

SSN 0473-7466

ODPISANO

1999

Letnik 46

5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 1999

letnik 46, številka 5, strani 129–160

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, 1001 Ljubljana, Jadranska c. 19, p.p. 2964, telefonska št. (061) 17-66-553, številka žiro računa 50106-678-47233, devizna nakazila SKB banka d.d. Ljubljana, SWIFT: SKBASI2X, številka računa 429619, Ajdovščina 4, Ljubljana.

Uredniški odbor: Miran Černe (glavni urednik), Boris Lavrič (urednik za matematiko in odgovorni urednik), Martin Čopič (urednik za fiziko), Boštjan Jaklič (tehnični urednik).

Jezikovno pregledal Janez Juvan, računalniško oblikoval Martin Zemljič.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina 3.000 SIT. Naročnina v knjigarnah in za ustanove 6.000 SIT, za študente 1.500 SIT, za tujino 25 EUR. Posamezna številka za člane 600 SIT, stare številke 400 SIT.

Založilo DMFA – založništvo. Tisk: Tiskarna KURIR. Naklada 1500 izvodov.

Revijo sofinancirata Ministrstvo za znanost in tehnologijo ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

© 1999 DMFA Slovenije – 1394 Poštnina plačana na pošti 1102 Ljubljana

VSEBINA — CONTENTS

Članki — Articles

Str.–Page

- O neki posplošitvi Heronovega obrazca — On a generalization of Heron's formula (Ivan Vidav) 129–135
- Mamografsko slikanje s polprevodniškimi detektorji — Mamography with detectors based on semiconductors (Špela Stres) 136–152
- O uporabi simbolnega računanja pri pouku matematike — On use of symbol computation in teaching mathematics (Matija Lokar) 153–160

Vesti — News

- Podatki o matematičnih konferencah in seminarjih (Peter Legiša) 135
- DMFA Slovenije – 51. občni zbor (Tomaž Pisanski) 160
- Šesto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Gregor Šega) III–IV
- Na ovitku:** Rembrandt van Rijn, *Zamišljena žena*, 1657.

O NEKI POSPLOŠITVI HERONOVEGA OBRAZCA

IVAN VIDAV

Math. Obj. Class. (1991): 51M20, 52C25

Članek govori o izreku, ki so ga pred kratkim dokazali Connelly, Sabitov in Walz: Za vsako zaprto orientabilno poliedrsko ploskev P , ki sestoji iz samih trikotnikov, obstaja neka algebraična zveza med prostornino V , ki jo ploskev P omejuje, in njenimi robovi.

ON A GENERALIZATION OF HERON'S FORMULA

The following result of Connelly, Sabitov and Walz is presented: For any closed triangulated polyhedral surface P in three-space, there exists a polynomial equation relating the volume V bounded by the surface P to the lengths of its edges.

Trikotnik je s svojimi stranicami a , b , c natanko določen. Njegovo ploščino p dobimo po znanem Heronovem obrazcu

$$p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

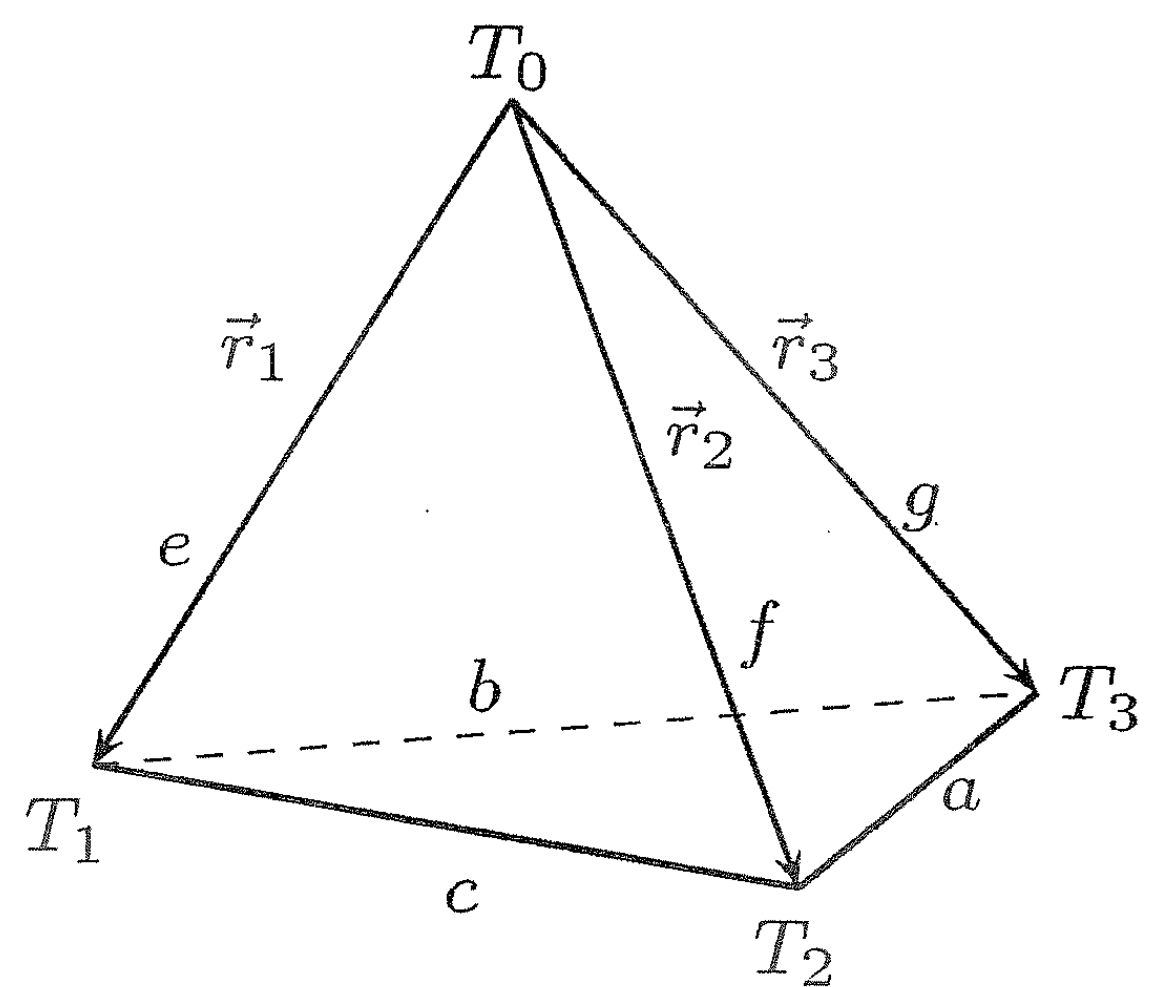
kjer pomeni s polovico obsega, torej $2s = a + b + c$. Kvadrat ploščine p^2 se izraža kot polinom četrte stopnje stranic a , b , c .

Štirikotnik s stranicami ni določen, zato ni formule, ki bi izražala ploščino štirikotnika s stranicami. Isto velja za mnogokotnike z več kakor štirimi stranicami.

Kako je v prostoru? Namesto trikotnika imamo zdaj tetraeder, namesto ploščine prostornino. Prostornina tetraedra je z njegovimi robovi določena. Vzemimo namreč tetraeder z oglišči T_0 , T_1 , T_2 , T_3 . Naj bodo $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ vektorji, ki segajo od oglišča T_0 do oglišč T_1 , T_2 , T_3 (sl. 1). Prostornina V tetraedra je enaka šestini mešanega produkta vektorjev $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, torej

$$6V = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3).$$

(Pravzaprav je prostornina šestina absolutne vrednosti tega produkta, znak je odvisen od orientacije oglišč.) Če upoštevamo, da se mešani produkt izraža s trivrstno determinanto komponent faktorjev – v našem primeru



Slika 1. Tetraeder

komponent vektorjev $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ – dobimo po pravilu za množenje determinant tole formulo

$$36V^2 = \begin{vmatrix} \vec{r}_1\vec{r}_1 & \vec{r}_1\vec{r}_2 & \vec{r}_1\vec{r}_3 \\ \vec{r}_2\vec{r}_1 & \vec{r}_2\vec{r}_2 & \vec{r}_2\vec{r}_3 \\ \vec{r}_3\vec{r}_1 & \vec{r}_3\vec{r}_2 & \vec{r}_3\vec{r}_3 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Skalarni produkti, ki so elementi determinante na desni, se izražajo z robovi tetraedra, to je z a, b, c in e, f, g . Iz slike 1 je namreč razvidno, da je

$$\vec{r}_1\vec{r}_1 = e^2, \quad \vec{r}_2\vec{r}_2 = f^2, \quad \vec{r}_3\vec{r}_3 = g^2 \quad (2^*)$$

in

$$\begin{aligned} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) &= c^2, & (\vec{r}_3 - \vec{r}_1)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) &= b^2, \\ (\vec{r}_3 - \vec{r}_2)(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) &= a^2. \end{aligned} \quad (2^{**})$$

Iz zadnjih treh enakosti izračunamo skalarne produkte $\vec{r}_1\vec{r}_2, \vec{r}_1\vec{r}_3$ in $\vec{r}_2\vec{r}_3$. Z upoštevanjem (2*) dobimo

$$2\vec{r}_1\vec{r}_2 = e^2 + f^2 - c^2, \quad 2\vec{r}_1\vec{r}_3 = e^2 + g^2 - b^2, \quad 2\vec{r}_2\vec{r}_3 = f^2 + g^2 - a^2.$$

Pomnožimo (1) z 8, v desno stran pa vstavimo dobljene izraze za skalarne produkte. Tako pridemo do tele zveze med prostornino in robovi tetraedra

$$288V^2 = \begin{vmatrix} 2e^2 & e^2 + f^2 - c^2 & e^2 + g^2 - b^2 \\ e^2 + f^2 - c^2 & 2f^2 & f^2 + g^2 - a^2 \\ e^2 + g^2 - b^2 & f^2 + g^2 - a^2 & 2g^2 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Če razvijemo determinanto na desni, dobimo polinom šeste stopnje robov $a, b, \dots, g$. Le-ti nastopajo samo v kvadratih. Formula (3) je precej zapletena. Na kratko jo zapišemo takole

$$V^2 = P(a, b, c, e, f, g), \quad (3^*)$$

kjer pomeni $P(a, b, c, e, f, g)$ determinanto na desni v (3), deljeno z 288.

Tristrana prizma z robovi ni določena, zato tudi njena prostornina ni. Stranske ploskve so namreč paralelogrami, ki so pri danih stranicah lahko različne oblike.

Kaj pa polieder na sliki 2? Sestoji iz dveh tetraedrov, ki imata skupno osnovno ploskev, namreč trikotnik s stranicami a, b, c . Stranski robovi zgornjega tetraedra naj bodo e, f, g , spodnjega pa e', f', g' . Če zaznamujemo prostornino zgornjega tetraedra z V_1 , spodnjega z V_2 , dobimo po (3*)

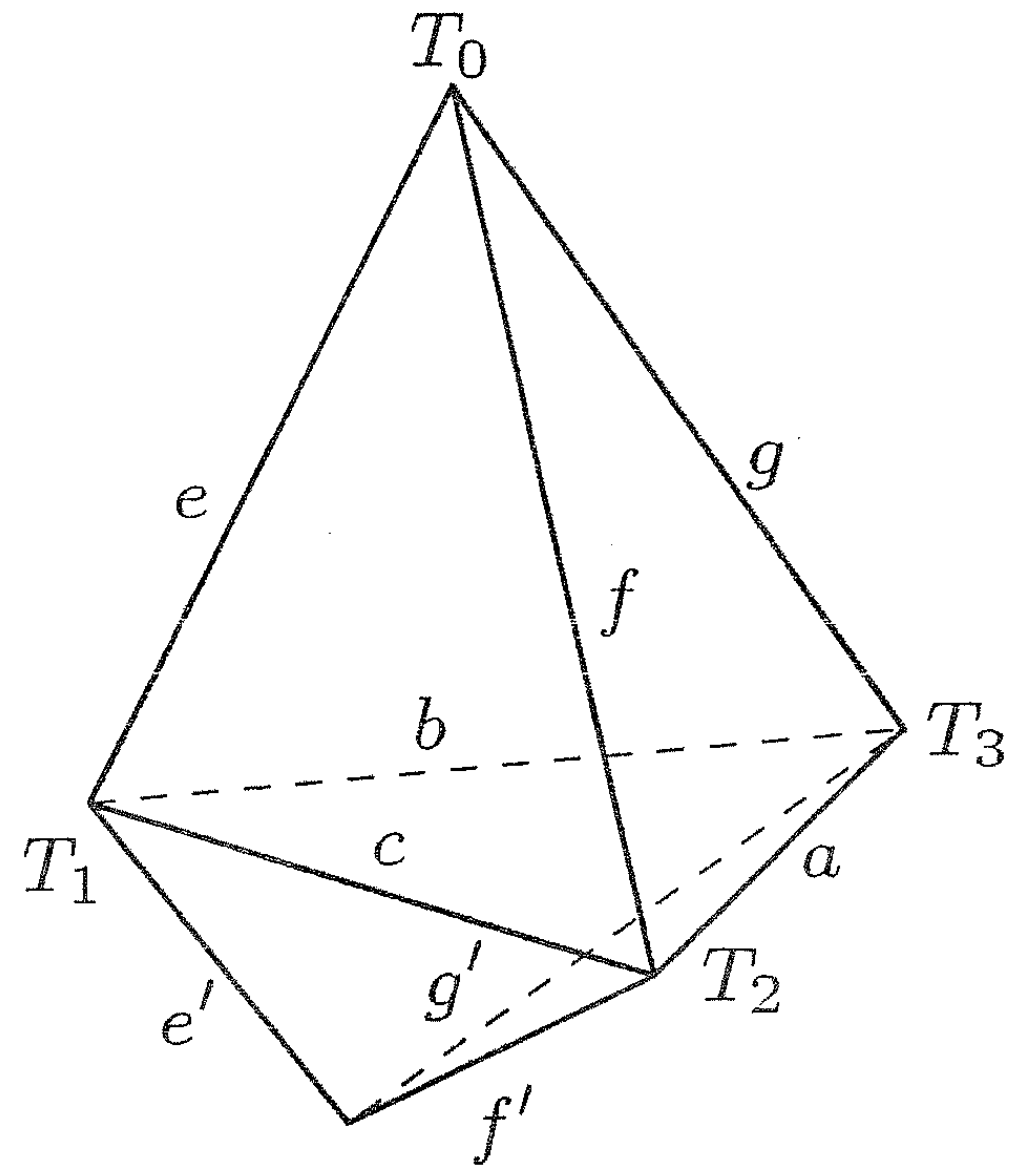
$$V_1^2 = P(a, b, c, e, f, g), \quad V_2^2 = P(a, b, c, e', f', g'). \quad (4)$$

Prostornina V telesa na sl. 2 je vsota $V = V_1 + V_2$. Z dvakratnim kvadriranjem ugotovimo, da ustreza V enačbi četrte stopnje

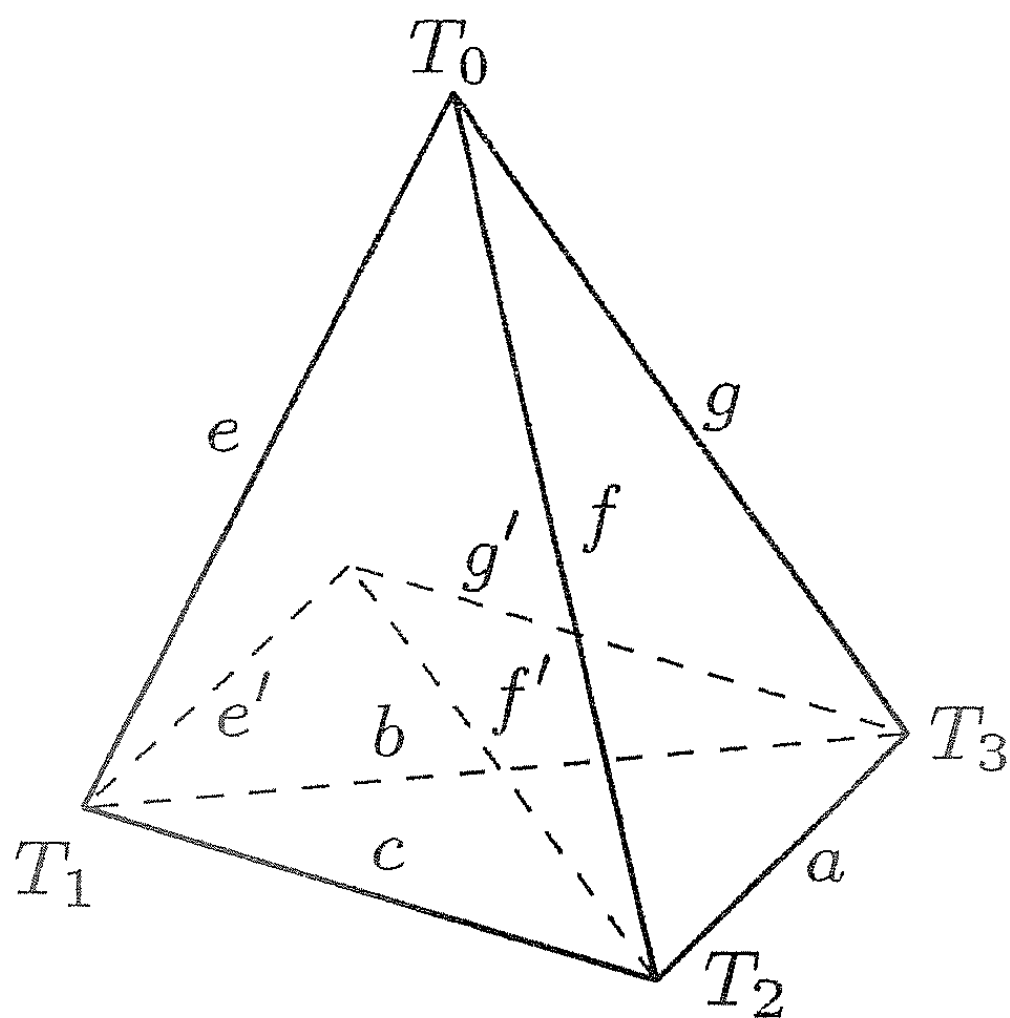
$$V^4 - 2(V_1^2 + V_2^2)V^2 + (V_1^2 - V_2^2)^2 = 0. \quad (5)$$

Obrazca (4) povesta, da sta v tej enačbi za V koeficienta $V_1^2 + V_2^2$ in $(V_1^2 - V_2^2)^2$ polinoma robov a, b , itd. do g' .

