan — Trki med kotaljenjem
143. Kidrič Franc — Friderickszov prehod v nematskih tekočih kristalih

Fizika

712. Ećimović Timotej — Simulacija rezalnega procesa z molekularno dinamiko
713. Muršec Marjan — Določanje specifične površine cementa z jedrsko magnetno resonanco
714. Kampuš Andrej — Orientacijska relaksacija in snovni tokovi v ograjenih tekočih kristalih
715. Bohinc Uroš — Toplotni vodnik za atomsko spektroskopijo
716. Kugler Goran — Določitev koeficienta toplotne prestopnosti z inverzno analizo
717. Jelovšek Damjan — Določitev predoblike pri plastičnem preoblikovanju
718. Urbič Tomaž — Stanja hidratiranega elektrona 1
719. Musil Matjaž — Določitev koeficienta trenja z inverzno metodo
720. Zupan Jure — Prispevki resonanc v neleptonskih šibkih razpadih D mezonov v dva psevdoskalarna mezona
721. Svenšek Daniel — Elastična nestabilnost pri neidealnih polimerih
722. Cuzak Gregor — Gostota cik-cak defektov v feroelektrični tekoče kristalni celici: vpliv neravne površine
723. Gril Robert — Tunelska mikroskopija defektov na površinah kristalov dihalogenidov prehodnih kovin
724. Fric Jakob — Mikroskop na električno silo
725. Verč Gregor — Določitev parametrov plazme v napravi za ionsko prekrivanje
726. Razpet Alenka — Merjenje frekvence vrtenja fosfolipoidnih mehurčkov v hitrostnem gradientu
727. Ročak Vesna — Kotna odvisnost korelacijskih sil med molekulami DNA
728. Praprotnik Matej — Simulacija molekulske dinamike z uporabo nove simplektične metode z dolgim iteracijskim korakom
729. Conradi Marjetka — Študij feroelektričnega tekočega kristala v zunanjem električnem polju
730. Vraničar Marko — Semiklasične aproksimacije in efekti tuneliranja

731. Torkar Martina — Študij dinamike vodikovih jeder v 2-nitrobenzojski kislini z dvojno resonanco
732. Šon Manica — Numerična obdelava modela za transport liposomov v kožo na osnovi EPR meritev
733. Sušnik Tomaž — Račun faznih prehodov pri velikih tlakih v sistemih alkalijskih halidov
734. Lengar Igor — Razvoj laserja z notranjim podvajanjem frekvence
735. Pavlin Mojca — Modeliranje transporta svetlobe v bioloških tkivih
736. Bregar Vladimir Boštjan — Optodinamsko določanje ultrazvočne hitrosti pri strnjevanju polimera
737. Markež Tilen — Hallov pojav na lestvi močno koreliranih elektronov
738. Tomšič Miha — Preslikave z uklonsko lečo
739. Gornik Bojan — Poincaréjeva grupa in enačbe gibanja za proste delce
740. Dolenc Sašo — Dvojna ionizacija notranjih atomskih lupin pri trkih z elektroni
741. Pliberšek Samo — Vpliv močnih korelacij na transport elektronov skozi kvantno piko
742. Kotar Jurij — Dinamično merjenje razdalj pri gravitacijskem poskusu
743. Puc Miha — Dominik Groba določitev lastnosti kataklizmičnih spremenljivk iz spektroskopskih opazovanj
744. Prosen Tatjana — Vpliv vodnega spreja na kontakno ablacijo trdnih zobnih tkiv z laserjem Er:YAG
745. Rojc Edi — Merilni sistemi z zunanjim protonskim žarkom

Meteorologija

66. Zgonc Anton — Časovna ekstrapolacija radarskih odbojev iz ozračja
67. Koželj Metod — Uporaba prognoziranih polj potencialne vrtinčnost za izboljšanje napovedovanja intenzivnih padavin
68. Sluga Gregor — Prostorske porazdelitve akumulacije snežnih padavin vzdolž grebena spodnjih bohinjskih gora v zimi 1997–1998
69. Iršič Mateja — Vzroki za močne padavine

Podiplomski študij

Matematika – izobraževalna smer

18. Rojko Cvetka — Delno urejene polgrupe in delno urejeni polkolobarji

Matematika – raziskovalna smer

87. Prezelj Jasna — Vložitve Steinovih prostorov v afine prostore minimalne dimenzije
88. Raič Martin — Chen-Steinova metoda
89. Vavpetič Aleš — Homotopska teorija Liejevih grup
90. Potočnik Primož — Nekaj klasičnih rezultatov iz teorije permutacijskih grup
91. Škrekovski Riste — Pretoki in pokritja grafov
92. Repar Miroslav — Algoritem potiskanja predtoka in njegova uporaba
93. Kuzma Bojan — Sled in determinanta v Banachovih prostorih
94. Đukanović Igor — Simpleksni homotopski algoritmi
95. Tuljak Danijela — Razširjanje in posredovanje informacij v omrežjih

Mehanika – interdisciplinarna smer

7. Blagotinšek Drago — Akvaplaning s $k - \varepsilon$ modelom

Fizika

176. Bobnar Vid — Dielektrične lastnosti PLZT-keramike

177. Šlibar Matjaž — Stabilnost binarnih tekočih zmesi v modelu togih krogel
178. Kramberger Gregor — Karakterizacija analognih bralnih sistemov za silicijeve mikropasovne detektorje v spektrometru ATLAS
179. Bohinc Klemen — Simulacija delovanja protonskega polarimetra v elektronskih koincidenčnih eksperimentih

Jedrska tehnika

19. Hauer Irena — Verjetnostni model prekomernega puščanja
20. Maselj Andrej — Animacija analizatorja težkih nezgod za jedrsko elektrarno
21. Ravnikar Igor — Prenos rezultatov s pomanjšanega eksperimenta na jedrsko elektrarno
22. Černe Gregor — Modeliranje dvofluidnih tokov s stično površino
23. Horvat Andrej — Modeliranje naravne konvekcije v talini sredice jedrskega reaktorja
24. Božič Matjaž — Izračun aktivnosti in zakasnele toplote goriva NE Krško

Meteorologija

9. Gregorič Gregor — Simulacija nastanka in razvoja konvektivnih celic v ozračju

Doktorati – matematika

53. Škapin-Rugelj Marjeta — Nekatere posplošitve teorije iteracij racionalnih funkcij
54. Pavešić Petar — $\mathcal{F}$-vlaknjenja in njihova klasifikacija

Doktorati – fizika

180. Mandić Igor — Meritev razpadov nevtralnih kaonov z elektroni v končnem stanju
181. Medin Gordana — Measuremets of production of $K^{*0}\overline{K^{*0}}$ and $K^{*+}K^{*-}$ in two-photon interactions at the ARGUS spectrometer
182. Podobnik Boštjan — Femtosekundna dinamika nosilcev naboja v visokotemperaturnih superprevodnikih
183. Škarabot Miha — Fazni prehodi feroelektričnih in antiferoelektričnih tekočih kristalov v omejeni geometriji
184. Vrbančič Kopač Nataša — Študij mikrokonfiniranih tekočih kristalov z jedrsko magnetno resonanco devterija
185. Žitnik Matjaž — Parametrizacija trojnih diferencijalnih sipalnih presekov pri ionizaciji atomov z elektroni
186. Arčon Denis — Študij magnetnih lastnosti organskega feromagneta TDAE-C_{60} z magnetno resonančnimi metodami
187. Ziherl Primož — Kolektivne orientacijske fluktuacije v ograjenih nematskih tekočih kristalih
188. Škvarč Jure — Vpliv mehanskih obremenitev na jedkanje sledi nabitih delcev v polimeru CR-39
189. Vaupotič Nataša — Landau-de Gennesov opis strukture v površinsko stabiliziranih celicah SmC
190. Alenka Mertelj — Dinamika tekočega kristala v silikatnem aerogelu v bližini faznega prehoda v izotropno fazo
191. Arnšek Aleš — Gravitacijska sila na laboratorijskih razdaljah
192. Bajc Jure — Statika in dinamika defektov v ograjenih nematskih tekočekristalnih fazah
193. Padežnik Gomilšek Jana — Večelektronske fotoeksitacije v skupini elementov $4p$