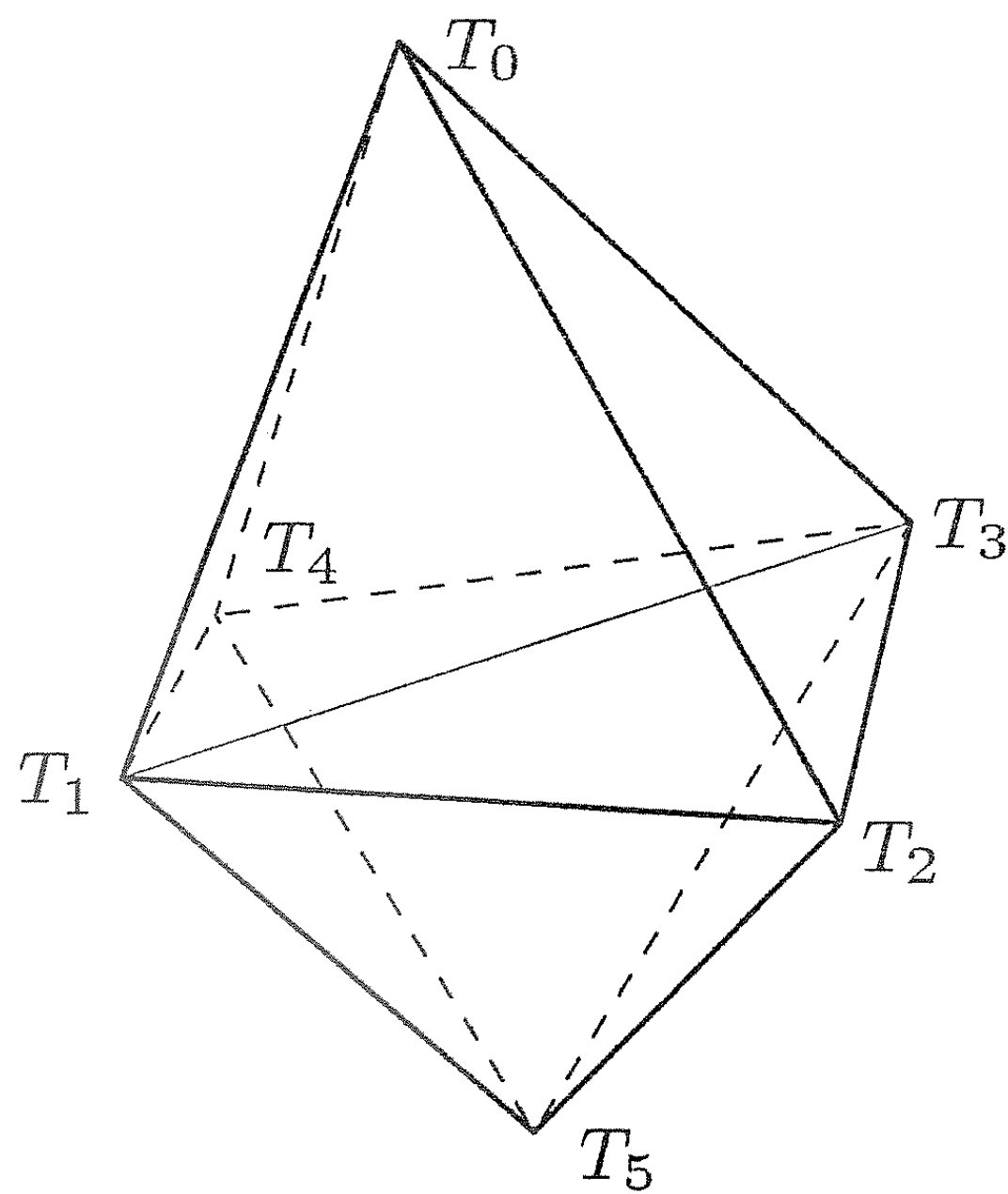
Enačba (5) določa dve rešitvi za V^2 , namreč $V^2 = (V_1 + V_2)^2$ in $V^2 = (V_1 - V_2)^2$. Prva nam da $V = V_1 + V_2$, se pravi prostornino poliedra na sl. 2. Kaj pa pomeni druga rešitev, namreč $V = V_1 - V_2$ (oz. $V = V_2 - V_1$, če je $V_2 > V_1$)? Zrcalimo spodnji tetraeder čez ravnino, na kateri leži trikotnik s stranicami a, b, c . Dobimo polieder na sliki 3, ki ima iste robove kakor prejšnji polieder, njegova prostornina pa je ravno razlika prostornin V_1 in V_2 . Novi polieder ni konveksen.



Slika 2. Dvojna piramida



Slika 3.



Slika 4. Oktaeder

Kako je s prostornino oktaedra (sl. 4), če so znani njegovi robovi? Daljica T_1T_3 razdeli oktaeder na štiri tetraedre, namreč na tetraedre $T_0T_1T_2T_3$, $T_0T_1T_3T_4$, $T_1T_2T_3T_5$ in $T_1T_3T_4T_5$. Prostornina vsakega izmed njih je po formuli (3) določena z ustreznimi robovi. Mednje sodi tudi daljica T_1T_3 , ki ni rob oktaedra. Ali se da morda dolžina te daljice izračunati iz znanih robov?

Oglejmo si kar splošni primer. Vzemimo zaprto orientabilno poliedrsko ploskev P z n oglišči $T_1, T_2, \dots, T_n$. Vse stranske ploskve naj bodo trikotniki. Zaznamujmo z $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ krajevne vektorje do ustreznih oglišč. Ker je ploskev P orientabilna, se dajo vse stranske ploskve skladno orientirati. Taki orientaciji sta dve. Izberimo eno. Prostornino V , ki jo omejuje poliedrska

ploskev P , izračunamo po formuli

$$V = \frac{1}{6} \sum (\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k). \quad (6)$$

Tu so $\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k$ krajevni vektorji do oglišč T_i, T_j, T_k trikotnika, ki je ena izmed stranskih ploskev poliedra, vrstni red oglišč pa mora biti v skladu z orientacijo ploskve P . Vsota na desni se nanaša na vse stranske trikotnike. Prostornina V pa je lahko pozitivna ali negativna; to je odvisno od orientacije. Če zamenjamo orientacijo, spremeni V predznak.

Denimo, da so znani vsi robovi $r_{ij} = \overline{T_i T_j}$ poliedrske ploskve P . Oglišči T_i in T_j sta tu krajišči enega od robov. Če sta $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ in $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ pripadajoča krajevna vektorja, velja enačba

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 = r_{ij}^2. \quad (7)$$

Tako dobimo sistem, ki sestoji iz toliko enačb, kolikor je robov. Za oktaeder, ki ima dvanajst robov, je teh enačb dvanajst. V kolikšni meri določa sistem (7) koordinate oglišč ploskve P ?

Oglejmo si natančneje primer, ko je naša ploskev P topološko sfera. Naj bo vseh robov r , oglišč n in stranskih ploskev p . Ta števila so povezana z Eulerjevo formulo

$$n + p = r + 2. \quad (8)$$

Ker so stranske ploskve sami trikotniki, imajo vsi ti trikotniki skupaj $3p$ stranic. Vsak rob pa je stranica dveh trikotnikov in zato velja zveza $2r = 3p$. Iz (8) zdaj dobimo

$$n = \frac{r}{3} + 2. \quad (9)$$

Iz sistema (7) bi radi izračunali koordinate oglišč. Ker ima vsako izmed n oglišč tri koordinate, je neznank $3n$. Iz (9) dobimo $3n = r + 6$. Sistem (7) pa sestoji iz r enačb, kolikor je robov. Torej je 6 enačb premalo. Vendar moramo upoštevati, da je koordinatni sistem še poljuben. Izberemo ga lahko tako, da je npr. oglišče T_1 izhodišče, oglišče T_2 na osi (x) , T_3 pa na ravnini (xy) . V tem primeru je $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, $x_2 = y_2 = 0$ in $z_3 = 0$. Preostale neznane koordinate, teh je še $3n - 6$, so povezane z r enačbami (7). Ker je $r = 3n - 6$, se število enačb zdaj ujema s številom neznank. Če so enačbe v sistemu (7) neodvisne, se dajo iz njih izračunati neznane koordinate in po formuli (6) prostornina V poliedra. Enačbe (7) so kvadratne, zato – tudi če so neodvisne – nimajo vselej ene same rešitve. Poliedra na slikah 2 in 3 imata enake robove. V tem primeru določajo enačbe (7) vsaj dva neskladna poliedra.

Rešitve sistema (7) se izražajo kot algebraične funkcije desnih strani, se pravi kvadratov robov r_{ij}^2 . Zato je tudi prostornina V algebraična funkcija

robov. Potemtakem zadošča V neki algebraični enačbi, v kateri so koeficienti polinomi robov.

Kar smo pravkar povedali, velja, če so enačbe sistema (7) neodvisne. Ali so lahko med seboj odvisne?

Cauchy je dokazal, da sta dva konveksna poliedra skladna, če so skladne vse ustrezne stranske ploskve in seveda tudi ustrezni robovi. Konveksni poliedri so potemtakem togi. Za nekonveksne poliedre zgornja trditev ne velja. Poliedra na slikah 2 in 3 imata enake robove, torej skladne ustrezne stranske ploskve, ki so trikotniki, toda očitno nista skladna. Prvi je konveksen, drugi ne. Je pa tudi drugi polieder tog: ne moremo zvezno spreminjati kotov med stranskimi trikotniki tako, da bi robovi ostali ves čas enako dolgi.

Kadar so enačbe sistema (7) med seboj neodvisne, imajo lahko več realnih rešitev, ki določajo neskladne poliedre z enakimi robovi. Nekateri izmed njih so konveksni, drugi ne. Vsi pa so togi.

Ali sploh obstaja kak polieder, ki ni tog, se pravi tak, da je mogoče kote med njegovimi stranskimi ploskvami zvezno spreminjati, pri tem pa stranske ploskve ohranjajo obliko in velikost? Taki poliedri obstajajo, imenujemo jih fleksibilni poliedri. Primer je našel Raoul Bricard že pred sto leti. Vendar se njegov fleksibilni oktaeder ni dal realizirati v trirazsežnem evklidskem prostoru, ker nekatere stranske ploskve oktaedra prebadajo druge stranske ploskve. Šele pred dobrimi dvajsetimi leti je konstruiral R. Connelly ([1] in [2]) fleksibilni polieder, pri katerem se stranske ploskve ne prebadajo. Prav preprost zgled pa je odkril K. Steffen. Njegov fleksibilni polieder sestoji iz 9 oglišč, 14 stranskih ploskev, ki so trikotniki, in 21 robov (slika 5). Ni znano, ali obstaja še kak preprostejši fleksibilni polieder.

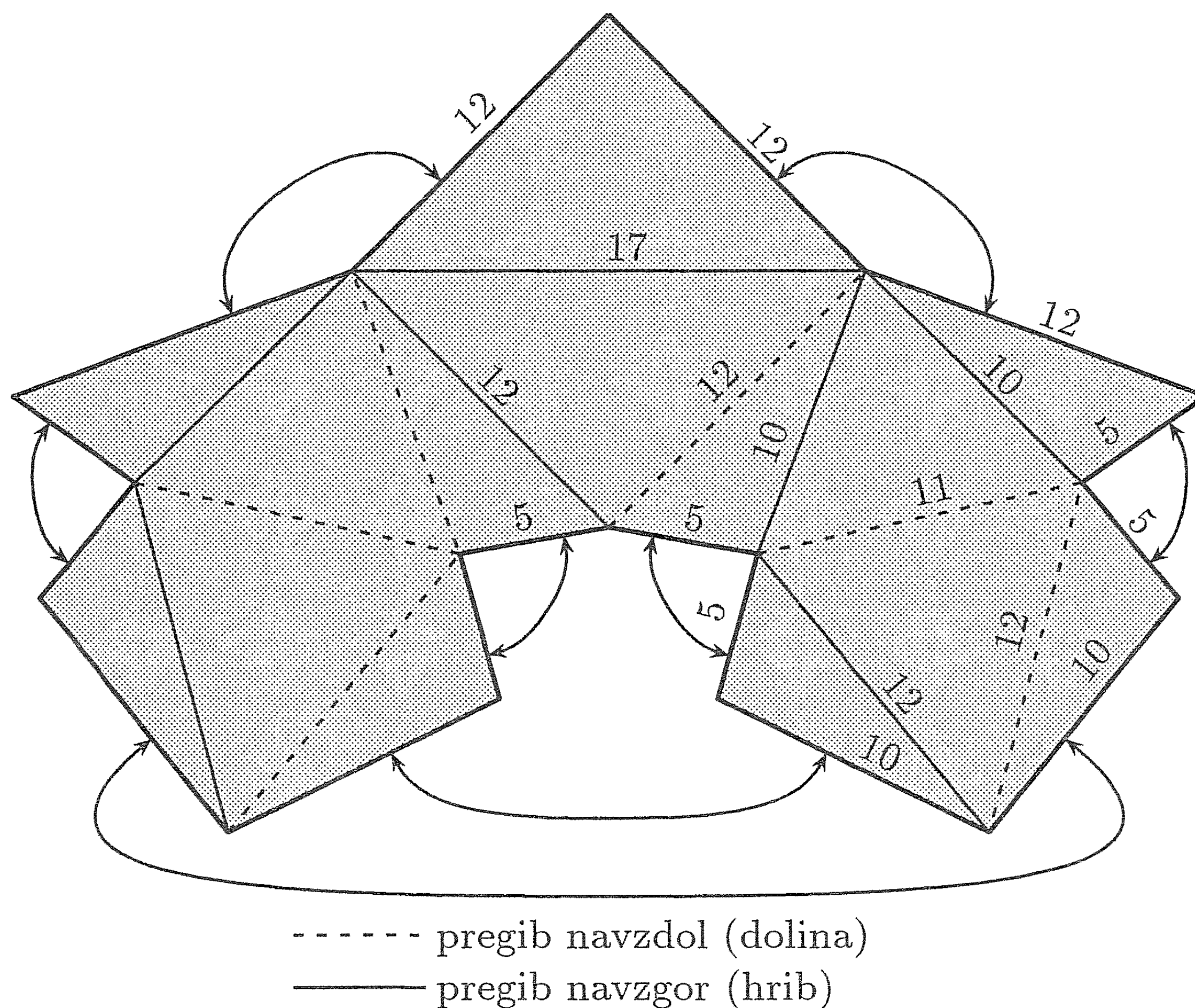
Če zapišemo sistem (7) za kak fleksibilni polieder s trikotniškimi stranskimi ploskvami, so enačbe v tem sistemu med seboj odvisne. Kako je s prostornino? Na prvi pogled bi pričakovali, da prostornina v tem primeru ni določena z robovi. Pri modelih fleksibilnih poliedrov pa so opazili, da gredo nekatere stranske ploskve skupaj, druge narazen, ko polieder prepogibamo. Zato so postavili domnevo, da se prostornina ohranja pri zveznem prepogibanju. To domnevo so imenovali domneva o mehu: ni mogoče konstruirati (kovaškega) meha v obliki poliedra, namreč takega, ki bi pri prepogibanju črpal oziroma puhal zrak.

Domneva o mehu je pravilna. To so pred kratkim ugotovili Connelly, Sabitov in Walz [3]. Dokazali so namreč tale izrek:

Naj bo P poljubna zaprta (orientabilna) poliedrska ploskev, ki jo sestavljajo sami trikotniki, in V naj bo prostornina telesa, ki ga ta ploskev ograja. Potem ustreza V enačbi oblike

$$V^m + A_1 V^{m-1} + \dots + A_m = 0, \quad (10)$$

kjer so koeficienti $A_1, A_2, \dots, A_m$ polinomi kvadratov robov, koeficienti v teh polinomih so racionalna števila.



Slika 5. Mreža Steffenovega fleksibilnega poliedra.

Enačbo (10) imamo lahko za posplošitev Heronovega obrazca za poliedre. Pomeni namreč algebraično zvezo med prostornino in robovi poliedra.

Za tetraeder je enačba (10) enačba (3), ki je kvadratna, za polieder na sliki 2 pa enačba (5), ki je četrte stopnje. Izkaže se, da je za oktaeder enačba (10) šestnajste stopnje.

Enačba (10) ima lahko pri danih robovih več različnih rešitev. Toda pri prepogibanju fleksibilnega poliedra se koordinate oglišč in s tem prostornina zvezno spreminjajo, robovi pa ostanejo ves čas enaki. Isto velja potem za koeficiente v enačbi (10). Prostornina V ustreza isti algebraični enačbi in ne more preskočiti iz ene rešitve v drugo. Potemtakem je V konstanta. Domneva o mehu je dokazana.

Kaj pa, če stranske ploskve niso samo trikotniki? Tiste stranske ploskve, ki niso trikotniki, razrežemo na trikotnike. S tem se je povečalo število robov. Ker ohranjajo stranske ploskve obliko in velikost, če spreminjamo samo kote med njimi, ostajajo pri tem dodani robovi enako dolgi. Zato je tudi v tem primeru prostornina konstantna.

V izpeljavo formule (10) se tukaj ne moremo spuščati. Oglejmo si samo osnovno idejo dokaza.

Naj bo P orientabilna poliedrska ploskev z n oglišči, stranske ploskve naj bodo samo trikotniki. Vzemimo, da so koordinate (x_i, y_i, z_i) oglišč T_i , $i = 1, 2, \dots, n$, neodvisne spremenljivke. Oglejmo si obseg racionalnih funkcij teh koordinat, z racionalnimi koeficienti, torej obseg $O = \mathbb{Q}(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$. Prostornina V poliedra je po formuli (6) polinom koordinat z racionalnimi koeficienti, torej je V element obsega O .

Tudi kvadrati robov $r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2$ so elementi obsega O . Zaznamujmo s K najmanjši kolobar, ki vsebuje vse kvadrate r_{ij}^2 . Ta kolobar sestoji iz vseh polinomov izrazov r_{ij}^2 , ki imajo cela števila za koeficiente. Očitno je K podkolobar obsega O .

Naj bo O poljuben obseg in $K \subset O$ podkolobar v njem. Element $x \in O$ imenujemo cel element nad kolobarjem K , če zadošča kakšni algebraični enačbi oblike

$$x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad (11)$$

kjer so koeficienti $a_1, \dots, a_m$ elementi kolobarja K , čelni koeficient pri najvišji potenci x^m pa je 1. Vsi celi elementi obsega O sestavljajo kolobar (kolobar celih elementov nad kolobarjem K). Ker vsak element $a \in K$ zadošča enačbi $x - a = 0$, ki je poseben primer enačbe (11), je a cel element. Torej kolobar celih elementov vsebuje K kot podkolobar. Če je O obseg kompleksnih števil in K kolobar celih števil, so celi elementi cela algebraična števila.

V našem primeru je O obseg racionalnih funkcij koordinat oglišč poliedra, K pa podkolobar polinomov kvadratov robov r_{ij}^2 s celimi koeficienti. Prostornina V je element obsega O . Connelly, Sabitov in Walz so dokazali, da je $12V$ cel element nad kolobarjem K , torej zadošča neki enačbi oblike (11). Pri tem so koeficienti a_i polinomi kvadratov r_{ij}^2 robov, koeficienti v teh polinomih so cela števila. Očitno ustreza potem V enači oblike (10), kjer so koeficienti A_i polinomi z racionalnimi koeficienti.

Avtorji so pri dokazovanju izreka uporabili karakterizacijo celih elementov s posebno vrsto homomorfizmov obsega O .

LITERATURA

- [1] R. Connelly, *A flexible sphere*, The Mathematical Inteligencer, Vol. 1 (1978), 130–131.
- [2] R. Connelly, *The rigidity of suspensions*, J. Diff. Geometry **13** (1978), 399–408.
- [3] R. Connelly, I. Sabitov, A. Walz, *The bellows conjecture*, Contributions to Algebra and Geometry, V. **38** (1997), 1–10.
- [4] I. Stewart, *The bellows conjecture*, Scientific American, Vol. 279, July 1998, 90–92.