Janez Krušič

OSMO SLOVENSKO SREČANJE O UPORABI FIZIKE

Člani Nacionalnega komiteja za fiziko pri DMFA Slovenije smo lani 21. oktobra v zdravilišču Moravske Toplice uspešno izpeljali 8. slovensko srečanje o uporabi fizike. V Nacionalnem komiteju za fiziko tako sledimo poti, ki smo si jo začrtali na 7. srečanju o uporabi fizike v Topolšici pred dvema letoma (glej *Obzornik mat. fiz.* **45** (1998) 2, str. 64–65). Srečanje je tokrat prvič potekalo v okviru strokovnih prireditev ob 51. občnem zboru DMFA Slovenije z namenom, da hkrati prikažemo vsa področja dejavnosti društva.

Na tokratnem srečanju se je zbralo trideset fizikov iz slovenske industrije, inštitutov in drugih organizacij. Resnici na ljubo je treba povedati, da smo v organizacijskem odboru pričakovali nekoliko boljšo udeležbo. Toda upoštevati je treba, da je fizikov na štajerskem in prekmurskem koncu razmeroma malo, oddaljenost Moravskih Toplic od Ljubljane in Gorenjske pa je tudi storila svoje. Seveda je bilo tudi fizikov iz industrije letos nekoliko manj. Upajmo, da to ne pomeni nadaljnjega upadanje razvojno-raziskovalnega dela v industriji. V tem smislu je bil naš namen le delno dosežen, namreč pokazati, kakšne so potrebe v industriji in kakšna znanja se ustvarjajo na fakultetah in inštitutih. Vendar pa v organizacijskem odboru menimo, da je tovrstne povezave treba negovati in vztrajno spodbujati.

Udeleženci smo v uvodnem delu poslušali dve vabljeni predavanji dr. Z. Šušteriča iz podjetja Sava v Kranju o fiziki polimerov in dr. J. Pirša z Inštituta J. Stefan o tekočekristalnih preklopnikih. Žal je zaradi zadržanosti predavatelja odpadlo že dogovorjeno predavanje dr. B. Pretnarja z Urada za varstvo industrijske lastnine o pomenu zaščite industrijske lastnine v obdobju, ko se približujemo Evropi.

V nadaljevanju smo udeleženci srečanja predstavili enaindvajset referatov s področij jedrske fizike, fizike trdne snovi, elektronike, optike, akustike in interdisciplinarnih področij. V okviru posterske predstavitve pa si je bilo moč ogledati tudi nekaj zanimivih področij uporabe fizike. Prav vsa predavanja so pokazala, da slovensko znanje v ničemer ne zaostaja za tistim v tujini. To velja za predavatelje z obeh univerz in z inštitutov ter povsem enako tudi za fizike iz industrije, čeprav sem kot predsednik organizacijskega odbora večkrat doživel, da se mi je kakšen od slednjih malce v zadregi opravičeval, češ, veste, saj pri nas v industriji ne delamo nič tako znanstvenega. Pa to ne bo povsem držalo, saj fizikalno znanje, vgrajeno v izdelkih, konkurira na zahtevnih tujih trgih. Kakorkoli, prispevki so bili zanimivi, odmori med predavanji pa prav živahni in praviloma prekratki za izmenjavo vseh pogledov in mnenj.