VESTI

Podatki o matematičnih konferencah in seminarjih

Na naslovu <http://acm.emath.fr/> je elektronska baza podatkov o matematičnih konferencah in seminarjih, in to v štirih jezikih, poleg tega pa še več zanimivih matematičnih povezav.

Peter Legiša

MAMOGRAFSKO SLIKANJE S POLPREVODNIŠKIMI DETEKTORJI

ŠPELA STRES

PACS 29.40.Wk, 78.50.Ge, 87.59.Ek

Pozicijsko občutljivi polprevodniški detektorji so detektorji z najboljšo prostorsko ločljivostjo, ki se uporabljajo v fiziki delcev. Z njimi je mogoče mesto, kjer delec zadene detektor, določiti na nekaj μm natančno. Največkrat se uporabljajo kot vertex detektorji, ki so sestavni deli spektrometrov na vseh večjih pospeševalnikih. Namenjeni so predvsem rekonstrukciji razpadnih mest delcev z življenjskimi časi nekaj pikosekund – sekundarnih vertexov kratkoživih delcev.

V zadnjih letih je močno aktualna misel, da bi pozicijsko občutljive polprevodniške detektorje uporabili pri rentgenskih slikanjih. Obetamo si lahko visok izkoristek, prostorsko ločljivost reda velikosti $100\ \mu\text{m}$, dobro energijsko ločljivost in digitalno sliko. Za zdaj je ovira visoka cena, omejena primernost silicija in razvoj čitalne elektronike.

Izvedena je bila računalniška simulacija sistema za rentgensko slikanje dojke s Si- in GaAs-detektorji. Si-detektor je bil sestavljen iz nabora glede na curek vpadnih rentgenskih fotonov prečno orientiranih mikropasovnih Si-detektorjev. Rezultati raziskav kažejo, da bi z uporabo takšnih detektorjev zmanjšali prejeto dozo na pacienta pri preiskavi, mogoče pa bi bilo zaznati kalcifikacije dimenzij okrog $100\ \mu\text{m}$.

MAMOGRAPHY WITH DETECTORS BASED ON SEMICONDUCTORS

Position sensitive semiconductor detectors are best position resolution detectors used in particle physics. The interaction point of a particle with the detector can be measured up to a few μm in precision. Semiconductor detectors are mostly used as vertex detectors in spectrometers of big accelerators. They are especially useful for reconstruction of interaction points for particles with lifetimes of a few picoseconds – secondary vertices of short lived particles.

In recent years there have been a great interest and effort put into developement of idea of a possible use for position sensitive semiconductor detectors in X-ray monitoring. A good detection efficiency, a space precision up to $100\ \mu\text{m}$, a good energy precision and a digital image are expected to be of crucial importance for mammography examinations. High price, limited suitability of silicon and a necessity for further developement of readout electronics still pose a problem at present.

A computer simulation of an X-ray imaging system with a GaAs detector or a silicon detector is described. The silicon detector was formed of an array of silicon detectors, transversaly oriented. The results of the simulation show that the use of these detectors would lower the dose to the patient per mammographic examination. A detection of specimens of calcified material with dimensions around $100\ \mu\text{m}$ would be possible.

1. Motivacija

1.1. Mamografija in rakasta obolenja

Mamografija je splošno uporabljan izraz za rentgensko slikanje ženskih dojke. Preiskava omogoča, da v tkivu zaznamo majhne kalcifikacije, ki so prvo znamenje raka na dojkah. Tako so možnosti, da bolezen ustavimo v zgodnjih razvojnih fazah, večje.

Rak se navadno pojavi pri ženskah, starejših od petdeset let, v povprečju zboli ena od trinajstih žensk, umre pa ena od petindvajsetih [1]. Danes vemo, da je bolezen povezana z dedno zasnovo; verjetnost, da se bo rak na dojkah pojavil pri ženskah, ki so v družini že imele koga s to boleznijo, je večja. Vendar še vedno ne vemo, kakšni so drugi vzroki, ki pospešijo ali zavirajo razvoj raka na dojkah. Zato je nadvse pomembna preventiva. Vsaka ženska po petdesetem letu naj bi šla na klinični rentgenski pregled dojk vsaj enkrat na leto.

V bistvu same preiskave pa leži neke vrste nerešljiv paradoks. Za to, da bi odkrili potencialno mogoč razvoj rakastega tkiva, naj bi bile preiskave čim bolj pogoste. S pogostimi pregledi se verjetnost za neopažen nastanek in razvoj raka sicer zmanjša, vendar se z njimi tudi poveča tveganje zaradi rednega izpostavljanja sevanju.

Seveda ni govora o velikih verjetnostih, saj medicinske preiskave v povprečju k celotni dozi, ki jo prejme človeško telo zaradi različnih vzrokov v enem letu (letalski poleti, kozmično sevanje, TV, računalniki, daljnovodi, radon, tla) prispevajo le okrog 10 odstotkov.

Ker pa je tkivo v dojkah izredno občutljivo, si pri izdelavi mamografskih aparatov prizadevajo omogočiti slikanje s čim manjšimi količinami sevanja.

1.2. Mamografija danes

V moderni rentgenologiji se uporablja veliko različnih vrst detektorjev za rentgenske žarke. Rezultat rentgenskega slikanja je posnetek, porazdelitev gostote energije, ki jo rentgenski fotoni pustijo v detektorju. Poznamo več tehnik, s pomočjo katerih spremenimo to porazdelitev v detektorju odložene energije v nekaj, kar lahko vidimo z očesom.

Najširšo uporabo je v preteklosti dosegel fotografski film. Sestavljen je iz več zaporednih plasti z različnimi nalogami, od katerih je najpomembnejša filmska emulzija, v kateri se dogaja fotografski proces. Ko foton rentgenske svetlobe prileti v emulzijo, interagira z bromovimi atomi in atomi srebra ter aktivira zrna v emulziji. Aktivirana zrna se po razvijanju filma pokažejo kot otemnjena področja na filmu. Ker je absorpcija fotona večja v obolelem tkivu, ki vsebuje kalcifikacije, kot v zdravem, se rakasti deli na posnetku pokažejo kot bele lise.

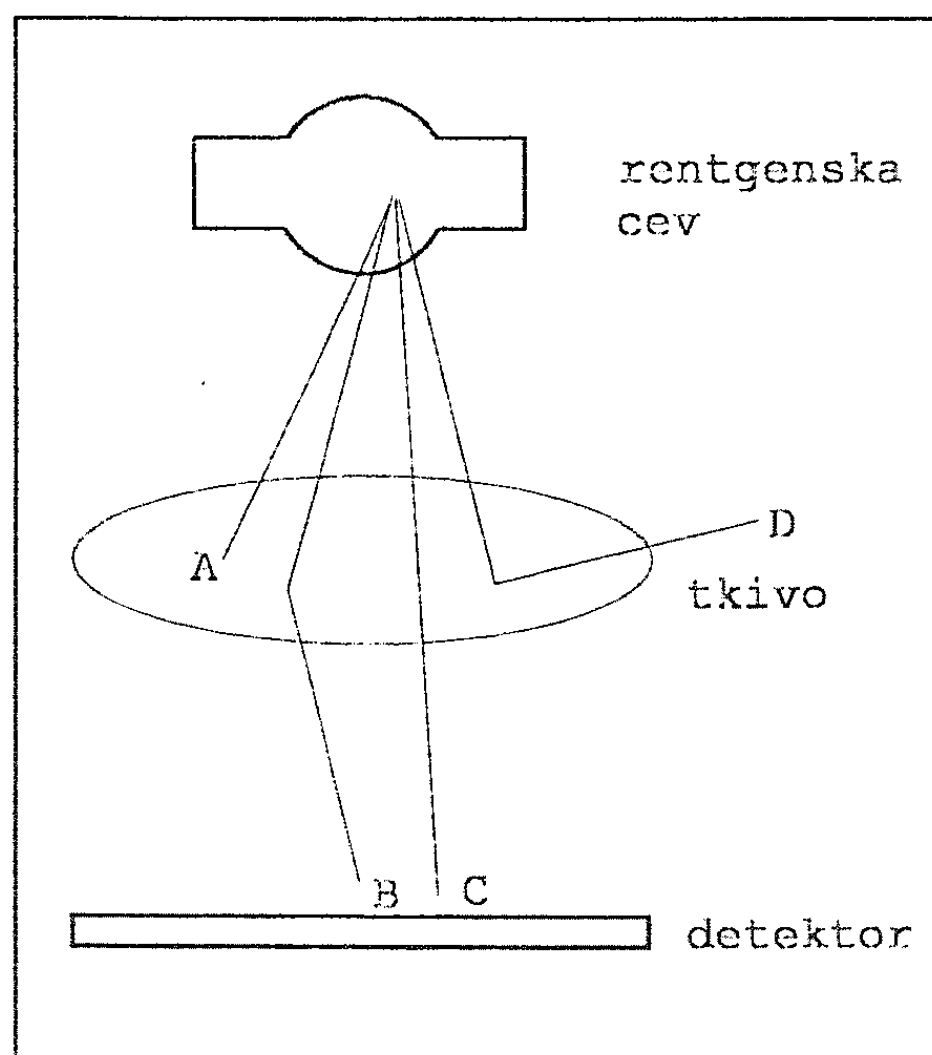
Večja kot je količina rentgenskih žarkov, s katerimi presvetlimo opazovano tkivo, bolje se na posnetku razlikujejo morebitne kalcifikacije od ozadja zdravega tkiva. Vendar naj prejeta doza rentgenskega sevanja zaradi varnosti preiskovanca pri posamezni preiskavi ne bi presegla 6 mGy ($\text{Gy} = \text{grey} = \text{J/kg tkiva}$) [2]. Zaradi slabega izkoristka filma pa lahko pri takšnih dozah opazimo le koščke obolelega tkiva, večje od nekaj 100 mikrometrov.

Tako se je zaradi pogostosti mamografskih slikanj pokazala potreba po bolj natančni metodi, pri kateri bi hkrati ob preiskavi pacienti prejeli manjše doze sevanja. Ena od možnih zamenjav za fotografsko ploščo je detektiranje rentgenskih žarkov z mikropasovnimi polprevodniškimi detektorji.

2. Slikanje

2.1. Interakcija rentgenskih fotonov s snovjo

Videz sistema za rentgensko slikanje je shematično prikazan na sliki 1, kjer so poleg tipičnih komponent (rentgenska cev, tkivo, detektor) vrisani tudi rentgenski žarki. Iz rentgenske cevi izsevani fotoni vstopijo v pacientovo telo, kjer interagirajo s tkivom. Tipične energije iz rentgenske cevi izsevanih fotonov so od 15 do 35 keV. Takšni fotoni se lahko v snovi absorbirajo (fotoefekt) in tako prispevajo k prejeti dozi v tkivu, lahko se sipljejo (Comptonovo, Rayleighovo sipanje) ali nemoteno potujejo skozi tkivo. Fotoni, ki jih po izhodu iz tkiva zaznamo z detektorjem (npr. filmom) in skozi tkivo preidejo nemoteno, torej omogočijo nastanek posnetka. Sipani fotoni, ki pridejo do detektorja, ustvarijo ozadje, ki kvari kvaliteto slike, fotoni, ki so se v tkivu absorbirali, pa prispevajo k v tkivu absorbirani dozi.



Slika 1. Osnovne komponente sistema za slikanje z rentgenskimi žarki. Vpadni foton se lahko v tkivu (A) absorbira, (B) in (D) siplje ali (C) gre nemoteno skozi tkivo.

2.2. Absorpcija ali fotoefekt

Pri fotoefektu vpadni foton z energijo E_γ izbije iz atoma elektron s kinetično energijo $E_{\text{fotoelektron}}$, če je energija fotona E_γ večja od energije E_{vezavna} , potrebne za izbitje elektrona iz orbitale, $E_\gamma \geq E_{\text{vezavna}}$. Emitirani fotoelektron ima ob izbitju kinetično energijo

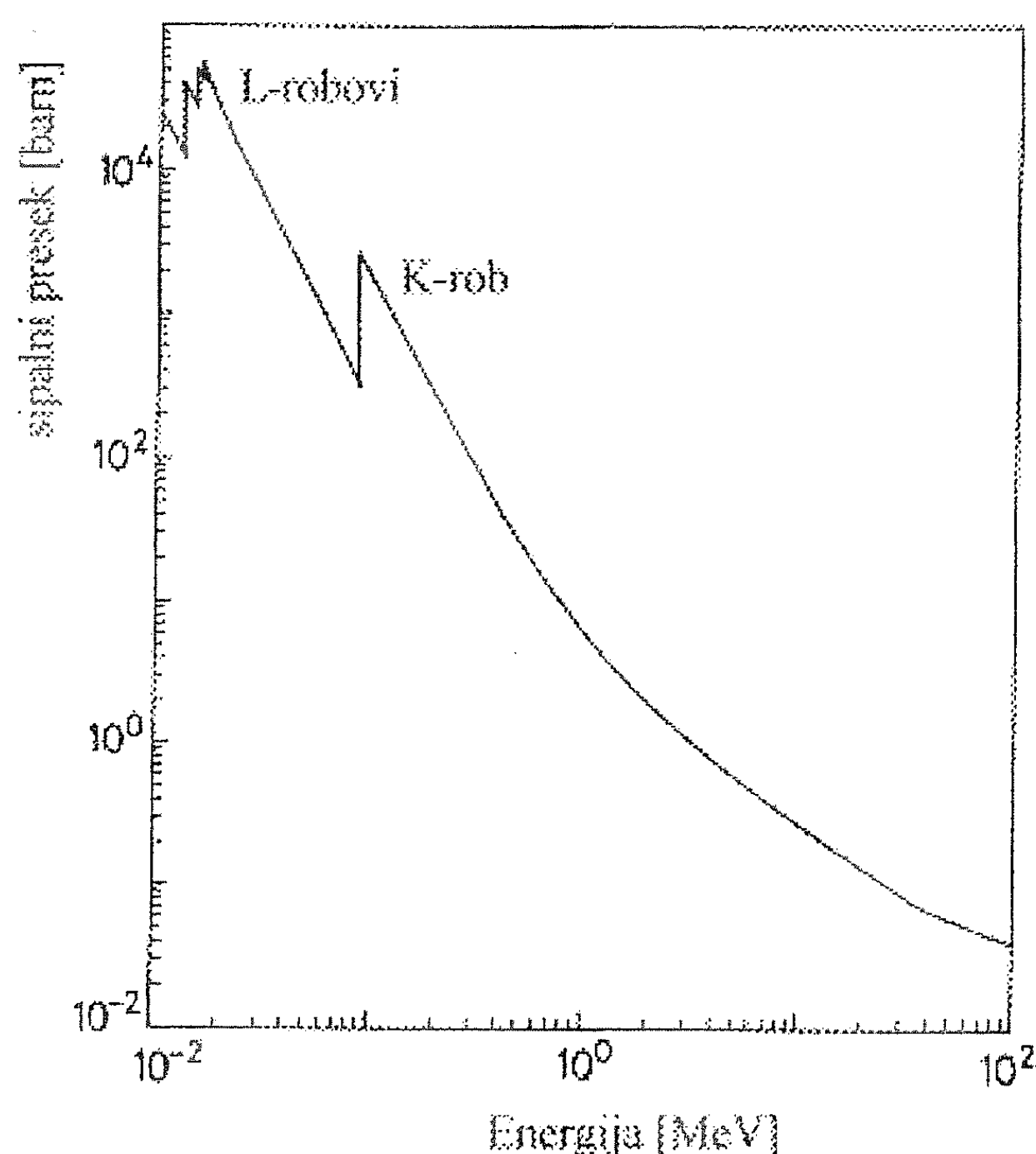
$$E_{\text{fotoelektron}} = E_\gamma - E_{\text{vezavna}}, \quad (1)$$

vpadni foton pa pri tem izgine, se absorbira.

Ko se izseva fotoelektron, ostane ena od notranjih orbital prazna, atom je v vzbujenem stanju. Da bi atom dosegel nižje energijsko stanje, se elektron iz višje orbitale spusti na prazno orbitalo izbitega elektrona, atom pa pri tem izseva karakterističen žarek X. Energija izsevanega fotona je razlika med vezavno energijo E_1 orbitale izbitega fotoelektrona in vezavno energijo E_2 orbitale, iz katere se elektron spušča v nižjo orbitalo,

$$E_{\text{karakterističnega x-žarka}} = E_1 - E_2. \quad (2)$$

Na sliki 2 je prikazana tipična odvisnost sipalnega preseka za fotoefekt od energije vpadnega fotona. Pri energijah, večjih od vezavne energije orbitale K, je sipalni presek nizek, vendar strmo narašča, ko se bližamo energiji orbitale K. Tik pod energijo orbitale K sipalni presek spet močno pade, ker je energija vpadnih fotonov premajhna, da bi izbili elektrone iz orbitale K. Ta padec sipalnega preseka je znan pod imenom absorpcijski rob K. Pod energijo roba K sipalni presek ponovno raste in spet odsekano pade pri energijah L, M in drugih orbital.

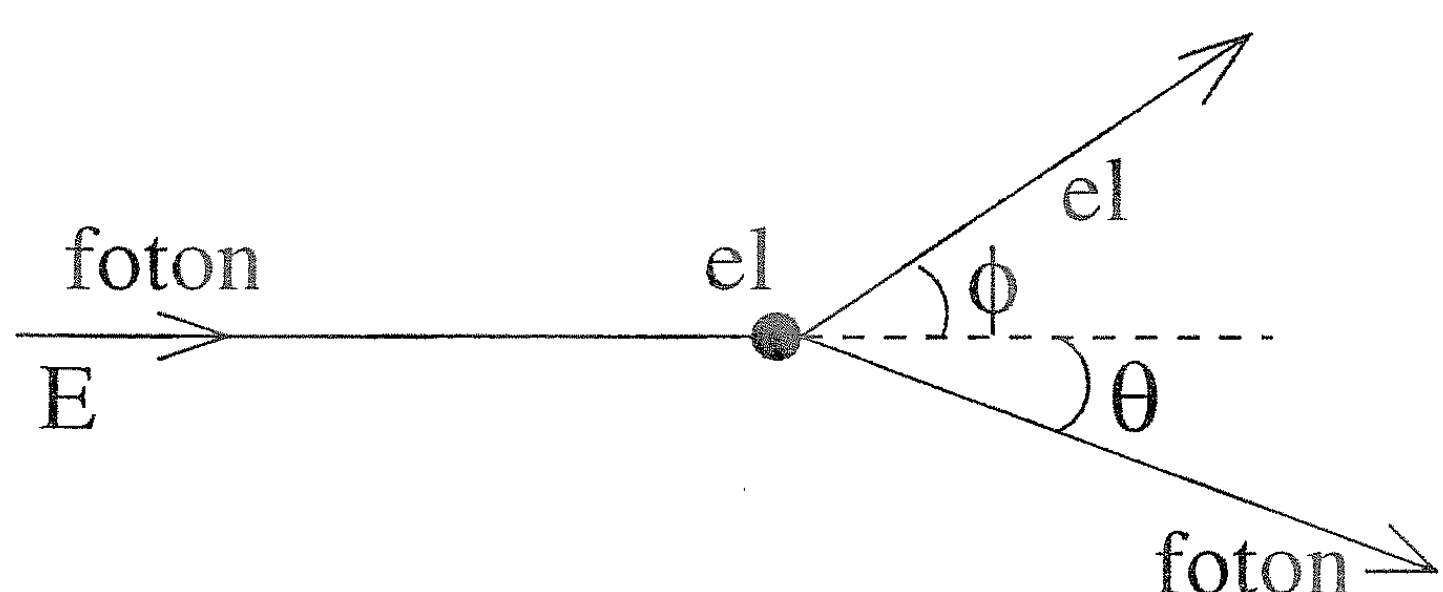


Slika 2. Sipalni presek za fotoefekt v svincu. Vidni so absorpcijski robovi K, L.

Večji kot je sipalni presek za fotoefekt, več je energije, ki po prehodu snopa fotonov skozi tkivo ostane odložena v tkivu, večja je prejeta doza sevanja.

2.3. Sipanje – Comptonovo in Rayleighovo

Comptonovo sipanje (glej sl. 3) je elastično sipanje fotona na prostih elektronih. V snovi elektroni navadno niso prosti, vendar jih lahko obravnavamo kot proste, če je energija vpadnega fotona E_γ dovolj visoka glede na vezavno energijo E_{vezavna} elektronov v atomu. Vezavna energija elektronov na zunanjih orbitalah je reda velikosti nekaj eV, žarki X pa imajo energijo reda velikosti nekaj 10 keV, torej zunanje elektrone v atomu lahko res obravnavamo kot proste.



Slika 3. Comptonovo sipanje fotona na prostem elektronu. Foton se odkloni za kot θ , elektron se prične gibati v smeti ϕ od prvotne smeri fotona.

Foton z energijo E_γ izbije iz elektronskega oblaka atoma (z vrstnim številom Z in masnim številom A) elektron s kinetično energijo T . Sipani foton potuje naprej z energijo E'_γ , odklonjen za kot θ od prvotne smeri. Kinetično energijo izbitega elektrona lahko izrazimo z energijama fotona pred Comptonovim sipanjem in po njem,

$$T = E_\gamma - E'_\gamma. \quad (3)$$

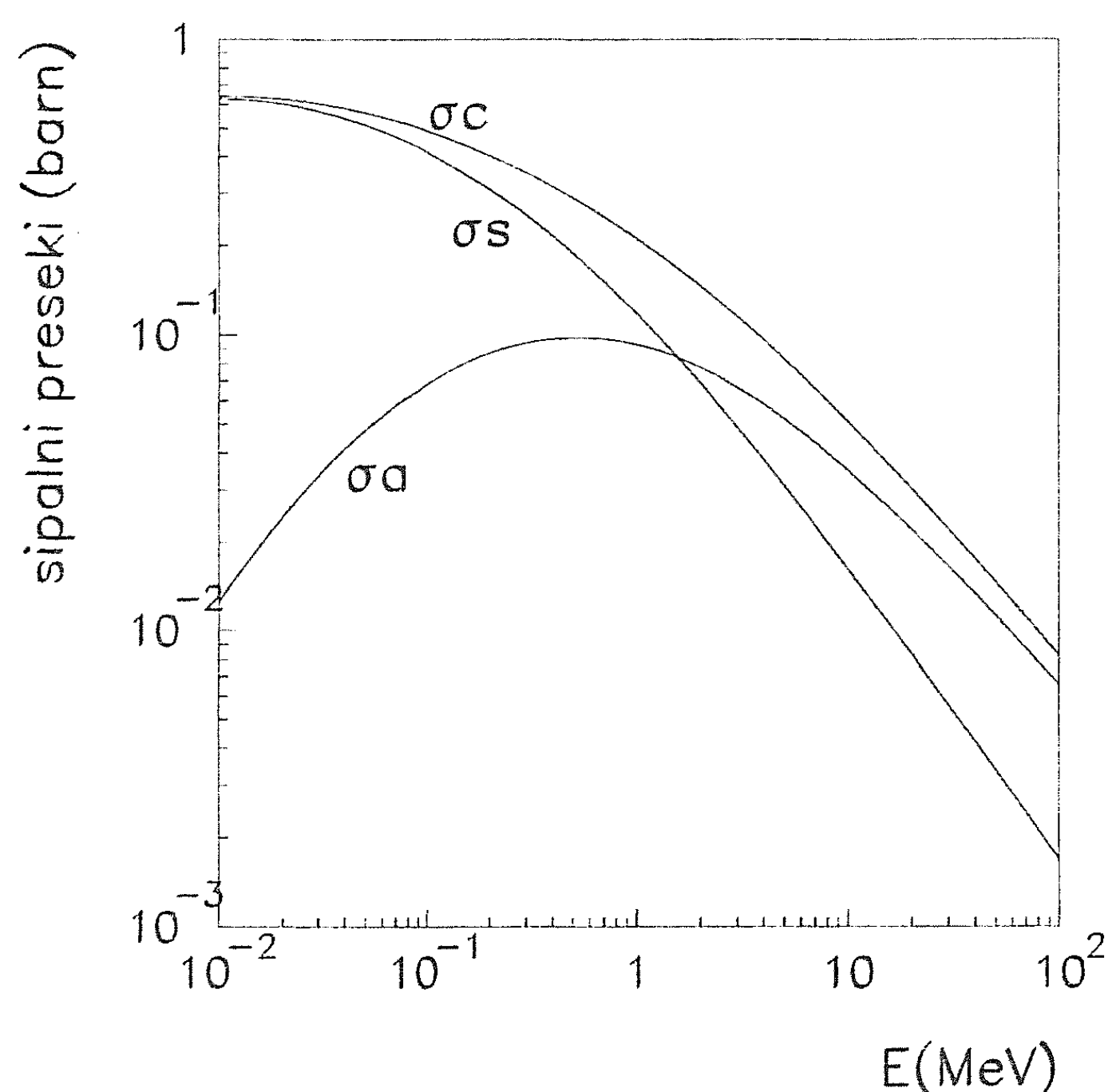
Iz zakonov o ohranitvi energije in gibalne količine sledi zveza

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \gamma_0(1 - \cos \theta)}, \quad (4)$$

pri čemer je m_e masa elektrona in $\gamma_0 = \frac{E_\gamma}{m_e c^2}$ razmerje med energijo fotona E_γ in maso elektrona $m_e c^2$.

Diferencialni sipalni presek $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ za Comptonovo sipanje v snovi izračunamo s pomočjo enačbe Klein-Nishina iz kvantne elektrodinamike (QED) [8].

Z integracijo enačbe Klein-Nishina po celem prostorskem kotu dobimo totalni sipalni presek za Comptonovo sipanje σ_c . S pomočjo enačbe Klein-Nishina lahko izračunamo še dve količini, pomembni za oceno energijskih izgub v snovi, σ^s sipalno komponento sipalnega preseka in σ^a absorpcijsko komponento sipalnega preseka. σ^s naj bo definirana z razmerjem energij fotona pred sipanjem in po njem, $\frac{d\sigma^s}{d\Omega} = \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \frac{d\sigma}{d\Omega}$, σ^a pa z energijo, ki jo v povprečju foton preda elektronu [8]. Ker se elektron v snovi ustavi, je to hkrati tudi energija, ki jo foton odloži v snovi pri Comptonovem sipanju in od tod (za σ^a) ime absorpcijska komponenta sipanja, ki skromneje kot fotoefekt, pa vendar prispeva k sevalni dozi, odloženi v tkivu.



Slika 4. Primer sipalnega preseka za Comptonovo sipanje ter absorpcijskega σ^a in sipalne σ^s komponente sipanja v odvisnosti od energije vpadnega fotona E .

$$\sigma_c = \sigma^a + \sigma^s, \quad (5)$$

kjer so $\sigma^a, \sigma^s, \sigma_c$ po vrsti absorpcijski, sipalni in totalni sipalni presek za Comptonovo sipanje. Sipalni presek za Comptonovo sipanje σ_c ter absorpcijska σ^a in sipalna σ^s komponenta sipalnega preseka so prikazani na sliki 4, od koder tudi lahko preberemo, da se pri višjih energijah absorbira v snovi vedno večji delež energije vpadnega fotona.

Pri Rayleighovem sipanju se vpadni foton z energijo E_γ elastično siplje na elektronskem oblaku atoma, naprej potuje z nezmanjšano energijo, vendar v spremenjeni smeri. Rayleighovo sipanje skupaj s Comptonovim prispeva k ozadju in kvari kvaliteto slike.

2.4. Atenuacijski koeficient

Celotni sipalni presek σ za interakcijo fotona z atomom tkiva je vsota sipalnih presekov za posamezne procese,

$$\sigma = \sigma_{\text{fotoefekt}} + \sigma_{\text{Comp}} + \sigma_{\text{Rayl}}. \quad (6)$$

Če pomnožimo σ s ploskovno gostoto atomov v snovi $n = \frac{N_{Av}}{A} \rho$, dobimo verjetnost μ za interakcijo fotona s snovjo na enoto dolžine. To količino imenujemo tudi totalni absorpcijski ali atenuacijski koeficient.

$$\mu = \sigma n = \sigma \left(\frac{N_{Av}}{A} \rho \right). \quad (7)$$

Atenuacijski koeficient μ je obratna vrednost povprečne proste poti λ v snovi, $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Vzemimo vpadni snop fotonov intenzitete I_0 . Intenziteta curka pada s prepotovano razdaljo x v snovi kot

$$I = I_0 e^{-\frac{x}{\lambda}}. \quad (8)$$

Tkivo, ki ga presvetljujemo z rentgenskimi žarki, je sestavljeno iz slojev različnih debelin in lastnosti. Lastnost, s pomočjo katere pri rentgenskem slikanju razlikujemo tkiva, opisuje prav linearni atenuacijski koeficient, ki je v zdravem tkivu manjši kot v obolelem. Zato se v obolelem tkivu absorbira več rentgenskih žarkov kot v zdravem, kar omogoča določitev obolelih področij tkiva z rentgenskim slikanjem.

3. Kvaliteta rentgenske slike

Kakovost in škodljivost rentgenskega slikanja sta odvisni od različnih fizikalnih parametrov. Med njimi so najpomembnejši v tkivu absorbirana doza, kontrast slike, šum, neostrost slike ter izkoristek detektorja [4].

Absorbirana doza: VKD-doza je energija, ki jo curek fotonov odloži v enoti mase površinskega kožnega tkiva, torej $VKD = \frac{E}{m}$. Količina je uporabna predvsem zato, ker je merljiva. Energijo, ki jo fotoni odložijo v tanki površinski plasti, je moč s tankimi TLD-ploščicami meriti neposredno, medtem ko lahko o MGD (energiji, ki so jo fotoni odložili v celotnem obsevanem tkivu) le sklepamo. Koliko energije pa odloži v kaki snovi N vpadnih fotonov z energijo E_γ ?

Verjetnost P , da vpadni foton interagira z atomom v snovi debeline d , je enaka $P = \sigma nd = \mu d$, pri čemer je σ totalni sipalni presek, n ploskovna gostota atomov v snovi in μ atenuacijski koeficient snovi.

N vpadnih fotonov z energijo E_γ , ki interagirajo s snovjo z verjetnostjo P , v snovi odloži delež E svoje energije, $E = PN\bar{E} = \mu dN\bar{E}$, pri čemer definiramo $\bar{E}$, energijo, ki jo v povprečju odloži v snovi en foton, ki s snovjo interagira.

VKD je torej za N/S , vpadno gostoto fotonov na površino tkiva S , enaka

$$VKD = \frac{E}{m} = \frac{\mu}{\rho} \frac{N}{S} \bar{E}. \quad (9)$$

Višina pri preiskavi absorbirane dovoljene doze v tkivu (≤ 6 mGy) torej omejuje količino fotonov, s katerimi smemo tkivo presehati.

Kontrast slike: Maksimalna VKD določa največje število rentgenskih fotonov, s katerimi smemo presvetliti tkivo. S številom vpadnih fotonov pa je tako omejen tudi kontrast slike. Kontrast C slike je določen kot:

$$C = \frac{w_1 - w_2}{w_1}, \quad (10)$$

kjer sta w_1 in w_2 gostoti absorbirane energije zunaj in znotraj slike kalcifikacije na posnetku. Odvisni sta od absorpcijskih lastnosti tkiva in kalcifikacije, višine doze, s katero smemo obsevati tkivo, pa tudi od velikosti kalcifikacije v tkivu.

Šum: Kvaliteto slike določa tudi kvantni šum (statistične fluktuacije v številu na enoto površine zaznanih fotonov) in gausov šum elektronskega merilnega sistema s širino okrog $\sigma=1$ keV.

Odziv detektorja: Izkoristek detektorja določa, kolikšen del fotonov, ki nosijo informacijo o sestavi tkiva, v detektorju interagira in kolikšen del energije vpadnih fotonov se v detektorju dejansko absorbira ter tako omogoči nastanek posnetka zgradbe tkiva.

Idealen detektor bi imel izkoristek enak 1. Izkoristki filmov ne segajo višje od nekaj 10%, izkoristki polprevodniških detektorjev pa so zaradi relativno visokega vrstnega števila skoraj 100% in so zato za rentgenska slikanja z zaželenimi majhnimi dozami pri mamografiji še posebej primerni.

4. Osnove delovanja polprevodniških detektorjev

4.1. Osnovna zamisel

Osnovna zamisel delovanja polprevodniških detektorjev je enaka kot pri ionizacijskih celicah, le da namesto plina uporabimo polprevodniški kristal. Vpadni rentgenski foton v snovi odloži energijo pri Comptonovem sipanju ali s fotoefektom. Pri tem sproščen elektron nato na svoji poti skozi plin ionizacijske celice tvori pare elektron-ion, na poti skozi polprevodniški kristal pa pare elektron-vrzel.

Ker vpadni rentgenski foton v snovi sprosti elektron, ta pa še naprej odlaga energijo v snovi z ionizacijo (tvori pare elektron-ion v ionizacijskih celicah ali pare elektron-vrzel v polprevodniških detektorjih), se lahko omejimo na razpravo o prehodu in zaznavi nabitega delca skozi polprevodniški detektor.

Število nastalih parov elektron-vrzel je enako

$$n_{\text{parov}} = \frac{E}{W_i}, \quad (11)$$

kjer je E energija, ki jo ionizirajoči elektron odloži v snovi, in W_i povprečna energija, potrebna za nastanek enega para. V električnem polju se nato pari ločijo: elektroni se zberejo na enem, vrzeli pa na drugem koncu detektorja. Celoten naboj, ki se zbere na eni elektrodi, je sorazmeren z energijskimi izgubami ionizirajočega elektrona in predstavlja merjeni signal ionizacijske celice ali polprevodniškega detektorja.

Četudi je osnovna ideja delovanja enaka kot pri ionizirajočih celicah, pa je velika prednost polprevodniških detektorjev približno desetkrat manjša ionizacijska energija kot pri ionizacijskih celicah. Vzrok je v tem, da je pri polprevodniku treba elektrone vzbuditi iz valenčnega v prevodni pas, medtem ko moramo plin ionizirati. Tako so povprečne ionizacijske energije pri polprevodnikih na primer: 3,62 eV pri siliciju (300 K) in 2,9 eV pri germaniju (77 K) [8]. Pri plinih so te energije: 42 eV pri heliju in 22 eV pri ksenonu.

4.2. Ocena velikosti signala

Povprečne energijske izgube na enoto poti za minimalno ionizirajoče delce so za silicijev kristal okoli 390 eV/ μm [6], kar da pri povprečni ionizacijski energiji (3,62 eV) 108 parov/ μm . Ob tipični debelini silicijevega detektorja 300 μm dobimo torej ob prehodu enega elektrona $3 \cdot 10^4$ parov

elektron-vrzel. Tako velike signale je z nizkošumno elektroniko že mogoče zaznati, vendar pa se ob tem pojavijo težave zaradi ozadja, ki ga ustvarijo prosti nosilci naboja. V čistem polprevodniku je to ozadje, kot bomo videli, kar nekaj redov večje od samega signala.

4.3. Ozadje prostih nosilcev naboja

V polprevodniku je širina energijske špranje dovolj majhna, da se lahko elektroni pri sobnih temperaturah že s termičnimi energijami vzbudijo prek energijske špranje v prevodni pas. Ti elektroni v prevodnem pasu in za njimi preostale vrzeli v valenčnem so prosti nosilci naboja v polprevodniku.

Gostoti prostih vrzeli $p(T)$ in elektronov $n(T)$ sta podani kot:

$$n(T) = N_c(T) e^{(-\frac{E_c - \mu}{kT})} \quad (12)$$

in

$$p(T) = P_v(T) e^{(-\frac{\mu - E_v}{kT})}, \quad (13)$$

kjer je N_c efektivna gostota stanj v prevodnem pasu, P_v efektivna gostota stanj v valenčnem pasu, E_c energija prevodnega pasu, E_v energija valenčnega pasu in μ kemijski potencial. Obe efektivni gostoti stanj sta odvisni od temperature kot $N_c, P_v \propto T^{3/2}$. Zanimiv je produkt koncentracij elektronov v prevodnem pasu in vrzeli v valenčnem pasu, ki je konstanten za vsak polprevodnik

$$np = n_i^2 = N_c P_v e^{(-\frac{E_g}{kT})}, \quad (14)$$

kjer je $E_g = E_c - E_v$ energijska reža med vrhom valenčnega in dnom prevodnega pasu.

V čistem siliciju je število vrzeli ravno enako številu prostih elektronov, saj vsak elektron, ki zapusti valenčni pas, pusti tam tudi vrzel. Tako dobimo pri sobni temperaturi $n_i \equiv n = p = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$, kar da pri detektorju s površino 1 cm^2 in debelino $300 \text{ } \mu\text{m}$ $5 \cdot 10^8$ prostih nosilcev naboja. Ti prosti nosilci so ozadje, ki je nekaj velikostnih redov večje od ocenjenega signala ($3 \cdot 10^4$ nosilcev naboja) in bi onemogočilo detekcijo parov elektron-vrzel, ki jih je v polprevodniku sprožil prehod nabitega delca. Signal bi se torej izgubil v ozadju prostih nosilcev naboja.