Odmevi na srečanje, ki smo jih prejeli v organizacijskem odboru, so zelo spodbudni. Večina udeležencev je bila kratkomalo presenečena nad tem, kaj se dogaja v slovenski fiziki. To je morda najbolj izrazito pri fizikih, ki delajo v industriji in pogrešajo povezav z matično fakulteto. Brez pripomb k organizaciji srečanja seveda ni šlo. Jasno se je namreč pokazalo, da bo treba v prihodnje na srečanju zmanjšati število predavanj in predvideti več časa

za neposredne stike med udeleženci in prosto izmenjavo izkušenj. Poleg tega v organizacijskem odboru razmišljamo o razširitvi srečanja v mednarodni okvir, saj smo nekaj zanimanja zanj zaznali tudi zunaj meja naše države.

Ministrstvo za znanost in tehnologijo Republike Slovenije je srečanje letos uvrstilo v seznam znanstvenih sestankov in odobrilo finančno pomoč. Zahvala za uspešno organizacijo srečanja pa gre tudi članom izvršilnega odbora DMFA Slovenije, članom organizacijskega odbora pri Nacionalnem komiteju za fiziko in podjetju Telekom Slovenije, ki sicer gmotno podpira dejavnost komiteja.

Matjaž Babič

NOVE KNJIGE

Milan Miklavčič, Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hongkong 1998, 294 + 10 str.

Knjiga ima 6 poglavij. Prvo opiše standardno teorijo operatorjev v Banachovih prostorih, drugo obravnava linearne operatorje v Hilbertovih prostorih, akretivne operatorje in sektorialne bilinearne forme. Teorijo uporabi za dokaz šibkih rešitev linearnih parcialnih diferencialnih enačb s konstantnimi koeficienti, za študij Sturm-Liouvillovega problema, za dokaz kompletnosti Hermitovih polinomov in Besselovih funkcij, za navadne diferencialne enačbe obdela tudi metodo končnih elementov. Tretje poglavje vpelje prostore Soboljeva, obdela pojem šibkega odvoda, vpelje distribucije, študira eliptične parcialne diferencialne enačbe in regularnost njihovih šibkih rešitev. V četrtem poglavju razvije teorijo C_0 semigrup in jo uporabi za dokaz rešitev hiperboličnih in paraboličnih parcialnih diferencialnih enačb. Peto poglavje študira šibko nelinearne hiperbolične parcialne diferencialne enačbe, šesto pa semilinearne parabolične diferencialne enačbe. Pri tem izpelje Galerkinove približke k rešitvam hiperboličnih in paraboličnih parcialnih diferencialnih enačb. Pri vseh poglavjih avtor teorijo ilustrira z netrivialnimi primeri, največ iz fizike; vsakemu poglavju so dodane naloge.

Knjiga obdela parcialne diferencialne enačbe na danes že standarden način. Smiselno bi bilo parcialne diferencialne enačbe predavati za študente matematike po tej knjigi, vendar pri dveh urah predavanj na teden to ne bi bilo mogoče. Primerna bi bila tudi za kurz v okviru tretjestopenjskega študija.

V tekstu so vsi izreki vestno dokazani. Razlaga je vzorna, zato je mogoče knjigo priporočiti tudi za samostojen študij. Med podobnimi knjigami, v Matematični knjižnici jih je gotovo več kot 10, nobene ne bi mogel bolj priporočiti kot te.

Anton Suhadolc

VABILO

Matematični kolokviji

so na sporedu praviloma ob četrtkih od 18:15 do 19:15
v predavalnici M2
Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani
na Jadranski ulici 21/II v Ljubljani.