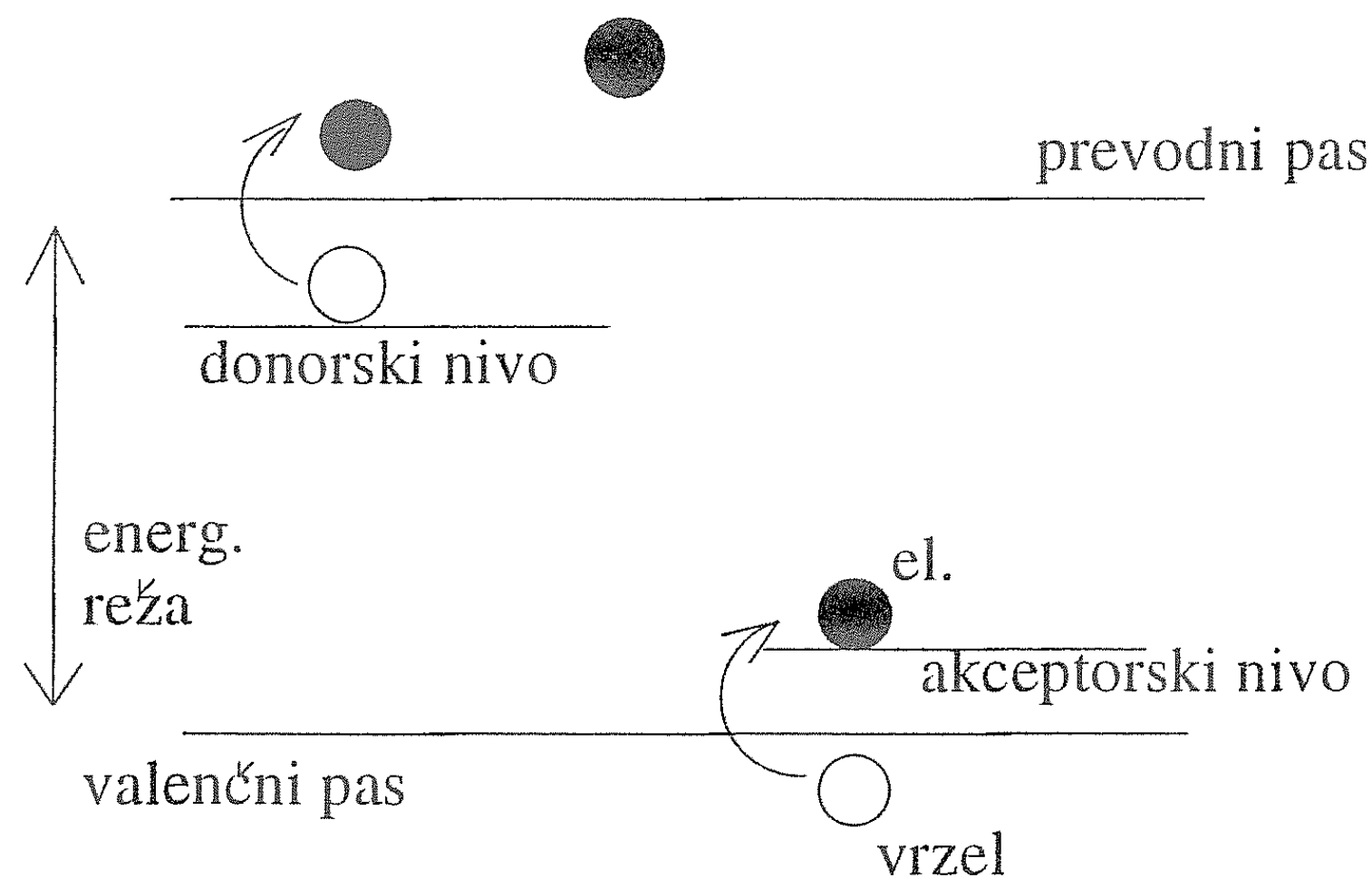
4.4. Dopirani polprevodnik

Veliko bolj od čistega silicija je za detekcijo delcev zanimiv silicij s primesmi. Običajno gre tukaj za 3- in 5-valentne primesi. Elementi iz pete skupine periodnega sistema imajo en elektron več od silicija in so primesi tipa n, donorske primesi. Elementi iz tretje skupine periodnega sistema pa imajo en elektron manj kot silicij in predstavljajo primesi tipa p, akceptorske primesi.

Element primesi n se vgradi v kristalno rešetko, medtem ko se preostali elektron giblje v polju atoma primesi. Termične energije zadostujejo, da

takšen elektron preide v prevodni pas (sl. 5). Nivoje, na katerih so elektroni, imenujemo donorski nivoji. Podobno velja za vrzeli, le da tu elektron preide iz valenčnega pasu na akceptorske nivoje in tako pusti vrzel v valenčnem pasu.

Običajno so v vsakem kristalu tako akceptorske kot donorske primesi. Glede na to, katerih je več, ločimo polprevodnike tipa n, če je več donorskih primesi, in polprevodnike tipa p, če je več akceptorskih primesi.



Slika 5. Dopiran polprevodnik z donorskimi in akceptorskimi nivoji.

Značilnosti takšnega stika so shematsko prikazane na sliki 6.

V siliciju s primesmi je ozadje prostih nosilcev naboja še večje kot pri čistem siliciju, ker se poleg lastnih nosilcev naboja pojavijo še elektroni iz donorskih nivojev in vrzeli iz akceptorskih nivojev.

Fluktuacije tega ozadja bi onemogočile uspešno detekcijo delcev, zato je treba ozadje prostih nabojev močno zmanjšati – to pa je mogoče doseči z zaporno napetostjo na stiku p-n. Stik omogoči zmanjšanje ozadja prostih nabojev v področju ob stiku. Električno polje, ki omogoči osiromašenje, hkrati poskrbi za ločitev parov elektron-vrzel po preletu nabitega delca skozi detektor.

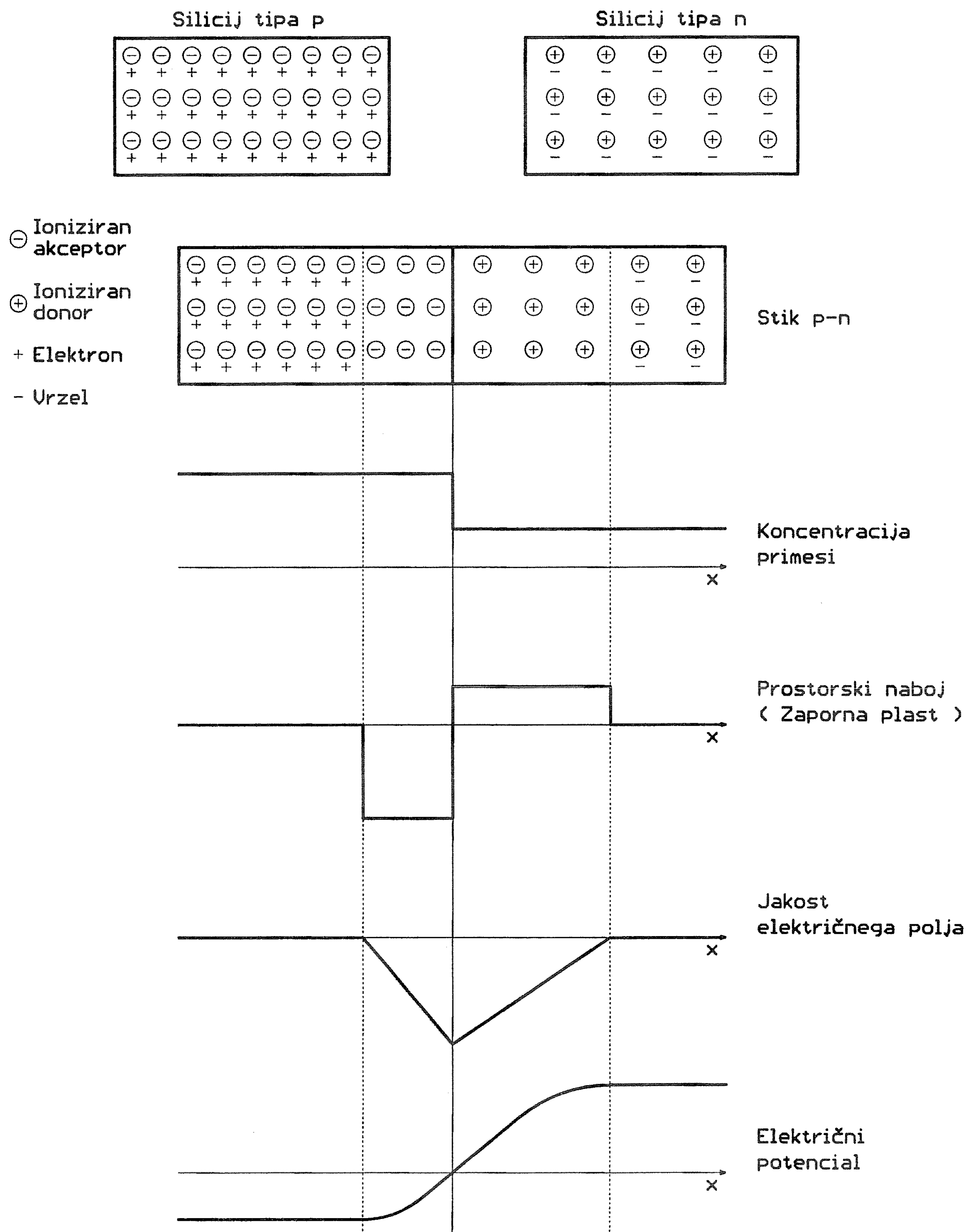
4.5. Stik p-n

Če staknemo polprevodnik tipa n in polprevodnik tipa p, prično večinski nosilci naboja zaradi difuzije prehajati z ene na drugo stran, kjer se re-kombinirajo. To prehajanje pušča za seboj prostorski naboj – nekompenzirane donorske atome na strani n in nekompenzirane akceptorske atome na strani p. V okolici stika se zaradi tega pojavi tanka, nekaj μm debela zaporna plast – osiromašeno področje, ki s svojim potencialnim skokom (V_n) uravnoteži gibanje nosilcev naboja zaradi difuzije.

Višina skoka je odvisna od čistosti silicija in jo tedaj, ko sta $N_a, N_d \gg n_i$, lahko izračunamo [8]

$$V_n = \frac{kT}{e_0} \ln\left(\frac{N_a N_d}{n_i^2}\right), \quad (15)$$

kjer sta N_a in N_d gostoti akceptorskih in donorskih primesi in e_0 osnovni naboj.



Slika 6. Lastnosti stika p-n pri sobni temperaturi: koncentracija primesi, prostorska porazdelitev naboja, jakost električnega polja in oblika potenciala v stiku.

Debelino zaporne plasti lahko povečamo, če na stik p-n priključimo dodatno zunanjo zaporno napetost (V_z). Celotna napetost na stiku V_B je tako vsota obeh $V_B = V_n + V_z$. Omeniti je treba še tipične vrednosti omenjenih napetosti; V_n je manjša od enega volta, medtem ko so zaporne napetosti običajno mnogo večje.

Obliko potenciala in električnega polja v stiku lahko izračunamo s Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0},$$

kjer je φ potencial, ρ gostota naboja in ϵ_0 dielektrična konstanta. Večino kvalitativnih lastnosti stika p-n nam pojasni že približek škatlasto porazde-

ljenega naboja

$$\varrho(x > 0) = +e_0 N_d \quad 0 < x < d_n, \quad (16)$$

$$\varrho(x < 0) = -e_0 N_a \quad -d_p > x > 0, \quad (17)$$

kjer sta d_n in d_p debelini osiromašenega področja na strani n in strani p.

Koncentracija primesi na obeh straneh p-n stika, porazdelitev prostorskega naboja ter rezultati reševanja Poissonove enačbe za ta poenostavljeni primer – električno polje in električni potencial – so prikazani na sliki 6.

Zaradi zunanje nevtralnosti stika p-n velja

$$N_d d_n = N_a d_p. \quad (18)$$

S to zvezo lahko iz rešitve Poissonove enačbe izrazimo vrednosti robnih pogojev pri danih koncentracijah primesi N_a , N_d in tako debelino zaporne plasti na strani p in strani n zapišemo kot funkcijo celotne napetosti V_B na stiku

$$d_p = \sqrt{\left(\frac{2\epsilon\epsilon_0}{e_0}\right) \frac{V_B}{N_a(1 + N_a/N_d)}}, \quad (19)$$

$$d_n = \sqrt{\left(\frac{2\epsilon\epsilon_0}{e_0}\right) \frac{V_B}{N_d(1 + N_d/N_a)}}. \quad (20)$$

Iz teh enačb, kakor tudi iz enačbe (18), je razvidno, da se zaporna plast razteza od stika navzven obratno sorazmerno s koncentracijo primesi. Če poskrbimo, da ima stran p mnogo več primesi kot stran n, torej $N_a \gg N_d$, bo osiromašeno področje na strani p precej ožje kot na strani n.

Za silicijeve polprevodniške detektorje se uporablja stik p-n z debelo stranjo n in tanko plastjo p. Če je $N_a \approx 10^{21} \text{ m}^{-3}$ in $N_d \approx 5 \cdot 10^{18} \text{ m}^{-3}$, dobimo pri zaporni napetosti $V_B = 100 \text{ V}$ širini osiromašenih področij $d_p = 0,4 \text{ } \mu\text{m}$ in $d_n = 300 \text{ } \mu\text{m}$. Stran n je aktivna prostornina detektorja, medtem ko je stran p potrebna samo za njeno osiromašenje in je zaradi tega zelo tanka. V tem primeru lahko enačbi (19) in (20) združimo. Tako dobimo za celotno širino osiromašenega področja $d = d_p + d_n \approx d_n$

$$d_n = \sqrt{\left(\frac{2\epsilon\epsilon_0}{e_0}\right) \frac{V_B}{N_d}}. \quad (21)$$

Ko ionizirajoči delec preleti kristal, pusti za seboj pare elektron-vrzel. Zaporna napetost povzroči hitro potovanje nosilcev naboja k stiku, kar zaznamo kot signal. Ob tipični zaporni napetosti $V_B = 100$ traja zbiranje elektronov iz celotnega aktivnega volumna detektorja približno $\tau_e \approx 7 \text{ ns}$.

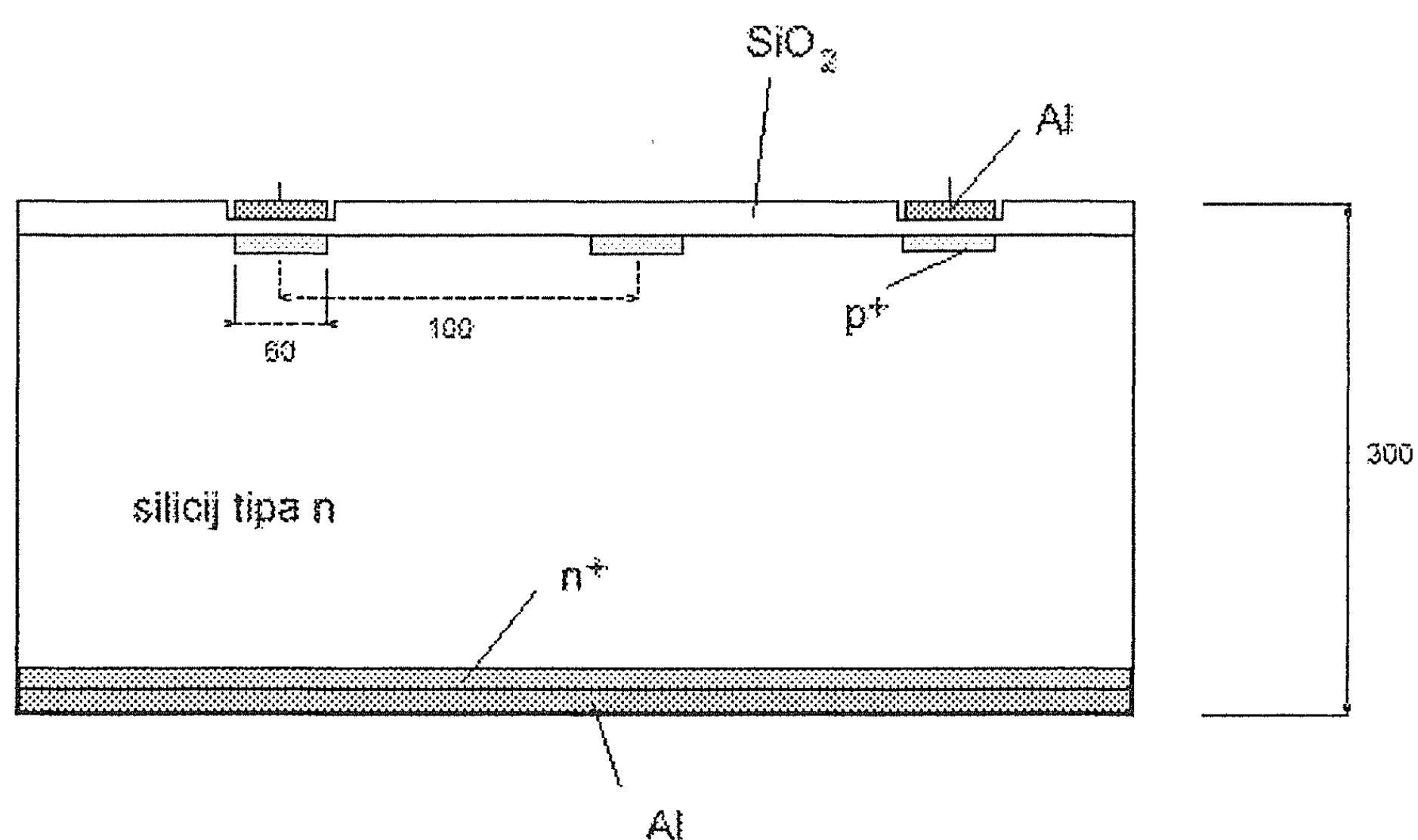
5. Mikropasovni polprevodniški detektorji

5.1. Zgradba in izdelava

Tipična debelina polprevodniških detektorjev je od 200 do 300 μm . Eden od razlogov za to je, da polprevodniške detektorje v glavnem uporabljajo za sledenje nabitih delcev, za določanje mesta, kjer je nabiti delec zadel detektor. Z debelino detektorja sicer narašča signal, narašča pa tudi delež nezaželenega večkratnega sipanja. Zato so debeline detektorjev, ki se uporabljajo za sledenje nabitih delcev le tolikšne, da še dajo zadosti velik signal.

Vendar pa je debelina polprevodniških detektorjev omejena tudi z lastnostmi polprevodnika samega. Iz enačbe (21) vidimo, da širina osiromašenega območja d_n raste s korenom celotne zaporne napetosti V_B na stiku p-n. To pomeni, da bi potrebovali za 2-krat debelejši detektor 4-krat večjo napetost, jakost električnega polja v detektorju pa bi se povečala za faktor 2. Upoštevati je treba, da se pri velikih jakostih električnega polja poveča možnost preboja, kar omejuje jakost električnega polja v detektorju in s tem njegovo debelino.

Običajno naredimo pozicijsko občutljivi polprevodniški detektor tako, da pri stiku p-n razdelimo stran p na mrežo vzporednih tankih pasov. Takšna delitev ima svojo prednost in slabost. Elektronika bralnega sistema, ki je prek aluminijskih ploščic povezana z bralnimi pasovi detektorja, je v tem primeru sorazmerno enostavna, vendar dobimo informacijo le o eni koordinati. Slabost lahko rešimo, če tudi spodnjo stran detektorja razdelimo na pasove, ki so pravokotni na smer pasov na zgornji strani. S tem dobimo informacijo o drugi koordinati. V zadnjem času se uveljavlja tudi delitev strani p na majhne pravokotnike, ki tako posredujejo obe koordinati hkrati. Žal takšno delitev spremlja zelo zapletena bralna elektronika – veliko število kanalov in težave pri povezovanju le-teh z bralno elektroniko. Pravokotni prerez silicijevega mikropasovnega detektorja je prikazan na sliki 7.