Spored za leto 2000

13. jan. 2000	ANTON SUHADOLC (Univerza v Ljubljani) *Rihard Zupančič – matematik*
10. feb. 2000	KREŠIMIR VESELIĆ (Fernuniveristät Hagen) *Damped systems and their optimisation*
9. mar. 2000	JOŽE VRABEC (Univerza v Ljubljani) *Kite*
13. apr. 2000	SANDI KLAVŽAR (Univerza v Mariboru) *Izometrije, retrakcije in grafovski produkti*
11. maj 2000	JOSO VUKMAN (Univerza v Mariboru) *Odvajanje in sorodne preslikave na kolobarjih*
8. jun. 2000	TOMAŽ KOŠIR (Univerza v Ljubljani) *Spektralna teorija v več parametrih*
14. sep. 2000	MIRKO PRIMC (Univerza v Zagrebu) *Vertex operators and combinatorial identities*
12. okt. 2000	BORUT ZALAR (Univerza v Mariboru) *Razlike in podobnosti med klasično teorijo C^*-algeber in novo teorijo JB^*-trojk*
9. nov. 2000	VLADIMIR BATAGELJ (Univerza v Ljubljani) *Analiza in prikaz velikih omrežij*
7. dec. 2000	MARKO PETKOVŠEK (Univerza v Ljubljani) *Simbolno računanje*

Matematične kolokvije prireja Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije v sodelovanju z Inštitutom za matematiko, fiziko in mehaniko v Ljubljani, Oddelkom za matematiko in mehaniko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani ter Komisijo za tisk, DMFA – Založništvo.
Kolokvije vodi *Tomaž Pisanski*
Dodatne informacije so na strani: `http://www.ijp.si/DMFA/Kolokviji/`
Pripombe na naslov: `Tomaz.Pisanski@fmf.uni-lj.si`
V Ljubljani, 23. novembra 1999

Letno kazalo
Obzornik za matematiko in fiziko 46 (1999) številke 1–6, str. 1–192

Članki — Articles

„Aproksimativno" aditivne funkcije — "Approximately" additive functions (Peter Šemrl) 1–4
Nenavadni interferenčni poskusi: Interferenca ali pot? — Unusual interference experiments: Interference or path? (Janez Strnad) 5–11
Drugo srečanje iz linearne algebre Bled 1999 — The second meeting in Linear Algebra Bled 1999 (Matjaž Omladič) 33
Večparametrična spektralna teorija — Multiparameter spectral theory (Paul Binding in Tomaž Košir) 42–44
Odrezani momentni problemi: obstoj, enoličnost in lokalizacija nosilca upodobitvenih mer — Truncated moment problems: existence, uniqueness, and localization of the support of representing measures (Raúl E. Curto) 45–50
Pozitivni operatorji — Positive operators (Roman Drnovšek) 51–52
Tranzitivne linearne polgrupe — Transitive linear semigroups (Leo Livshits) 53–56
Končnorazsežni prostori z nedefinitnim skalarnim produktom: raziskovalni problemi — Finite dimensional spaces with indefinite scalar products: research problems (Leiba Rodman) 57–60
Linearne preslikave, ki ohranjajo obrnljivost — Linear maps preserving invertibility (Peter Šemrl) 61–62
Problemi razcepnosti za družine operatorjev — Reducibility problems for operator families (Heydar Radjavi) 63–VII
Grupa urejenostnih avtomorfizmov realne osi — The group of order automorphisms of the real line (Boris Lavrič) 65–74
Izrek o pozivitnosti — Positivstellensatz (Jaka Cimprič) 75–82
Poučevanje fizike in matematika — Mathematics in physics education (Janez Strnad) 83–89
Origami števila — Origami numbers (Alenka Klokočovnik) 90–XII
Eksplicitna parametrizacija geodetk na rotacijskih ploskvah. Sklenjene geodetke na rotacijskem elipsoidu — Explicit parametrization of geodesics on rotational surfaces. Closed geodesics on rotational ellipsoid (Jaka Smrekar) 97–112
Ali sodi obdelava podatkov k pouku matematike? — Does data handling goes with teaching of mathematics? (Zlatan Magajna in Amalija Žakelj) 113–119
Matematično-fizikalne metode v elektrokardiografiji — Mathematical physics in electrocardiography (Rok Hren, Vojko Jazbinšek in Zvonko Trontelj) 120–127
O neki posplošitvi Heronovega obrazca — On a generalization of Heron's formula (Ivan Vidav) 129–135
Mamografsko slikanje s polprevodniškimi detektorji — Mamography with detectors based on semiconductors (Špela Stres) 136–152
O uporabi simbolnega računanja pri pouku matematike — On use of symbol computation in teaching mathematics (Matija Lokar) 153–160
Integrabilni sistem z zrcalno simetrijo — Integrable systems with mirror-symmetry (Martin Vuk) 161–171
Nenavadni interferenčni poskusi: „Kemijski" Youngov poskus — Unusual interference experiments: A chemical analogue of Young's experiment (Janez Strnad) 172–175
Štiri desetletja matematičnih olimpiad — Four decades of the International Mathematical Olympiad (Matjaž Željko) 176–182