Slika 7. Prečni prerez silicijevega mikropasovnega detektorja. Dimenzije na sliki so v mikrometrih.

Pri gradnji polprevodniških detektorjev ima pomembno vlogo razdalja med bralnimi pasovi, saj je od nje neposredno odvisna prostorska ločljivost. V mikropasovnih detektorjih se porazdelitev detektiranega naboja na pasovih zaradi difuzije delcev ob potovanju k bralnim elektrodam tipično razmaže za okrog $10\ \mu\text{m}$ [6]. Če so razdalje med bralnimi pasovi večje od $100\ \mu\text{m}$, se torej ves naboj, ki nastane v detektorju zaradi enega pravokotno vpadnega delca, zbere na enem pasu in je ločljivost določena kar z razmikom med pasovi.

5.2. Uporaba polprevodniških detektorjev pri rentgenskem slikanju

Ker je mogoče s polprevodniškimi detektorji natančno določiti mesto, kjer delec zadene detektor, se je pojavila zamisel o uporabi teh detektorjev pri rentgenskem slikanju. Polprevodniški detektor bi močno izboljšal kvaliteto rentgenskega slikanja, saj ima v nasprotju s filmom linearen odziv glede na prejeto dozo, slika, ki bi jo tako dobili, pa bi bila digitalna.

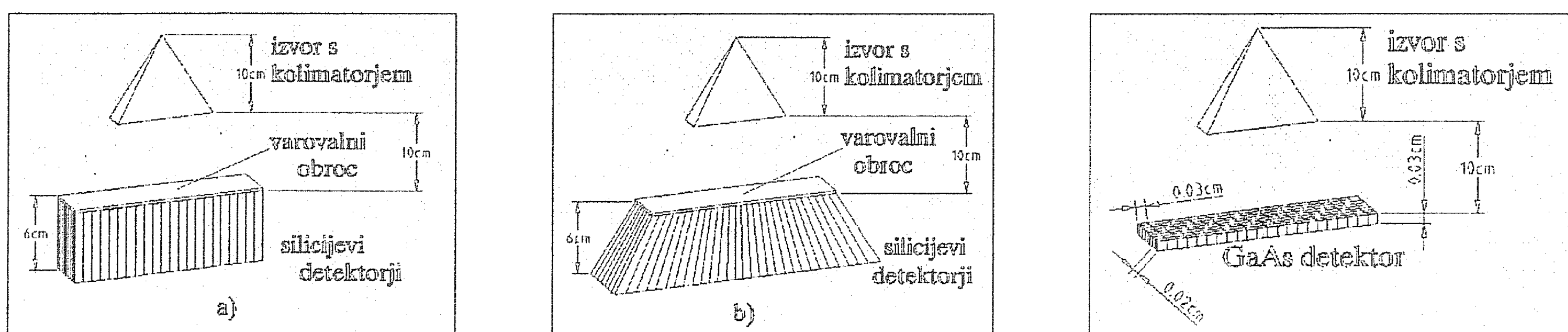
Treba bi bilo torej preveriti uporabnost polprevodniških detektorjev za detektiranje rentgenskih fotonov. Za slikanje tarče dimenzij $100\ \mu\text{m}$ v tkivu bi bili primerni bralni pasovi primerljive velikosti, torej $100\ \mu\text{m} \times 100\ \mu\text{m}$. Ker je zaželeno, da bi imel detektor visok izkoristek, bi morali uporabiti npr. silicijeve ploščice, ki bi bile tri- do štirikrat debelejšše od običajnih $300\ \mu\text{m}$ debelih – da dosežemo želeno debelino, Si-detektor zasučemo tako, da je orientiran vzdolž vpadne osi rentgenskih žarkov. Pri GaAs-detektorjih na tovrstne težave z debelino ne bi naleteli, vendar pa bi morali detektor vseskozi ohlajati.

6. Simulacija mamografskega sistema s polprevodniškimi detektorji

Da bi omogočili natančnejšo detekcijo majhnih kalcifikacij v tkivu, je bilo treba preučiti interakcijo nizkoenergijskih rentgenskih žarkov s snovjo. Tovrstna študija je bila izvedena s pomočjo programskega paketa GEANT za sledenje osnovnim delcem skozi snov, ki so ga razvili v evropskem centru za fiziko osnovnih delcev CERN [3].

6.1. Vrste simuliranih detektorjev

V simulaciji smo uporabili silicijeve in GaAs-detektorje. (Glej sliko 8.)



Slika 8. Prikaz simuliranega sistema. a) Si-vzporedni detektor, zasukan. b) Si-„pahljačasti“ detektor. c) GaAs-detektor.

Vzporedni Si-detektorji Povprečna prosta pot fotona z energijo 20 keV v Si je 0,9 mm [5], torej bi pri mamografiji potrebovali vsaj 1 mm debel Si-detektor. Če orientiramo Si-detektor tako, da zadevajo vanj fotoni od strani (slika 8a), deluje kot detektor s kanali, pri katerem je velikost kanala določena z debelino ploščice in širino bralnega pasu.

Glavni vir šuma na mikropasovnih detektorjih je zaporni tok, ki ga povzročajo nečistoče in nepravilnosti v kristalni mreži, zato morajo biti bralni pasovi na detektorju ločeni od roba detektorja z varovalnim obročem, strukturo, ki jo umetno vstavimo med bralnimi pasovi in robom detektorja [6], [7]. V varovalnem obroču se absorbirajo tudi vpadni fotoni, ki pa jih zaradi tega ne zaznamo. Zato je varovalni obroč mrtva cona detektorja in zniža njegovo učinkovitost za fotone pri 20 keV na 0,66 za 0,4 mm in 0,25 za 1 mm širok varovalni obroč.

Pahljačasti Si-detektorji Foton z energijo 20 keV, izsevan iz izvora, ki je 20 cm oddaljen od detektorja, lahko opravi v detektorju dovolj veliko prečno pot, da preide v sosednji kanal, preden v Si-detektorju interagira in tako prispeva k signalu v bližnjem, toda napačnem kanalu. Če je detektor oddaljen od izvora 20 cm in obsevamo 6 cm debelo tkivo, je prečna pot okrog 10 μm . Takšno možno paralakso smo upoštevali in jo poskušali v simulaciji kompenzirati s pahljačasto oblikovanimi Si-detektorji, kot jih vidimo na sliki 8b).

GaAs-detektorji Pri GaAs detektorjih je povprečna prosta pot fotona z energijo 20 keV okrog 0,04 mm. Tu paralaksa ni občutna in tudi tipična debelina 0,3 mm GaAs-detektorja zadošča za detekcijo fotonov pri teh energijah. Zato GaAs-detektorjev ni treba zavrteti kot Si-detektorje, torej tudi varovalni obroč zdaj ne povzroča zmanjšanja učinkovitosti detektorja, (sl. 8c). Moramo pa upoštevati, da bi bilo v ta namen treba površino GaAs-detektorjev razdeliti na kanale in ne samo na pasove, kar bi prineslo dodatne težave pri konstrukciji bralne elektronike, pa tudi to, da potrebujejo GaAs-detektorji za nemoteno delovanje precej nižje temperature kot Si-detektorji.

Na opisani način bi lahko z zasukanim (vzporednim ali "pahljačastim") Si-detektorjem ali GaAs-detektorjem dobili 2D podobo slikanega tkiva, dojke.

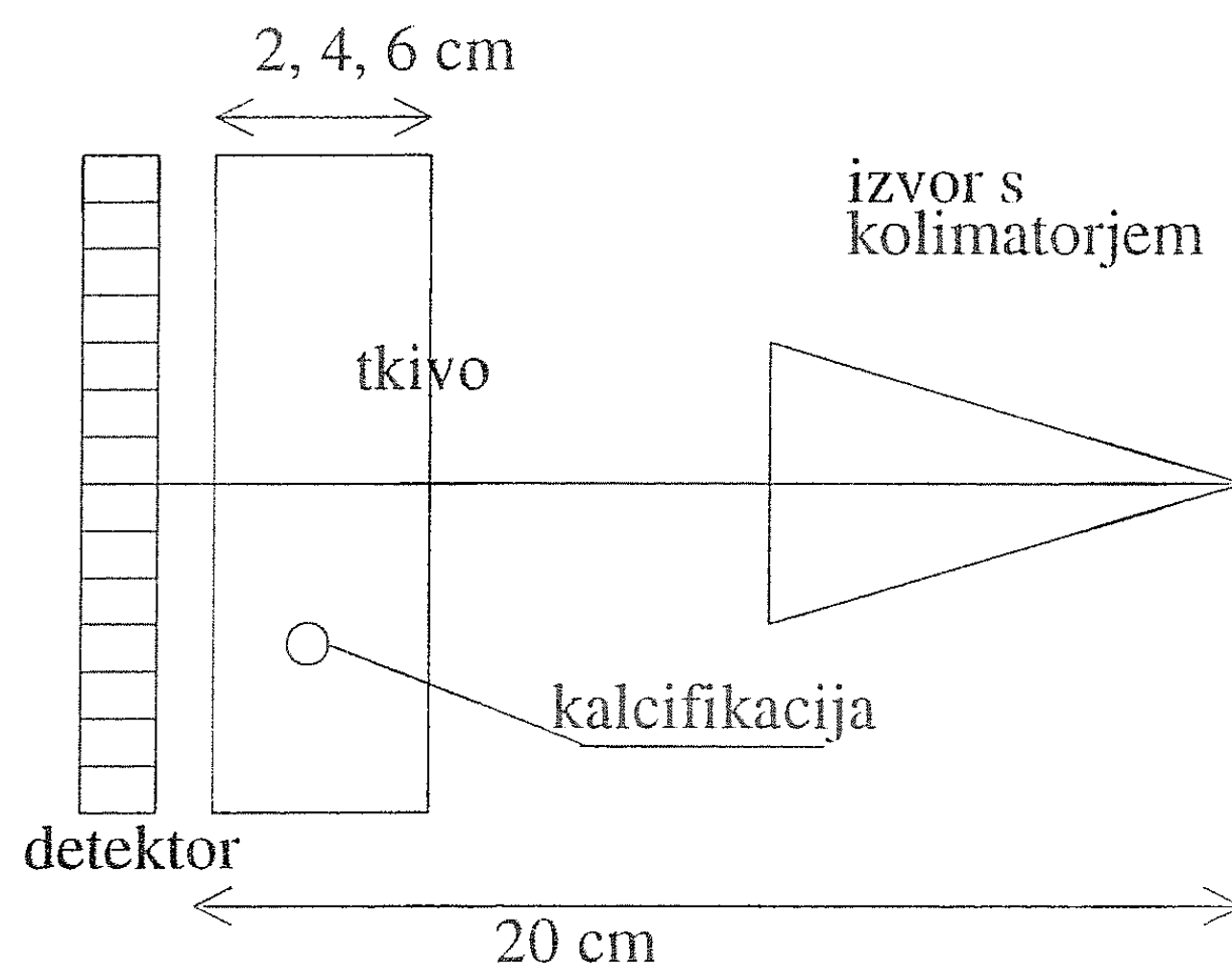
7. Simulacija

Z uporabo GEANT-ovih programskih knjižnic je bilo moč simulirati sipanje in absorpcijo v sistemu, kot ga kaže slika 9.

Vhodni parametri simulacije so bili:

- Tkivo pri mamografskem slikanju lahko stisnemo v povprečju na debelino, manjšo od 6 cm. Energija rentgenskih žarkov, uporabljenih pri preiskavah, pa je odvisna prav od debeline dojke, ki jih pri preiskavi stisnemo, in sega od 17 keV (2 cm tkiva) do 22,5 keV (6 cm tkiva) [4].

Slika 9. Simuliran sistem z izvorom rentgenskega sevanja, tkivi različnih debelin, kalcificirano kroglico polmera 0,05 mm in različnimi detektorji (Si-vzporeden, Si-„pahljačasti” in GaAs). Na sliki GaAs-detektor.



- Ker je človeško telo povečini narejeno iz vode, smo simulirali tkivo dojk s kvadri vode različnih debelin (2, 4, 6 cm), ki smo jih namestili nad detektorjem.
- Kalcifikacijo smo simulirali s $\text{Ca}_5(\text{PO}_4)_3\text{OH}$ kroglico z radijem 0,05 mm in jo postavili v sredino preiskovanega tkiva za 1,5 mm iz centra, kot kaže slika 9.
- Izvor smo namestili 20 cm stran od tkiva.
- Prejeta vstopna kožna doza ni presegala 6,0 mGy, kot je to dovoljeno v [2].

V simulaciji smo s tako določenimi vhodnimi parametri preizkusili oba tipa Si-detektorjev (vzporednega in „pahljačastega”) ter GaAs-detektor s površinami $3 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$ in velikostmi kanalov od 0,1 mm do 0,3 mm.

7.1. Rezultati

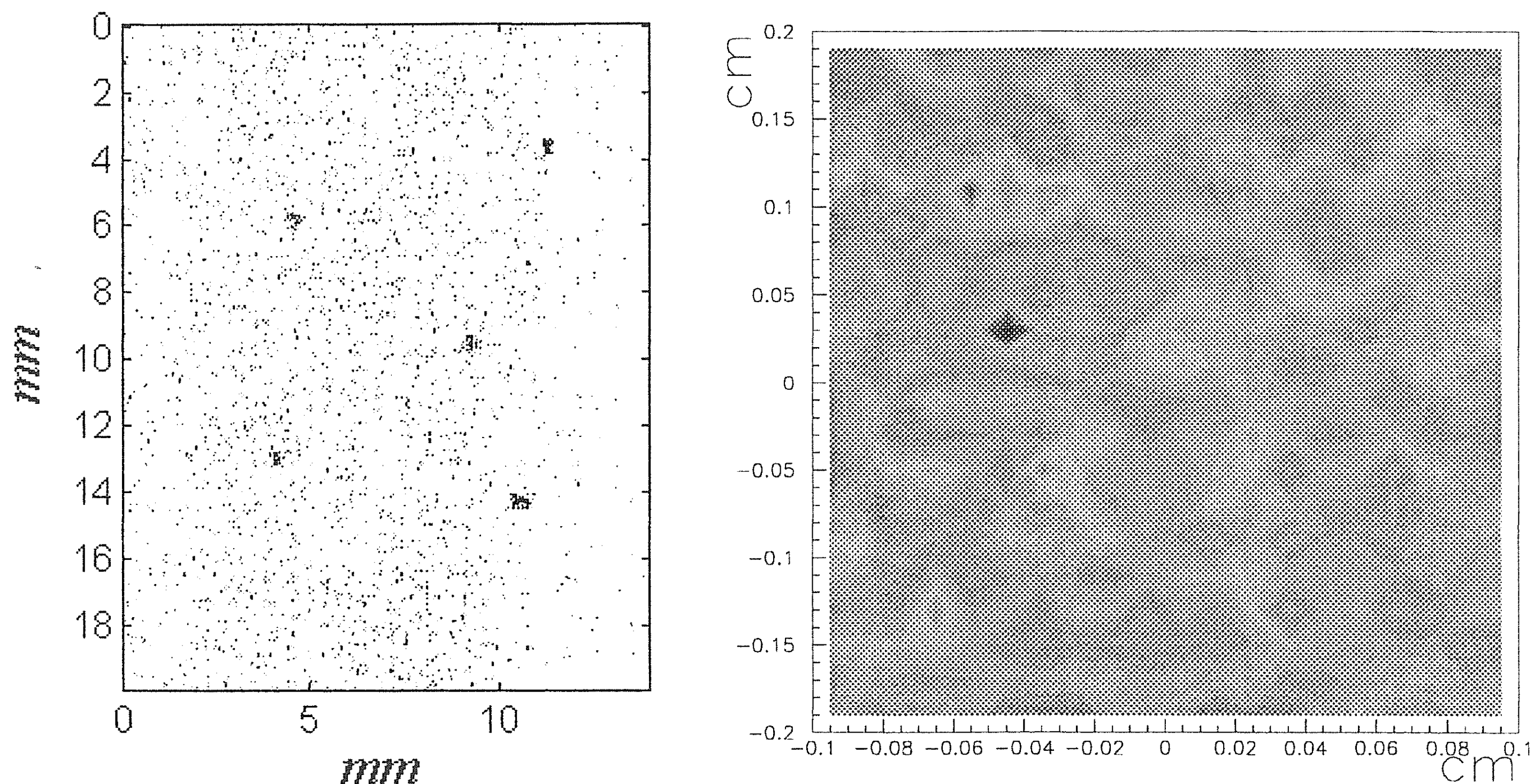
Kot merilo za opazljivost kalcifikacije smo določili, da mora biti razmerje signala proti šumu večje od 5, če naj bo kalcifikacija pri slikanju vidna.

Ugotovili smo, da lahko s kanali velikosti $0,1 \text{ mm} \times 0,2 \text{ mm}$ na vzporednem Si-detektorju v 2 cm debelem tkivu še vedno opazimo kalcificirano kroglico z okrog 10-krat manjšo dozo, kot je dandanes v mamografiji potrebna za opazovanje kalcifikacij.

V 4 cm debelem tkivu lahko enako kalcificirano kroglico z radijem 0,05 mm opazimo s Si-vzporednim detektorjem pri dozi, ki je danes potrebna v mamografiji za določanje kalcifikacij.

Kalcificirane kroglice z radijem 0,05 mm so glede na merilo razmerje signal proti šumu 5 blizu opazljivosti v 6 cm debelih tkivih.

Na sliki 10a vidimo posnetek 0,4 mm velikih kalcifikacij z dozo, manjšo od 0,1 mGy, na sliki 10b pa posnetek, ki je rezultat simulacije za 0,4 mm veliko kalcifikacijo v 5 cm debelem tkivu pri enaki dozi. Posnetka sta nastala s silicijevim mikropasovnim detektorjem, razdeljenim na kanale velikosti $50 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$. Obakrat so kalcifikacije v tkivu lepo vidne.



Slika 10. a) Rezultat slikanja mamografskega fantoma z 0,4 mm velikimi kalcifikacijami [9]. b) Rezultat izvedene simulacije z 0,4 mm veliko kalcifikacijo.

8. Sklep

Dandanes v mamografiji lahko določijo kalcifikacije, velike okrog 1 mm, ki kažejo na razvoj rakastih celic in bolezni raka v tkivu dojke, pri čemer so vstopne kožne doze višje od 2,5 mGy [2].

Raziskave kažejo, da bi lahko z uporabo mikropasovnih polprevodniških detektorjev določili manjše dele obolelega tkiva kot dandanes, za preiskavo potrebne doze rentgenskih žarkov pa bi se zmanjšale. Tako bi hkrati izboljšali kvaliteto preiskave in zmanjšali njeno tveganost.

LITERATURA

- [1] G. Stafford, *Mammography Basic Principles*, American Medical Association, Chicago, 1992.
- [2] Zavod RS za varstvo pri delu, *Sevalna obremenjenost prebivalstva zaradi medicinske uporabe ionizirajočega sevanja v Republiki Sloveniji*, Ljubljana, 1996.
- [3] Application Software Group, *GEANT Detector Description and Simulation Tool*, CERN, Ženeva.
- [4] Steve Webb, *The Physics of Medical Imaging*, Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1992.
- [5] Particle Data Group, Lawrence Berkley Lab. and CERN, 1994.
- [6] A. Peisert, *Silicon microstrip detectors*, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, Sezione di Padova, Padova, 1992.
- [7] S. M. Sze, *Physics of Semiconductor Devices*, John Willey and Sons, 1981.
- [8] W. R. Leo, *Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments*, Springer-Verlag, 1987.
- [9] *Digital X-ray Imaging, Images from Breast Phantom*, Section of Experimental Particle Physics, Royal Institute of Technology in Stockholm, Švedska, 1998.