Povzetki predavanj – Abstracts

Avram Berman, *Completely positive matrices, graphs with no long odd cycle and graphs with no short odd cycle* 34
Tirthankar Bhattacharyya, *Multiparameter Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions* 34–35
Alexander S. Fainshtein, *Fredholm families of operators generating nilpotent Lie algebras* 35–36
Luzius Grunenfelder and Matjaž Omladič, *Ascent and descent for commuting endomorphisms* 36–37
Don Hadwin, *Completely rank-nonincreasing linear maps* 37
John Holbrook, *Schur norms – computation and application* 37–38
Thomas J. Laffey, *Some new invariants relating to the simultaneous similarity of matrices* 38–39
Raphael Loewy, *Rank preservers on spaces of symmetric matrices* 39–40
Vlastimil Pták, *Strong partial isometries* 40–41
Heydar Radjavi, *The Perron-Frobenius theorem revisited* 41
Jaroslav Zemanek, *A resolvent condition implying power boundedness* 41
Jaroslav Zemanek, *The role of ascent and descent in analysis* 41

Nove knjige — New books

T. W. Körner, The Pleasures of Counting (Peter Legiša) XII
Milan Miklavčič, Applied Functional Analysis and Partial Differential Equations (Anton Suhadolc) 191

Vesti — News

Vabilo k sodelovanju na strokovnem srečanju (Tomaž Pisanski) 4
Ob petdesetletnici Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (Niko Prijatelj) 12–15
Prvih petdeset DMFA (Janez Strnad) 15–21
Ob jubileju društva (Andrej Čadež) 21–23
Poročilo Nacionalnega komiteja za fiziko za obdobje od 1992 do 1998 (Norma Mankoč Borštnik) 24–25
Poročilo o 50. občnem zboru društva (Martina Koman) 26–29
Priznanja učiteljem matematike in fizike v letu 1998 (Martina Koman) 29–31
Jubilejna priznanja ob 50. občnem zboru DMFA (Martina Koman) 31–IV
Vabilo na strokovno ekskurzijo „Sončni mrk 1999" (Mitja Rosina) IV
Novi člani Društva v letu 1998 (Simon Vrečar) 74
Obvestilo (Tomaž Pisanski) 119
Odstop republiške predmetne komisije za matematiko (člani RPK za matematiko) 127–XVI
Podatki o matematičnih konferencah in seminarjih (Peter Legiša) 135
DMFA Slovenije – 51. občni zbor (Tomaž Pisanski) 160
Šesto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Gregor Šega) ..... XIX–XX
Plemljeva hiša (Matjaž Željko) 171
Seznam diplomantov višješolskega, univerzitetnega in podiplomskega študija ter doktorandov iz matematike in fizike v letu 1998 (Janez Krušič) 183–189
Osmo slovensko srečanje o uporabi fizike (Matjaž Babič) 190–191
Matematični kolokviji (Tomaž Pisanski) 192