O UPORABI SIMBOLNEGA RAČUNANJA PRI POUKU MATEMATIKE¹

MATIJA LOKAR

Math. Subj. Class. (1991) 97B99, 68U30, 68Q40, 68N99, 68-04

Tehnološke spremembe prinašajo spremembe v pouk matematike.

ON USE OF SYMBOL COMPUTATION IN TEACHING MATHEMATICS

Technology progress is bringing changes to teaching mathematics.

Tehnološke spremembe prinašajo spremembe v pouk

Ko so se pojavila logaritmična računalna, so se učbeniki in pouk matematike ponekod kar precej spremenili. Pomembno vlogo so dobila poglavja, ki so učila spretnosti uporabe tega pripomočka. Brez obvladovanja logaritmskega računalna si le težko trdil, da obvladaš matematiko. In če smo logaritmsko računalno želeli uporabljati, smo se morali naučiti te spretnosti. Nematematikom je bilo seveda dovolj povedati, kje odmeri prvi faktor, kako in kje izbere drugega, kje in kako odčita rezultat. Kot matematiki smo seveda na vsak način hoteli vedeti, kako deluje, in zakaj tako. Učinki uporabe so prav tako bili tudi dolgoročnejši: pri delu z računalom je bilo treba ocenjevati red velikosti in s tem rezultata, zapisati večja števila v primerni obliki, itd.

Še ne dolgo tega (denimo pred 20 leti) smo pri pouku kar nekaj časa porabili, da smo se naučili obvladovanja tablic. Vadili smo odčitavanje kotov, logaritmov, skrivnostne tabele partes proportionales, ... Koliko med vami še zna zračunati kvadratni koren „peš”? S tehnološkim napredkom določena znanja izginevajo, druga nadomeščajo nova. In vse to nedvomno vpliva na poučevanje matematike. Ker si danes življenja brez računalna praktično ne znamo več predstavljati, je težko trditi, da ima še kak smisel učiti se (ali učiti druge) „peš” računanja kvadratnega korena. Sicer povsem zanimiv postopek, za tiste, ki so malce „mahnjeni na številke”, prava mala čarovnija, morda tudi zanimiva telovadba možganov. Vendar bi tisti, ki bi v vsakdanjem življenju kvadratni koren računal peš in ne z računalom, malo spominjal na perico, ki bi še vedno prala perilo s perilnikom.

Zato so verjetno povsem odveč vprašanja in dileme, ali v šoli uporabljati računalna in druge pripomočke. Pravo vprašanje je le način njihove uporabe, saj se mora šola ustrezno odzivati na spremembe v okolju. Seveda uporaba različnih pripomočkov povzroča določene spremembe pri pouku in s tem prinaša številna vprašanja, pasti, omejitve. Naj jih naštejemo le nekaj: vpliv na preverjanje znanja, ustrezna gradiva, spremembe učnih načrtov,

¹ Članek je nastal po predavanju *O uporabi simbolnega računanja pri pouku*. Predavanje je bilo spomladi 1998 v okviru usposabljanja predavateljev, ki bodo vodili tečaje o programu DERIVE.

prilagoditev načina podajanja snovi ... Vendar je ravno zaradi številnih odprtih vprašanj toliko bolj nujno, da se učitelji pripravijo in čimprej spoznajo z različnimi pripomočki.

Programi za simbolno računanje

Že vrsto let se vsi, ki poučujejo matematiko, soočajo z novim izzivom, s programi za simbolno računanje. Žal večkrat dobimo občutek, da si marsikdo kratko in malo zatiska oči in se dela, kot da teh programov ni. Seveda je najlažje reči – teh zadev pa v šoli ne bomo uporabljali. Vendar grafična računala, programe za simbolno računanje in podobne „novotarije” v šoli lahko prepovemo, pa bodo še vedno tu.

Večina tehnoloških pripomočkov je dosedaj vplivala le na manjši del snovi. Ob programih za simbolno računanje pa se srečujemo s precej večjo spremembo. Demonstracija nekaterih zmožnosti programov nas verjetno prepriča, da programi za simbolno računanje, če drugega ne, „znajo” mnogo več matematike kot računala in drugi tehnološki pripomočki, ki smo jih pri pouku matematike uporabljali do sedaj. Veliko postopkov se poenostavi oziroma jih je mogoče izvesti avtomatsko. Programu lahko prepustimo zapletene poenostavitve izrazov, računanje določenih in nedoločenih integralov, reševanje enačb, določanje limit, ... S tem dobi matematično znanje svoje pravo mesto. Ni več toliko poudarka na spretnosti pri izvajanju rutinskih opravil in sledenju „receptov”, ampak na tem, kdaj in kako uporabiti določen postopek.

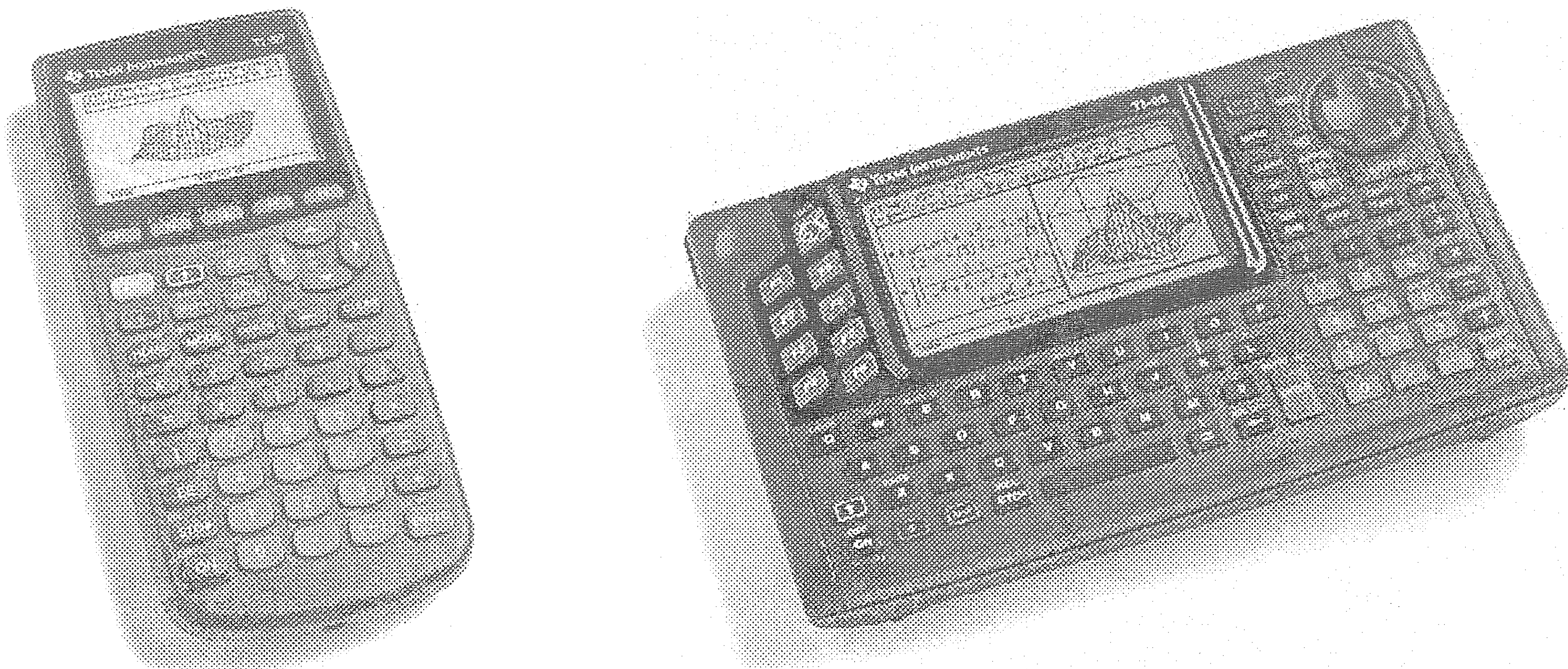
Seveda je pri vpeljavi vsake spremembe v pouk potrebna dobršna mera previdnosti in postopnosti. Tako tudi največji strokovnjaki za poučevanje matematike še nimajo odgovora na številne dileme, ki se porajajo ob uporabi programov za simbolno računanje pri pouku (kdaj, koliko, kako, ...) Vendar navedimo misel enega med njimi, Davida Talla.

... Medtem ko bo način njihove uporabe (programov za simbolno računanje namreč) še stvar premisleka in poskusa, je nujno, da imajo vsi učitelji matematike dostop do njih, na vseh nivojih poučevanja. Predstavljajo izziv k premisleku o tem kaj učimo in zakaj. S prihodom programov za simbolno računanje matematika ne bo nikoli več takšna, kot je bila...

Zakaj mora torej učitelj poznati te programe? Tudi če se odločimo, da jih sami pri pouku ne bomo uporabljali, je odgovor bolj ali manj zelo prozaičen: Ker so tukaj! Učenci jih spoznavajo, se srečujejo z njimi, berejo o njih. Saj vemo, da so včasih odgovori na vprašanja dijakov *Zakaj se to učimo?* zelo težavni. In zato moramo kot učitelji biti pripravljeni (oziroma se vsaj pripravljati na to), da lahko odgovorimo na vprašanje, zakaj je treba obvladovanje določenega postopka, ki ga simbolna računala znajo izvesti avtomatsko – npr. da je potrebno še vedno integrirati peš in ne s programom ker ... (ko bi le vedel pravi argument za ali proti). S poznavanjem tovrstnih

programov bomo tudi lažje sledili in soodločali, ali so potrebne določene spremembe v učnih načrtih, načinu preverjanja znanj, učbenikih, ... ali pa bili vsaj pripravljeni, če (ko) bi do teh sprememb prišlo.

Prav tako je kar nekaj dijakov že prišlo v stik z računalom TI-92. Izdelek podjetja Texas Instruments je ob vpeljavi doživel izjemno zanimanje učiteljev in uporabnikov matematike po vsem svetu. Na velikosti manjšega zvezka združuje izpeljanki dveh zelo popularnih programov – Cabri Geometre za geometrijo in DERIVE za simbolno računanje. Pred slabim letom, jeseni pa tudi pri nas, se je pojavil še mlajši brat TI-89. Ta zna „samo še“ simbolno računati, geometrija pa je opuščena. Vendar so na ta račun pri Texas Instruments pridobili prostor, tako da to računalo ni večje kot grafična računalna, ki jih danes uporabljamo. Sedaj dejansko lahko svojega matematičnega pomočnika nosimo s seboj.



Ker ta računalna niso velika in so sorazmerno poceni, bo verjetno kak dijak potegnil ta pripomoček iz torbe in vprašal, ali ga lahko uporabi pri šolski nalogi. Takrat bi bilo zelo dobro, če bi znali argumentirano pojasniti, zakaj ne. Še boljše bi bilo dijake navaditi na pravilno uporabo tovrstnih pripomočkov. Pri tem je pomembno tudi to, da druge vede, denimo fizika, strojništvo, kemija, ... (vsaj v tujini) pri pouku že uporabljajo programe za simbolno računanje. Končno je to logično. Kemika pač ne zanima matematični postopek, po katerem pridemo do pravilne stopnje kislosti mešanice, ampak potrebuje rezultat in potem tolmačenje tega rezultata. In matematik je tisti, ki lahko pojasni, zakaj smemo določen postopek uporabiti za določen tip problema in drugega ne. Zato se je treba uporabe programov za simbolno računanje naučiti pri matematiki in ne pri kakšni drugi vedi. Tudi računalništvo ne pride v poštev, pa čeprav nekateri matematiki trdijo, da je vse skupaj pogruntavščina računalničarjev in bi jim seznanjanje dijakov s programi za simbolno računanje prav rade volje prepustili. Vendar je s stališča računalništva sama tehnika uporabe programov v glavnem enostavna, veliko enostavnejša kot npr. uporaba programov za oblikovanje besedil. Treba je le vedeti, kako programu posredujemo izraze, ter se naučiti

ukaze, s katerim jih preoblikujemo. Seveda pri tem mislimo na osnovno nalogo programov, simbolno računanje, in ne na vse „dodatke“, kot so risanje in podobno. Naučiti pa se je potrebno izbrati pravi matematični postopek, in to verjetno lahko počne le matematik.

Uporaba teh pripomočkov bo seveda prinesla s seboj tudi težave. Ena glavnih dilem je ne dovolj raziskan vpliv na način preverjanja znanja in uporaba pri zunanjih preverjanjih znanja. Ker trenutno uporaba tovrstnih pripomočkov pri maturi in zaključnem izpitu, kolikor vem, ni dovoljena, jih je veliko prepričanih, da je škoda „izgubljati čas“ s simbolnim računanjem. To pa po drugi strani pomeni, da na maturi, ki preverja naučeno, uporabe simbolnega računanja spet ne more biti ... Potrebna bo tudi priprava novega gradiva, marsikateri učbenik, zbirko vaj bo treba napisati na novo. Kontrolne naloge, ki smo jih tako skrbno „pilili“ nekaj let, moramo spremeniti, ... Najti bo treba čas, potreben, da se naučimo uporabljati te programe, čas za drugačno pripravo na nekatera predavanja, ...

Programi za simbolno računanje in predmetnik

Oglejmo si reševanje matematičnega problema. V grobem ga lahko razdelimo v štiri faze:

- postavitve modela
- uporaba modela
- računski postopek
- interpretacija rezultatov

Če pogledamo učne načrte in dejansko učno prakso, vidimo, da nam običajno zmanjkuje časa za prvo, drugo in četrto fazo. Večino časa pri pouku posvetimo računskemu postopku. Posledica tega so rešitve, kot jo vidimo (desno).

Janez je prvi dan delal 4 ure, Miha pa dve uri. Skupaj sta izkopala 200m jarka. Naslednji dan je Miha delal 4 ure, Janez pa dve uri. Ta dan sta izkopala 250m jarka. Koliko jarka izkoplje Miha v eni uri?

Janez x
Miha y

$$4x + 2y = 200$$

$$2x + 4y = 250$$

~~$$4x + 2y = 200$$~~

$$2x = 250 - 4y$$

$$x = 125 - 2y$$

$$600 + 8y - 2y = 200$$

$$6y = 200 - 600$$

$$6y = -400$$

$$y = -66,6667$$

Miha v eni uri izkoplje $-66,6667$ m jarka

Pravi problem ni v tem, da se je dijak kar nekajkrat zmotil v računskem postopku in prišel do napačnega rezultata. Problematično je to, da posledice napak – negativni rezultat – ni znal pravilno razložiti in ni pomislil, da mora biti nekaj narobe, če nekdo pri delu izkoplje negativno dolžino jarka.

Premislimo, kje je pravzaprav srž naloge. Pravo kreativno delo je, da izbereš pravilno metodo in nastaviš pravilni sistem enačb. Sam računski postopek je tisto dolgočasno, mukotrpno delo, ki ga je mogoče mirno prepustiti stroju. Naš dijak je sicer izbral pravo metodo. Vendar je glede na zapisano rešitev vprašanje, ali snov res pravilno razume. Ni bila morda njegova izbira pravega postopka le posledica tega, da je prej v šoli na enak način

reševal več podobnih nalog? Ker je pri poučevanju večina časa posvečena obvladovanju računskega postopka, zmanjka časa, da bi dijake navadili, da je treba tudi premisliti, ali so rezultati, ki jih dobimo, smiselni.

Dejstvo je, da je zelo veliko računskih postopkov mogoče izvesti avtomatsko. In naši učni programi v veliki meri predvidevajo prav učenje izvedbe teh računskih postopkov, ki bi jih lahko prepustili strojem. Neodvisne raziskave v Angliji, Avstriji in Nemčiji so pokazale, da je približno 80% snovi mogoče izvesti s pomočjo programov za simbolno računanje. Učni program je torej možno spremeniti in razbremeniti rutine. Tako nam ostane več časa za „pravo“ matematiko, kot je pri zgoraj omenjeni nalogi izbrati pravo metodo, nastaviti pravilen sistem enačb in premisliti, ali je dobljena rešitev smiselna. Obstaja pa bojazen, da bi ob vpeljavi programov za simbolno računanje v pouk matematike kdo ugotovil, da ima matematika sedaj preveč ur in bi se pozitivni učinek razbremenitve izgubil.

Določena mera previdnosti pri vpeljavi simbolnega računanja v učni proces je vsekakor na mestu. Tako je treba dobro premisliti, ali zaradi tega, ker določen postopek nadomestimo s pritiski na gumbe, ne izgubimo kakega pomembnega vedenja. Tako je po mnenju starejših kolegov s tehničnih fakultet občutek za velikost števila precej upadel s tem, ko se logaritemska računalna ne uporabljajo več. Vendar to pomeni, da je še bolj pomembno, da učitelji matematike pripomočke za simbolno računanje dobro poznajo. Tako bodo znali ustrezno ravnati, da vedenje, ki bi z enostransko vpeljavo pripomočka morda izginilo, dijakom posredujejo drugače.

Večina vpeljav novih pripomočkov (predvsem tehnoloških) je pospremljenih z dobršno mero skepse. Tako je bilo že včasih, pa tudi dandanes. Številne so pripombe, da bi z uporabo programov za simbolno računanje znanje matematike postalo slabše. Argumenti so v glavnem v stilu pripomb, da zaradi računalnih ne zna več poštevanke. Nekatere raziskave kažejo, da to v glavnem sploh ni res. Problem vsakega pripomočka je v tem, da ga je treba vpeljati in uporabljati na pravi način. Od vedenja o kvadratni enačbi mora nematematik ohraniti „za življenje“ samo to, da se kvadratna enačba rešuje, da obstajajo v resničnem svetu problemi, ki jih je mogoče modelirati s kvadratno enačbo, in končno, da jo je mogoče rešiti z določenim (morda avtomatskim) postopkom. Seveda se takoj pojavi pomislek, kako bo uporabnik znal določiti koeficiente, ali bo sploh znal zapisati enačbo, itd. To je odvisno od poučevanja. Če bomo večino časa posvetili drilu reševanja enačb, zagotovo ne. Bolje bo obravnavati vsak problem temeljiteje v njegovi vsebinski razsežnosti: opis problema, določitev neznane količine, sledenje logičnemu toku problema, itd. Ob uporabi računalnika lahko reševanje v resnici postavimo na drugo mesto in pridobimo čas za omenjeno problem-sko zasnovanost razlage.

Večkrat zasledimo misel, da so programi za simbolno računanje za matematiko prav taka novost, kot je bil pojav strojev. S pojavom strojev sta postala ročno delo in fizična moč manj pomembna. Za kopanje jarkov mišice niso več pomembne, pomembno je znanje nastaviti stroj, potegniti pravo

ročico, ... Seveda je potrebna prava mera. Tudi za delo s strojem je potrebna določena fizična kondicija, občutek, da je spodaj skala, ... S pojavom programov za simbolno računanje pa postane manj pomembna sposobnost golega računstva in uporabe predpisanih receptov in postopkov. Opozoriti pa je treba na določen problem. Če gole računske postopke nadomestimo z uporabo programov, matematika postane vsaj za nekatere težja. Ni več toliko tistih nalog, kjer bi z golim pomnjenjem recepta računskega postopka prišli do solidne ocene. Spet bo učitelj postavljen pred nov izziv, kako ustrezno ocenjevati dijake. Po drugi strani pa dijaki sami pravijo, da si želijo manj rutinskega dela, več poudarka na logičnemu razmišljanju, večje približanje realnim problemom, ... Določeni učitelji tudi poročajo, da so bili presenečeni, kako so nenadoma „zacveteli“ dijaki, ki so prej imeli z matematiko težave. Ko jih njihovo slabo obvladovanje računskih postopkov ni več tako oviralo, so pokazali zavidljivo raven razumevanja matematike. Če karikiramo: sodobno matematično poučevanje je izobraževanje intelektualnih težakov. Čemu služijo naloge oblike

Odvajaj funkcijo $\sqrt{\sin x \cdot e^{\cos(\sqrt[3]{x-1})} + \ln(a^{x-5} - x)}$?

Morda so uporabne za trening možganov, tako kot je za vzdrževanje telesne kondicije primerno potenje v raznih fitnes studijih. Zanimivo je, da odvod te fukcije menda res potrebujemo pri opisovanju nekega fizikalnega pojava. Vendar to, da komu ne uspe „peš“ odvajati te funkcije, še ne pomeni, da ne ve, kako odvajati, pa tudi tega ne, da ne razume tega fizikalnega pojava.

Nekateri se tudi bojijo, da bo z morebitno vpeljavo programov za simbolno računstvo v pouk matematike učitelj matematike izgubil svoj pravi pomen. Dejstvo je, da postane vloga učitelja še bolj pomembna, le delno se spremeni. Računalnik mu odvzame vsaj del tiste neprijetne vloge „sitneža“, ki vztraja, da ni vseeno, če napišemo $5/24 - 7$ ali $5/(24 - 7)$ in podobno. Računalnik je še bolj „neizprosen“ – oklepaji v izrazu so postavljeni pravilno ali pa napačno. Prav tako učitelju ostane tista najpomembnejša vloga: izbira pravilnega postopka, postavljanje ustreznih matematičnih modelov in podobno. Zanimivo je tudi to, da, ko se „znebimo“ poučevanja nepotrebnih postopkov, računalnik postane manj pomemben in manj uporabljan pri pouku. Večina časa ne bo šla več za goli manipulativni postopek, ampak za postavljanje modela, interpretacijo rezultatov, navezavo postopkov med seboj, ... Naše poučevanje je kar naenkrat izpostavljeno premisleku o vrednosti posameznih znanj, o smiselnosti poznavanja določenih spretnosti, ki smo jih cenili kot pedagoško didaktične vrednote par excellence. Saj ne gre za to, da porušimo zgradbo srednješolske matematike, temveč le, da pretresemo posamezne učne enote in pregledamo, kaj bo namesto nas opravil stroj, o čem pa bomo premišljali ljudje. Računalniku namreč ne prepuščamo najvažnejšega. To je odločanja v novi situaciji in ocene rezultatov, interpretacije rešitev. Nasprotno. Za to nam ostane več časa, energije in možnosti eksperimentiranja ob spreminjanju začetnih in robnih vrednosti, saj nam postopek ponavadi računalnik izvede zelo hitro.

Programi za simbolno računanje s svojimi značilnostmi lahko pripomo-
rejo tudi k odpravljanju nekaterih slabosti, ki jih prinašajo drugi tehnološki
pripomočki. Tako je verjetno res, da računalna prispevajo k temu, da se zgu-
blja občutek za nenatančnost računanja, da o prioriteti operacij sploh ne
govorimo. Ker v programih za simbolno računanje delamo z izrazi kot ce-
loto, se ne more zgoditi, da bi $2 + 4/2$ izračunali v 3. Ta rezultat pa je kar
pogost pri dijakih, ki brez razmisleka tipkajo na računalu, ki operacije iz-
vajajo sproti. Poglejmo še en primer. Vzemimo dva ulomka: $20576/658431$
in $1/32$. Kateri med njima je večji? Večina vzame računalu in natipka oba
ulomka. Mnoga računalna nam za kvocient $20576/658431$ pokažejo rezultat
0,03125. Enak rezultat dobimo za $1/32$. Ulomka sta torej enaka. Programi
za simbolno računanje pa ulomka $20576/658431$ nekako nočejo prepoznati
kot $1/32$ in trmasto „trdiyo“, da gre za dve različni racionalni števili. Pri
njih lahko s spreminjanjem natančnosti računanja tudi ugotovimo, kje je bil
problem pri računalu.

```
#1: 20576
    658431

#2: 20576
    658431

#3: 0.03125
-----
OPTIONS PRECISION: Mode: Approximate(Exact)Mixed Digits: 6

Enter significant digits
Approx(#2)                                Free:100% Ins      Derive Algebra

#1: 20576
    658431

#2: 20576
    658431

#3: 0.03125

#4: PrecisionDigits := 8

#5: 0.031250047

#6: 20576*32 = 658432
-----
COMMAND: Author Build Calculus Declare Expand Factor Help Jump solve Manage
         Options Plot Quit Remove Simplify Transfer Unremove move Window approx
Compute time: 0.0 seconds
User=Simp(User)                                Free:100% Ins      Derive Algebra
```

Zgled nam kaže tudi to, kam nas lahko pripelje metoda tiščanja glave v
pesek. Prepovejmo računalu, pa takih problemov ne bo, je napačna rešitev.
Problem ni v računalu, ampak v izbiri napačnega postopka in nezavedanju
omejitev pripomočkov. In prav zato mora matematik pojasniti, kako se
računalu pravilno uporablja. V našem zgledu je pravilna uporaba pač ta,
da z računalom zmnožimo 20576 in 32. Dobljeni rezultat 658432 ni enak
658431.

Če povzamemo – treba bo na novo razmisliti, kaj učimo pri matematiki
in kako učimo. Odgovor na vsa ta vprašanja je težak in ga tudi v svetu
še ne poznajo. Ne smemo pa si enostavno zatiskati oči in se obnašati,
kot da tovrstnih programov ni in da ne bodo prav nič vplivali na pouk
matematike. Če ne drugega, dijaki tovrstne programe poznajo in bodo

o njih spraševali. Hkrati tovrstni programi prinašajo res lepo možnost, da v pouk matematike v večji meri uvedemo „laboratorijske” oblike dela, odkrivanje nove snovi in podobno. Izkušnje kažejo, da to praviloma zelo pozitivno vpliva na razumevanje, zanimanje, kot tudi pomnjenje dijakov. Del pozitivnih učinkov je seveda nastal zaradi uporabe novega prijema in s tem povečanja motivacije tako učitelja kot dijaka, in ta sčasoma upade.

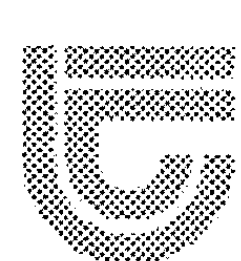
Poglavitna dilema, pred katero je postavljen učitelj, ki se odloči, da bi poskusil uporabiti programe za simbolno računanje pri pouku, je, kje najti v že tako prenatrpanem učnem programu čas za vpeljavo novih prijemov. Da bi, denimo, tak program ali računalno uporabljali, bo treba porabiti vsaj nekaj časa za razlago osnovnih pojmov glede dela s tem programom, kako se vnašajo izrazi, kaj pomenijo določene možnosti, ... Pa saj je tako z vsako stvarjo. Potreben je določen vložek, da potem dobimo dobiček. Če dijaki določeno snov bolje obvladajo, če je vpeljana z novim prijemom (in določene raziskave kažejo, da je res tako), mar ni potem bolje učiti jih „po novem” in zato na začetku porabiti morda malo več časa?

VESTI

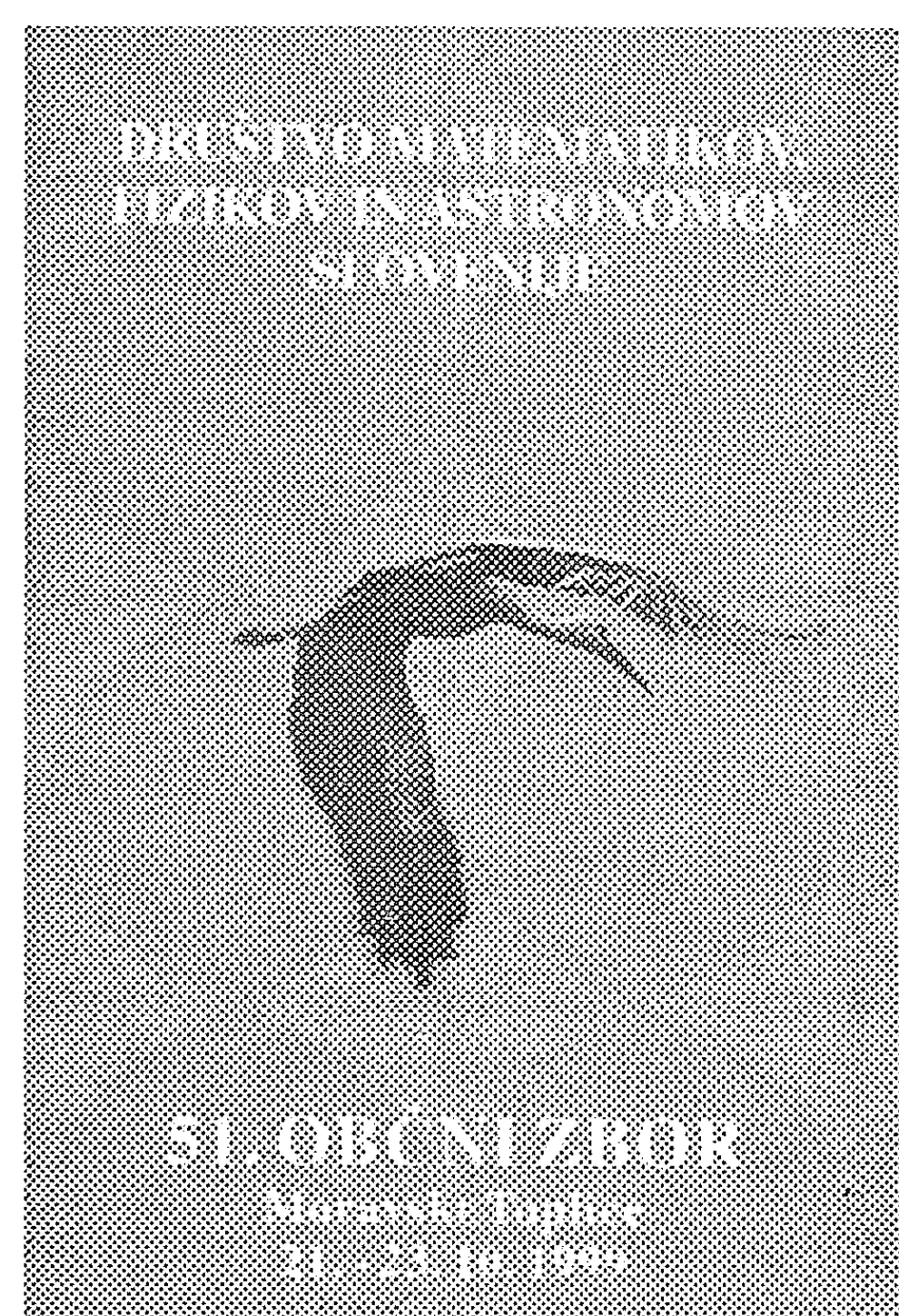
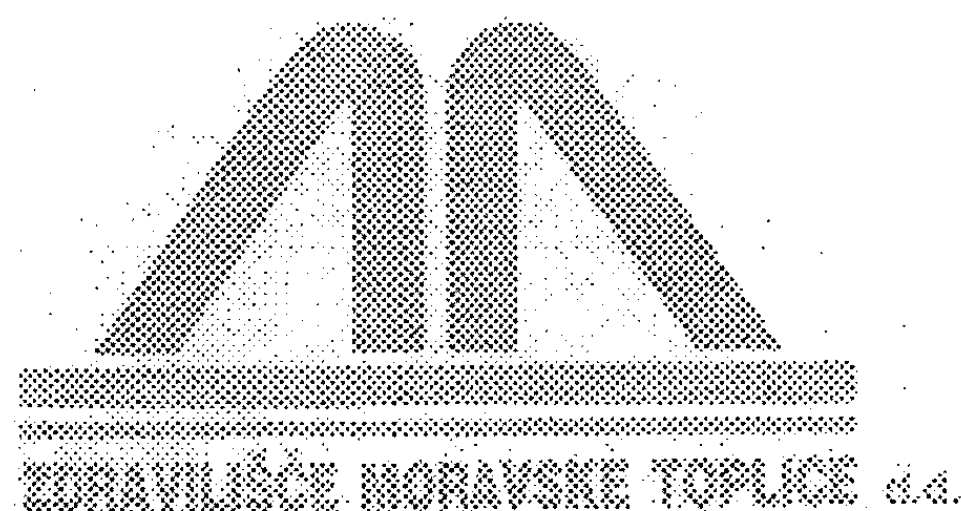
DMFA Slovenije – 51. občni zbor

51. občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, združen s strokovnim srečanjem, je bil od 21.–23. 10. 1999 v Moravskih Toplicah. Kot običajno, so udeleženci prejeli bilten s poročili in povzetki strokovnih prispevkov. Srečanje sta sponzorirali *Zavarovalnica Triglav, d.d.*, *Območna enota Murska Sobota* ter *Zdravilišče Moravske Toplice, d.d.*

Tomaž Pisanski



Zavarovalnica Triglav, d.d.
Območna enota Murska Sobota



ŠESTO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Letošnje tekmovanje študentov matematike se je po petkratnem gostovanju v Bolgariji preselilo na Madžarsko, natančneje v Keszthely ob Blatnem jezeru. Tekmovanje je potekalo od 28. julija do 2. avgusta 1999, udeležili pa so se ga študenti z 22 univerz. V naši ekipi so bili Matjaž Konvalinka iz drugega letnika, Igor Klep in Jernej Tonejc iz tretjega ter Dejan Velušček iz četrtega letnika.

Reševanje nalog poteka dva dni, vsak dan imajo študenti na voljo pet ur za reševanje šestih nalog, vsaka izmed njih je vredna 20 točk (delne vrednosti so v oklepajih). Nekaj nalog je lažjih, nekaj pa težjih, tako da vsak študent lahko najde izziv zase. Znanje, ki ga imajo študenti z različnih univerz, je namreč zelo različno. Letošnje naloge so bile naslednje:

Prvi dan

1. (a) Pokaži, da za vsak $m \in \mathbb{N}$ obstaja realna $m \times m$ matrika A , ki zadošča enačbi $A^3 = A + I$, kjer je I enotska matrika dimenzije $m \times m$.
(6 točk)
- (b) Pokaži, da za vsako realno $m \times m$ matriko A , ki zadošča enačbi $A^3 = A + I$, velja $\det A > 0$.
(14 točk)
2. Ali obstaja bijektivna preslikava $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, za katero velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty?$$

3. Naj funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ za vsako pozitivno število n in poljubni realni števili x in y zadošča neenakosti

$$\left| \sum_{k=1}^n 3^k (f(x + ky) - f(x - ky)) \right| \leq 1.$$

Dokaži, da je f konstantna funkcija.

4. Poišči vse strogo monotone funkcije $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, za katere velja $f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = x$ za vsak $x \in (0, \infty)$.
5. Na mreži dimenzije $n \times n$ označimo $2n$ točk. Pokaži, da za neki $k > 1$ lahko izberemo $2k$ različnih označenih točk, recimo $a_1, \dots, a_{2k}$, tako da sta a_1 in a_2 v isti vrstici, a_2 in a_3 v istem stolpcu, $\dots$, a_{2k-1} in a_{2k} v isti vrstici in a_{2k} in a_1 v istem stolpcu.

6. (a) Za vsak $1 < p < \infty$ poišči konstanto $c_p < \infty$, za katero velja: če je $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva funkcija z lastnostma $f(1) > f(-1)$ in $|f'(y)| \leq 1$ za vsak $y \in [-1, 1]$, potem obstaja $x \in [-1, 1]$, za katerega velja

$$f'(x) > 0 \quad \text{in} \quad |f(y) - f(x)| \leq c_p (f'(x))^{1/p} |y - x|$$

za vse $y \in [-1, 1]$. (10 točk)

- (b) Ali taka konstanta obstaja tudi za $p = 1$? (10 točk)

Drugi dan

1. Naj bo R ne nujno komutativen kolobar, v katerem je kvadrat vsakega elementa enak 0. Pokaži, da je $abc + abc = 0$ za poljubne elemente $a, b, c \in R$.
2. Pošteno kocko vržemo n -krat. Kakšna je verjetnost, da je vsota vrednosti posameznih metov deljiva s 5?
3. Naj bodo $x_1, \dots, x_n \geq -1$ in naj velja $\sum_{i=1}^n x_i^3 = 0$. Dokaži, da velja $\sum_{i=1}^n x_i \leq \frac{n}{3}$.
4. Dokaži, da ne obstaja funkcija $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, za katero velja $(f(x))^2 \geq f(x+y)(f(x)+y)$ za vsak par $x, y > 0$.
5. Naj bo S množica vseh besed, sestavljenih iz črk x, y, z . Na S definiramo ekvivalenčno relacijo $\sim$ s predpisi: za poljubne besede $u, v, w \in S$ velja
 - (i) $uu \sim u$;
 - (ii) če $v \sim w$, potem $uv \sim uw$ in $vu \sim wu$.
 Pokaži, da je vsaka beseda iz S ekvivalentna neki besedi dolžine kvečjemu osem črk.
6. Naj bo A podmnožica v $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ki vsebuje največ $\frac{1}{100} \log n$ elementov. Naj bo r -ti Fourierov koeficient A za $r \in \mathbb{Z}_n$ definiran s predpisom

$$f(r) = \sum_{s \in A} \exp\left(\frac{2\pi i}{n} sr\right).$$

Dokaži, da obstaja $r \neq 0$, da je $|f(r)| \geq \frac{|A|}{2}$.

V precej močni konkurenci je Jernej Tonejc dobil drugo nagrado, Matjaž Konvalinka, Igor Klep in Dejan Velušček pa tretjo. Največ, 203 točke, je zbral študent iz Irana, kar je glede na to, da sta bili dve nalogi za študente pretežki, izjemen rezultat.

Organizacija tega tekmovanja je še vedno pomanjkljiva, zaradi tega tekmovanje ne raste. Letos so se ga sicer prvič udeležile univerze iz Irana, Litve, Finske in Nemčije, ni pa bilo mnogih ekip, ki so že sodelovale (Španci, Grki, Francozi, Makedonci, Romuni...). Organizatorji pa se vendarle trudijo da bi tekmovanje počasi doseglo nivo, kot ga imajo srednješolske matematične olimpiade. Mogoče bodo naslednje leto korak bliže cilju, tekmovanje bo namreč v Londonu.

Gregor Šega